

Ipari matematika és számítógépes szimuláció 3.

Németh Adrián

2015. május 15.

Tartalomjegyzék

Előszó	1
Bevezetés	1
A homogén Dirichlet-probléma gyenge alakja	3
Elemenként lineáris közelítés	4
A homogén Dirichlet-probléma diszkretizációja	8
A lineáris egyenletrendszer meghatározása	8
Az inhomogén Dirichlet-probléma megoldása	9
A Neumann-peremfeltételek kezelése	10
Magasabb fokú polinomok általi közelítés	12
Végeselem-módszer magasabb dimenziókban	15
Parabolikus differenciálegyenletek megoldása végeselem-módszerrel	16
Gyakorlófeladatok	17

Előszó

Ez a jegyzet az Ipari matematika és számítógépes szimuláció 3. című választható tárgyhoz készült, a Széchenyi István Egyetem alapképzésben részt vevő mérnökhallgatói számára. Célja az egydimenziós eset tárgyalásán keresztül bemutatni a Galjorkin-féle végeselem-módszer alapjait. A jegyzet nem teljes körű, nem terjed ki a precíz matematikai részletek tárgyalására, valamint csak részben fedi le a tárgy sikeres teljesítéséhez szükséges ismereteket.

A jegyzet legfrissebb példánya letölthető a www.sze.hu/~nemetha/ oldalról. Az észrevételeket és megjegyzéseket a nemetha@sze.hu címre várom.

Bevezetés

A legtöbb mérnöki, fizikai folyamat leírható (legfeljebb) másodrendű differenciálegyenletek segítségével, ezért a jegyzet másodrendű differenciálegyenletek példáin keresztül mutatja be a végeselem-módszer alapjait.

Közönséges differenciálegyenletek Másodrendű közönséges differenciálegyenletek általános megoldása két szabadon választható paramétert tartalmaz, például $\ddot{x} + x = 0$ általános megoldása $c_1 \sin x + c_2 \cos x$. A megoldás egyértelműsége mellékfeltételek megadásával biztosítható.

Időfüggő problémák esetén az ismeretlen függvény értékét, valamint első deriváltjának értékét kötjük ki a kezdőpontban, ekkor kezdetiérték-feladatról beszélünk.

Időfüggetlen problémák esetén a differenciálegyenlet megoldását egy $\mathcal{I} = (a, b) \in \mathbb{R}$ intervallumon keressük, és a szakasz mindkét végpontjában kikötjük vagy a függvényértéket (Dirichlet-peremfeltétel) vagy a függvény első deriváltjának értékét (Neumann-peremfeltétel). Az ilyen kitűzésű problémát peremérték-feladatnak nevezzük.

Példák kezdetiérték-feladatra Függőleges hajítás:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + mg &= 0 \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned} \right\}$$

Rugóhoz rögzített test csillapított gerjesztett rezgése:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= f(t) \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned} \right\}$$

Ideális fizikai inga mozgása:

$$\left. \begin{aligned} \theta\ddot{\varphi} + mgs\varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) &= \beta_0 \end{aligned} \right\}$$

Példák peremérték-feladatra Stacionárius hővezetés egyik végén szigetelt, másik végén állandó hőmérsékleten tartott rúdban:

$$\left. \begin{aligned} -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= q(x) \quad \text{minden } x \in (0, l)\text{-re} \\ T(0) &= T_0 \\ \dot{T}(l) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Tökéletesen rugalmas szál alakváltozása terhelés hatására:

$$\left. \begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= f(x) \quad \text{minden } x \in (0, l)\text{-re} \\ y(0) &= 0 \\ y(l) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Parciális differenciálegyenletek Legyen a_{ij} szimmetrikus mátrix. Ekkor a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_n\right) = 0$$

n -dimenziós másodrendű parciális differenciálegyenletet

- elliptikusnak nevezzük, ha az a_{ij} mátrixnak csak pozitív sajátértékei vannak
- parabolikusnak nevezzük, ha az a_{ij} mátrixnak egyetlen 0 és $n - 1$ db pozitív sajátértéke van
- hiperbolikusnak nevezzük, ha az a_{ij} mátrixnak egyetlen negatív és $n - 1$ db pozitív sajátértéke van.

Elliptikus PDE-ket általában stacionárius problémák matematikai leírásakor kapunk. A megoldás egyértelműsége érdekében a tartomány határának minden pontjában előírjuk vagy az ismeretlen függvény értékét (Dirichlet-peremfeltétel), vagy a függvény normális irányú deriváltjának értékét (Neumann-peremfeltétel).

Időfüggő problémák általában hiperbolikus vagy parabolikus PDE-kre vezetnek. A megoldás egyértelműségéhez nem elég a peremfeltételek előírása, parabolikus esetben meg kell még adni a függvény értékét, hiperbolikus esetben pedig mind a függvény, mind első deriváltjának értékét a kezdeti időpontban (kezdeti feltétel).

Példák elliptikus PDE-re Rugalmas membrán deformációja külső terhelés hatására:

$$\left. \begin{aligned} c^2 \Delta z &= c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = f(x, y) && \text{minden } (x, y) \in \Omega\text{-ra} \\ z(x, y) &= 0 && \text{minden } (x, y) \in \partial\Omega\text{-ra} \end{aligned} \right\}$$

Stacionárius hőterjedés (forrástaggal) homogén közegben:

$$\left. \begin{aligned} -k \Delta T &= -k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z) && \text{minden } (x, y, z) \in \Omega\text{-ra} \\ T(x, y, z) &= 0 && \text{minden } (x, y, z) \in \partial\Omega\text{-ra} \end{aligned} \right\}$$

Példák parabolikus PDE-re Hőterjedési egyenlet (forrástaggal) homogén közegben, részben hőszigetelt, részben időben egyenletesen felfűtött peremekkel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{T} - k \Delta T &= f(x, y, z) && \text{minden } t\text{-re és minden } (x, y, z) \in \Omega\text{-ra} \\ \vec{n}(x, y, z) \cdot \nabla T(x, y, z, t) &= 0 && \text{minden } t\text{-re és minden } (x, y, z) \in \Omega_0 \subset \partial\Omega\text{-ra} \\ T(x, y, z, t) &= tT_1 && \text{minden } t\text{-re és minden } (x, y, z) \in \partial\Omega \setminus \Omega_0\text{-ra} \\ T(x, y, z, 0) &= 0 && \text{minden } (x, y, z) \in \Omega\text{-ra} \end{aligned} \right\}$$

Advekcio-diffúzió-egyenlet, festékkoncentráció szétterjedése egyenletesen mozgó homogén víztömegben:

$$\left. \begin{aligned} \dot{c} - D \Delta c + \vec{v} \cdot \nabla c &= 0 && \text{minden } t\text{-re és minden } (x, y, z) \in \Omega\text{-ra} \\ \dots &&& + \text{kompatibilis peremfeltételek} \\ T(x, y, z, 0) &= T(x, y, z) && \text{minden } (x, y, z) \in \Omega\text{-ra} \end{aligned} \right\}$$

Példák hiperbolikus PDE-re Hullámegyenlet, membrán rezgései:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \Delta z &= f(x, y) && \text{minden } t\text{-re és minden } (x, y) \in \Omega\text{-ra} \\ z(x, y, t) &= 0 && \text{minden } t\text{-re és minden } (x, y) \in \partial\Omega\text{-ra} \\ z(x, y, 0) &= g(x, y) && \text{minden } (x, y) \in \Omega\text{-ra} \\ \dot{z}(x, y, 0) &= h(x, y) && \text{minden } (x, y) \in \Omega\text{-ra} \end{aligned} \right\}$$

Euler-egyenlet, Navier–Stokes-egyenlet.

A továbbiakban az elliptikus peremérték-feladatok megoldására kifejlesztett Galjorkin-módszert tárgyaljuk, az egyszerűség kedvéért a

$$-au_{xx} + cu = f(x)$$

másodrendű, állandó együtthatós közönséges differenciálegyenlet peremérték-feladatain keresztül, ahol $a \neq 0$.

A homogén Dirichlet-probléma gyenge alakja

Vegyük a

$$\left. \begin{aligned} -au_{xx}(x) + cu(x) &= f(x) && \text{minden } x \in (0, l)\text{-re} \\ u(0) &= 0 \\ u(l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

peremérték-feladatot (homogén Dirichlet-probléma), ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható.

Legyen $v: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható, legyen továbbá $v(0) = v(l) = 0$. Szorozzuk be az (1) differenciálegyenlet mindkét oldalát $v(x)$ -szel, és vegyük mindkét oldal integrálját a $[0, l]$ intervallumon:

$$-a \int_0^l u_{xx}(x)v(x) dx + c \int_0^l u(x)v(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx$$

majd integráljunk parciálisan az első integrálban:

$$a \int_0^l u_x(x)v_x(x) dx + [u_x(x)v(x)]_0^l + c \int_0^l u(x)v(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx$$

és használjuk fel, hogy $v(0) = v(l) = 0$:

$$a \int_0^l u_x(x)v_x(x) dx + c \int_0^l u(x)v(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx.$$

Tekintsük az (1) peremérték-feladat alábbi alakját (gyenge alak):

$$a \int_0^l u_x(x)v_x(x) dx + c \int_0^l u(x)v(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx$$

minden $v: (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvényre, melyre $v(0) = v(l) = 0$

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(l) &= 0 \end{aligned}$$

(2)

ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható.

