Differenciálegyenletek gyakorlat

Kocsis Albert Tihamér Németh Adrián

2015. december 5.

Ismétlés

Integrálás

Newton–Leibniz-formula. Integrálás és alapműveletek. `www.wolframalpha.com`

Alapintegrálok

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C \qquad \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Integrálási alapesetek

$$\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} \qquad F(x) = \int f(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int f'(x) f^n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f(x) g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{(parciális integrálás)}$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Elméleti bevezetés

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános alakja:

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= f(t)g(u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\}$$

A megoldási eljárás:

- Az $u'(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ formális kifejezést beírva, majd az u-tól és t-től függő tagokat különválasztva:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t)g(u)$$

$$\frac{1}{g(u)} \, \mathrm{d}u = f(t) \, \mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{g(u)} \, \mathrm{d}u = \int f(t) \, \mathrm{d}t$$

- Elvégezve az integrálást, a két oldalon fellépő integrálok primitív függvényeit G-vel és F-fel jelölve:

$$G(u(t)) = F(t) + C$$

  A $G(u(t))$ függvényből kifejezzük $u(t)$-t, amennyiben az lehetséges, és megkapjuk az általános megoldást:

$$u(t) = G^{-1}(F(t) + C).$$

- A kezdeti érték alapján C értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} u(t_0) &= G^{-1}(F(t_0)+C) \\ G(u_0) - F(t_0) &= C \end{aligned}$$

Tehát a megoldás:

$$u(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(u_0))$$

Feladatok

a.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u'(t)} &= \boldsymbol{u \cdot t} \\ \boldsymbol{u(1)} &= \boldsymbol{1} \end{aligned}\right\}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned} u'(t) &= u \cdot t \\ \frac{\mathrm{d}u}{u} &= t\,\mathrm{d}t \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int t\,\mathrm{d}t \\ \ln|u| &= \frac{t^2}{2} + c \\ |u| &= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^c \\ u &= \pm e^c \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \\ u(t) &= C \cdot e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján C értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 1 = u(1) &= C \cdot e^{\frac{1}{2}} \\ C &= e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$u(t) = e^{\frac{t^2-1}{2}}.$$

b.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $x(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{tx'(t)} &= \boldsymbol{(x+1)^2} \\ \boldsymbol{x(1)} &= \boldsymbol{-2} \end{aligned}\right\}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{(x+1)^2}{t} \\ \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} &= \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ -\frac{1}{(x+1)} &= \ln|t| + C \end{aligned}$$

$$x = -\frac{\ln|t| + C + 1}{\ln|t| + C}.$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján C értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} -2 = x(1) &= -\frac{C+1}{C} \\ C &= 1. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$x(t) = -\frac{\ln t + 2}{\ln t + 1}.$$

c.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u \cdot u'(t) = t(u^2+1)} \\ \boldsymbol{u(2) = 0} \end{aligned}\right\}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{t(u^2+1)}{u} \\ \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= t\,\mathrm{d}t \\ \int \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= \int t\,\mathrm{d}t \\ \ln\left(u^2+1\right) &= t^2 + C \\ u^2 + 1 &= e^{t^2+C} \\ u(t) &= \pm\sqrt{e^{t^2+C} - 1}. \end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján C értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 0 = u(2) &= \pm\sqrt{e^{4+C} - 1} \\ C &= -4. \end{aligned}$$

A kezdetiérték-feladatnak 2 megoldása is van:

$$u(t) = \pm\sqrt{e^{t^2-4} - 1}.$$

d.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(x)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y'(x) + x^2 y - x^2 = 0} \\ \boldsymbol{y(0) = 0} \end{aligned}\right\}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 - x^2 y \\ \frac{\mathrm{d}y}{1-y} &= x^2\,\mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} &= \int x^2\,\mathrm{d}x \\ -\ln|1-y| &= \frac{1}{3}x^3 + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|1-y| &= e^{-\frac{1}{3}x^3-c}\\
y &= 1 \pm e^{-c}e^{-\frac{1}{3}x^3}\\
y(x) &= 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}.
\end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján C értéke meghatározható:

$$\begin{aligned}
0 = y(x) &= 1 + C\\
C &= -1.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y(x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

e.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $u(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{u'(t) = -u^2 \cos t}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned}
u'(t) &= -u^2 \cos t\\
-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} &= \cos t \, \mathrm{d}t\\
-\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} &= \int \cos t \, \mathrm{d}t\\
\frac{1}{u} &= \sin t + C\\
u(t) &= \frac{1}{C + \sin t}.
\end{aligned}$$

f.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\boldsymbol{\begin{aligned} tyy'(t) &= 1\\ y(1) &= 2 \end{aligned}}\right\}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{1}{ty}\\
y \, \mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}t}{t}\\
\int y \, \mathrm{d}y &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t}\\
\frac{1}{2}y^2 &= \ln|t| + C\\
y &= \sqrt{2\ln|t| + 2C}.
\end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján C értéke meghatározható:

$$\begin{aligned}
2 = y(1) &= \sqrt{2C}\\
C &= 2.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y(t) = \sqrt{4 + 2\ln t}.$$

g.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $x(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{xx'(t) + t = 1}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{1-t}{x} \\
x\,\mathrm{d}x &= (1-t)\,\mathrm{d}t \\
\int x\,\mathrm{d}x &= \int (1-t)\,\mathrm{d}t \\
\frac{1}{2}x^2 &= -\frac{1}{2}(1-t)^2 + c \\
x(t) &= \pm\sqrt{-t^2+2t+C}.
\end{aligned}$$

h.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $u(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{uu'(t) = 1}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \frac{1}{u} \\
u\,\mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\
\int u\,\mathrm{d}u &= \int \mathrm{d}t \\
\frac{1}{2}u^2 &= t + c \\
u(t) &= \pm\sqrt{2t+C}.
\end{aligned}$$

i.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $y(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{(1+t)e^{3y}y'(t) = 1}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{1}{(1+t)e^{3y}} \\
e^{3y}\,\mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\
\int e^{3y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\
\frac{1}{3}e^{3y} &= \ln|1+t| + c \\
3y &= \ln|3\ln|1+t| + 3c| \\
y(t) &= \frac{1}{3}\ln|3\ln|t+1| + C|.
\end{aligned}$$

j.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $u(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{u'(t) = 2t^2u^3}$$

Az általános megoldás:

$$u'(t) = 2t^2u^3$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{u^3} &= 2t^2\,\mathrm{d}t\\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u^3} &= \int 2t^2\,\mathrm{d}t\\
-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} &= \frac{2}{3}t^3 + c\\
u(t) &= \pm\frac{1}{\sqrt{-\frac{4}{3}t^3 + C}}.
\end{aligned}$$

k.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $x(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{t^2x'(t) + 3x'(t) = \frac{t}{x}}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{t}{(t^2+3)x}\\
x\,\mathrm{d}x &= \frac{t}{(t^2+3)}\,\mathrm{d}t\\
\int x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{(t^2+3)}\,\mathrm{d}t\\
\frac{1}{2}x^2 &= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right) + c\\
x(t) &= \pm\sqrt{C + \ln(t^2+3)}.
\end{aligned}$$

l.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $y(x)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{y'(x) + yx^3 = yx^2}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= yx^2 - yx^3\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= x^2(1-x)\,\mathrm{d}x\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int x^2(1-x)\,\mathrm{d}x\\
\ln|y| &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + c\\
|y| &= e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + c}\\
y &= \pm e^c \cdot e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4}\\
y(x) &= C \cdot e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4}.
\end{aligned}$$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Elméleti bevezetés

Elsőrendű differenciálegyenletek általános alakja:

$$\left.\begin{aligned}
u'(t) &= a(t)u + b(t)\\
u(t_0) &= u_0
\end{aligned}\right\}$$

A megoldás az állandók variálásának módszerével történik.

- Először felírjuk a differenciálegyenlethez tartozó homogén feladatot, ami szétválasztható változójú egyenletet ad.

$$\begin{aligned} u'(t) &= a(t)u \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int a(t)\,\mathrm{d}t \\ \ln|u| &= A(t) + c \\ u &= Ce^{A(t)}, \end{aligned}$$

  ahol $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$.

- Ezután keressük az eredeti feladat megoldását $u(t) = C(t)e^{A(t)}$ alakban, és helyettesítsük ezt be az egyenletbe:

$$\begin{aligned} C'(t)e^{A(t)} + C(t)e^{A(t)}A'(t) &= a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t) \\ C'(t)e^{A(t)} &= b(t) \\ C(t) &= \int e^{-A(t)}b(t)\,\mathrm{d}t + k. \end{aligned}$$

  Azaz az általános megoldás

$$u(t) = e^{A(t)}\left(\int e^{-A(t)}b(t)\,\mathrm{d}t + k\right).$$

- A fenti alakból k értéke a kezdeti érték alapján a $t = t_0$ helyettesítéssel adódik, a végeredmény:

$$u(t) = e^{A(t)-A(t_0)}\left(\int_{t_0}^{t} e^{A(t_0)-A(\tau)}b(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_0\right).$$

Példák

a.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= \sin t - 3u \\ u(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned} u'(t) &= -3u \\ \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -3\,\mathrm{d}t \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -3\int \mathrm{d}t \\ \ln|u| &= -3t + c \\ |u| &= e^{-3t+c} \\ u &= \pm e^c \cdot e^{-3t} \\ u(t) &= Ce^{-3t}. \end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $u(t) = C(t)e^{-3t}$ alakban!

$$\begin{aligned} C'(t)e^{-3t} - 3C(t)e^{-3t} &= \sin t - 3C(t)e^{-3t} \\ C'(t)e^{-3t} &= \sin t \\ C'(t) &= e^{3t}\sin t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C(t) = \int e^{3t}\sin t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{3}e^{3t}\sin t - \frac{1}{3}\int e^{3t}\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}e^{3t}\sin t - \frac{1}{9}e^{3t}\cos t - \frac{1}{9}\int e^{3t}\sin t\,\mathrm{d}t \\
C(t) = \int e^{3t}\sin t\,\mathrm{d}t &= \frac{3}{10}e^{3t}\sin t - \frac{1}{10}e^{3t}\cos t + k \\
u(t) = C(t)e^{-3t} &= \frac{3}{10}\sin t - \frac{1}{10}\cos t + ke^{-3t}.
\end{aligned}
$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$
\begin{aligned}
0 = u(0) &= -\frac{1}{10} + k \\
k &= \frac{1}{10}.
\end{aligned}
$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$
u(t) = \frac{1}{10}(e^{-3t} + 3\sin(t) - \cos(t)).
$$

b.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(x)$ megoldását!**

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{y + y'(x) = x} \\
\boldsymbol{y(0) = 2}
\end{aligned}\right\}
$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -y \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -x + c \\
|y| &= e^c \cdot e^{-x} \\
y &= \pm e^c \cdot e^{-x} \\
y(x) &= Ce^{-x}.
\end{aligned}
$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $y(x) = C(x)e^{-x}$ alakban!

$$
\begin{aligned}
C(x)e^{-x} + C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} &= x \\
C'(x)e^{-x} &= x \\
C'(x) &= xe^x \\
C(x) = \int xe^x\,\mathrm{d}x &= xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + k \\
y(x) = C(x)e^{-x} &= x - 1 + ke^{-x}.
\end{aligned}
$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$
\begin{aligned}
2 = u(0) &= -1 + k \\
k &= 3.
\end{aligned}
$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$
y(x) = x - 1 + 3e^{-x}.
$$

c.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y'(t) = t - y\frac{2t+5}{t^2+5t+6}} \\ \boldsymbol{y(0) = 1} \end{aligned}\right\}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -y\frac{2t+5}{t^2+5t+6} \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{2t+5}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{2t+5}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t \\
\ln|y| &= -\int \frac{2t+5}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{(t+2)+(t+3)}{(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int \left(\frac{1}{(t+2)} + \frac{1}{(t+3)}\right)\mathrm{d}t \\
\ln|y| &= -\ln|t+2| - \ln|t+3| + c \\
|y| &= e^c \cdot \frac{1}{|(t+2)(t+3)|} \\
y &= \pm e^c \cdot \frac{1}{(t+2)(t+3)} \\
y(t) &= \frac{C}{(t+2)(t+3)}.
\end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $y(t) = \frac{C(t)}{(t+2)(t+3)}$ alakban!

