

Ipari matematika 2. gyakorlófeladatok

2014. december 5.

A feladatok megoldása általában többféle úton is kiszámítható.

Interpoláció

- a.) **Polinom-interpoláció segítségével adjunk közelítést $\sin \frac{\pi}{4}$ értékére a $\sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ függvényértékek alapján!**

A közelíteni kívánt függvény az $f(x) = \sin x$. Az interpolációs alappontok $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}$. A három pontra illesztett interpolációs polinom (Lagrange-interpolációval):

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^2 f(x_i) \cdot L_i^{(2)}(x) = 0 \cdot \frac{(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{3})}{(0 - \frac{\pi}{6})(0 - \frac{\pi}{3})} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6} - 0)(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{3} - 0)(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} \\ &= \frac{9\sqrt{3} - 18}{\pi^2} x^2 + \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3} + 6}{\pi} x. \end{aligned}$$

A közelítő függvényérték:

$$\sin \frac{\pi}{4} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx p\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{16}(2 + \sqrt{3}) \approx 0.6998.$$

A pontos függvényérték:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071.$$

- b.) **Határozzuk meg a $(-1, 4), (0, 3), (1, 6)$ pontokra illeszkedő interpolációs polinomot!**

A pontokra illesztett interpolációs polinom (Lagrange-interpolációval):

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^2 y_i \cdot L_i^{(2)}(x) = 4 \cdot \frac{(x - 0)(x - 1)}{((-1) - 0)((-1) - 1)} + 3 \cdot \frac{(x - (-1))(x - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} + 6 \cdot \frac{(x - (-1))(x - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} \\ &= 2x^2 + x + 3. \end{aligned}$$

- c.) **Határozzuk meg az $(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)$ pontokra illeszkedő interpolációs polinomot!**

Vegyük észre, hogy a pontok illeszkednek az $f(x) = x^2$ függvényre. Az interpoláció egyértelmősége miatt a pontokon áthaladó legfeljebb negyedfokú polinom a

$$p(x) = x^2.$$

- d.) **Határozzuk meg az $\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y_i & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$ pontokra illeszkedő interpolációs polinomot!**

Vegyük észre, hogy a $p^*(x) = 1$ polinom majdnem minden pontra illeszkedik, egyetlen pontot kivéve. Tegyük megoldássá úgy, hogy abban az egy pontban korrigáljuk, miközben a többi pontban változatlanul hagyjuk a polinom értékét. Ezt az $x_3 = 3$ alapponthoz tartozó Lagrange-alappolinommal tehetjük meg:

$$p(x) = p^*(x) + 1 \cdot L_3^{(3)}(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + 1 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 1.$$

Numerikus integrálás

- a.) **Adjunk közelítést az $\int_1^3 \sqrt{x} \, dx$ integrál értékére az $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ alappontokban felvett függvényértékek alapján!**

Az integrálandó függvény az $f(x) = \sqrt{x}$. Az integrál közelítése a

$$\int_1^3 f(x) \, dx \approx \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i)$$

formula alapján történik, ahol

$$w_i = \int_1^3 L_i^{(2)} \, dx.$$

A kapott együtthatók:

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_1^3 L_0^{(2)} \, dx = \int_1^3 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (x^2 - 5x + 6) \, dx = \frac{1}{3} \\ w_1 &= \int_1^3 L_1^{(2)} \, dx = \int_1^3 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \, dx = - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) \, dx = \frac{4}{3} \\ w_2 &= \int_1^3 L_2^{(2)} \, dx = \int_1^3 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (x^2 - 3x + 2) \, dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Az integrál közelítő értéke:

$$\int_1^3 f(x) \, dx \approx \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i) = \frac{1}{3}\sqrt{1} + \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 2.7963,$$

és pontos értéke:

$$\int_1^3 f(x) \, dx \approx \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 \approx 2.7974.$$

- b.) **Adjunk közelítést az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ integrál értékére az $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2}$ alappontokban felvett függvényértékek alapján!**