Legyen $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható. Ha u kielégíti az (1) peremérték-feladatot, akkor kielégíti a (2) gyenge alakot is. Megfordítva, ha u nem elégíti ki az (1) peremérték-feladatot, akkor nem elégítheti ki a (2) gyenge alakot sem. Vegyük ugyanis az (1) differenciálegyenlet bal- és jobboldalának különbségét, jelölje ezt $w(x)$. Tegyük fel, hogy $w(x)$ nem nulla a $[0, l]$ intervallumon, ekkor található $x_0 \in (0, l)$ és $\epsilon > 0$, hogy $w(x) > 0$ minden $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ -re. Válasszuk v -t úgy, hogy folytonosan deriválható nemnegatív függvény legyen $[0, l]$ -en, értéke 0 legyen az $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ intervallumon kívül, és pozitív az intervallum egy részében, lásd az 1. ábrát. Erre a v függvényre u nem teljesíti a (2) gyenge alakot.

A (2) gyenge alaknak ugyanakkor lehet olyan (kétszer folytonosan nem deriválható) u megoldása, amely nem elégíti ki az (1) peremérték-feladatot.

Elemenként lineáris közelítés

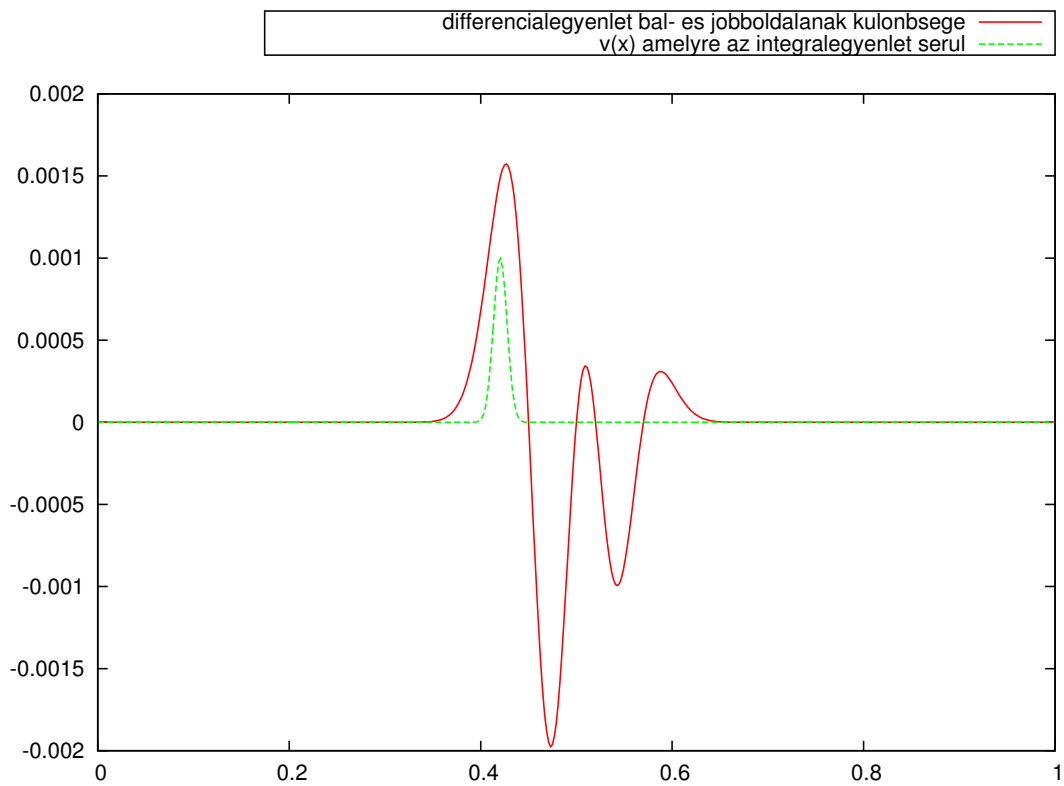
Bontsuk fel az $\Omega = [0, l]$ tartományt n db diszjunkt elemre (szakaszra) az

$$X = \{x_i : 0 \leq i \leq n\} \quad x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = l \quad (3)$$

csomópontok által. A rácsot ekvidisztánsnak nevezzük, ha $x_i = \frac{i}{n}l$ minden $0 \leq i \leq n$ -re. A felbontás h finomsága alatt az elemek

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) \quad (4)$$

maximális átmérőjét (a maximális szakaszhosszt) értjük.



1. ábra. Ha u nem elégíti ki az (1) peremérték-feladatot, akkor v megválasztható úgy, hogy u a (2) gyenge alakot se elégítse ki.

Legyen $\Omega = [0, l]$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvény. Legyen X az Ω halmazt felosztó csomópontok halmaza, jelölje h a felbontás finomságát. Közelítsük az f függvényt az elemenként lineáris $\hat{f}$ függvénnyel (törtvonallal) úgy, hogy a csomópontokban a közelítő függvény értéke megegyezzen a függvényértékkel, azaz

$$\hat{f}(x) = \frac{f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x) + f(x_{i+1}) \cdot (x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{minden } 0 \leq i \leq n-1 \text{-re és minden } x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{-re,} \quad (5)$$

a 2. ábra szerint.

A közelítés hibája Tekintsünk az f sima függvénynek, valamint $\hat{f}$ szakaszonként lineáris közelítésének az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallum feletti részét. Közelítsük a függvényt x_i körüli másodrendű Taylor-polinommal, használjunk Lagrange-féle maradéktagot:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3$$

alkalmasan választott $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ -re. Helyettesítsük be az így kapott kifejezést az (5) képletbe:

$$\hat{f}(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)(x - x_i) + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^2(x - x_i)$$

minden $x \in [x_i, x_{i+1}]$ -re. Vonjuk ki a kapott kifejezést $f(x)$ -nek az x_i körüli másodrendű Taylor-polinommal való közelítéséből:

$$f(x) - \hat{f}(x) = \frac{f''(x_i)}{2!}(x - x_{i+1})(x - x_i) - \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^2(x - x_i) + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x - x_i)^3$$

minden $x \in [x_i, x_{i+1}]$ -re, x ponthoz alkalmasan választott $\eta \in [x_i, x]$ -re. Ez $\mathcal{O}(h^2)$ -es hibát jelent a függvényérték közelítésében és $\mathcal{O}(h)$ -s hibát a függvény deriváltjának közelítésében.

Bázisfüggvények Vezessük be a φ_i bázisfüggvényeket ($0 \leq i \leq n$):

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{ha } 0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{ha } x_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (6a)$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq x \leq x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & \text{ha } x_{n-1} \leq x \leq l \end{cases} \quad (6b)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{ha } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{ha } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{ha } x_{i+1} \leq x \leq l \end{cases} \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n-1 \text{-re.} \quad (6c)$$

Az így definiált $\varphi_i(x)$ ($0 \leq i \leq n$) függvények folytonosak és szakaszonként lineárisak, értékük a csomópontokban $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ minden $0 \leq i, j \leq n$ -re, ahol

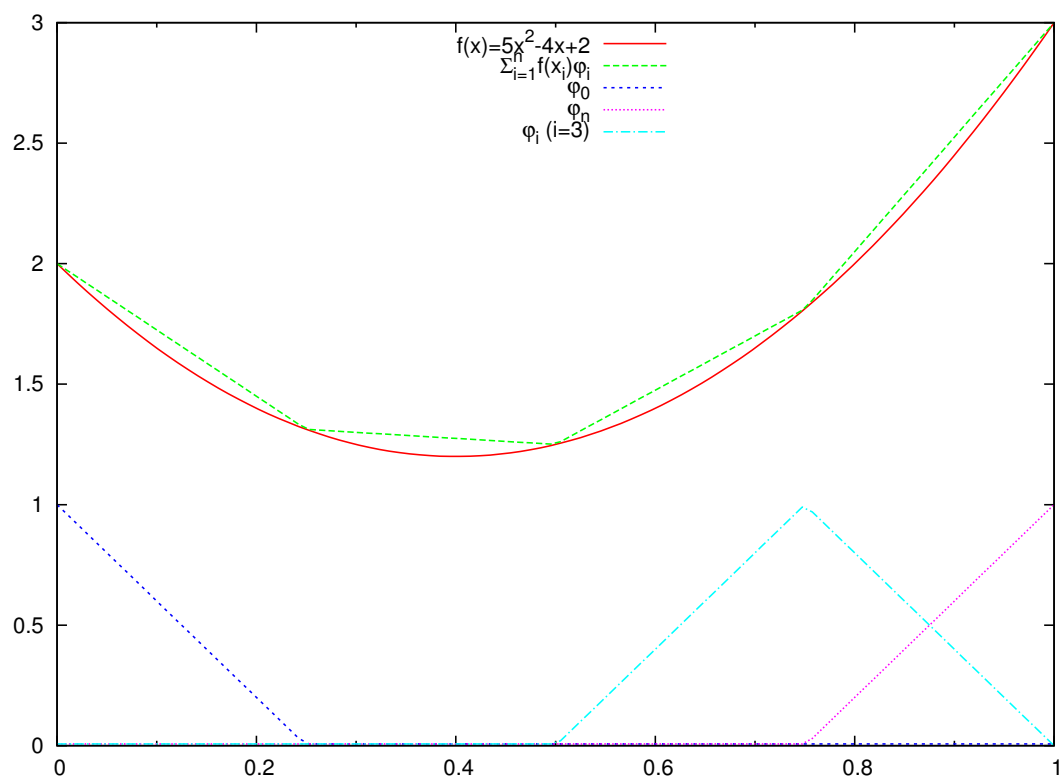
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

a Kronecker-delta szimbólum. A 2. ábráról leolvasható a bázisfüggvények alakja.