$$\begin{aligned}
\frac{C'(t)}{(t+2)(t+3)} - C(t)\frac{(t+2)+(t+3)}{(t+2)^2(t+3)^2} &= t - C(t)\frac{2t+5}{(t^2+5t+6)^2} \\
\frac{C'(t)}{(t+2)(t+3)} &= t \\
C'(t) &= t(t+2)(t+3) \\
C(t) = \int t(t+2)(t+3)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + 3t^2 + k \\
y(t) = \frac{C(t)}{(t+2)(t+3)} &= \frac{\frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + 3t^2 + k}{(t+2)(t+3)}.
\end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$\begin{aligned}
1 = y(0) &= \frac{k}{6} \\
k &= 6.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y(t) = \frac{\frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + 3t^2 + 6}{t^2 + 5t + 6}.$$

d.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{y'(t) = \sin(t) - y\frac{2t+5}{t^2+5t+6}} \\ &\boldsymbol{y(0) = 1} \end{aligned}\right\}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -y\frac{2t+5}{t^2+5t+6} \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{2t+5}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{2t+5}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t \\
\ln|y| &= -\int \frac{2t+5}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{(t+2)+(t+3)}{(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int \left(\frac{1}{(t+2)} + \frac{1}{(t+3)}\right)\mathrm{d}t \\
\ln|y| &= -\ln|t+2| - \ln|t+3| + c \\
|y| &= e^c \cdot \frac{1}{|(t+2)(t+3)|} \\
y &= \pm e^c \cdot \frac{1}{(t+2)(t+3)} \\
y(t) &= \frac{C}{(t+2)(t+3)}.
\end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $y(t) = \frac{C(t)}{(t+2)(t+3)}$ alakban!

$$\begin{aligned}
\frac{C'(t)}{(t+2)(t+3)} - C(t)\frac{(t+2)+(t-3)}{(t+2)^2(t+3)^2} &= \sin t - C(t)\frac{2t+5}{(t^2+5t+6)^2} \\
\frac{C'(t)}{(t+2)(t+3)} &= \sin t \\
C'(t) &= (t+2)(t+3)\sin t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(t) = \int (t+2)(t+3)\sin t\,\mathrm{d}t &= -(t+2)(t+3)\cos t + \int (2t+5)\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= -(t+2)(t+3)\cos t + (2t+5)\sin t - \int 2\sin t\,\mathrm{d}t \\
C(t) &= -(t^2+5t+4)\cos t + (2t+5)\sin t + k \\
y(t) = \frac{C(t)}{(t+2)(t+3)} &= \frac{-(t^2+5t+4)\cos t + (2t+5)\sin t + k}{(t+2)(t+3)}.
\end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$\begin{aligned}
1 = y(0) &= \frac{k-4}{6} \\
k &= 10.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y(t) = \frac{-(t^2+5t+4)\cos t + (2t+5)\sin t + 10}{t^2+5t+6}.$$

e.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $u(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{tu'(t) + u = t\sin t}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned}
u'(t) &= -\frac{1}{t}u \\
\frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\ln|u| &= -\ln|t| + c \\
|u| &= e^c\frac{1}{|t|} \\
u &= \pm e^c\frac{1}{t} \\
u(t) &= \frac{C}{t}.
\end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $u(t) = \frac{C(t)}{t}$ alakban!

$$\begin{aligned}
t\frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2}t + \frac{C(t)}{t} &= t\sin t \\
C'(t) &= t\sin t \\
C(t) &= \int t\sin t\,\mathrm{d}t = -t\cos t + \int \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= -t\cos t + \sin t + k \\
u(t) &= \frac{C(t)}{t} \\
u(t) &= \frac{\sin(t)}{t} - \cos(t) + k.
\end{aligned}$$

f.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{ty'(t) + 5y = 3t} \\
\boldsymbol{y(1) = 2}
\end{aligned}\right\}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -\frac{5}{t}y \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -5\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -5\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\ln|y| &= -5\ln|t| + c \\
|y| &= e^c \cdot \frac{1}{|t|^5} \\
y &= \pm e^c \cdot \frac{1}{t^5} \\
y(t) &= \frac{C}{t^5}.
\end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $y(t) = \frac{C(t)}{t^5}$ alakban!

$$\begin{aligned} t\frac{C'(t)}{t^5} - 5t\frac{C(t)}{t^6} + 5\frac{C(t)}{t^5} &= 3t \\ \frac{C'(t)}{t^4} &= 3t \\ C'(t) &= 3t^5 \\ C(t) = \int 3t^5 \, \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}t^6 + k \\ y(t) = \frac{C(t)}{t^5} &= \frac{t^6 + 2k}{2t^5}. \end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 2 = y(1) &= \frac{1 + 2k}{2} \\ k &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y(t) = \frac{t^6 + 3}{2t^5}.$$

g.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $x(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} tx'(t) &= 2x + t^2 \\ x(1) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{2}{t}x \\ \frac{\mathrm{d}x}{x} &= 2\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ \ln|x| &= 2\ln|t| + c \\ |x| &= e^c \cdot t^2 \\ x &= \pm e^c \cdot t^2 \\ x(t) &= C \cdot t^2. \end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $x(t) = C(t) \cdot t^2$ alakban!

$$\begin{aligned} tC'(t)t^2 + tC(t)2t &= 2C(t)t^2 + t^2 \\ C'(t) &= \frac{1}{t} \\ C(t) &= \ln|t| + k \\ x(t) = C(t) \cdot t^2 &= t^2 \ln|t| + kt^2. \end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$1 = x(1) = k$$

$$k = 1.$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$x(t) = t^2(1 + \ln t).$$

h.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned}(t^2 - 1)u'(t) + 2tu &= 1\\ u(2) &= 4\end{aligned}\right\}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned}
u'(t) &= -\frac{2t}{t^2-1}u\\
\frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\int \frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\\
\ln|u| &= -\ln|t^2-1| + c\\
|u| &= e^c\frac{1}{|t^2-1|}\\
u &= \pm e^c\frac{1}{t^2-1}\\
u(t) &= \frac{C}{t^2-1}.
\end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $u(t) = \frac{C(t)}{t^2-1}$ alakban!

$$\begin{aligned}
(t^2-1)\left(\frac{C'(t)}{t^2-1} - \frac{C(t)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}\right) &= 1 - 2t\frac{C(t)}{t^2-1}\\
C'(t) &= 1\\
C(t) = \int \mathrm{d}t &= t + k\\
u(t) = \frac{C(t)}{t^2-1} &= \frac{t+k}{t^2-1}.
\end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$\begin{aligned}
4 = u(2) &= \frac{k+2}{3}\\
k &= 10.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$u(t) = \frac{t+10}{t^2-1}.$$

i.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned}y'(t) - \frac{2}{t}y &= t^2 + 1\\ y(1) &= 1\end{aligned}\right\}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{2}{t}y \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
\ln|y| &= 2\ln|t| + c \\
|y| &= e^c \cdot t^2 \\
y &= \pm e^c \cdot t^2 \\
y(t) &= C \cdot t^2.
\end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $y(t) = C(t) \cdot t^2$ alakban!

$$\begin{aligned}
C'(t) \cdot t^2 + C(t) \cdot 2t = \frac{2}{t}C(t) \cdot t^2 &= t^2 + 1 \\
C'(t) &= \frac{t^2+1}{t^2} \\
C(t) = \int \frac{t^2+1}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{t^2+1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -t^{-1} + t + k \\
y(t) = C(t) \cdot t^2 &= -t + t^3 + kt^2.
\end{aligned}$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$\begin{aligned}
1 = y(1) &= k \\
k &= 1.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y(t) = t^3 + t^2 - t.$$

j.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{y'(t) + y\sin t = \sin t} \\
\boldsymbol{y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3}
\end{aligned}\right\}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -y\sin t \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\sin t\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \sin t\,\mathrm{d}t \\
\ln|y| &= \cos t + c \\
|y| &= e^c \cdot e^{\cos t} \\
y &= \pm e^c \cdot e^{\cos t} \\
y(t) &= Ce^{\cos t}.
\end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $y(t) = C(t)e^{\cos t}$ alakban!

$$C'(t)e^{\cos t} - \sin t \cdot C(t)e^{\cos t} = -\sin t \cdot C(t)e^{\cos t} + \sin t$$

$$
\begin{aligned}
C'(t)e^{\cos t} &= \sin t \\
C'(t) &= e^{-\cos t}\sin t \\
C(t) = \int e^{-\cos t}\sin t\,\mathrm{d}t &= e^{-\cos t} + k \\
y(t) = C(t)e^{\cos t} &= 1 + ke^{\cos t}.
\end{aligned}
$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$
\begin{aligned}
3 &= y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + k \\
k &= 2.
\end{aligned}
$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$
y(t) = 2e^{\cos t} + 1.
$$

k.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(x)$ megoldását!**

$$
\left.\begin{aligned}
y'(x) + \frac{y}{1+x} &= e^x \\
y(1) &= e
\end{aligned}\right\}
$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -\frac{1}{1+x}y \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\frac{\mathrm{d}x}{1+x} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \\
\ln|y| &= -\ln|1+x| + c \\
|y| &= e^c\frac{1}{|1+x|} \\
y &= \pm e^c\frac{1}{1+x} \\
y(x) &= \frac{C}{1+x}.
\end{aligned}
$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $y(x) = \frac{C(x)}{1+x}$ alakban!

$$
\begin{aligned}
\frac{C'(x)}{1+x} - \frac{C(x)}{(1+x)^2} + \frac{C(x)}{(1+x)^2} &= e^x \\
C'(x) &= (x+1)e^x \\
C(x) = \int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x = (x+1)e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x &= (x+1)e^x - e^x + k = xe^x + k \\
y(x) = \frac{C(x)}{1+x} &= \frac{xe^x + k}{x+1}.
\end{aligned}
$$

A kezdeti értékre vonatkozó feltétel alapján k értéke meghatározható:

$$
\begin{aligned}
e = y(1) &= \frac{e+k}{2} \\
k &= e.
\end{aligned}
$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$y(x) = \frac{xe^x + e}{x+1}.$$

l.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $u(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{u'(t) + 6u = e^{-2t}}$$

A homogén feladat általános megoldása:

$$\begin{aligned}
u'(t) &= -6u \\
\frac{\mathrm{d}u}{u} &= -6\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -6 \int \mathrm{d}t \\
\ln|u| &= -6t + c \\
|u| &= e^c \cdot e^{-6t} \\
u &= \pm e^c \cdot e^{-6t} \\
u(t) &= Ce^{-6t}
\end{aligned}$$

Az inhomogén feladat általános megoldása az állandó variálásával:
Keressük a megoldást $u(t) = C(t)e^{-6t}$ alakban!

$$\begin{aligned}
C'(t)e^{-6t} - 6C(t)e^{-6t} &= -6C(t)e^{-6t} + e^{-2t} \\
C'(t) &= e^{4t} + k \\
C(t) = \int e^{4t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}e^{4t} \\
u(t) &= C(t)e^{-6t} \\
u(t) &= \frac{1}{4}e^{-2t} + ke^{-6t}.
\end{aligned}$$

Másodrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek

Elméleti bevezetés

A másodrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek általános alakja:

$$\left.\begin{aligned}
u''(t) + pu'(t) + qu &= 0 \\
u(t_0) &= u_0 \\
u'(t_0) &= w_0
\end{aligned}\right\}$$

- Keressük a megoldást $u(t) = e^{\lambda t}$ alakban.

$$\begin{aligned}
\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} &= 0 \\
\lambda^2 + p\lambda + q &= 0,
\end{aligned}$$

  azaz elegendő megoldani a fenti másodfokú egyenletet (az a másodfokú polinom differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja). Az egyenlet megoldása során 3 eset lehetséges:

  - Két különböző valós gyököt találunk: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor az általános megoldás:

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

– Egyetlen (kétszeres) valós gyök van: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor az általános megoldás:

$$u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}.$$

– Két különböző komplex gyök van, melyek egymás konjugáltjai: $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$. Ekkor az általános megoldás:

$$u(t) = e^{at}\left(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)\right).$$

- A kezdeti értékeket behelyettesítjük, a kapott 2 egyenletből C_1 és C_2 értékét kiszámoljuk.