Az integrálandó függvény $f(x) = \sin x$, az intervallum hossza $h = \frac{\pi}{2}$. Az integrál közelítése a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx \approx \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i) = h \sum_{i=0}^2 v_i f(x_i)$$

formula alapján történik, ahol a v_i együtthatók függetlenek h -tól, értékük egyedül attól függ, hogy az x_i alappontok milyen arányban osztják az intervallumot. Vezessük be a $z_0 = 0, z_1 = \frac{2}{3}, z_2 = 1$ pontokat, melyek a $[0, 1]$ intervallumot éppen olyan arányban osztják, mint az x_i alappontok a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumot. Számítsuk ki a v_i együtthatókat a z_i alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomok segítségével:

$$v_i = \int_0^1 L_i^{(2)} \, dz.$$

A kapott együtthatók:

$$\begin{aligned}v_0 &= \int_0^1 L_0^{(2)} dz = \int_0^1 \frac{(z - \frac{2}{3})(z - 1)}{(0 - \frac{2}{3})(0 - 1)} dz = \frac{3}{2} \int_0^1 \left(z^2 - \frac{5}{3}z + \frac{2}{3} \right) dz = \frac{1}{4} \\v_1 &= \int_0^1 L_1^{(2)} dz = \int_0^1 \frac{(z - 0)(z - 1)}{(\frac{2}{3} - 0)(\frac{2}{3} - 1)} dz = -\frac{9}{2} \int_0^1 (z^2 - z) dz = \frac{3}{4} \\v_2 &= \int_0^1 L_2^{(2)} dz = \int_0^1 \frac{(z - 0)(z - \frac{2}{3})}{(1 - 0)(1 - \frac{2}{3})} dz = \frac{3}{2} \int_0^1 \left(z^2 - \frac{2}{3}z \right) dz = 0.\end{aligned}$$

Az integrál közelítő értéke:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^2 v_i f(x_i) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 0 + \frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{3} + 0 \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}\pi}{16} \approx 1.020,$$

és pontos értéke:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \approx [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

c.) **Határozzuk meg az $\int_0^h f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^4 v_i f(x_i)$ kvadratúra-képlet együtthatóit, ha az alappontok $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}h, x_2 = \frac{1}{2}h, x_3 = \frac{3}{4}h, x_4 = h$!**

A v_i együtthatók a

$$v_i = \int_0^1 L_i^{(4)} dz$$

képlettel számíthatóak, ahol Lagrange-alappolinomokat a $z_0 = 0, z_1 = \frac{1}{4}, z_2 = \frac{1}{2}, z_3 = \frac{3}{4}, z_4 = 1$ alappontokra írjuk fel. A kapott együtthatók:

$$\begin{aligned}v_0 &= \int_0^1 L_0^{(4)} dz = \int_0^1 \frac{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})(z - \frac{3}{4})(z - 1)}{(0 - \frac{1}{4})(0 - \frac{1}{2})(0 - \frac{3}{4})(0 - 1)} dz = \frac{32}{3} \int_0^1 \left(z^4 - \frac{5}{2}z^3 + \frac{35}{16}z^2 - \frac{25}{32}z + \frac{3}{32} \right) dz = \frac{7}{90} \\v_1 &= \int_0^1 L_1^{(4)} dz = \int_0^1 \frac{(z - 0)(z - \frac{1}{2})(z - \frac{3}{4})(z - 1)}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})(\frac{1}{4} - 1)} dz = -\frac{128}{3} \int_0^1 \left(z^4 - \frac{5}{2}z^3 + \frac{35}{16}z^2 - \frac{25}{32}z + \frac{3}{32} \right) dz = \frac{16}{45}\end{aligned}$$

mivel a pontok az intervallum középpontjára szimmetrikusan helyezkednek el:

$$\begin{aligned}v_3 &= v_1 = \frac{16}{45} \\v_4 &= v_0 = \frac{7}{90}\end{aligned}$$

mivel a kvadratúra-képlet a konstans 1 függvény integrálját helyesen adja vissza:

$$v_2 = 1 - v_0 - v_1 - v_3 - v_4 = \frac{2}{15}.$$

Numerikus differenciálás

a.) **Adjunk közelítést az $f(x) = 2^x$ függvény deriváltjára az $x^* = 1.5$ helyen az $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ pontokban felvett függvényértékek alapján!**