1. Állítás. Legyen $\Omega = [0, l]$, legyen X az Ω intervallumot (3) szerint felosztó csomópontok halmaza, legyenek φ_i ($0 \leq i \leq n$) a (6) képletek által meghatározott bázisfüggvények. Tetszőleges sima $f(x)$ függvény (5) képlet szerinti $\hat{f}(x)$ közelítő függvénye

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega \text{-ra} \quad (8)$$

alakban áll elő.



2. ábra. Függvény szakaszonként lineáris közelítése 3 belső pontos ekvidisztáns rács esetén

Bizonyítás. Mivel $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, ezért $\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_i(x_j) = f(x_j)$ minden $0 \leq j \leq n$ -re. $\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_i(x)$ folytonos és szakaszonként lineáris, mert ilyen függvények összegeként áll elő. A $\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_i(x)$ kifejezés teljesíti az (5) feltételt. ■

A homogén Dirichlet-probléma diszkretizációja

Vegyük az (1) homogén Dirichlet-probléma (2) gyenge alakját. Legyen $\Omega = [0, l]$, legyen X az Ω intervallumot (3) szerint felosztó csomópontok halmaza. Jelölje

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega\text{-ra} \quad (9)$$

$$\hat{v}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega\text{-ra} \quad (10)$$

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^n f_i \varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega\text{-ra} \quad (11)$$

az u, v, f függvények (8) szerinti diszkretizációját. A közelítő függvényekre vonatkozó gyenge egyenlet:

$$a \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} v_i u_j \int_0^l \varphi_{i,x}(x) \varphi_{j,x}(x) dx + c \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} v_i u_j \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \int_0^l f(x) \varphi_i(x) dx \quad (12)$$

minden $(v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ -re.

2. Állítás. $(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pontosan akkor teljesíti a (12) feltételt, ha az alábbi feltételt teljesíti:

$$a \sum_{j=1}^{n-1} u_j \int_0^l \varphi_{i,x}(x) \varphi_{j,x}(x) dx + c \sum_{j=1}^{n-1} u_j \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \int_0^l f(x) \varphi_i(x) dx \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n-1\text{-re.} \quad (13)$$

Bizonyítás. (12) $\Rightarrow$ (13): Legyen $1 \leq k \leq n-1$ tetszőleges egész. Legyen $v_i = \delta_{ik}$ minden $1 \leq i \leq n-1$ -re a (12) egyenletben. Ekkor éppen a (13) egyenletet kapjuk $i = k$ -ra.

(13) $\Rightarrow$ (12): Legyen $(v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tetszőleges. Összegezzük az $i = k$ paraméterű (13) egyenlet v_k szorosát minden $1 \leq k \leq n-1$ -re. Éppen a (12) egyenletet kapjuk. ■

A lineáris egyenletrendszer meghatározása

Legyen $\Omega = [0, l]$, legyen X az Ω intervallumot felosztó csomópontok halmaza, φ_i ($0 \leq i \leq n$) a (6) képletek által meghatározott bázisfüggvények. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$M_{ij} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad 0 \leq i, j \leq n \quad (14)$$

$$S_{ij} = \int_0^l \varphi_{i,x}(x) \varphi_{j,x}(x) dx \quad 0 \leq i, j \leq n. \quad (15)$$

M és S szimmetrikus $(n+1) \times (n+1)$ -es mátrixok, M neve tömegmátrix, S neve merevségi mátrix. A homogén Dirichlet-feladat (13) diszkretizált alakja az M és S mátrixok segítségével a

$$\sum_{j=1}^{n-1} (aS_{ij} + cM_{ij})u_j = \int_0^l f(x)\varphi_i(x) dx \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n-1\text{-re} \quad (16)$$

alakban írható. Az egyenlet jobboldalát gyakran a bázisfüggvényekkel közelítjük:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (aS_{ij} + cM_{ij})u_j = \sum_{j=0}^n M_{ij}f_j \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n-1\text{-re.} \quad (17)$$

A homogén Dirichlet-feladat diszkretizált alakja egy $n-1$ ismeretlenes $n-1$ egyenletes tridiagonális mátrixú lineáris egyenletrendszerre vezet, melynek megoldása $\mathcal{O}(n)$ lépést igényel.

Számítsuk ki a mátrixelemeket, ehhez használjuk fel az alábbi integrálokat:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3} \\ \int_0^1 x(1-x) dx &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

A (6) bázisfüggvényekhez tartozó tömegmátrix és a merevségi mátrix elemei:

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_{i-1}) & \text{ha } 1 \leq i = j \leq n-1 \\ \frac{1}{3}(x_1 - x_0) & \text{ha } i = j = 0 \\ \frac{1}{3}(x_n - x_{n-1}) & \text{ha } i = j = n \\ \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1}) & \text{ha } 0 \leq j = i-1 \leq n-1 \\ \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i) & \text{ha } 1 \leq j = i+1 \leq n \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (18)$$

$$S_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} & \text{ha } 1 \leq i = j \leq n-1 \\ \frac{1}{x_1 - x_0} & \text{ha } i = j = 0 \\ \frac{1}{x_n - x_{n-1}} & \text{ha } i = j = n \\ -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{ha } 0 \leq j = i-1 \leq n-1 \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & \text{ha } 1 \leq j = i+1 \leq n \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (19)$$

A mátrixelemek tovább egyszerűsödnek, ha az X csomópontok ekvidisztáns rácsot alkotnak:

$$M_{ij}^{\text{ekv}} = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{l}{n} & \text{ha } 1 \leq i = j \leq n-1 \\ \frac{1}{3} \frac{l}{n} & \text{ha } i = j = 0 \text{ vagy } i = j = n \\ \frac{1}{6} \frac{l}{n} & \text{ha } j = i \pm 1 \text{ és } 0 \leq i, j \leq n \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (20)$$

$$S_{ij}^{\text{ekv}} = \begin{cases} 2 \frac{n}{l} & \text{ha } 1 \leq i = j \leq n-1 \\ \frac{n}{l} & \text{ha } i = j = 0 \text{ vagy } i = j = n \\ -\frac{n}{l} & \text{ha } j = i \pm 1 \text{ és } 0 \leq i, j \leq n \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (21)$$

Az inhomogén Dirichlet-probléma megoldása

Vegyük a

$$\left. \begin{aligned} -au_{xx}(x) + cu(x) &= f(x) & \text{minden } x \in (0, l)\text{-re} \\ u(0) &= p_0 \\ u(l) &= p_1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

peremérték-feladatot (inhomogén Dirichlet-probléma), ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható. A (22) peremérték-feladat gyenge alakja azonos módon származtatható, mint az (1) homogén Dirichlet-probléma esetén:

$$\left. \begin{aligned} a \int_0^l u_x(x)v_x(x) dx + c \int_0^l u(x)v(x) dx &= \int_0^l f(x)v(x) dx \\ \text{minden } v: (0, l) \rightarrow \mathbb{R} \text{ folytonosan deriválható függvényre, melyre } v(0) &= v(l) = 0 \\ u(0) &= p_0 \\ u(l) &= p_1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható.

Legyen $\Omega = [0, l]$, legyen X az Ω intervallumot szakaszokra osztó csomópontok halmaza. Írjuk elő expliciten a Dirichlet-peremfeltételeket az u függvényre, jelölje

$$\hat{u}(x) = p_0\varphi_0(x) + p_1\varphi_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i\varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega\text{-ra} \quad (24)$$

az u függvény (8) szerinti diszkretizációját, a v, f függvények diszkretizációja legyen (10) és (11) szerinti. A közelítő függvényekre vonatkozó gyenge egyenlet

$$\sum_{j=1}^{n-1} (aS_{ij} + cM_{ij})u_j = \int_0^l f(x)\varphi_i(x) dx - (aS_{i0} + cM_{i0})p_0 - (aS_{in} + cM_{in})p_1 \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n-1\text{-re} \quad (25)$$

alakban áll elő, a gyakorlatban használt alakja pedig:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (aS_{ij} + cM_{ij})u_j = \sum_{j=0}^n M_{ij}f_j - (aS_{i0} + cM_{i0})p_0 - (aS_{in} + cM_{in})p_1 \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n-1\text{-re.} \quad (26)$$

A (6) bázisfüggvények esetén az M_{i0} , S_{i0} mátrixelemek csak $i = 1$ esetén, az M_{in} , S_{in} mátrixelemek pedig csak $i = n-1$ esetén különböznek nullától, ezért a homogén esethez képest az egyenlet jobboldalának csak az első és utolsó komponense változik. Mind a homogén mind az inhomogén esetben a Dirichlet-probléma $n-1$ egyenletes $n-1$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre vezet.