Példák

a.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} u''(t) + u'(t) - 6u &= 0 \\ u(0) &= 3 \\ u'(0) &= -4 \end{aligned}\right\}$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 6 &= 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\ \lambda_{1,2} &= -3, 2. \end{aligned}$$

Különböző valós gyököket kaptunk, az általános megoldás:

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}.$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 3 = u(0) &= C_1 + C_2 \\ -4 = u'(0) &= -3C_1 + 2C_2 \\ C_1 &= 2 \\ C_2 &= 1. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$u(t) = e^{2t} + 2e^{-3t}.$$

b.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} y''(t) - 6y'(t) + 9y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0 \\ \lambda &= 3 \pm \sqrt{9 - 9} \\ \lambda_{1,2} &= 3, 3. \end{aligned}$$

Kétszeres valós gyököt kaptunk, az általános megoldás:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}.$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 \\ 2 &= y'(0) = 3C_1 + C_2 \\ C_1 &= 1 \\ C_2 &= -1 \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$y(t) = e^{3t} - te^{3t}.$$

c.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} u''(t) - 2u'(t) + 5u &= 0 \\ u(0) &= 2 \\ u'(0) &= -4 \end{aligned}\right\}$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 5 &= 0 \\ \lambda &= 1 \pm \sqrt{1-5} \\ \lambda_{1,2} &= 1 - 2i, 1 + 2i. \end{aligned}$$

Komplex konjugált gyököket kaptunk, az általános megoldás:

$$u(t) = e^{at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) = e^{t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 2 &= u(0) = C_1 \\ -4 &= u'(0) = C_1 + 2C_2 \\ C_1 &= 2 \\ C_2 &= -3 \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$u(t) = e^{t}(2\cos(2t) - 3\sin(2t))$$

d.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $y(x)$ megoldását!**

$$y''(x) - 4y'(x) + 13y = 0$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda + 13 &= 0 \\ \lambda &= 2 \pm \sqrt{4-13} \\ \lambda_{1,2} &= 2 - 3i, 2 + 3i. \end{aligned}$$

Komplex konjugált gyököket kaptunk, az általános megoldás:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) \\ y(x) &= e^{2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)). \end{aligned}$$

e.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $x(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{x''(t) = 0}$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 0, 0.$$

Kétszeres valós gyököt kaptunk, az általános megoldás:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$
$$x(t) = C_1 + C_2 t.$$

f.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $u(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{9u''(t) = -u}$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda^2 + \frac{1}{9} = 0$$
$$\lambda = \pm\frac{i}{3}$$
$$\lambda_{1,2} = -\frac{i}{3}, \frac{i}{3}.$$

Komplex konjugált gyököket kaptunk, az általános megoldás:

$$u(t) = e^{at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt)$$
$$u(t) = C_1 \cos\left(\frac{t}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{3}\right).$$

g.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $u(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{2u''(t) + 2u'(t) + 13u} &\boldsymbol{= 0} \\ \boldsymbol{u(0)} &\boldsymbol{= 1} \\ \boldsymbol{u'(0)} &\boldsymbol{= -\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{13}{2} = 0$$
$$\lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{13}{2}}$$
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

Komplex konjugált gyököket kaptunk, az általános megoldás:

$$u(t) = e^{at}(C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) = e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1 \cos\frac{5}{2}t + C_2 \sin\frac{5}{2}t\right).$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$1 = u(0) = C_1$$

$$-\frac{1}{2} = u'(0) = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{2}C_2$$
$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 0$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{5}{2}t\right).$$

h.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $y(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{y''(t) = -5y'(t)}$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda^2 + 5\lambda = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -5, 0.$$

Különböző valós gyököket kaptunk, az általános megoldás:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2.$$

Másodrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Elméleti bevezetés

A másodrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek általános alakja:

$$\left.\begin{aligned} u''(t) + pu'(t) + qu &= r(t) \\ u(t_0) &= u_0 \\ u'(t_0) &= w_0 \end{aligned}\right\}$$

- Az általános megoldás $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$ alakban áll elő, ahol $u_h(t)$ a homogén feladat megoldása (ld. előző fejezet), $u_p(t)$ pedig egy partikuláris megoldás, ami kielégíti az inhomogén egyenletet. Ennek meghatározására most általános képletet nem adunk, csak bizonyos speciális esetre mutatjuk meg, milyen alakban érdemes $u_p(t)$-t keresni.
  - A jobb oldalon exponenciális függvény szerepel: $r(t) = Ce^{at}$. Ekkor keressük a partikuláris megoldást $u_p(t) = Ae^{at}$ exponenciális alakban alkalmas A konstanssal.
  - A jobb oldalon trigonometrikus függvény szerepel: $r(t) = C\cos(at) + D\sin(at)$. Ekkor keressük a partikuláris megoldást $u_p(t) = A\cos(at) + B\sin(at)$ trigonometrikus alakban alkalmas A, B konstansokkal.
  - A jobb oldalon polinom szerepel: $r(t) = C_n t^n + C_{n-1}t^{n-1} + \cdots + C_1 t + C_0$. Ekkor keressük a partikuláris megoldást $u_p(t) = A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$ polinom alakban alkalmas $A_n, A_{n-1} \ldots, A_1, A_0$ konstansokkal.
  - Amennyiben a fenti alakban nem találunk partikuláris megoldást, annak az lehet az oka, hogy az $r(t)$ megoldása a homogén egyenletnek, ez a rezonancia jelensége, ekkor a megoldást a fenti alakok t-szereseként kell keresni, pl. $u_p(t) = Ate^{at}$ alakban az exponenciális alakban. Ha ez sem segítene, mert még ez is megoldása a homogén egyenletnek, akkor t^2-tel érdemes beszorozni és pl. $u_p(t) = At^2e^{at}$ alakban keresni.

- Az általános megoldást az $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$ képlet adja meg, amiben $u_h(t)$ tartalmaz két szabad paramétert: C_1 és C_2 tetszőleges lehet.
- A kezdeti értékeket behelyettesítve megkapjuk az $u_h(t)$-ben szereplő C_1, C_2 konstansok értékét.

Példák

a.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y''(t) + y'(t) - 2y = 5e^{3t}} \\ \boldsymbol{y(0) = 3} \\ \boldsymbol{y'(0) = -1} \end{aligned}\right\}$$

A homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ \lambda_{1,2} &= -2, 1. \end{aligned}$$

Különböző valós gyököket kaptunk, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t.$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p(t) = Ae^{3t}$ alakban:

$$\begin{aligned} 9Ae^{3t} + 3Ae^{3t} - 2Ae^{3t} &= 5e^{3t} \\ A &= \frac{1}{2} \\ y_p(t) &= \frac{1}{2}e^{3t}. \end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 3 = y(0) &= C_1 + C_2 + \frac{1}{2} \\ -1 = y'(0) &= -2C_1 + C_2 + \frac{3}{2} \\ C_1 &= \frac{5}{3} \\ C_2 &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$y(t) = \frac{5}{6}e^t + \frac{5}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

b.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(x)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y''(x) + y = 3\sin(2x)} \\ \boldsymbol{y(0) = 2} \\ \boldsymbol{y'(0) = -1} \end{aligned}\right\}$$

A homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -i, i.$$

Komplex konjugált gyököket kaptunk, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$ alakban:

$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x = 3 \sin 2x$$
$$A = 0$$
$$B = -1$$
$$y_p(x) = -\sin 2x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y(t) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin 2x.$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$2 = y(0) = C_1$$
$$-1 = y'(0) = C_2 - 2$$
$$C_1 = 2$$
$$C_2 = 1$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$y(x) = \sin x + 2 \cos x - \sin(2x).$$

c.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános $u(t)$ megoldását!**

$$\boldsymbol{u''(t) + u'(t) - 2u = e^{-t}}$$

A homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$
$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$
$$\lambda_{1,2} = -2, 1.$$

Különböző valós gyököket kaptunk, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$u_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t.$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $u_p(t) = Ae^{-t}$ alakban:

$$Ae^{-t} - Ae^{-t} - 2Ae^{-t} = e^{-t}$$
$$A = -\frac{1}{2}$$
$$u_p(t) = -\frac{1}{2} e^{-t}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$u(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t - \frac{1}{2} e^{-t}.$$

d.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + y = t^2 \\ y(0) = 7 \\ y'(0) = -3 \end{aligned}\right\}$$

A homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -1 \pm \sqrt{1-1} \\ \lambda_{1,2} &= -1, -1. \end{aligned}$$

Kétszeres valós gyököt kaptunk, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}.$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p(t) = At^2 + Bt + C$ alakban:

$$\begin{aligned} 2A + 4At + 2B + At^2 + Bt + C &= t^2 \\ A &= 1 \\ B &= -4 \\ C &= 6 \\ y_p(t) &= t^2 - 4t + 6. \end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + t^2 - 4t + 6.$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 7 = y(0) &= C_1 + 6 \\ -3 = y'(0) &= -C_1 + C_2 - 4 \\ C_1 &= 1 \\ C_2 &= 2. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$y(t) = 2te^{-t} + e^{-t} + t^2 - 4t + 6.$$

e.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $y(x)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} 2y''(x) - 2y'(x) + 5y = 9e^{\frac{x}{2}} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{aligned}\right\}$$

A homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda + \frac{5}{2} &= 0 \\ \lambda &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{5}{2}} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

Komplex konjugált gyököket kaptunk, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right).$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p(x) = Ae^{\frac{x}{2}}$ alakban:

$$\frac{1}{2}Ae^{\frac{x}{2}} - Ae^{\frac{x}{2}} + 5Ae^{\frac{x}{2}} = 9e^{\frac{x}{2}}$$
$$A = 2$$
$$y_p(x) = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right) + 2e^{\frac{x}{2}}.$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$1 = y(0) = C_1 + 2$$
$$2 = y'(0) = \frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2 + 1$$
$$C_1 = -1$$
$$C_2 = 1.$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) - e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + 2e^{\frac{x}{2}}$$

f.) **Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat $x(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} x''(t) - 2x'(t) - 3x = 12e^{-3t} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -2 \end{aligned}\right\}$$

A homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$
$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+3}$$
$$\lambda_{1,2} = -1, 3.$$

Különböző valós gyököket kaptunk, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}.$$

Keressük az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $x_p(t) = Ae^{-3t}$ alakban:

$$9Ae^{-3t} + 6Ae^{-3t} - 3Ae^{-3t} = 12e^{-3t}$$
$$A = 1$$
$$x_p(t) = e^{-3t}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + e^{-3t}.$$

A kezdeti feltételek alapján C_1 és C_2 értéke meghatározható:

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= C_1 + C_2 + 1 \\ -2 = y'(0) &= -C_1 + 3C_2 - 3 \\ C_1 &= -1 \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$x(t) = e^{-3t} - e^t.$$

Homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Elméleti bevezetés

A homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek általános alakja:

$$\left.\begin{aligned} \underline{u}'(t) &= \mathbf{A}\underline{u}(t) \\ \underline{u}(0) &= \underline{u}_0 \end{aligned}\right\},$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az egyenletrendszer mátrixa, $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ adott vektor, $\underline{u}(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az ismeretlen (vektor értékű) függvény. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért nem jelöljük külön aláhúzással/kiemeléssel a vektorokat és mátrixokat.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$u(t) = e^{At}u_0,$$

ahol az e^{At} exponenciális mátrixot többféleképpen is ki lehet számolni.