A derivált közelítése az

$$f'(x^*) \approx \sum_{i=0}^3 w_i f(x_i)$$

formula szerint történik, ahol

$$w_i = \left(L_i^{(3)} \right)' (x^*).$$

A kapott együtthatók:

$$\begin{aligned} w_0 &= \left(L_0^{(3)} \right)' (x^*) = \frac{d \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}}{dx} \Big|_{x=x^*} = -\frac{1}{6} (3x^{*2} - 12x^* + 11) = \frac{1}{24} \\ w_1 &= \left(L_1^{(3)} \right)' (x^*) = \frac{d \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}}{dx} \Big|_{x=x^*} = \frac{1}{2} (3x^{*2} - 5x^* + 6) = -\frac{9}{8} \\ w_2 &= \left(L_2^{(3)} \right)' (x^*) = \frac{d \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}}{dx} \Big|_{x=x^*} = -\frac{1}{2} (3x^{*2} - 4x^* + 3) = \frac{9}{8} \\ w_3 &= \left(L_3^{(3)} \right)' (x^*) = \frac{d \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}}{dx} \Big|_{x=x^*} = -\frac{1}{6} (3x^{*2} - 12x^* + 11) = -\frac{1}{24}. \end{aligned}$$

A derivált közelítő értéke:

$$f'(x^*) \approx \sum_{i=0}^3 w_i f(x_i) = \frac{1}{24} 2^0 - \frac{9}{8} 2^1 + \frac{9}{8} 2^2 - \frac{1}{24} 2^3 = \frac{47}{24} \approx 1.9583,$$

és pontos értéke:

$$f'(x^*) = \ln(2) 2^{x^*} = 2\sqrt{2} \ln(2) \approx 1.9605.$$

b.) **Adjunk közelítést $\sin'(\frac{\pi}{6})$ derivált értékére az $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2}$ alappontokban felvett függvényértékek alapján!**

A deriválandó függvény az $f(x) = \sin x$, az intervallum hossza $h = \frac{\pi}{2}$, a deriváltat az $x^* = \frac{\pi}{6}$ helyen keressük. A derivált közelítése az

$$f'(x^*) \approx \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^2 v_i f(x_i)$$

formula alapján történik, ahol a v_i együtthatók függetlenek h -tól, értékük egyedül attól függ, hogy az x_i alappontok, valamint az x^* pont milyen arányban osztják az intervallumot. Vezessük be a $z_0 = 0, z_1 = \frac{2}{3}, z_2 = 1, z^* = \frac{1}{3}$ pontokat, melyek a $[0, 1]$ intervallumot éppen olyan arányban osztják, mint az x_0, x_1, x_2, x^* pontok a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumot. Számítsuk ki a v_i együtthatókat a z_i alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomok segítségével:

$$v_i = \left(L_i^{(2)} \right)' (z^*).$$

A kapott együtthatók:

$$\begin{aligned} v_0 &= \left(L_0^{(2)} \right)' (z^*) = \frac{d \frac{(z-\frac{2}{3})(z-1)}{(0-\frac{2}{3})(0-1)}}{dz} \Big|_{z=z^*} = \frac{3}{2} \left(2z^* - \frac{5}{3} \right) = -\frac{3}{2} \\ v_1 &= \left(L_1^{(2)} \right)' (z^*) = \frac{d \frac{(z-0)(z-1)}{(\frac{2}{3}-0)(\frac{2}{3}-1)}}{dz} \Big|_{z=z^*} = -\frac{9}{2} (2z^* - 1) = \frac{3}{2} \\ v_2 &= \left(L_2^{(2)} \right)' (z^*) = \frac{d \frac{(z-0)(z-\frac{2}{3})}{(1-0)(1-\frac{2}{3})}}{dz} \Big|_{z=z^*} = 3 \left(2z^* - \frac{2}{3} \right) = 0. \end{aligned}$$

A derivált közelítő értéke:

$$f'(x^*) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=0}^2 v_i f(x_i) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{3}{2} \sin 0 + \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{3} + 0 \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.827,$$

és pontos értéke:

$$f'(x^*) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866.$$

- c.) **Tekintsük az $x_i = i \cdot h$ (h a rácsállandó) pontok alkotta ekvidisztáns rácsot. Adjunk becslést az ismeretlen f függvény x_i pontbeli második deriváltjára a legfeljebb két rácsállandónyi távolságban lévő pontokban mért függvényértékek figyelembevételével.**

A derivált közelítése az

$$f''(x_i) \approx \frac{1}{h^2} \sum_{j=i-2}^{i+2} v_j f(x_j)$$

formula alapján történik, ahol a v_i együtthatók függetlenek h -tól. A v_j együtthatók értéke a $z_0 = -2, z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1, z_4 = 2$ alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomok alapján számolható:

$$v_{i-2+j} = \left(L_j^{(4)} \right)''(0).$$

A kapott együtthatók:

$$\begin{aligned} v_{i-2} &= \left(L_0^{(4)} \right)''(0) = \frac{d^2 \frac{(z+1)z(z-1)(z-2)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}}{dz^2} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{12} \\ v_{i-1} &= \left(L_1^{(4)} \right)''(0) = \frac{d^2 \frac{(z+2)z(z-1)(z-2)}{1(-1)(-2)(-3)}}{dz^2} \Big|_{z=0} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