A Neumann-peremfeltételek kezelése

Vegyük a

$$\left. \begin{aligned} -au_{xx}(x) + cu(x) &= f(x) & \text{minden } x \in (0, l)\text{-re} \\ u(0) &= p_0 \\ u_x(l) &= q_1 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

vegyes peremérték-feladatot, ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható. A (27) peremérték-feladat gyenge alakja hasonló módon származtatható, mint a Dirichlet-probléma esetében:

$$\left. \begin{aligned} a \int_0^l u_x(x) v_x(x) dx - a q_1 v(l) + c \int_0^l u(x) v(x) dx &= \int_0^l f(x) v(x) dx \\ \text{minden } v: (0, l) \rightarrow \mathbb{R} \text{ folytonosan deriválható függvényre, melyre } v(0) &= 0 \\ u(0) &= p_0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható.

Legyen $\Omega = [0, l]$, legyen X az Ω intervallumot szakaszokra osztó csomópontok halmaza. Írjuk elő expliciten a Dirichlet-peremfeltételt az u függvényre, jelölje

$$\hat{u}(x) = p_0 \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega\text{-ra} \quad (29)$$

$$\hat{v}(x) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega\text{-ra} \quad (30)$$

az u, v függvények (8) szerinti diszkretizációját, az f függvény diszkretizációja legyen (11) szerinti. A közelítő függvényekre vonatkozó gyenge egyenlet

$$\sum_{j=1}^n (aS_{ij} + cM_{ij}) u_j = \int_0^l f(x) \varphi_i(x) dx - (aS_{i0} + cM_{i0}) p_0 + a \delta_{in} q_1 \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n\text{-re} \quad (31)$$

alakban írható, a gyakorlatban használt alakja pedig:

$$\sum_{j=1}^n (aS_{ij} + cM_{ij}) u_j = \sum_{j=0}^n M_{ij} f_j - (aS_{i0} + cM_{i0}) p_0 + a \delta_{in} q_1 \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n\text{-re.} \quad (32)$$

Hasonlóan a

$$\left. \begin{aligned} -a u_{xx}(x) + c u(x) &= f(x) \quad \text{minden } x \in (0, l)\text{-re} \\ u_x(0) &= q_0 \\ u(l) &= p_1 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

vegyes peremérték-feladat esetén, ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható, az u függvény diszkretizációja

$$\hat{u}(x) = p_1 \varphi_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} u_i \varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega\text{-ra.} \quad (34)$$

a közelítő függvényekre vonatkozó gyenge egyenlet a

$$\sum_{j=0}^{n-1} (aS_{ij} + cM_{ij}) u_j = \int_0^l f(x) \varphi_i(x) dx - (aS_{in} + cM_{in}) p_1 - a \delta_{i0} q_0 \quad \text{minden } 0 \leq i \leq n-1\text{-re} \quad (35)$$

alakban írható, a gyakorlatban használt alakja pedig:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (aS_{ij} + cM_{ij}) u_j = \sum_{j=0}^n M_{ij} f_j - (aS_{in} + cM_{in}) p_1 - a \delta_{i0} q_0 \quad \text{minden } 0 \leq i \leq n-1\text{-re.} \quad (36)$$

Mindkét vegyes peremérték-feladat n egyenletes n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre vezet.

Vegyük a

$$\left. \begin{aligned} -au_{xx}(x) + cu(x) &= f(x) && \text{minden } x \in (0, l)\text{-re} \\ u_x(0) &= q_0 \\ u_x(l) &= q_1 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

peremérték-feladatot (Neumann-probléma), ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $u: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható. Az u függvény diszkretizációja

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=0}^n u_i \varphi_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega\text{-ra.} \quad (38)$$

A közelítő függvényekre vonatkozó gyenge egyenlet a

$$\sum_{j=0}^n (aS_{ij} + cM_{ij})u_j = \int_0^l f(x)\varphi_i(x) dx + a\delta_{in}q_1 - a\delta_{i0}q_0 \quad \text{minden } 0 \leq i \leq n\text{-re} \quad (39)$$

alakban írható, a gyakorlatban használt alakja pedig:

$$\sum_{j=0}^n (aS_{ij} + cM_{ij})u_j = \sum_{j=0}^n M_{ij}f_j + a\delta_{in}q_1 - a\delta_{i0}q_0 \quad \text{minden } 0 \leq i \leq n\text{-re.} \quad (40)$$

A Neumann-probléma $n + 1$ egyenletes $n + 1$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre vezet.

Magasabb fokú polinomok általi közelítés

Tekintsük az (1) homogén Dirichlet-feladatot. Legyen $\Omega = [0, l]$, legyen X az Ω intervallumot felosztó csomópontok halmaza, legyenek $\Omega_i = [x_i, x_{i+1}]$ intervallumok ($0 \leq i \leq n - 1$) az Ω intervallumot alkotó elemek.

Az $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt közelítsük olyan $\hat{f}$ folytonos függvénnyel, melyre $\hat{f}|_{\Omega_i}$ legfeljebb p -edfokú polinom minden $0 \leq i \leq n - 1$ -re.

Bázisfüggvények Vezessük be az $x_i = \xi_{i0} < \xi_{i1} < \dots < \xi_{i(p-1)} < \xi_{ip} = x_{i+1}$ belső pontokat minden Ω_i intervallumon ($0 \leq i \leq n - 1$), valamint az alábbi bázisfüggvényeket:

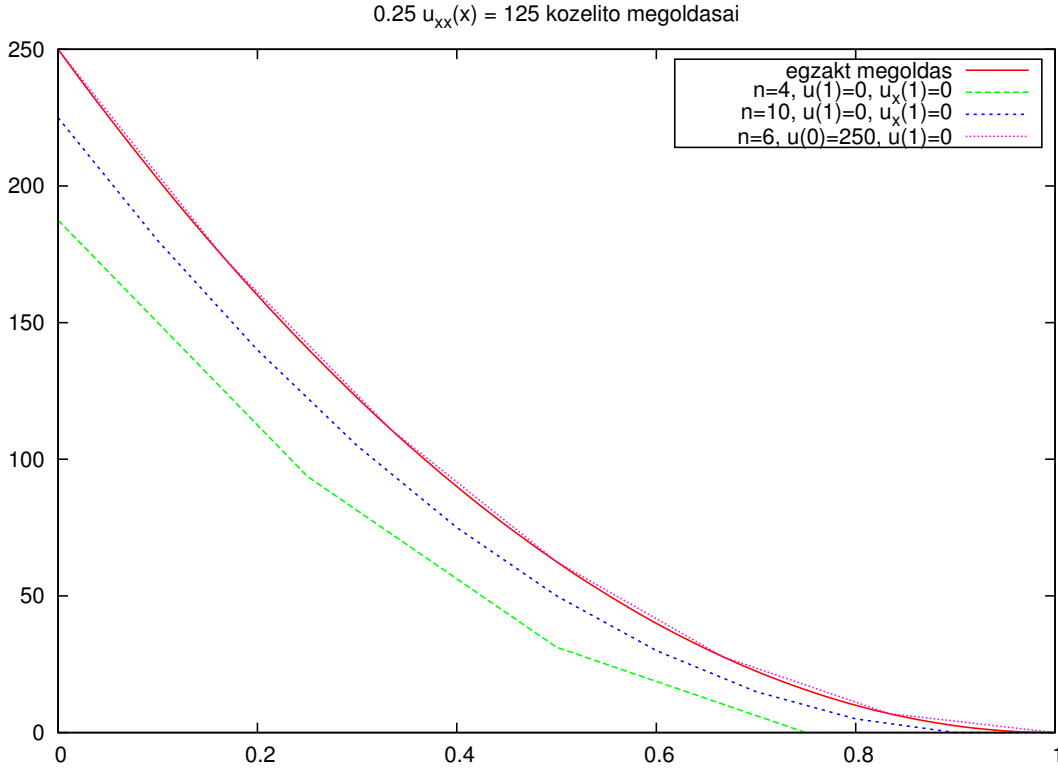
$$\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{\prod_{j=1}^p (x - \xi_{0j})}{\prod_{j=1}^p (\xi_{00} - \xi_{0j})} & \text{ha } x \in \Omega_0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (41a)$$

$$\psi_{n \cdot p}(x) = \begin{cases} \frac{\prod_{j=0}^{p-1} (x - \xi_{(n-1)j})}{\prod_{j=0}^{p-1} (\xi_{(n-1)p} - \xi_{(n-1)j})} & \text{ha } x \in \Omega_{n-1} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (41b)$$

$$\psi_{i \cdot p}(x) = \begin{cases} \frac{\prod_{j=0}^{p-1} (x - \xi_{(i-1)j})}{\prod_{j=0}^{p-1} (\xi_{(i-1)p} - \xi_{(i-1)j})} & \text{ha } x \in \Omega_{i-1} \\ \frac{\prod_{j=1}^p (x - \xi_{ij})}{\prod_{j=1}^p (\xi_{i0} - \xi_{ij})} & \text{ha } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n - 1\text{-re} \quad (41c)$$

$$\psi_{i \cdot p+k}(x) = \begin{cases} \frac{\prod_{0 \leq j \neq k \leq p} (x - \xi_{ij})}{\prod_{0 \leq j \neq k \leq p} (\xi_{ik} - \xi_{ij})} & \text{ha } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{minden } 0 \leq i \leq n - 1\text{-re és minden } 1 \leq k \leq p - 1\text{-re.} \quad (41d)$$

A bázisfüggvények megtekinthetők a 3. ábrán.