- Hatványsor alapján a definíciója:

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} + \cdots$$

- Az A mátrix sajátérték-sajátvektor rendszere alapján:
  Ha az A sajátértékei λ_i, a hozzájuk tartozó sajátvektor s_i, azaz $As_i = \lambda_i s_i$ akkor

$$A = RDR^{-1},$$

ahol

$$R = [s_1, s_2, \cdots, s_n], D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

azaz az R oszlopaiba egymás után beírtuk az s_i (oszlop)vektorokat.
Ekkor

$$e^{At} = Re^{Dt}R^{-1} = R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Megjegyzés: a sajátértékeket a $\det(A - \lambda I) = 0$ egyenlet megoldásai szolgáltatják, mi itt most csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor csupa különböző valós sajátértékei vannak a mátrixnak. További hasznos képlet a 2×2-es mátrix inverze:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Feladatok

a.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u_1(t)$, $u_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t) = 2u_1 + u_2} \\ \boldsymbol{u_2'(t) = 6u_1 + 3u_2} \\ \boldsymbol{u_1(0) = 1} \\ \boldsymbol{u_2(0) = -1} \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az A mátrix sajátértékei:

$$\begin{aligned} (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 \cdot 6 = 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda = 0 \end{aligned}$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{5t} + \frac{3}{5} & \frac{1}{5}e^{5t} - \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{6}{5} & \frac{3}{5}e^{5t} + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{5}e^{5t} + \frac{4}{5} \\ u_2(t) &= \frac{3}{5}e^{5t} - \frac{8}{5} \end{aligned}$$

b.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u_1(t)$, $u_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t) = 2u_2} \\ \boldsymbol{u_2'(t) = 0} \\ \boldsymbol{u_1(0) = 1} \\ \boldsymbol{u_2(0) = 2} \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 4t + 1 \\ u_2(t) &= 2 \end{aligned}$$

c.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer általános $y_1(t)$, $y_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1 + y_2 \\ y_2'(t) &= 4y_1 + 2y_2 \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} & \frac{4}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1\left(\frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}\right) + C_2\left(\frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t}\right) \\ y_2(t) &= C_1\left(\frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t}\right) + C_2\left(\frac{4}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t}\right) \end{aligned}$$

Inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Elméleti bevezetés

A megoldás minden lépése lényegében ugyanaz, mint a skalár inhomogén lineáris differenciálegyenletek esetében, azaz az állandók variálásának módszerével történik. Az ott kapott formula szerint az

$$\left.\begin{aligned} \underline{u}'(t) &= \mathbf{A}\underline{u}(t) + \underline{b}(t) \\ \underline{u}(0) &= \underline{u}_0 \end{aligned}\right\}$$

alakban megadott differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\underline{u}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left(\int e^{-\mathbf{A}t}\underline{b}(t)\,\mathrm{d}t + \underline{k}\right).$$

A fenti alakból k értéke a kezdeti érték alapján a $t = t_0$ helyettesítéssel adódik, a végeredmény:

$$\underline{u}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\left(\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\underline{b}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \underline{u}_0\right).$$

Megjegyzés: A skalár (egydimenziós) esettől ez annyiban különbözik, hogy itt a $\pm\mathbf{A}t$ mátrix exponenciális függvényét kell kiszámolni (ld. homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek), illetve a vektor értékű függvény integrálját komponensenként kell meghatározni.

Feladatok

a.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u_1(t)$, $u_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_2 - 2 \\ u_2'(t) &= 4u_1 + 2u_2 + 2 \\ u_1(0) &= 1 \\ u_2(0) &= -1 \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 2e^{-2t} - 1 \\ u_2(t) &= 1 - 2e^{-2t} \end{aligned}$$

b.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $y_1(t)$, $y_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1 + 2y_2 + e^{4t} \\ y_2'(t) &= 3y_2 + 1 \\ y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & -e^t + e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{3}e^{4t} + \frac{7}{3}e^{3t} - \frac{7}{3}e^t + \frac{2}{3} \\ y_2(t) &= \frac{7}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

c.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $y_1(t)$, $y_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y_1'(t)} &\boldsymbol{= y_1 + y_2 + t} \\ \boldsymbol{y_2'(t)} &\boldsymbol{= 2y_1 + 2y_2 + e^t} \\ \boldsymbol{y_1(0)} &\boldsymbol{= -1} \\ \boldsymbol{y_2(0)} &\boldsymbol{= -3} \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} & \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{9}t + \frac{17}{27} - \frac{1}{2}e^t - \frac{61}{54}e^{3t} \\ y_2(t) &= -\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{20}{27} - \frac{61}{27}e^{3t} \end{aligned}$$

d.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u_1(t)$, $u_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t) = 2u_2} \\ \boldsymbol{u_2'(t) = t} \\ \boldsymbol{u_1(0) = 1} \\ \boldsymbol{u_2(0) = 2} \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$u_1(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t + 1$$
$$u_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2$$

e.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u_1(t)$, $u_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t) = 2u_1 - u_2 + e^t} \\ \boldsymbol{u_2'(t) = 6u_1 - 3u_2} \\ \boldsymbol{u_1(0) = 3} \\ \boldsymbol{u_2(0) = 3} \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 3 & e^{-t} - 1 \\ -6e^{-t} + 6 & 3e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$u_1(t) = 2e^t - 2e^{-t} + 3$$
$$u_2(t) = 3e^t - 6e^{-t} + 6$$

f.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $y_1(t)$, $y_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1 + y_2 \\ y_2'(t) &= 3y_1 + 4y_2 + 1 \\ y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} & -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} \\ -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} & \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$y_1(t) = \frac{4}{5}e^{5t} + \frac{1}{5}$$
$$y_2(t) = \frac{12}{5}e^{5t} - \frac{2}{5}$$

g.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $y_1(t)$, $y_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1 + y_2 \\ y_2'(t) &= 3y_1 + 4y_2 + t \\ y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} & -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} \\ -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} & \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$y_1(t) = \frac{19}{25}e^{5t} + \frac{1}{5}t + \frac{6}{25}$$
$$y_2(t) = \frac{57}{25}e^{5t} - \frac{2}{5}t - \frac{7}{25}$$

h.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u_1(t)$, $u_2(t)$ megoldását!**

$$\left.\begin{aligned} &u_1'(t) = -u_2 + 2 \\ &u_2'(t) = 2u_1 + 3u_2 + e^t \\ &u_1(0) = 1 \\ &u_2(0) = -1 \end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írva:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

Az e^{At} exponenciális mátrix:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= te^t + 6e^t - 2e^{2t} - 3 \\ u_2(t) &= -te^t - 7e^t + 4e^{2t} + 2 \end{aligned}$$

Laplace-transzformáció és alkalmazásai differenciálegyenletek megoldására

Elméleti bevezetés

Definíció: egy $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltja az alábbi improprius integrállal számolt $F(s)$ függvény:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Legfontosabb tulajdonságai a Laplace-transzformáltnak:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \\ \mathcal{L}\left(f'(t)\right) &= sF(s) - f(0^+) \\ \mathcal{L}\left(f''(t)\right) &= s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+) \\ \mathcal{L}(tf(t)) &= -F'(s) \\ \mathcal{L}(f(a \cdot t)) &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \\ \mathcal{L}(e^{-at} f(t)) &= F(s+a) \\ \mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0)) &= e^{-t_0 s} F(s) \end{aligned}$$

Nevezetes függvények Laplace-transzformáltjai:

$$\mathcal{L}(\delta(t - 0^+)) = 1$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(H(t)) &= \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}(t^n) &= \frac{n!}{s^{n+1}} \\
\mathcal{L}(e^{-at}) &= \frac{1}{s+a} \\
\mathcal{L}(e^{-at}t^n) &= \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \\
\mathcal{L}(\sin(bt)) &= \frac{b}{s^2+b^2} \\
\mathcal{L}(\cos(bt)) &= \frac{s}{s^2+b^2} \\
\mathcal{L}(t\sin(bt)) &= \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2} \\
\mathcal{L}(t\cos(bt)) &= \frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2},
\end{aligned}$$

ahol $t_0 > 0$, $\delta(t)$ jelöli a Dirac-delta függvényt, míg $H(t)$ a Heaviside-függvényt.

Egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet megoldási módszere Laplace-transzformált segítségével:

$$\left.\begin{aligned}
u'' + pu' + qu &= r(t) \\
u(0) &= u_0 \\
u'(0) &= w_0
\end{aligned}\right\}$$

A differenciálegyenlet mindkét oldalának vesszük a Laplace-transzformáltját:

$$s^2U(s) - su_0 - w_0 + p(sU(s) - u_0) + qU(s) = R(s)$$

Az egyenletből kifejezzük $U(s)$-t:

$$U(s) = \frac{R(s) + su_0 + w_0 + pu_0}{s^2 + ps + q}$$

A Laplace-transzformáció szabályainak segítségével meghatározzuk azt az egyértelmű $u(t)$ függvényt, aminek éppen $U(s)$ a transzformáltja.

Megjegyzés: Amennyiben $R(s)$ egy racionális törtfüggvény (két polinom hányadosa), akkor $U(s)$ is racionális törtfüggvény lesz, ebben az esetben a parciális törtekre bontás segítségével határozhatjuk meg $u(t)$-t.

Parciális törtekre bontás: adott egy $\frac{P(s)}{Q(s)}$ függvény, melyet parciális törtekre szeretnénk bontani, feltételezzük, hogy Q fokszáma nagyobb, mint P-é (ellenkező esetben elvégzünk egy maradékos osztást a polinomokkal).

- Megkeressük $Q(s)$ valós gyökeit, majd első- és (komplex gyökökkel rendelkező) másodfokú polinomok szorzatává alakítjuk.
- Csoportosítjuk az azonos tényezőket a nevezőben, és felírjuk a törtet

  $$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{C \cdot (s-s_1)\cdots(s-t_1)^{n_1}\cdots(s^2+a_1s+b_1)\cdots(s^2+c_1s+d_1)^{m_1}\cdots}$$

  alakban.

- Ezután megkeressüket azokat az $A_i, B_{ij}, C_i, D_i, E_{ij}, F_{ij}$ együtthatókat, melyekkel:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \cdots + \frac{B_{11}}{s-t_1} + \frac{B_{12}}{(s-t_1)^2} \cdots + \frac{B_{1n_1}}{(s-t_1)^n} + \cdots + \frac{C_1 s + D_1}{s^2 + a_1 s + b_1} + \cdots +$$
$$+ \frac{E_{11}s + F_{11}}{s^2 + c_1 s + d_1} + \frac{E_{12}s + F_{12}}{(s^2 + c_1 s + d_1)^2} + \cdots + \frac{E_{1m_1}s + F_{1m_1}}{(s^2 + c_1 s + d_1)^{m_1}} + \cdots .$$

Feladatok

a.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldását Laplace-transzformációval!**

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= 2u + e^{-t} \\ u(0) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$U(s) = \frac{2}{s-2} + \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

Parciális törtekre bontás után

$$U(s) = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1}$$

A megoldás tehát:

$$u(t) = \frac{7}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$$

b.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldását Laplace-transzformációval!**

$$\left.\begin{aligned} u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) &= e^{-t} \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$U(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+2)}$$

Parciális törtekre bontás után

$$U(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

A megoldás tehát:

$$u(t) = e^{-2t} - e^{-t} + te^{-t}$$

c.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldását Laplace-transzformációval!**

$$\left.\begin{aligned} u''(t) + 4u'(t) + 5u(t) &= e^{2t} \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$U(s) = \frac{s+6}{(s^2+4s+5)} + \frac{1}{(s-2)(s^2+4s+5)}$$

Parciális törtekre bontás után

$$U(s) = \frac{16s+96}{17(s^2+4s+5)} + \frac{1}{17(s-2)}$$

A megoldás tehát:

$$u(t) = \frac{1}{17}e^{2t} + \frac{64}{17}e^{-2t}\sin(t) + \frac{16}{17}e^{-2t}\cos(t)$$

d.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldását Laplace-transzformációval!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u'(t) = 4u(t) + \cos(t-5)H(t-5)} \\ \boldsymbol{u(0) = 3} \end{aligned}\right\}$$

$$U(s) = \frac{3}{s-4} + e^{-5s}\frac{s}{(s^2+1)(s-4)}$$

Parciális törtekre bontás után

$$U(s) = \frac{3}{s-4} + e^{-5s}\left(\frac{-4s+1}{17(s^2+1)} + \frac{4}{17(s-4)}\right)$$

A megoldás tehát:

$$u(t) = 3e^{4t} + \left(-\frac{4}{17}\cos(t-5) + \frac{1}{17}\sin(t-5) + \frac{4}{17}e^{4t-20}\right)H(t-5)$$

e.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldását Laplace-transzformációval!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u'(t) = 3u(t) + 2\cos\left(\frac{t-10}{4}\right)H(t-10)} \\ \boldsymbol{u(0) = 1} \end{aligned}\right\}$$

$$U(s) = \frac{1}{s-3} + e^{-10s}\frac{32s}{(16s^2+1)(s-3)}$$

Parciális törtekre bontás után

$$U(s) = \frac{1}{s-3} + e^{-10s}\left(\frac{96}{145(s-3)} + \frac{32}{145}\cdot\frac{48s-1}{16s^2+1}\right)$$

A megoldás tehát:

$$u(t) = e^{3t} + \left(\frac{96}{145}e^{3t-30} - \frac{96}{145}\cos\left(\frac{t-10}{4}\right) + \frac{8}{145}\sin\left(\frac{t-10}{4}\right)\right)H(t-10)$$

Differenciálegyenletek kvalitatív tulajdonságai és közelítő megoldási módszerek

Elméleti bevezetés

Adott az

$$\left.\begin{aligned} u'(t) = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték-probléma.