A páros fokszerű derivált és szimmetrikus alappontok miatt:

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_{i-1} = \frac{4}{3} \\ v_{i+2} &= v_{i-2} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

A konstans 1 függvény második deriváltját helyesen adja vissza a képlet, így:

$$v_i = 0 - v_{i-2} - v_{i-1} - v_{i+1} - v_{i+2} = -\frac{5}{2}.$$

A második derivált közelítése:

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i-2}) + 16f(x_{i-1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{12h^2}.$$

Numerikus integrálás és deriválás hibája

- a.) **Határozzuk meg, hogy a centrális első derivált hibája a h rácsállandó melyik hatványával arányos!**

Teszteljük a centrális derivált $f_x(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ formuláját az első pár x -hatványra:

$f(x)$	$\frac{df}{dx}(x)$	$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$
x^0	0	$\frac{1-1}{2h} = 0$
x^1	1	$\frac{(x+h)-(x-h)}{2h} = 1$
x^2	$2x$	$\frac{(x+h)^2-(x-h)^2}{2h} = 2x$
x^3	$3x^2$	$\frac{(x+h)^3-(x-h)^3}{2h} = 3x^2 + h^2$

A formula pontos eredményt ad legfeljebb másodfokú polinomokra, hibája h^2 -tel arányos kis h értékekre.

- b.) **Határozzuk meg, hogy a centrális második derivált hibája a h rácsállandó melyik hatványával arányos!**

Teszteljük a centrális második derivált $f_{xx}(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ formuláját az első pár x -hatványra:

$f(x)$	$\frac{d^2f}{dx^2}(x)$	$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$
x^0	0	$\frac{1-2+1}{h^2} = 0$
x^1	0	$\frac{(x+h)-2x+(x-h)}{h^2} = 0$
x^2	2	$\frac{(x+h)^2-2x^2+(x-h)^2}{h^2} = 2$
x^3	$6x$	$\frac{(x+h)^3-2x^3+(x-h)^3}{h^2} = 6x$
x^4	$12x^2$	$\frac{(x+h)^4-2x^4+(x-h)^4}{h^2} = 12x^2 + 2h^2$

A formula pontos eredményt ad legfeljebb harmadfokú polinomokra, hibája h^2 -tel arányos kis h értékekre.

- c.) **Határozzuk meg, hogy a Simpson-formula hibája a részintervallumok h hosszának melyik hatványával arányos!**

Teszteljük az $\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \approx h \left(\frac{1}{6}f(x-\frac{h}{2}) + \frac{4}{6}f(x) + \frac{1}{6}f(x+\frac{h}{2}) \right)$ Simpson-formulát az első pár x -hatványra:

$f(x)$	$\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(\tilde{x}) d\tilde{x}$	$h \left(\frac{1}{6}f(x-\frac{h}{2}) + \frac{4}{6}f(x) + \frac{1}{6}f(x+\frac{h}{2}) \right)$
x^0	h	$h \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \right) = h$
x^1	xh	$h \left(\frac{1}{6}(x-\frac{h}{2}) + \frac{4}{6}x + \frac{1}{6}(x+\frac{h}{2}) \right) = xh$
x^2	$x^2h + \frac{h^3}{12}$	$h \left(\frac{1}{6}(x-\frac{h}{2})^2 + \frac{4}{6}x^2 + \frac{1}{6}(x+\frac{h}{2})^2 \right) = x^2h + \frac{h^3}{12}$
x^3	$x^3h + \frac{xh^3}{4}$	$h \left(\frac{1}{6}(x-\frac{h}{2})^3 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{1}{6}(x+\frac{h}{2})^3 \right) = x^3h + \frac{xh^3}{4}$
x^4	$x^4h + \frac{x^2h^3}{2} + \frac{h^5}{20}$	$h \left(\frac{1}{6}(x-\frac{h}{2})^4 + \frac{4}{6}x^4 + \frac{1}{6}(x+\frac{h}{2})^4 \right) = x^4h + \frac{x^2h^3}{2} + \frac{h^5}{24}$