3. ábra. Függvény közelítése szakaszonként magasabb fokú polinomokkal ($n = 4, p = 3$), illetve a ψ_i bázisfüggvények

1. Megjegyzés. Az Ω_i intervallumon ($0 \leq i \leq n-1$) csak a $\psi_{i \cdot p}, \psi_{i \cdot p+1}, \dots, \psi_{i \cdot p+p-1}, \psi_{i \cdot p+p}$ bázisfüggvények különböznek zérustól. Az előbbi bázisfüggvények megszorításai az Ω_i intervallumra

$$\psi_{i \cdot p+k}|_{\Omega_i} = \mathcal{L}_k^p(\xi_{i0}, \xi_{i1}, \dots, \xi_{i(p-1)}, \xi_{ip}) \quad \text{minden } 0 \leq i \leq n-1 \text{-re és minden } 0 \leq k \leq p \text{-re} \quad (42)$$

éppen a $\{\xi_{i0}, \xi_{i1}, \dots, \xi_{i(p-1)}, \xi_{ip}\}$ alappontokhoz tartozó p -edfokú Lagrange-interpolációs alappolinomok.

3. Állítás. Az $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, az Ω_i intervallumokon ($0 \leq i \leq n-1$) legfeljebb p -edfokú polinomiális $\hat{f}$ közelítése, melyre $\hat{f}(\xi_{ij}) = f(\xi_{ij})$ minden $0 \leq i \leq n-1$ -re és minden $0 \leq j \leq p$ -re, az

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \psi_{i \cdot p}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{p-1} f(\xi_{ij}) \cdot \psi_{i \cdot p+j}(x) \quad (43)$$

alakban állítható elő a (41) bázisfüggvények segítségével.

Jelölje h az X csomópontok általi felbontás finomságát. Belátható, hogy a (41) bázisfüggvényekkel való közelítés $\mathcal{O}(h^{p+1})$ -es hibával rendelkezik. A $p = 1$ speciális esetben visszkapjuk a (6) kalapfüggvényeket.

Diszkrét egyenlet Az elemenként lineáris közelítés esetéhez hasonlóan bevezethetjük az

$$M_{ij} = \int_0^l \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad 0 \leq i, j \leq n \cdot p \quad (44)$$

$$S_{ij} = \int_0^l \psi_{i,x}(x) \psi_{j,x}(x) dx \quad 0 \leq i, j \leq n \cdot p. \quad (45)$$

tömeg- és merevségi mátrixokat. Mindkét mátrix szimmetrikus és blokktridiagonális. Ekkor a gyenge egyenlet diszkrét alakja a

$$\sum_{j=1}^{n \cdot p - 1} (a S_{ij} + c M_{ij}) u_j = \sum_{j=0}^{n \cdot p} M_{ij} f_j \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n \cdot p - 1\text{-re} \quad (46)$$

alakban írható, ahol az egyenlet jobboldalát is a bázisfüggvényekkel közelítjük és $u_{i \cdot p + k} \approx u(\xi_{ik})$, $f_{i \cdot p + k} = f(\xi_{ik})$ minden $0 \leq i \leq n - 1$ -re és minden $0 \leq k \leq p$ -re.

Másodfokú polinomok általi közelítés Legyen $p = 2$, az X csomópontok legyenek ekvidisztánsak, legyen továbbá $\xi_{i1} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ minden $0 \leq i \leq n - 1$ -re. Számítsuk ki a tömegmátrix és a merevségi mátrix elemeit, ehhez használjuk fel az alábbi integrálokat:

$$\begin{aligned} \int_0^1 4x^2(x - \tfrac{1}{2})^2 dx &= \int_0^1 4(1-x)^2(\tfrac{1}{2}-x)^2 dx = \frac{2}{15} \\ \int_0^1 16x^2(1-x)^2 dx &= \frac{8}{15} \\ \int_0^1 8x^2(x - \tfrac{1}{2})(1-x) dx &= \int_0^1 8(1-x)^2(\tfrac{1}{2}-x)x dx = \frac{1}{15} \\ \int_0^1 -4x(1-x)(x - \tfrac{1}{2})^2 dx &= -\frac{1}{30} \\ \int_0^1 (4x-1)^2 dx &= \int_0^1 (4x-3)^2 dx = \frac{7}{3} \\ \int_0^1 16(1-2x)^2 dx &= \frac{16}{3} \\ \int_0^1 4(4x-1)(1-2x) dx &= \int_0^1 4(4x-3)(1-2x) dx = -\frac{8}{3} \\ \int_0^1 (4x-1)(4x-3) dx &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A (41) bázisfüggvényekhez tartozó tömegmátrix és a merevségi mátrix elemei:

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{4}{15} \frac{l}{n} & \text{ha } 2 \leq i = j \leq 2n - 2 \text{ és } i, j \text{ párosak} \\ \frac{8}{15} \frac{l}{n} & \text{ha } 1 \leq i = j \leq 2n - 1 \text{ és } i, j \text{ páratlanok} \\ \frac{2}{15} \frac{l}{n} & \text{ha } i = j = 0 \text{ vagy } i = j = 2n \\ -\frac{1}{30} \frac{l}{n} & \text{ha } j = i \pm 2, 0 \leq i, j \leq 2n \text{ és } i, j \text{ párosak} \\ \frac{1}{15} \frac{l}{n} & \text{ha } j = i \pm 1 \text{ és } 0 \leq i, j \leq 2n \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (47)$$

$$S_{ij} = \begin{cases} \frac{14}{3} \frac{n}{l} & \text{ha } 2 \leq i = j \leq 2n - 2 \text{ és } i, j \text{ párosak} \\ \frac{16}{3} \frac{n}{l} & \text{ha } 1 \leq i = j \leq 2n - 1 \text{ és } i, j \text{ páratlanok} \\ \frac{7}{3} \frac{n}{l} & \text{ha } i = j = 0 \text{ vagy } i = j = 2n \\ \frac{1}{3} \frac{n}{l} & \text{ha } j = i \pm 2, 0 \leq i, j \leq 2n \text{ és } i, j \text{ párosak} \\ -\frac{8}{3} \frac{n}{l} & \text{ha } j = i \pm 1 \text{ és } 0 \leq i, j \leq 2n \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (48)$$

Végeselem-módszer magasabb dimenziókban

Gyenge alak Elliptikus PDE esetén a gyenge alak előállítása során az első Green-azonosságot alkalmazzuk.

1. Tétel (I. Green-azonosság). Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, ekkor

$$\int_{\Omega} (\psi \Delta \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dV = \oint_{\partial \Omega} \psi (\vec{n} \cdot \nabla \varphi) dS, \quad (49)$$

ahol $\vec{n}$ az Ω tartományból kifelé mutató egységvektor, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) = \text{grad } f$ a nabla operátor.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, vegyük a

$$\left. \begin{aligned} -a \Delta u(x) + cu(x) &= f(x) & \text{minden } x \in \Omega\text{-ra} \\ u(x) &= 0 & \text{minden } x \in \partial\Omega\text{-ra} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

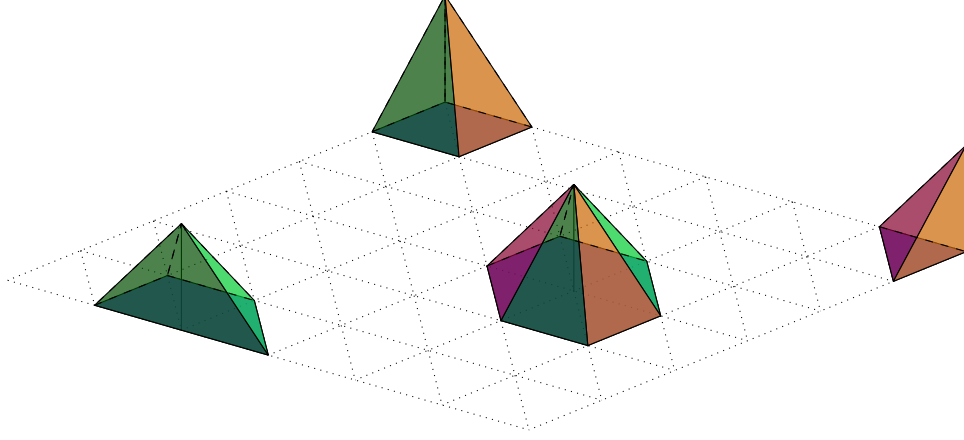
elliptikus peremérték-feladatot (homogén Dirichlet-probléma), ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható.

Legyen $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható és legyen $v(x) = 0$ minden $x \in \partial\Omega$ -ra. Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát v -vel majd integráljunk az Ω tartományra. Alkalmazzuk a (49) Green-azonosságot, így kapjuk a (50) PDE gyenge alakját:

$$\left. \begin{aligned} a \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV + c \int_{\Omega} uv dV &= \int_{\Omega} fv dV & \text{minden } v: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ folytonosan deriválható, } \partial\Omega\text{-n eltűnő függvényre} \\ u(x) &= 0 & \text{minden } x \in \partial\Omega\text{-ra} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

ahol $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható.

Bázisfüggvények Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_m$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány belső pontjai, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ a tartomány határpontjai. Közelítsük Ω tartományt az x_i ($m+1 \leq i \leq n$) külső csomópontok összekötésével képzett zárt törtvonal által határolt $\hat{\Omega}$ tartománnyal. A belső csomópontok megfelelő bekötésével bontsuk fel $\hat{\Omega}$ -t az Ω_k ($1 \leq k \leq N$) háromszögek uniójára. A felbontás h finomsága a behúzott élek hosszának maxima.