Mégha az egyenlet megoldását esetleg nem tudjuk meghatározni, az ismeretlen $u(t)$ függvény lokális viselkedését meghatározhatjuk a differenciálegyenlet alapján.

- Monotonitás: Az $u'(t_0)$ előjelét kell csak meghatározni, ha pozitív, akkor a függvény lokálisan szigorúan monoton nő, ha negatív, akkor lokálisan szigorúan monoton csökken. Egyszerű behelyettesítéssel adódik az értéke:
$$u'(t_0) = f(t_0, u_0).$$
- Konvexitás: Az $u''(t_0)$ előjele dönti el, ha pozitív, akkor lokálisan konvex; ha negatív, akkor lokálisan konkáv. Értékét a láncszabály segítségével kapjuk meg (parciális deriváltakkal dolgozva):
$$u''(t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, u(t))\bigg|_{t=t_0} = \frac{\partial f(t,u)}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} + \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} u'(t)\bigg|_{t=t_0} = f_t(t_0, u_0) + f_u(t_0, u_0) f(t_0, u_0).$$
- Simulókör sugara: A kezdeti érték körül az $u(t)$ függvényt legjobban közelítő kör (simulókör) R sugara az alábbi képletből kapható:
$$\text{görbület} = \frac{1}{R} = \frac{|u''(t_0)|}{(1 + u'(t_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$
- Numerikus közelítések:

  Ha a differenciálegyenlet megoldását analitikusan nem tudjuk felírni, közelítéseket akkor is kaphatunk. Ha a fenti módszerrel kiszámoltuk az $u'(t_0)$ és $u''(t_0)$ értékét, akkor a másodrendű Taylor-sorfejtés alapján egy közeli t_1 pontban a közelítés:
$$u(t_1) \approx u_1 = u_0 + (t_1 - t_0)u'(t_0) + \frac{(t_1 - t_0)^2}{2!} u''(t_0)$$
  Általában, ha adottak a $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ időpontok, akkor az $u(t_n)$-t közelítő u_n értékeket többféle módszerrel is közelíthetjük:

  - Explicit Euler-módszer:
$$u_{n+1} = u_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, u_n)$$
  - Implicit Euler-módszer:
$$u_{n+1} = u_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_{n+1}, u_{n+1})$$
  - Implicit trapézszabály:
$$u_{n+1} = u_n + (t_{n+1} - t_n) \frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})}{2}$$
  - Explicit trapézszabály:
$$u_{n+1} = u_n + (t_{n+1} - t_n) \frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{EE})}{2}$$
$$u_{EE} = u_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, u_n)$$

Feladatok

a.) **Állapítsuk meg az alábbi differenciálegyenlet $u(t)$ megoldásának lokális viselkedését (monotonitás, konvexitás, simulókör sugara) a kezdeti érték körül, majd írjuk fel az érintő egyenes és a simulókör egyenletét! Adjunk numerikus közelítést $u(0.1)$ értékére Explicit Euler-módszer (EE), Implicit Euler-módszer (IE), Implicit trapézszabály (ITR), Explicit trapézszabály (ETR) és másodrendű Taylor-sorfejtés (ET2) alapján! Számoljuk ki a pontos értéket is!**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u'(t) = -2u + t} \\ \boldsymbol{u(0) = 1} \end{aligned}\right\}$$

- Monotonitás: $u'(0) = -2$, a függvény lokálisan szig. mon. csökken.
- Konvexitás: $u''(0) = 5$, a függvény lokálisan konvex.
- Simulókör sugara $\frac{1}{R} = \frac{5}{(1+4)^{\frac{3}{2}}}$, $R = \sqrt{5}$.
- Érintő egyenes egyenlete: $u(t) = 1 - 2(t - 0)$.
- Simulókör egyenlete: $(t - 2)^2 + (u - 2)^2 = 5$.
- EE: 0.8
- IE: 0.88417
- ITR: 0.8227
- ETR: 0.825
- ET2: 0.825
- Pontos megoldás: $u(t) = \frac{5e^{-2t}+2t-1}{4}$, $u(0.1) \approx 0.8234$.

b.) **Állapítsuk meg az alábbi differenciálegyenlet $u(t)$ megoldásának lokális viselkedését (monotonitás, konvexitás, simulókör sugara) a kezdeti érték körül, majd írjuk fel az érintő egyenes és a simulókör egyenletét! Adjunk numerikus közelítést $u(2.1)$ értékére Explicit Euler-módszer (EE), Implicit Euler-módszer (IE), Implicit trapézszabály (ITR), Explicit trapézszabály (ETR) és másodrendű Taylor-sorfejtés (ET2) alapján! Számoljuk ki a pontos értéket is!**

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= t + 2ut \\ u(2) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

- Monotonitás: $u'(2) = 6$, a függvény lokálisan szig. mon. nő.
- Konvexitás: $u''(2) = 27$, a függvény lokálisan konvex.
- Simulókör sugara: $\frac{1}{R} = \frac{27}{(1+36)^{\frac{3}{2}}}$, $R \approx 8.336$.
- Érintő egyenes egyenlete: $u(t) = 1 + 6(t - 2)$.
- Simulókör egyenlete: $\left(t + \frac{168}{27}\right)^2 + \left(u - \frac{64}{27}\right)^2 = \frac{37^3}{27^2}$.
- EE: 1.6
- IE: 2.086
- ITR: 1.778
- ETR: 1.741
- ET2: 1.735
- Pontos megoldás: $u(t) = \frac{3e^{t^2-4}-1}{2}$, $u(2.1) \approx 1.76$.

c.) **Állapítsuk meg az alábbi differenciálegyenlet $u(t)$ megoldásának lokális viselkedését (monotonitás, konvexitás, simulókör sugara) a kezdeti érték körül, majd írjuk fel az érintő egyenes és a simulókör egyenletét! Adjunk numerikus közelítést $u(1.1)$ értékére Explicit Euler-módszer (EE), Implicit Euler-módszer (IE), Implicit trapézszabály (ITR), Explicit trapézszabály (ETR) és másodrendű Taylor-sorfejtés (ET2) alapján! Számoljuk ki a pontos értéket is!**

$$\left.\begin{aligned} tu'(t) &= 2u^2 \\ u(1) &= -1 \end{aligned}\right\}$$

- Monotonitás: $u'(1) = 2$, a függvény lokálisan szig. mon. nő.
- Konvexitás: $u''(1) = -10$, a függvény lokálisan konkáv.

- Simulókör sugara: $\frac{1}{R} = \frac{10}{(1+4)^{\frac{3}{2}}}$, $R \approx 1.118$.
- Érintő egyenes egyenlete: $u(t) = -1 + 2(t-1)$.
- Simulókör egyenlete: $(t-2)^2 + \left(u + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.
- EE: -0.8
- IE: -0.864, (6.364 rosszabb)
- ITR: -0.837, (11.837 rosszabb)
- ETR: -0.8418
- ET2: -0.85
- Pontos megoldás: $u(t) = \frac{-1}{1+2\ln t}$, $u(1.1) \approx -0.840$.

d.) **Állapítsuk meg az alábbi differenciálegyenlet $u(t)$ megoldásának lokális viselkedését (monotonitás, konvexitás, simulókör sugara) a kezdeti érték körül, majd írjuk fel az érintő egyenes és a simulókör egyenletét! Adjunk numerikus közelítést $u(0.2)$ értékére Explicit Euler-módszer (EE), Implicit Euler-módszer (IE), Implicit trapézszabály (ITR), Explicit trapézszabály (ETR) és másodrendű Taylor-sorfejtés (ET2) alapján, továbbá két egyenlő időlépésű EE-lépéssel! Számoljuk ki a pontos értéket is!**

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= u^2(1+t) \\ u(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

- Monotonitás: $u'(0) = 1$, a függvény lokálisan szig. mon. nő.
- Konvexitás: $u''(0) = 3$, a függvény lokálisan konvex.
- Simulókör sugara: $\frac{1}{R} = \frac{3}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}$, $R \approx 0.943$.
- Érintő egyenes egyenlete: $u(t) = 1 + 1(t-0)$.
- Simulókör egyenlete: $\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(u - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.
- EE: 1.2
- IE: 1.6667, (2.5 rosszabb)
- ITR: 1.3041, (7.029 rosszabb)
- ETR: 1.273
- ET2: 1.26
- EE$\times$2: 1.2331
- Pontos megoldás: $u(t) = \frac{2}{2-2t-t^2}$, $u(0.2) \approx 1.2821$.

e.) **Állapítsuk meg az alábbi differenciálegyenlet $u(t)$ megoldásának lokális viselkedését (monotonitás, konvexitás, simulókör sugara) a kezdeti érték körül, majd írjuk fel az érintő egyenes és a simulókör egyenletét! Adjunk numerikus közelítést $u(1.1)$ értékére Explicit Euler-módszer (EE), Implicit Euler-módszer (IE), Implicit trapézszabály (ITR), Explicit trapézszabály (ETR) és másodrendű Taylor-sorfejtés (ET2) alapján! Számoljuk ki a pontos értéket is!**

$$\left.\begin{aligned} tu'(t) &= 2u + t^2 \\ u(1) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

- Monotonitás: $u'(1) = 3$, a függvény lokálisan szig. mon. nő.
- Konvexitás: $u''(1) = 5$, a függvény lokálisan konvex.

- Simulókör sugara $\frac{1}{R} = \frac{5}{(1+9)^{\frac{3}{2}}}$, $R \approx 6.325$.
- Érintő egyenes egyenlete: $u(t) = 1 + 3(t-1)$.
- Simulókör egyenlete: $(t+5)^2 + (u-3)^2 = 40$.
- EE: 1.3
- IE: 1.3567
- ITR: 1.3255
- ETR: 1.3232
- ET2: 1.325
- pontos megoldás: $u(t) = t^2(1 + \ln t)$, $u(1.1) \approx 1.3253$.

Differenciálegyenlet-rendszerek kvalitatív tulajdonságai és közelítő megoldási módszerek

Elméleti bevezetés

Adott az

$$\left.\begin{aligned} \underline{u}'(t) &= f(t, \underline{u}) \\ \underline{u}(t_0) &= \underline{u}_0 \end{aligned}\right\}$$

kezdetiérték-probléma, ahol $\underline{u}(t)$ egy vektor értékű függvény.

- Monotonitás, konvexitás: Az $u(t)$ komponenseinek az első és második deriváltjai kell meghatározni, az első derivált egyszerű behelyettesítéssel adódik, a második deriváltakat láncszabállyal számolhatjuk ki:

$$u''(t_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, u(t))\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} u'(t)\Big|_{t=t_0} + \frac{\partial f(t,u)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = f_u(t_0, u_0) f(t_0, u_0) + f_t(t_0, u_0),$$

ahol f_u jelöli a függvény Jacobi-mátrixát, azaz

$$f_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}, \quad f_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

- Numerikus közelítések: A korábban bevezetett EE, IE, ETR, ITR, ET2 módszerek képletei változatlanok, csak arra kell figyelnünk, hogy u egy vektor-értékű függvény.

a.) **Állapítsuk meg az alábbi differenciálegyenlet $u(t)$ megoldása komponenseinek lokális viselkedését (monotonitás, konvexitás) a kezdeti érték körül, majd adjunk numerikus közelítést $u(0.2)$ értékére Explicit Euler-módszer (EE), Explicit trapézszabály (ETR) és másodrendű Taylor-sorfejtés (ET2) alapján!**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= -u_1^2 u_2 + 2tu_1 \\ u_2'(t) &= u_1 u_2 + t^2 u_2 \\ u_1(0) &= 1 \\ u_2(0) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

- Monotonitás: $u'(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, az $u_1(t)$ függvény lokálisan szig. mon. csökken, az $u_2(t)$ lok. szig. mon. nő.
- Konvexitás: $u''(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$, az $u_1(t)$ függvény lokálisan konvex, az $u_2(t)$ lok. konkáv.
- EE: $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 2.4 \end{pmatrix}$
- ETR: $\begin{pmatrix} 0.7376 \\ 2.3536 \end{pmatrix}$
- ET2: $\begin{pmatrix} 0.76 \\ 2.36 \end{pmatrix}$

b.) **Állapítsuk meg az alábbi differenciálegyenlet $u(t)$ megoldása komponenseinek lokális viselkedését (monotonitás, konvexitás) a kezdeti érték körül, majd adjunk numerikus közelítést $u(1.1)$ értékére Explicit Euler-módszer (EE), Explicit trapézszabály (ETR) és másodrendű Taylor-sorfejtés (ET2) alapján!**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2\cos(u_1) \\ u_2 \cdot u_2'(t) &= u_1 - 2 \\ u_1(1) &= 0 \\ u_2(1) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