A számolást (ebben az esetben is) elegendő elvégezni csak a (lényegesen egyszerűbb) $x = 0$ esetre:

$f(x)$	$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f(\tilde{x}) d\tilde{x}$	$h \left(\frac{1}{6}f(-\frac{h}{2}) + \frac{4}{6}f(0) + \frac{1}{6}f(\frac{h}{2}) \right)$
x^0	h	$h \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \right) = h$
x^1	0	$h \left(\frac{1}{6}(-\frac{h}{2}) + 0 + \frac{1}{6}(\frac{h}{2}) \right) = 0$
x^2	$\frac{h^3}{12}$	$h \left(\frac{1}{6}(-\frac{h}{2})^2 + 0 + \frac{1}{6}(\frac{h}{2})^2 \right) = \frac{h^3}{12}$
x^3	0	$h \left(\frac{1}{6}(-\frac{h}{2})^3 + 0 + \frac{1}{6}(\frac{h}{2})^3 \right) = 0$
x^4	$\frac{h^5}{20}$	$h \left(\frac{1}{6}(-\frac{h}{2})^4 + 0 + \frac{1}{6}(\frac{h}{2})^4 \right) = \frac{h^5}{24}$

A formula pontos eredményt ad legfeljebb harmadfokú polinomokra, az egy részintervallumon keletkező hiba h^5 -nel arányos kis h értékekre. A teljes intervallum részintervallumainak száma éppen $\frac{1}{h}$, így a teljes integrálási tartományon a formula hibája h^4 -nel arányos.

LU-felbontás

- a.) **Végezzük el az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ mátrix LU-felbontását!**

Az LU-felbontás lépésről lépésre:

$$U_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b.) Végezzük el az $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 12 & 21 \end{bmatrix}$ mátrix LU-felbontását!

Az LU-felbontás lépésről lépésre:

$$U_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 12 & 21 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c.) Oldjuk meg az $Ax_i = b_i$ lineáris egyenletrendszereket, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

és $b_1 = (1, 1, 1, 1)^T, b_2 = (1, 2, 3, 4), b_3 = (1, -1, 1, -1)^T$.

Végezzük el az A mátrix LU-felbontását:

$$U_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oldjuk meg az $Ly_i = b_i$, majd az $Ux_i = y_i$ egyenletrendszereket.

$$\begin{aligned} y_1 &= (1, 2, -1, 1)^T & x_1 &= (3, -8, -3, 1)^T \\ y_2 &= (1, 3, 1, 2)^T & x_2 &= (2, -9, -3, 2)^T \\ y_3 &= (1, 0, -1, -1)^T & x_3 &= (1, 2, 1, -1)^T. \end{aligned}$$

Peremérték-feladatok megoldása a véges differenciák módszerével

a.) Adjunk közelítő megoldást a

$$\left. \begin{aligned} -4u_{xx} - 8u_x + 3u &= x + 4 \quad (0 < x < 6) \\ u(0) &= 0 \\ u(6) &= 5 \end{aligned} \right\}$$

peremérték-feladatra az $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6$ pontok alapján! Az első deriváltakat közelítsük előrenéző, a második deriváltakat centrális sémával, a kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

Jelölje az x_i pontbeli közelítő függvényértéket u_i . A szakasz hossza $L = 6$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 2$. A peremfeltételek alapján $u_0 = 1$ és $u_3 = 5$. Az egyenlet az x_1 pontban:

$$\begin{aligned} -4 \left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{2^2} \right) - 8 \left(\frac{u_2 - u_1}{2} \right) + 3u_1 &= 2 + 4 \\ 9u_1 - 5u_2 &= 7, \end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\begin{aligned} -4 \left(\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{2^2} \right) - 8 \left(\frac{u_3 - u_2}{2} \right) + 3u_2 &= 4 + 4 \\ -u_1 + 9u_2 &= 33. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u_1 = 3, u_2 = 4$.