4. ábra. Elemenként lineáris bázisfüggvények (kalapfüggvények) elliptikus PDE-kre

Minden x_i csomópontához ($1 \leq i \leq n$) hozzárendeljük azt a folytonos $\varphi_i: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ bázisfüggvényt, melyre

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{minden } 1 \leq j \leq n\text{-re} \quad (52a)$$

$$\varphi_i|_{\Omega_k} \text{ sík} \quad \text{minden } 1 \leq k \leq N\text{-re.} \quad (52b)$$

Az így definiált φ_i ($1 \leq i \leq n$) bázisfüggvények elemenként lineáris folytonos függvények (gúla alakú kalapfüggvények), megtekinthetők a 4. ábrán.

4. Állítás. Az $f: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, Ω_k ($1 \leq k \leq N$) háromszög-tartományok felett síkként haladó $\hat{f}: \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ közelítése, melyre $\hat{f}(x_i) = f(x_i)$ minden $1 \leq i \leq n$ -re, az

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \varphi_i(x) \quad (53)$$

alakban állítható elő a (52) bázisfüggvények segítségével.

Az így definiált $\hat{f}$ függvény $\mathcal{O}(h^2)$ hibával közelíti az f függvényt.

Diszkrét egyenlet Az egydimenziós esethez hasonlóan vezessük be az

$$M_{ij} = \int_{\hat{\Omega}} \varphi_i \varphi_j \, dV \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (54)$$

$$S_{ij} = \int_{\hat{\Omega}} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dV \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (55)$$

tömeg- és merevségi mátrixokat. Mindkét mátrix szimmetrikus és ritka. Ezen mátrixok segítségével a (51) gyenge diszkrét egyenlet a

$$\sum_{j=1}^m (aS_{ij} + cM_{ij})u_j = \sum_{j=1}^n M_{ij}f_j \quad \text{minden } 1 \leq i \leq m\text{-re} \quad (56)$$

alakban írható, ahol az egyenlet jobboldalát is a bázisfüggvényekkel közelítjük és $u_i \approx u(x_i)$, $f_j = f(x_j)$ minden $1 \leq i \leq m$ -re és $1 \leq j \leq n$ -re.

Parabolikus differenciálegyenletek megoldása végeelem-módszerrel

Tekintsük az alábbi kezdeti- és peremérték-feladatot.

$$\left. \begin{aligned} u_t(t, x) &= -au_{xx}(t, x) + cu(t, x) + f(x) \\ u(0, x) &= u_0(x) \\ u(t, 0) &= p_0 \\ u(t, l) &= p_1 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

A csomópontok halmazát jelölje $X = \{x_j : 0 \leq j \leq n\}$, a térbeli koordinátában alkalmazzunk végeelem diszkretizációt. Válasszuk az időlépés nagyságát konstans τ -nak; tetszőleges $t_m = m\tau$ időpillanatban alkalmazzuk az $u(t_m, x) \approx \hat{u}^m(x) = \sum_{j=0}^n u_j^m \varphi_j(x)$ közelítést.

Az u_j^0 együtthatókat az $u_0(x)$ kezdeti feltétel alapján határozzuk meg. Az u_j^m együtthatók ismeretében az u_j^{m+1} együtthatókat meghatározhatjuk az (57) egyenlet diszkrét alakjának megoldásával. Előrenéző Euler időlépés esetén a térbeli deriváltak közelítését az u_j^m együtthatókkal írjuk fel, míg hátranéző Euler időlépés esetén a térbeli deriváltak közelítése az u_j^{m+1} együtthatókkal történik. Az időderivált közelítése mindkét

esetben az $u_t(x_j) \approx \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau}$ képlet segítségével történik.

Előrenéző Euler esetben az időlépés az

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{j=0}^n M_{ij} u_j^{m+1} - \sum_{j=0}^n M_{ij} u_j^m}{\tau} &= \sum_{j=0}^n [aS_{ij} + cM_{ij}] u_j^m + \sum_{j=0}^n M_{ij} f_j \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n-1\text{-re} \\ u_0^{m+1} &= p_0 \\ u_n^{m+1} &= p_1 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

egyenletrendszer megoldásával történik.

Hátranéző Euler esetben az időlépés az

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{j=0}^n M_{ij} u_j^{m+1} - \sum_{j=0}^n M_{ij} u_j^m}{\tau} &= \sum_{j=0}^n [aS_{ij} + cM_{ij}] u_j^{m+1} + \sum_{j=0}^n M_{ij} f_j \quad \text{minden } 1 \leq i \leq n-1\text{-re} \\ u_0^{m+1} &= p_0 \\ u_n^{m+1} &= p_1 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

egyenletrendszer megoldásával történik.

Gyakorlófeladatok

- a.) Határozzuk meg az alábbi peremérték-feladat közelítő megoldását végeelem-módszerrel:

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} - 2u &= 2(1 - x^2) \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Az intervallumot bontsuk fel négy egyforma hosszúságú szakaszra, használjunk szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket.

A peremérték-feladat típusa inhomogén Dirichlet-probléma. A tartomány: $\Omega = [0, 1] \Rightarrow l = 1$, a differenciálegyenlet együtthatói: $a = -1$ és $c = -2$, forrástagja $f: x \rightarrow 2(1 - x^2)$, a peremértékek $p_0 = 0, p_1 = 1$. A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, $n = 4$. A kalapfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi

mátrixokat a (20) és (21) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (2, \frac{15}{8}, \frac{3}{2}, \frac{7}{8}, 0)$.

A Dirichlet-peremfeltételek miatt $u_0 = p_0 = 0, u_4 = p_1 = 1$, az (u_1, u_2, u_3) változókra pedig a (26) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$-\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} & 0 \\ \frac{47}{12} & -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} \\ 0 & \frac{47}{12} & -\frac{25}{3} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{15}{8} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{47}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{24} \\ \frac{35}{96} \\ -\frac{89}{24} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} & 0 \\ \frac{47}{12} & -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} \\ 0 & \frac{47}{12} & -\frac{25}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{24} \\ \frac{35}{96} \\ -\frac{89}{24} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{9}{16} \end{bmatrix}.$$

Az egzakt megoldás az $u: x \rightarrow x^2$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1)$.

- b.) **Határozzuk meg végeselem-módszerrel az állandósult hőmérséklet-eloszlást homogén rúdban, ha egyik végét állandó $300K$ -es hőmérsékleten, másik végét $400K$ -es hőmérsékleten tartjuk, a rúd hossza pedig 4 egység.**

$$\left. \begin{aligned} -u_{xx} &= 0 \\ u(0) &= 300 \\ u(4) &= 400 \end{aligned} \right\}.$$

A csomópontok halmaza legyen $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

A peremérték-feladat típusa inhomogén Dirichlet-probléma. A tartomány: $\Omega = [0, 4] \Rightarrow l = 4$, a differenciál-egyenlet együtthatói: $a = 1$ és $c = 0$, forrástagja nincs, a peremértékek $p_0 = 300, p_1 = 400$. A szakaszok száma $n = 4$. A kalapfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi mátrixokat a (20) és (21) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

A Dirichlet-peremfeltételek miatt $u_0 = p_0 = 300, u_4 = p_1 = 400$, az (u_1, u_2, u_3) változókra pedig a (26) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$-300 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 400 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 325 \\ 350 \\ 375 \end{bmatrix}.$$

A peremérték-feladat pontos megoldása az $u: x \rightarrow 300 + 25 \cdot x$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (300, 325, 350, 375, 400)$.

- c.) **Határozzuk meg végeelem-módszerrel a vízszintesen befogott rugalmas szál önsúlya alatti lehajlását. A folyamatot leíró differenciálegyenlet:**

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} &= 1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az intervallumot bontsuk fel három egyforma hosszúságú szakaszra, használjunk szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket.

A peremérték-feladat típusa homogén Dirichlet-probléma. A tartomány: $\Omega = [0, 1] \Rightarrow l = 1$, a differenciálegyenlet együtthatói: $a = -1$ és $c = 0$, forrástagja $f: x \rightarrow 1$, a peremértékek $p_0 = 0, p_1 = 0$. A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $n = 3$. A kalapfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi mátrixokat a (20) és (21) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (1, 1, 1, 1)$.

A Dirichlet-peremfeltételek miatt $u_0 = p_0 = 0, u_3 = p_1 = 0$, az (u_1, u_2) változókra pedig a (17) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$-3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

A peremérték-feladat egzakt megoldása az $u: x \rightarrow -\frac{1}{2}x(1-x)$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3) = (0, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$.

d.) **Határozzuk meg az alábbi peremérték-feladat közelítő megoldását végeelem-módszerrel:**

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} + 6u &= 6x^3 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az intervallumot bontsuk fel hat egyforma hosszúságú szakaszra, használjunk szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket.

A peremérték-feladat típusa homogén Dirichlet-probléma. A tartomány: $\Omega = [0, 1] \Rightarrow l = 1$, a differenciál-egyenlet együtthatói: $a = -1$ és $c = 6$, forrástagja $f: x \rightarrow 6x^3$, a peremértékek $p_0 = 0, p_1 = 0$. A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\}$, $n = 6$. A kalapfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi mátrixokat a (20) és (21) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) = (0, \frac{1}{36}, \frac{2}{9}, \frac{3}{4}, \frac{16}{9}, \frac{125}{36}, 6)$.