- Monotonitás: $u'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, az $u_1(t)$ függvény lokálisan szig. mon. nő, az $u_2(t)$ lok. szig. mon. csökken.
- Konvexitás: $u''(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, az $u_1(t)$ függvény lokálisan konkáv, és az $u_2(t)$ is lok. konkáv.
- EE: $\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \end{pmatrix}$
- ETR: $\begin{pmatrix} 0.0898 \\ 0.7815 \end{pmatrix}$
- ET2: $\begin{pmatrix} 0.09 \\ 0.795 \end{pmatrix}$

c.) **Állapítsuk meg az alábbi differenciálegyenlet $u(t)$ megoldása komponenseinek lokális viselkedését (monotonitás, konvexitás) a kezdeti érték körül, majd adjunk numerikus közelítést $u(1.1)$ értékére Explicit Euler-módszer (EE), Explicit trapézszabály (ETR) és másodrendű Taylor-sorfejtés (ET2) alapján!**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= te^{u_1u_2} + t^2 \\ u_2'(t) &= tu_1 - u_2^2 \\ u_1(1) &= 0 \\ u_2(1) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- Monotonitás: $u'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, az $u_1(t)$ függvény lokálisan szig. mon. nő, az $u_2(t)$-nek lok. minimuma van.
- Konvexitás: $u''(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, az $u_1(t)$ függvény lokálisan konvex, és az $u_2(t)$ is lok. konvex.

- EE: $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ETR: $\begin{pmatrix} 0.2155 \\ 0.011 \end{pmatrix}$
- ET2: $\begin{pmatrix} 0.215 \\ 0.01 \end{pmatrix}$

d.) **Adjunk numerikus közelítést $u(3)$ értékére Implicit Euler-módszer (IE) alapján!**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= t - u_1 - 2u_2 \\ u_2'(t) &= 2t - 1 - u_1 - u_2 \\ u_1(1) &= -4 \\ u_2(1) &= -9 \end{aligned}\right\}$$

IE:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e.) **Adjunk numerikus közelítést $u(0.5)$ értékére Implicit Euler-módszer (IE) alapján!**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= -8u_1 - 4u_2 + 4t \\ u_2'(t) &= 4u_1 + 4u_2 + 2 \\ u_1(0) &= 1 \\ u_2(0) &= 3 \end{aligned}\right\}$$

IE:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Egyensúlyi pontok, lineáris stabilitásvizsgálat

Elméleti bevezetés

Adott az

$$u'(t) = f(u)$$

időfüggetlen (autonóm) differenciálegyenlet-rendszer, ahol $u(t)$ egy vektor értékű függvény.

Az u^* pontot a rendszer *egyensúlyi (stacionárius) pontjának* nevezzük, ha $f(u^*) = 0$. Ekkor $u(t) = u^*$ a differenciálegyenlet-rendszer egy megoldása.

Az $f(u)$ függvényt első rendig sorba fejtve u^* körül

$$f(u) = f(u^*) + \left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u=u^*} (u - u^*) + \mathcal{O}\left(\|u - u^*\|^2\right) = f_u(u^*) \cdot (u - u^*) + \mathcal{O}\left(\|u - u^*\|^2\right),$$

ahol

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

a Jacobi-mátrix. Az u^* pont kis környezetében a differenciálegyenlet az

$$(u - u^*)' = f_u(u^*) \cdot (u - u^*) + \mathcal{O}\left(\|u - u^*\|^2\right)$$

alakban írható, ezért itt a differenciálegyenlet megoldásainak viselkedését az $f_u(u^*)$ mátrix határozza meg. Jelölje $f_u(u^*)$ mátrix sajátértékeit $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Az u^* egyensúlyi pont stabilitásáról az alábbi tétel mondható ki.

- Ha minden sajátérték valós része negatív, azaz $\Re\lambda_i < 0$, akkor az u^* stacionárius pont *stabil*, vagyis az u^* pont kis környezetéből kiindulva az $u(t)$ megoldás u^* értékhez konvergál.
- Ha van olyan sajátérték, amire $\Re\lambda_i > 0$, akkor az u^* stacionárius pont *instabil*, vagyis az u^* ponthoz tetszőlegesen közel találunk olyan u_0 kezdeti értéket, amelyre $u(t)$ nem tart u^*-hoz. Ilyen kezdeti értékeket ad pl. az $u_0 := \epsilon \cdot s_i$ választás, ahol s_i jelöli azt a sajátvektort, ami egy pozitív valós részű λ_i-hez tartozik, ϵ pedig egy elegendően kicsi pozitív szám.

Feladatok

a.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjait és állapítsuk meg a típusukat.**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t)} &= \boldsymbol{6u_1 - 6u_2 - 30} \\ \boldsymbol{u_2'(t)} &= \boldsymbol{-6u_1 + 3u_2^2 - 15} \end{aligned}\right\}$$

A rendszer stacionárius pontjai: $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ és $u = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix: $u = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6u_2 \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = -6 \pm 6\sqrt{5}$, ezért ezen egyensúlyi pont instabil.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = 18 \pm 6\sqrt{5}$, ezért ezen egyensúlyi pont is instabil.

b.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjait és állapítsuk meg a típusukat.**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t)} &= \boldsymbol{-16u_1 - u_2^2} \\ \boldsymbol{u_2'(t)} &= \boldsymbol{-2u_2 - 2u_1u_2} \end{aligned}\right\}$$

A rendszer stacionárius pontjai: $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix: $u = \begin{pmatrix} -16 & -2u_2 \\ -2u_2 & -2(u_1+1) \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1 = -16, \lambda_2 = -2$, ezért ezen egyensúlyi pont stabil.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = -8 \pm 8\sqrt{2}$, ezért ezen egyensúlyi pont instabil.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = -8 \pm 8\sqrt{2}$, ezért ezen egyensúlyi pont is instabil.

c.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjait és állapítsuk meg a típusukat.**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t)} &= \boldsymbol{u_1^2 - u_2 - 10} \\ \boldsymbol{u_2'(t)} &= \boldsymbol{-u_1 + u_2 - 2} \end{aligned}\right\}$$

A rendszer stacionárius pontjai: $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ és $u = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix: $u = \begin{pmatrix} 2u_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{53}}{2}$, ezért ezen egyensúlyi pont instabil.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{53}}{2}$, ezért ezen egyensúlyi pont is instabil.

d.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjait és állapítsuk meg a típusukat.**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t) = u_1^2 + 2u_2} \\ \boldsymbol{u_2'(t) = -u_1 - 2u_2} \end{aligned}\right\}$$

A rendszer stacionárius pontjai: $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix: $u = \begin{pmatrix} 2u_1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm i$, ezért ezen egyensúlyi pont stabil.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = \pm\sqrt{2}$, ezért ezen egyensúlyi pont instabil.

e.) **Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjait és állapítsuk meg a típusukat.**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u_1'(t) = -u_1 + 2u_2 - 3} \\ \boldsymbol{u_2'(t) = -4u_1 + 3u_2 - 2} \end{aligned}\right\}$$

A rendszer stacionárius pontja: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix: $u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

A Jacobi-mátrix sajátértékei az $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pontban $\lambda_1, \lambda_2 = 1 \pm 2i$, ezért az egyensúlyi pont instabil.

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek és numerikus közelítéseik végtelenbeli viselkedése

Elméleti bevezetés

Tekintsük a

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= Au \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}\right\}$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert! Az $u(t)$ megoldás végtelenbeli viselkedéséről az alábbi tétel mondható ki. Legyenek az A mátrix sajátértékei: $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$.

- Ha minden sajátérték valós része negatív, azaz $\Re\lambda_i < 0$, akkor az $u(t)$ megoldás tetszőleges kezdeti érték esetén 0-hoz konvergál.

- Ha van olyan sajátérték, amire $\Re\lambda_i > 0$, akkor van olyan u_0 kezdeti érték, amelyre $u(t)$ nem lesz korlátos a $t \geq 0$ tartományon. Ilyen kezdeti értéket ad pl. az $u_0 := s_i$ választás, ahol s_i jelöli azt a sajátvektort, ami egy pozitív valós részű λ_i-hez tartozik.
- Ha minden sajátérték valós része negatív v. 0, azaz $\Re\lambda_i \leq 0$ és a 0 valós részű sajátértékek egyszeres sajátértékek, akkor tetszőleges kezdeti érték esetén az $u(t)$ megoldás korlátos lesz a $t \geq 0$ tartományon.
- Ha azonban van olyan 0 valós részű sajátérték, ami többszörös sajátérték, és nem található megfelelő számú lineárisan független sajátvektor, akkor van olyan u_0 választás, amire az $u(t)$ megoldás nem marad korlátos $t \geq 0$ esetén.

Az EE, IE, ITR, ETR módszerek mind felírhatóak az $u_{n+1} = r(\tau A)u_n$ alakban, ahol $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ jelöli a közelítő értékek sorozatát adott $\tau > 0$ időlépéssel. Az egyes módszerek esetén:

- EE: $r(\tau A) = I + \tau A$
- IE: $r(\tau A) = (I - \tau A)^{-1}$
- ITR: $r(\tau A) = (I - \frac{\tau A}{2})^{-1}(I + \frac{\tau A}{2})$
- ETR: $r(\tau A) = I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2}$

A numerikus módszerek által meghatározott $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ közelítő sorozat végtelenbeli viselkedéséről a következő tétel mondható ki:

- Ha minden λ_i sajátértékre $|r(\tau\lambda_i)| < 1$, akkor az u_n közelítő sorozat tetszőleges kezdeti érték esetén 0-hoz konvergál.
- Ha van olyan sajátérték, amire $|r(\tau\lambda_i)| > 1$, akkor van olyan u_0 kezdeti érték, amelyre az u_n sorozat nem lesz korlátos. Ilyen kezdeti értéket ad pl. az $u_0 := s_i$ választás, ahol s_i jelöli azt a sajátvektort, ami egy ilyen λ_i-hez tartozik.
- Ha minden λ_i sajátértékre $|r(\tau\lambda_i)| \leq 1$, és nincs olyan többszörös sajátérték, amire $|r(\tau\lambda_i)| = 1$, akkor az u_n közelítő sorozat tetszőleges kezdeti érték esetén korlátos marad.

Feladatok

a.) **Hogyan viselkedik az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldása különböző kezdeti értékek esetén a végtelenben?**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= -4u_1 + u_2 \\ u_2'(t) &= -13u_1 \end{aligned}\right\}$$

A sajátértékek $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$, azaz minden u_0 esetén 0-hoz konvergál a megoldás.

b.) **Hogyan viselkedik az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldása különböző kezdeti értékek esetén a végtelenben?**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= -u_1 + u_2 \\ u_2'(t) &= 4u_1 + 2u_2 \end{aligned}\right\}$$

A sajátértékek $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -2$, azaz van olyan u_0, amire nem lesz korlátos a megoldás. Ilyen választást ad az $u_0 = s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ választás.

c.) **Hogyan viselkedik az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldása különböző kezdeti értékek esetén a végtelenben?**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= 0 \\ u_2'(t) &= -3u_2 \end{aligned}\right\}$$

A sajátértékek $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = -3$, azaz minden u_0 esetén korlátos lesz a megoldás.

d.) **Hogyan viselkedik az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldása különböző kezdeti értékek esetén a végtelenben?**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_2 \\ u_2'(t) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A sajátértékek $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és nincs két lineárisan független sajátvektor, azaz van olyan u_0 kezdeti érték, amire nem lesz korlátos lesz a megoldás.

e.) **Hogyan viselkedik az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldása különböző kezdeti értékek esetén a végtelenben? Megőrzi-e valamelyik módszer az EE, IE, ITR, ETR közül ezt a tulajdonságot $\tau = 3$ időlépéssel?**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_2 \\ u_2'(t) &= -u_2 \end{aligned}\right\}$$

A sajátértékek $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, azaz minden u_0 kezdeti értékre korlátos marad a megoldás.