Másképpen, az egyenletrendszer mátrixos alakját előállítva:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(-4)}{2^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(-8)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2+4 \\ 4+4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$u = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ az $M \cdot u = b$ lineáris egyenletrendszer megoldása.

b.) Adjunk közelítő megoldást a

$$\left. \begin{aligned} -2u_{xx} - 4u_x + 3u &= 9x - 15 \quad (0 < x < 3) \\ u(0) &= 1 \\ u(3) &= 8 \end{aligned} \right\}$$

peremérték-feladatra az $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ pontok alapján! Mind az első, mind a második deriváltakat közelítsük centrális sémával, a kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

Jelölje az x_i pontbeli közelítő függvényértéket u_i . A szakasz hossza $L = 3$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 1$. A peremfeltételek alapján $u_0 = 1$ és $u_3 = 8$. Az egyenlet az x_1 pontban:

$$\begin{aligned} -2 \left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{1^2} \right) - 4 \left(\frac{u_2 - u_0}{2 \cdot 1} \right) + 3u_1 &= 9 \cdot 1 - 15 \\ 7u_1 - 4u_2 &= -6, \end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\begin{aligned} -2 \left(\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{1^2} \right) - 4 \left(\frac{u_3 - u_1}{2 \cdot 1} \right) + 3u_2 &= 9 \cdot 2 - 15 \\ 7u_2 &= 35. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u_1 = 2, u_2 = 5$.

Másképpen, az egyenletrendszer mátrixos alakját előállítva:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(-2)}{1^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(-4)}{2 \cdot 1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \cdot 1 - 15 \\ 9 \cdot 2 - 15 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$u = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ az $M \cdot u = b$ lineáris egyenletrendszer megoldása.

c.) Adjunk közelítő megoldást a

$$\left. \begin{aligned} -8u_{xx} - 6u_x + 3u &= \frac{7x - 16}{2} \quad (0 < x < 6) \\ u(0) &= 1 \\ u(6) &= 8 \end{aligned} \right\}$$

peremérték-feladatra az $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6$ pontok alapján! Az első deriváltakat közelítsük hátránéző, a második deriváltakat centrális sémával, a kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

Jelölje az x_i pontbeli közelítő függvényértéket u_i . A szakasz hossza $L = 6$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 2$. A peremfeltételek alapján $u_0 = 1$ és $u_3 = 8$. Az egyenlet az x_1 pontban:

$$-8 \left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{2^2} \right) - 6 \left(\frac{u_1 - u_0}{2} \right) + 3u_1 = \frac{7 \cdot 2 - 16}{2}$$

$$\begin{aligned}4u_1 - 2u_2 &= -2 \\2u_1 - u_2 &= -1,\end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\begin{aligned}-8 \left(\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{2^2} \right) - 6 \left(\frac{u_2 - u_1}{2} \right) + 3u_2 &= \frac{7 \cdot 4 - 16}{2} \\u_1 + 4u_2 &= 22.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u_1 = 2, u_2 = 5$.

Másképpen, az egyenletrendszer mátrixos alakját előállítva:

$$\begin{aligned}M &= \frac{(-8)}{2^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(-6)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\b &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7 \cdot 2 - 16}{2} \\ \frac{7 \cdot 4 - 16}{2} \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$u = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ az $M \cdot u = b$ lineáris egyenletrendszer megoldása.

d.) **Adjunk közelítő megoldást a**

$$\left. \begin{aligned}-2u_{xx} - 4u_x + 3u &= 3x^2 - 9 \quad (0 < x < 3) \\u(0) &= 1 \\u(3) &= 8\end{aligned} \right\}$$

peremérték-feladatra az $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ pontok alapján! Mind az első, mind a második deriváltakat közelítsük centrális sémával, a kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

Jelölje az x_i pontbeli közelítő függvényértéket u_i . A szakasz hossza $L = 3$, a szakaszt $n = 3$ részre osztjuk, a rácsállandó $h = 1$. A peremfeltételek alapján $u_0 = 1$ és $u_3 = 8$. Az egyenlet az x_1 pontban:

$$\begin{aligned}-2 \left(\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{1^2} \right) - 4 \left(\frac{u_2 - u_0}{2 \cdot 1} \right) + 3u_1 &= 3 \cdot 1^2 - 9 \\7u_1 - 4u_2 &= -6,\end{aligned}$$

valamint az x_2 pontban:

$$\begin{aligned}-2 \left(\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{1^2} \right) - 4 \left(\frac{u_3 - u_1}{2 \cdot 1} \right) + 3u_2 &= 3 \cdot 2^2 - 9 \\7u_2 &= 35.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $u_1 = 2, u_2 = 5$.

Másképpen, az egyenletrendszer mátrixos alakját előállítva:

$$\begin{aligned}M &= \frac{(-2)}{1^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(-4)}{2 \cdot 1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \cdot 1^2 - 9 \\ 3 \cdot 2^2 - 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$u = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ az $M \cdot u = b$ lineáris egyenletrendszer megoldása.