A Dirichlet-peremfeltételek miatt $u_0 = p_0 = 0, u_6 = p_1 = 0$, az $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ változókra pedig a (17) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{34}{6} & \frac{37}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{37}{6} & -\frac{34}{6} & \frac{37}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{37}{6} & -\frac{34}{6} & \frac{37}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{6} & -\frac{34}{6} & \frac{37}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{6} & -\frac{34}{6} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{36} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{125}{36} \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 15 \\ 34 \\ 65 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} -\frac{34}{6} & \frac{37}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{37}{6} & -\frac{34}{6} & \frac{37}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{37}{6} & -\frac{34}{6} & \frac{37}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{6} & -\frac{34}{6} & \frac{37}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{6} & -\frac{34}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 15 \\ 34 \\ 65 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1620 \\ -0.2963 \\ -0.3750 \\ -0.3704 \\ -0.2546 \end{bmatrix}.$$

A peremérték-feladat megoldása az $u: x \rightarrow x^3 - x$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = (0, -0.1620, -0.2963, -0.3750, -0.3704, -0.2546, 0)$.

- e.) **Határozzuk meg az alábbi peremérték-feladat közelítő megoldását végeelem-módszerrel:**

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} - 2u &= 2(1 - x^2) \\ u(0) &= 0 \\ u_x(1) &= 2 \end{aligned} \right\}.$$

Az intervallumot bontsuk fel négy egyforma hosszúságú szakaszra, használjunk szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket.

A peremérték-feladat típusa vegyes peremérték-feladat. A tartomány: $\Omega = [0, 1] \Rightarrow l = 1$, a differenciálegyenlet együtthatói: $a = -1$ és $c = -2$, forrástagja $f: x \rightarrow 2(1 - x^2)$, a peremértékek $p_0 = 0, q_1 = 2$. A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, $n = 4$. A kalapfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi mátrixokat a (20) és (21) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (2, \frac{15}{8}, \frac{3}{2}, \frac{7}{8}, 0)$.

A Dirichlet-peremfeltétel az $u_0 = p_0 = 0$ egyenlettel vehető figyelembe, az (u_1, u_2, u_3, u_4) változókra pedig a (32) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$-\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} & 0 & 0 \\ \frac{47}{12} & -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} & 0 \\ 0 & \frac{47}{12} & -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} \\ 0 & 0 & \frac{47}{12} & -\frac{25}{6} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{15}{8} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{24} \\ \frac{35}{96} \\ \frac{5}{24} \\ -\frac{377}{192} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} & 0 & 0 \\ \frac{47}{12} & -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} & 0 \\ 0 & \frac{47}{12} & -\frac{25}{3} & \frac{47}{12} \\ 0 & 0 & \frac{47}{12} & -\frac{25}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{24} \\ \frac{35}{96} \\ \frac{5}{24} \\ -\frac{377}{192} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{9}{16} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az egzakt megoldás az $u: x \rightarrow x^2$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1)$.

- f.) **Rúdban hosszegységenként adott mennyiségű hő fejlődik, a rúd egyik vége szigetelt, másik végét állandó hőmérsékleten tartjuk. A folyamatot leíró differenciálegyenlet:**

$$\left. \begin{aligned} -u_{xx} &= 1 \\ u(0) &= 5 \\ u_x(1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az intervallumot bontsuk fel négy egyforma hosszúságú szakaszra, használjunk szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket.

A peremérték-feladat típusa vegyes peremérték-feladat. A tartomány: $\Omega = [0, 1] \Rightarrow l = 1$, a differenciál-egyenlet együtthatói: $a = 1$ és $c = 0$, forrástagja $f: x \rightarrow 1$, a peremértékek $p_0 = 5, q_1 = 0$. A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, $n = 4$. A kalapfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi mátrixokat a (20) és (21) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (1, 1, 1, 1, 1)$.

A Dirichlet-peremfeltétel az $u_0 = p_0 = 5$ egyenlettel vehető figyelembe, az (u_1, u_2, u_3, u_4) változókra pedig a (32) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{81}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{81}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{167}{32} \\ \frac{32}{172} \\ \frac{32}{175} \\ \frac{32}{176} \\ \frac{32}{32} \end{bmatrix}.$$

Az egzakt megoldás az $u: x \rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + x + 5$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (\frac{160}{32}, \frac{167}{32}, \frac{172}{32}, \frac{175}{32}, \frac{176}{32})$.

g.) **Határozzuk meg a**

$$\left. \begin{aligned} -u_{xx} + 3u &= 3(x^2 - 4)x^2 \\ u_x(-2) &= -32 \\ u(2) &= 16 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladat közelítő megoldását végeselem-módszerrel. Az intervallumot bontsuk fel négy egyforma hosszúságú szakaszra, használjunk szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket.

A peremérték-feladat típusa vegyes peremérték-feladat. A tartomány: $\Omega = [-2, 2] \Rightarrow l = 4$, a differenciál-egyenlet együtthatói: $a = 1$ és $c = 3$, forrástagja $f: x \rightarrow 3(x^2 - 4)x^2$, a peremértékek $q_0 = -32, p_1 = 16$. A csomópontok halmaza $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $n = 4$. A kalapfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi mátrixokat a (20) és (21) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (0, -9, 0, -9, 0)$.

A Dirichlet-peremfeltétel az $u_4 = p_1 = 16$ egyenlettel vehető figyelembe, az (u_0, u_1, u_2, u_3) változókra pedig a (36) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -32 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{61}{2} \\ -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{61}{2} \\ -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.3337 \\ 0.3347 \\ -0.6559 \\ 0.4180 \end{bmatrix}.$$

Az egzakt megoldás az $u: x \rightarrow x^4$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (15.3337, 0.3347, -0.6559, 0.4180, 16)$.

h.) **Határozzuk meg a**

$$\left. \begin{aligned} -u_{xx} + 3u &= 3(x^2 - 4)x^2 \\ u_x(-2) &= -32 \\ u_x(2) &= 32 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladat közelítő megoldását végeselem-módszerrel. Az intervallumot bontsuk fel négy egyforma hosszúságú szakaszra, használjunk szakaszonként lineáris bázisfüggvényeket.

A peremérték-feladat típusa Neumann-probléma. A tartomány: $\Omega = [-2, 2] \Rightarrow l = 4$, a differenciálegyenlet együtthatói: $a = 1$ és $c = 3$, forrástagja $f: x \rightarrow 3(x^2 - 4)x^2$, a peremértékek $q_0 = -32, q_1 = 32$. A csomópontok halmaza $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $n = 4$. A kalapfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi mátrixokat a (47) és (48) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (0, -9, 0, -9, 0)$.

Az (u_0, u_1, u_2, u_3) változókra pedig a (40) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -32 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{61}{2} \\ -6 \\ -3 \\ -6 \\ -\frac{61}{2} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{61}{2} \\ -6 \\ -3 \\ -6 \\ -\frac{61}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{46}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{46}{3} \end{bmatrix}.$$

Az egzakt megoldás az $u: x \rightarrow x^4$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (\frac{46}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{46}{3})$.

i.) **Határozzuk meg a**

$$\left. \begin{aligned} -u_{xx} + 3u &= 3(x^2 - 4)x^2 - 48 \\ u(-2) &= 0 \\ u(2) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladat közelítő megoldását végeselem-módszerrel. Az intervallumot bontsuk fel négy egyforma hosszúságú szakaszra, használjunk szakaszonként másodfokú bázisfüggvényeket.

A peremérték-feladat típusa homogén Dirichlet-probléma. A tartomány: $\Omega = [-2, 2] \Rightarrow l = 4$, a differenciál-egyenlet együtthatói: $a = 1$ és $c = 3$, forrástagja $f: x \rightarrow 3(x^2 - 4)x^2 - 48$, a peremértékek $p_0 = 0, p_1 = 0$. A csomópontok halmaza $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $n = 4$, a szakaszok osztópontjai: $\xi_{01} = \frac{1}{2}, \xi_{11} = \frac{3}{2}, \xi_{21} = \frac{5}{2}, \xi_{31} = \frac{7}{2}$. A (41) bázisfüggvényekhez tartozó tömeg- és merevségi mátrixokat a (47) és (48) képletekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix},$$

a mátrixok indexei 0-tól $2n$ -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) = (-48, -(48 + \frac{189}{16}), -57, -(48 + \frac{45}{16}), -48, -(48 + \frac{45}{16}), -57, -(48 + \frac{189}{16}), -48)$.