- EE: $|r(\tau\lambda_1)| = |1 + 3 \cdot 0| = 1$ és $|r(\tau\lambda_2)| = |1 + 3 \cdot (-1)| = 2 > 1$, azaz van olyan u_0, amire nem lesz korlátos a megoldást közelítő sorozat.
- IE: $|r(\tau\lambda_1)| = \left|\frac{1}{1-3\cdot 0}\right| = 1$ és $|r(\tau\lambda_2)| = \left|\frac{1}{1-3\cdot(-1)}\right| = 0.25 < 1$, azaz minden kezdeti érték esetén korlátos marad a közelítő sorozat.
- ITR: $|r(\tau\lambda_1)| = \left|\frac{1+\frac{3\cdot 0}{2}}{1-\frac{3\cdot 0}{2}}\right| = 1$ és $|r(\tau\lambda_2)| = \left|\frac{1+\frac{3\cdot(-1)}{2}}{1-\frac{3\cdot(-1)}{2}}\right| = 0.2 < 1$ azaz minden kezdeti érték esetén korlátos marad a közelítő sorozat.
- ETR:$|r(\tau\lambda_1)| = \left|1 + 3 \cdot 0 + \frac{1}{2}(3 \cdot 0)^2\right| = 1$ és $|r(\tau\lambda_2)| = \left|1 + 3 \cdot (-1) + \frac{1}{2}(3 \cdot (-1))^2\right| = 2.5 > 1$, azaz azaz van olyan u_0, amire nem lesz korlátos a megoldást közelítő sorozat.

f.) **Hogyan viselkedik az alábbi differenciálegyenlet-rendszer $u(t)$ megoldása különböző kezdeti értékek esetén a végtelenben? Megőrzi-e valamelyik módszer az EE, IE, ITR, ETR közül ezt a tulajdonságot $\tau = 0.01$ időlépéssel?**

$$\left.\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2 \\ u_2'(t) &= -1000u_1 - 1001u_2 \end{aligned}\right\}$$

A sajátértékek $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1000$, azaz minden u_0 esetén 0-hoz konvergál a megoldás.

- EE: $|r(\tau\lambda_1)| = |1 + 0.01 \cdot (-1)| = 0.99 < 1$ és $|r(\tau\lambda_2)| = |1 + 0.01 \cdot (-1000)| = 9 > 1$, azaz van olyan u_0, amire nem lesz korlátos a megoldást közelítő sorozat.
- IE: $|r(\tau\lambda_1)| = \left|\frac{1}{1-0.01\cdot(-1)}\right| = \frac{100}{101} < 1$ és $|r(\tau\lambda_2)| = \left|\frac{1}{1-0.01\cdot(-1000)}\right| = \frac{1}{11} < 1$, azaz minden kezdeti érték esetén 0-hoz konvergál a megoldás.
- ITR: $|r(\tau\lambda_1)| = \left|\frac{1+\frac{0.01\cdot(-1)}{2}}{1-\frac{0.01\cdot(-1)}{2}}\right| = \frac{199}{201} < 1$ és $|r(\tau\lambda_2)| = \left|\frac{1+\frac{0.01\cdot(-1000)}{2}}{1-\frac{0.01\cdot(-1000)}{2}}\right| = \frac{2}{3} < 1$, azaz minden kezdeti érték esetén 0-hoz konvergál a megoldás.
- ETR: $|r(\tau\lambda_1)| = |1 + 0.01 \cdot (-1) + \frac{1}{2}(0.01 \cdot (-1))^2| = 0.99005 < 1$ és $|r(\tau\lambda_1)| = |1 + 0.01 \cdot (-1000) + \frac{1}{2}(0.01 \cdot (-1000))^2| = 41 > 1$, azaz azaz van olyan u_0, amire nem lesz korlátos a megoldást közelítő sorozat.

Peremérték-feladatok numerikus közelítő megoldása a véges differenciák módszerével

Elméleti bevezetés

Tekintsük az

$$\left.\begin{aligned} au_{xx}(x) + bu_x(x) + cu(x) &= g(x) \quad (0 < x < L) \\ u(0) &= p_0 \\ u(L) &= p_L \end{aligned}\right\}$$

peremérték-feladatot! Osszuk fel a $[0, L]$ intervallumot n egyenlő hosszúságú részre az $x_i = \frac{iL}{n}$ $(0 \leq i \leq n)$ rácspontok felvételével. Két szomszédos rácspont távolsága a $h = \frac{L}{n}$ rácsállandó. Jelölje az ismeretlen függvény közelítő értékét az x_i rácspontban u_i, azaz $u(x_i) \approx u_i$ $(0 \leq i \leq n)$.

A peremfeltételeket expliciten előírjuk, azaz $u_0 = p_0$ és $u_n = p_L$.

Az első deriváltak közelítésére az alábbi sémák valamelyikét használjuk:

- előrenéző: $u_x(x_i) \approx \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$
- hátranéző: $u_x(x_i) \approx \frac{u_i-u_{i-1}}{h}$
- centrális: $u_x(x_i) \approx \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$,

a második deriváltak közelítésére a

- centrális: $u_{xx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}$

sémát alkalmazzuk. Az $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ ismeretlenek meghatározása céljából minden belső x_i pontban $(1 \leq i \leq n-1)$ felírjuk az egyenletet a közelítő deriváltakkal. Az u_i közelítő függvényértékeket a lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja.

Feladatok

a.) **Adjunk közelítő megoldást a**

$$\left.\begin{aligned} -4u_{xx} - 8u_x + 3u &= x + 4 \quad (0 < x < 6) \\ u(0) &= 1 \\ u(6) &= 5 \end{aligned}\right\}$$

peremérték-feladatra két belső pont alapján! Az első deriváltakat közelítsük előrenéző, a második deriváltakat centrális sémával, a kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon!
Írjuk fel a megoldást közelítő egyenletrendszer mátrixos alakját 5 belső pont esetén is!

A szakasz hossza $L = 6$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 2$. A peremfeltételek alapján $u_0 = 0$ és $u_3 = 5$. Az egyenlet az x_1 pontban:

$$\begin{aligned} -4\left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{2^2}\right) - 8\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right) + 3u_1 &= 2 + 4 \\ 9u_1 - 5u_2 &= 7, \end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\begin{aligned} -4\left(\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{2^2}\right) - 8\left(\frac{u_3 - u_2}{2}\right) + 3u_2 &= 4 + 4 \\ -u_1 + 9u_2 &= 33. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u_1 = 3, u_2 = 4$.

Ha a szakaszt $n = 6$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 1$. Az $Au = f$ lineáris egyenletrendszer mátrixa:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-4) \cdot \frac{(-2)}{h^2} + (-8) \cdot \frac{(-1)}{h} + 3 \cdot 1 = 19 & \text{ha } 1 \le i \le 5 \text{ és } j = i \\ (-4) \cdot \frac{1}{h^2} + (-8) \cdot \frac{1}{h} = -12 & \text{ha } 1 \le i \le 5 \text{ és } j = i+1 \\ (-4) \cdot \frac{1}{h^2} = -4 & \text{ha } 1 \le i \le 5 \text{ és } j = i-1 \\ 1 & \text{ha } i = j = 0 \\ 1 & \text{ha } i = j = 6 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az egyenletrendszer jobb oldala:

$$f_i = \begin{cases} x_i + 4 & \text{ha } 1 \le i \le 5 \\ 1 & \text{ha } i = 0 \\ 5 & \text{ha } i = 6. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -4 & 19 & -12 & & & & \\ & -4 & 19 & -12 & & & \\ & & -4 & 19 & -12 & & \\ & & & -4 & 19 & -12 & \\ & & & & -4 & 19 & -12 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b.) **Adjunk közelítő megoldást a**

$$\left.\begin{aligned} -2u_{xx} - 4u_x + 3u = 9x - 15 \quad (0 < x < 3) \\ u(0) = 1 \\ u(3) = 8 \end{aligned}\right\}$$

peremérték-feladatra két belső pont alapján! Mind az első, mind a második deriváltakat közelítsük centrális sémával, a kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon!
Írjuk fel a megoldást közelítő egyenletrendszer mátrixos alakját 5 belső pont esetén is!

A szakasz hossza $L = 3$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 1$. A peremfeltételek alapján $u_0 = 1$ és $u_3 = 8$. Az egyenlet az x_1 pontban:

$$-2\left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{1^2}\right) - 4\left(\frac{u_2 - u_0}{2 \cdot 1}\right) + 3u_1 = 9 \cdot 1 - 15$$
$$7u_1 - 4u_2 = -6,$$

valamint az x_2 pontban:

$$-2\left(\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{1^2}\right) - 4\left(\frac{u_3 - u_1}{2 \cdot 1}\right) + 3u_2 = 9 \cdot 2 - 15$$
$$7u_2 = 35.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u_1 = 2, u_2 = 5$.

Ha a szakaszt $n = 6$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = \frac{1}{2}$. Az $Au = f$ lineáris egyenletrendszer mátrixa:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-2) \cdot \frac{(-2)}{h^2} + 3 \cdot 1 = 19 & \text{ha } 1 \le i \le 5 \text{ és } j = i \\ (-2) \cdot \frac{1}{h^2} + (-4) \cdot \frac{1}{2h} = -12 & \text{ha } 1 \le i \le 5 \text{ és } j = i+1 \\ (-2) \cdot \frac{1}{h^2} + (-4) \cdot \frac{(-1)}{2h} = -4 & \text{ha } 1 \le i \le 5 \text{ és } j = i-1 \\ 1 & \text{ha } i = j = 0 \\ 1 & \text{ha } i = j = 6 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az egyenletrendszer jobb oldala:

$$f_i = \begin{cases} 9x_i - 15 & \text{ha } 1 \leq i \leq 5 \\ 1 & \text{ha } i = 0 \\ 8 & \text{ha } i = 6. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -4 & 19 & -12 & & & & \\ & -4 & 19 & -12 & & & \\ & & -4 & 19 & -12 & & \\ & & & -4 & 19 & -12 & \\ & & & & -4 & 19 & -12 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{21}{2} \\ -\frac{12}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{6}{2} \\ \frac{15}{2} \\ 8 \end{pmatrix}.$$

c.) **Adjunk közelítő megoldást a**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{-8u_{xx} - 6u_x + 3u} &= \boldsymbol{\frac{7x-16}{2}} \qquad \boldsymbol{(0 < x < 6)} \\ \boldsymbol{u(0)} &= \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{u(6)} &= \boldsymbol{8} \end{aligned}\right\}$$

peremérték-feladatra két belső pont alapján! Az első deriváltakat közelítsük hátranéző, a második deriváltakat centrális sémával, a kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon!
Írjuk fel a megoldást közelítő egyenletrendszer mátrixos alakját 5 belső pont esetén is!

A szakasz hossza $L = 6$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 2$. A peremfeltételek alapján $u_0 = 1$ és $u_3 = 8$. Az egyenlet az x_1 pontban:

$$\begin{aligned} -8\left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{2^2}\right) - 6\left(\frac{u_1 - u_0}{2}\right) + 3u_1 &= \frac{7 \cdot 2 - 16}{2} \\ 4u_1 - 2u_2 &= -2 \\ 2u_1 - u_2 &= -1, \end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\begin{aligned} -8\left(\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{2^2}\right) - 6\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right) + 3u_2 &= \frac{7 \cdot 4 - 16}{2} \\ u_1 + 4u_2 &= 22. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u_1 = 2, u_2 = 5$.

Ha a szakaszt $n = 6$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 1$. Az $Au = f$ lineáris egyenletrendszer mátrixa:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-8) \cdot \frac{(-2)}{h^2} + (-6) \cdot \frac{1}{h} + 3 \cdot 1 = 13 & \text{ha } 1 \leq i \leq 5 \text{ és } j = i \\ (-8) \cdot \frac{1}{h^2} = -8 & \text{ha } 1 \leq i \leq 5 \text{ és } j = i + 1 \\ (-8) \cdot \frac{1}{h^2} + (-6) \cdot \frac{(-1)}{h} = -2 & \text{ha } 1 \leq i \leq 5 \text{ és } j = i - 1 \\ 1 & \text{ha } i = j = 0 \\ 1 & \text{ha } i = j = 6 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az egyenletrendszer jobb oldala:

$$f_i = \begin{cases} \frac{7x_i - 16}{2} & \text{ha } 1 \leq i \leq 5 \\ 1 & \text{ha } i = 0 \\ 8 & \text{ha } i = 6. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ -2 & 13 & -8 & & & & \\ & -2 & 13 & -8 & & & \\ & & -2 & 13 & -8 & & \\ & & & -2 & 13 & -8 & \\ & & & & -2 & 13 & -8 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{2} \\ -1 \\ \frac{5}{2} \\ 6 \\ \frac{19}{2} \\ 8 \end{pmatrix}.$$

d.) **Adjunk közelítő megoldást a**

$$\left.\begin{aligned} -2u_{xx} - 4u_x + 3u = 3x^2 - 9 \quad (0 < x < 3) \\ u(0) = 1 \\ u(3) = 8 \end{aligned}\right\}$$

peremérték-feladatra két belső pont alapján! Mind az első, mind a második deriváltakat közelítsük centrális sémával, a kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon!
Írjuk fel a megoldást közelítő egyenletrendszer mátrixos alakját 4 belső pont esetén is!

A szakasz hossza $L = 3$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 1$. A peremfeltételek alapján $u_0 = 1$ és $u_3 = 8$. Az egyenlet az x_1 pontban:

$$-2\left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{1^2}\right) - 4\left(\frac{u_2 - u_0}{2 \cdot 1}\right) + 3u_1 = 3 \cdot 1^2 - 9$$
$$7u_1 - 4u_2 = -6,$$

valamint az x_2 pontban:

$$-2\left(\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{1^2}\right) - 4\left(\frac{u_3 - u_1}{2 \cdot 1}\right) + 3u_2 = 3 \cdot 2^2 - 9$$
$$7u_2 = 35.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u_1 = 2, u_2 = 5$.

Ha a szakaszt $n = 5$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = \frac{3}{5}$. Az $Au = f$ lineáris egyenletrendszer mátrixa:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-2) \cdot \frac{(-2)}{h^2} + 3 \cdot 1 = \frac{127}{9} & \text{ha } 1 \le i \le 4 \text{ és } j = i \\ (-2) \cdot \frac{1}{h^2} + (-4) \cdot \frac{1}{2h} = -\frac{80}{9} & \text{ha } 1 \le i \le 4 \text{ és } j = i + 1 \\ (-2) \cdot \frac{1}{h^2} + (-4) \cdot \frac{(-1)}{2h} = -\frac{20}{9} & \text{ha } 1 \le i \le 4 \text{ és } j = i - 1 \\ 1 & \text{ha } i = j = 0 \\ 1 & \text{ha } i = j = 5 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az egyenletrendszer jobb oldala:

$$f_i = \begin{cases} 3x_i^2 - 9 & \text{ha } 1 \le i \le 4 \\ 1 & \text{ha } i = 0 \\ 8 & \text{ha } i = 5. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -\frac{20}{9} & \frac{127}{9} & -\frac{80}{9} & & & \\ & -\frac{20}{9} & \frac{127}{9} & -\frac{80}{9} & & \\ & & -\frac{20}{9} & \frac{127}{9} & -\frac{80}{9} & \\ & & & -\frac{20}{9} & \frac{127}{9} & -\frac{80}{9} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7.92 \\ -4.68 \\ 0.72 \\ 8.28 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Parciális differenciálegyenletek numerikus közelítő megoldása a véges differenciák módszerével

Elméleti bevezetés

Tekintsük az

$$\left.\begin{aligned} u_t(t,x) &= \tilde{a}u_{xx}(t,x) + \tilde{b}u_x(t,x) + \tilde{c}u(t,x) + g(x) \quad (0 < x < L) \\ u(0,x) &= w_0(x) \quad (0 \le x \le L) \\ u(t,0) &= p_0(t) \quad (t > 0) \\ u(t,L) &= p_L(t) \quad (t > 0) \end{aligned}\right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot! Osszuk fel a $[0, L]$ intervallumot n egyenlő hosszúságú részre az $x_i = \frac{iL}{n}$ $(0 \le i \le n)$ rácspontok felvételével. Két szomszédos rácspont távolsága a $h = \frac{L}{n}$ rácsállandó. Jelölje az ismeretlen függvény közelítő értékét az x_i rácspontban és a $t > 0$ időpontban $u_i(t)$, azaz $u(t, x_i) \approx u_i(t)$ $(0 < t, 0 \le i \le n)$.

A peremfeltételeket most is expliciten előírjuk, azaz $u_0(t) = p_0(t)$ és $u_n(t) = p_L(t)$ minden $t > 0$-ra. A térbeli deriváltak közelítésére az előző fejezetben tárgyalt sémák valamelyikét alkalmazzuk. Így az $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{n-1}(t)$ függvényekre kapunk egy lineáris differenciálegyenlet-rendszert, amelynek közelítő megoldását megkaphatjuk az EE, IE, ITR, ETR módszerek valamelyikével.

Speciálisan az IE módszer esetén $u_1(t_{n+1}), u_2(t_{n+1}), \ldots, u_{n-1}(t_{n+1})$ értékét úgy kapjuk meg a korábbi időpontbeli $u_1(t_n(t_n), u_2(t_n), \ldots, u_{n-1}(t_n)$ értékekből, hogy a t_{n+1} időpontban a belső x_i pontok mindegyikében felírjuk az egyenletet a megfelelő sémával közelített térbeli deriváltakkal, az időderiváltat pedig az

- $u_t(t_{n+1}, x_i) \approx \frac{u_i(t_{n+1}) - u_i(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$

kifejezéssel közelítjük, majd megoldjuk az így kapott lineáris egyenletrendszert.

Feladatok

a.) **Adjunk közelítést $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3})$ értékére két belső pont és egyetlen IE időlépés alapján, ha $u(t, x)$ a**

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 87x + 39 \quad (0 < x < 1) \\ u(0,x) &= 9x - 3 \quad (0 \le x \le 1) \\ u(t,0) &= 0 \quad (t > 0) \\ u(t,1) &= 4 \quad (t > 0) \end{aligned}\right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladat megoldása. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

A szakasz hossza $L = 1$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = \frac{1}{3}$, az időlépés nagysága $t_1 - t_0 = \frac{1}{10}$. A kezdeti feltétel szerint $u(t_0, x_1) = 0$ és $u(t_0, x_2) = 3$. A peremfeltételek értelmében $u(t_1, x_0) = 0$ és $u(t_1, x_3) = 4$. Jelölje a t_1 időpontban a közelítő függvényértékeket $a \approx u(t_1, x_1)$ és $b \approx u(t_1, x_2)$. Az egyenlet a t_1 időpontban és az x_1 pontban:

$$\frac{a-0}{\frac{1}{10}} = \left(\frac{0 - 2a + b}{\frac{1}{9}}\right) - 87 \cdot \frac{1}{3} + 39$$
$$28a - 9b = 10,$$

valamint az x_2 pontban:

$$\frac{b-3}{\frac{1}{10}} = \left(\frac{a - 2b + 4}{\frac{1}{9}}\right) - 87 \cdot \frac{2}{3} + 39$$
$$-9a + 28b = 47,$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = 1, b = 2$. A közelítő függvényérték: $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3}) \approx 2$.

b.) **Adjunk közelítést $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3})$ értékére két belső pont és egyetlen IE időlépés alapján, ha $u(t,x)$ a**

$$\left.\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} + \frac{10-90x^2}{3} \quad (0<x<1) \\ u(0,x) &= 27x^2(1-x) \quad (0 \le x \le 1) \\ u(t,0) &= 1 \quad (t>0) \\ u(t,1) &= 4 \quad (t>0) \end{aligned}\right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladat megoldása. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

A szakasz hossza $L=1$, a szakaszt $n=3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h=\frac{1}{3}$, az időlépés nagysága $t_1-t_0=\frac{1}{10}$. A kezdeti feltétel szerint $u(t_0,x_1)=2$ és $u(t_0,x_2)=4$. A peremfeltételek értelmében $u(t_1,x_0)=1$ és $u(t_1,x_3)=4$. Jelölje a t_1 időpontban a közelítő függvényértékeket $a \approx u(t_1,x_1)$ és $b \approx u(t_1,x_2)$. Az egyenlet a t_1 időpontban és az x_1 pontban:

$$\begin{aligned} \frac{a-2}{\frac{1}{10}} &= 2\left(\frac{1-2a+b}{\frac{1}{9}}\right) + \frac{10-90\left(\frac{1}{3}\right)^2}{3} \\ 46a-18b &= 38 \\ 23a-9b &= 19, \end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\begin{aligned} \frac{b-4}{\frac{1}{10}} &= 2\left(\frac{a-2b+4}{\frac{1}{9}}\right) + \frac{10-90\left(\frac{2}{3}\right)^2}{3} \\ -18a+46b &= 102 \\ -9a+23b &= 51, \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a=2, b=3$. A közelítő függvényérték: $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3}) \approx 3$.

c.) **Adjunk közelítést $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3})$ értékére két belső pont és egyetlen IE időlépés alapján, ha $u(t,x)$ a**

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 87x + 39 \quad (0<x<1) \\ u(0,x) &= \begin{cases} 0, \text{ ha } 0 \le x < 0.4 \\ 3, \text{ ha } 0.4 \le x < 0.8 \\ 4, \text{ ha } 0.8 \le x \le 1 \end{cases} \\ u(t,0) &= 0 \quad (t>0) \\ u(t,1) &= 4 \quad (t>0) \end{aligned}\right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladat megoldása. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

A szakasz hossza $L=1$, a szakaszt $n=3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h=\frac{1}{3}$, az időlépés nagysága $t_1-t_0=\frac{1}{10}$. A kezdeti feltétel szerint $u(t_0,x_1)=0$ és $u(t_0,x_2)=3$. A peremfeltételek értelmében $u(t_1,x_0)=0$ és $u(t_1,x_3)=4$. Jelölje a t_1 időpontban a közelítő függvényértékeket $a \approx u(t_1,x_1)$ és $b \approx u(t_1,x_2)$. Az egyenlet a t_1 időpontban és az x_1 pontban:

$$\begin{aligned} \frac{a-0}{\frac{1}{10}} &= \left(\frac{0-2a+b}{\frac{1}{9}}\right) - 87\cdot\frac{1}{3} + 39 \\ 28a-9b &= 10, \end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\frac{b-3}{\frac{1}{10}} = \left(\frac{a-2b+4}{\frac{1}{9}}\right) - 87\cdot\frac{2}{3} + 39$$

$$-9a + 28b = 47,$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = 1, b = 2$. A közelítő függvényérték: $u(\frac{1}{10}, \frac{2}{3}) \approx 2$.

d.) **Adjunk közelítést $u(\frac{1}{10}, \frac{1}{3})$ értékére két belső pont és egyetlen IE időlépés alapján, ha $u(t,x)$ a**

$$\left.\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} - 228x + 92 \quad (0 < x < 1) \\ u(0,x) &= \begin{cases} 10, \text{ ha } 0 \le x < 0.8 \\ 0, \text{ ha } 0.8 \le x \le 1 \end{cases} \\ u(t,0) &= 10 \quad (t > 0) \\ u(t,1) &= 0 \quad (t > 0) \end{aligned}\right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladat megoldása. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

A szakasz hossza $L = 1$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = \frac{1}{3}$, az időlépés nagysága $t_1 - t_0 = \frac{1}{10}$. A kezdeti feltétel szerint $u(t_0, x_1) = 10$ és $u(t_0, x_2) = 10$. A peremfeltételek értelmében $u(t_1, x_0) = 10$ és $u(t_1, x_3) = 0$. Jelölje a t_1 időpontban a közelítő függvényértékeket $a \approx u(t_1, x_1)$ és $b \approx u(t_1, x_2)$. Az egyenlet a t_1 időpontban és az x_1 pontban:

$$\begin{aligned} \frac{a - 10}{\frac{1}{10}} &= 2\left(\frac{10 - 2a + b}{\frac{1}{9}}\right) - 228 \cdot \frac{1}{3} + 92 \\ 46a - 18b &= 296 \\ 23a - 9b &= 148, \end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\begin{aligned} \frac{b - 10}{\frac{1}{10}} &= 2\left(\frac{a - 2b + 0}{\frac{1}{9}}\right) - 228 \cdot \frac{2}{3} + 92 \\ -18a + 46b &= 40 \\ -9a + 23b &= 20, \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = 8, b = 4$. A közelítő függvényérték: $u(\frac{1}{10}, \frac{1}{3}) \approx 8$.