Az $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$ változókra pedig a (46) egyenletrendszer írható fel. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 21.4 & -7.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.4 & 16.4 & -7.4 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.4 & 21.4 & -7.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & -7.4 & 16.4 & -7.4 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.4 & 21.4 & -7.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & -7.4 & 16.4 & -7.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.4 & 21.4 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\begin{bmatrix} -38.9 \\ -19.375 \\ -34.1 \\ -15.775 \\ -34.1 \\ -19.375 \\ -38.9 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} 21.4 & -7.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.4 & 16.4 & -7.4 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.4 & 21.4 & -7.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & -7.4 & 16.4 & -7.4 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.4 & 21.4 & -7.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & -7.4 & 16.4 & -7.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.4 & 21.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38.9 \\ -19.375 \\ -34.1 \\ -15.775 \\ -34.1 \\ -19.375 \\ -38.9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.9448 \\ -14.9935 \\ -15.9422 \\ -15.9926 \\ -15.9422 \\ -14.9935 \\ -10.9448 \end{bmatrix}.$$

Az egzakt megoldás az $u: x \rightarrow x^4 - 16$ függvény, értéke a csomópontokban

$$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9) = (0, -10.9375, -15, -15.9375, -16, -15.9375, -15, -10.9375, 0).$$

A szakaszonként másodfokú közelítéssel nyert megoldás értéke a csomópontokban ($n = 4$) esetén:

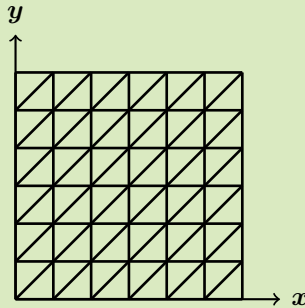
$$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9) = (0, -10.9448, -14.9935, -15.9422, -15.9926, -15.9422, -14.9935, -10.9448, 0).$$

Összehasonlításképpen, a szakaszonként lineáris közelítéssel nyert megoldás értéke a csomópontokban ($n = 8$):

$$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9) = (0, -11.0358, -15.1381, -16.0909, -16.1574, -16.0909, -15.1381, -11.0358, 0)$$

lényegesen nagyobb hibával rendelkezik, azonos változószám mellett.

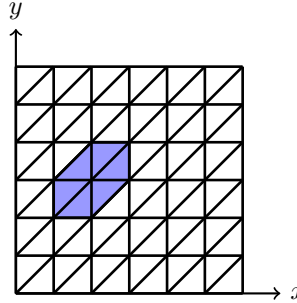
j.) Tekintsük az $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ tartomány alábbi háromszögelését:



A csomópontok halmaza $\{(a, b) : a, b \in \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\}\}$. Válaszoljuk meg a következőket:

- Hány háromszögre bontottuk fel a tartományt?
- Hány csomópont tartozik a felbontáshoz?
- Hány elemenként lineáris bázisfüggvény rendelhető a felbontáshoz?
- Használjuk a felbontást Dirichlet-féle peremérték-feladat végeselem-módszerrel történő megoldására. Hány bázisfüggvény együtthatóját rögzítik a peremfeltételek? A peremfeltételek kielégítése után hány ismeretlenes egyenletrendszerre vezet a probléma?
- Jelöljük azon háromszög-idomokat, melyek felett az $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ koordinátájú csomópontoz tartozó bázisfüggvény nem azonosan nulla!

- A háromszög-elemek száma $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$.
- A csomópontok száma $7 \cdot 7 = 49$.
- Minden csomóponthoz pontosan egy bázisfüggvény tartozik, a bázisfüggvények száma így 49.
- A Dirichlet-peremfeltételek kezelése a külső csomópontokhoz tartozó függvényértékek előírásával történik, ez $4 \cdot 6 = 24$ együttható rögzítésével jár. A maradék együtthatók lesznek az ismeretlenek az egyenletrendszerben, számuk megegyezik a belső csomópontok számával, ez $5 \cdot 5 = 25$ ismeretlent jelent.
- A bázisfüggvény pontosan azon elemeken különbözik nullától, melyek egyik csúcsa a csomópont:



k.) Oldjuk meg végeselem-módszerrel a

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} + 27u &= 2 + 27x^2 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladatot, ha a csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.

A peremérték-feladat típusa Dirichlet-feladat. A differenciálegyenlet együtthatói $a = -1$ és $c = 27$, forrástagja $f: x \rightarrow 2(1 - x^2)$, a peremértékek $p_0 = 0, p_1 = 1$, és $n = 3, l = 1$. A tömeg- illetve a merevségi mátrixot a (20) és (21) kifejezésekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (2, 5, 14, 29)$.

A Dirichlet-peremfeltételek szerint $u_0 = p_0 = 0$ és $u_3 = p_1 = 1$, az (u_1, u_2) változók pedig kielégítik a (26) egyenletrendszert. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{3}{2} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

A pontos megoldás az $u: x \rightarrow x^2$ függvény, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3) = (0, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, 1)$.

l.) Oldjuk meg végeselem-módszerrel a

$$\left. \begin{aligned} 9u - u_{xx} &= 189 \cdot x + 3 \\ u(0) &= 4 \\ u(1) &= 25 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladatot, ha a csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.

A peremérték-feladat típusa Dirichlet-feladat. A differenciálegyenlet együtthatói $a = 1$ és $c = 9$, forrástagja $f: x \rightarrow 189x + 3$, a peremértékek $p_0 = 4, p_1 = 25$, és $n = 3, l = 1$. A tömeg- illetve a merevségi mátrixot a (20) és (21) kifejezésekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (3, 66, 129, 192)$.

A Dirichlet-peremfeltételek szerint $u_0 = p_0 = 4$ és $u_3 = p_1 = 25$, az (u_1, u_2) változók pedig kielégítik a (26) egyenletrendszerét. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 8 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 66 \\ 129 \\ 192 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - 25 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ \frac{211}{2} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} 8 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ \frac{211}{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

A közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3) = (4, 9, 16, 25)$.

m.) Oldjuk meg végeselem-módszerrel a

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} + 32u &= 2((4x)^2 - 15) \\ u(0) &= -1 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladatot, ha a csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$.

A peremérték-feladat típusa Dirichlet-feladat. A differenciálegyenlet együtthatói $a = -1$ és $c = 32$, forrástagja $f: x \rightarrow 2((4x)^2 - 15)$, a peremértékek $p_0 = -1, p_1 = 0$, és $n = 4, l = 1$. A tömeg- illetve a merevségi mátrixot a (20) és (21) kifejezésekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (-30, -28, -22, -12, 2)$.

A Dirichlet-peremfeltételek szerint $u_0 = p_0 = -1$ és $u_4 = p_1 = 0$, az (u_1, u_2, u_3) változók pedig kielégítik a (26) egyenletrendszert. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{4}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -8 & 16 & 0 \\ 16 & -8 & 16 \\ 0 & 16 & -8 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -30 \\ -28 \\ -22 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -9 \\ -32 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -8 & 16 & 0 \\ 16 & -8 & 16 \\ 0 & 16 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -9 \\ -32 \\ -17 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9375 \\ -0.75 \\ -0.4375 \end{bmatrix}.$$

A pontos megoldás $u: x \rightarrow x^2 - 1$, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (-1, -0.9375, -0.75, -0.4375, 0)$.

n.) **Oldjuk meg végeselem-módszerrel a**

$$\left. \begin{aligned} 3u - \frac{1}{2}u_{xx} &= 3(x-1)^2 - 1 \\ u_x(-1) &= -4 \\ u(3) &= 4 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladatot, ha a csomópontok halmaza $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

A peremérték-feladat típusa vegyes feladat. A differenciálegyenlet együtthatói $a = \frac{1}{2}$ és $c = 3$, forrástagja $f: x \rightarrow 3(x-1)^2 - 1$, a peremértékek $q_0 = -4, p_1 = 4$, és $n = 4, l = 4$. A tömeg- illetve a merevségi mátrixot a (20) és (21) kifejezésekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (11, 2, -1, 2, 11)$.

A Dirichlet-peremfeltétel szerint $u_4 = p_1 = 4$, az (u_0, u_1, u_2, u_3) változók pedig kielégítik a (36) egyenletrendszert. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} - (-4) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A pontos megoldás $u: x \rightarrow (x-1)^2$, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (4, 1, 0, 1, 4)$.

o.) **Oldjuk meg végeelem-módszerrel a**

$$\left. \begin{aligned} 3u - \frac{1}{2}u_{xx} &= 3(x-1)^2 - 1 \\ u(-1) &= 4 \\ u_x(3) &= 4 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladatot, ha a csomópontok halmaza $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

A peremérték-feladat típusa vegyes feladat. A differenciálegyenlet együtthatói $a = \frac{1}{2}$ és $c = 3$, forrástagja $f: x \rightarrow 3(x-1)^2 - 1$, a peremértékek $p_0 = 4, q_1 = 4$, és $n = 4, l = 4$. A tömeg- illetve a merevségi mátrixot a (20) és (21) kifejezésekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (11, 2, -1, 2, 11)$.

A Dirichlet-peremfeltétel szerint $u_0 = p_0 = 4$, az (u_1, u_2, u_3, u_4) változók pedig kielégítik a (32) egyenletrendszert. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

A pontos megoldás $u: x \rightarrow (x-1)^2$, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (4, 1, 0, 1, 4)$.

p.) Oldjuk meg végeselem-módszerrel a

$$\left. \begin{aligned} 3u - \frac{1}{2}u_{xx} &= 3(x-1)^2 - 1 \\ u_x(-1) &= -4 \\ u_x(3) &= 4 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladatot, ha a csomópontok halmaza $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

A peremérték-feladat típusa Neumann-feladat. A differenciálegyenlet együtthatói $a = \frac{1}{2}$ és $c = 3$, forrástagja $f: x \rightarrow 3(x-1)^2 - 1$, a peremértékek $q_0 = -4, q_1 = 4$, és $n = 4, l = 4$. A tömeg- illetve a merevségi mátrixot a (20) és (21) kifejezésekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = (11, 2, -1, 2, 11)$.

Az $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$ változók kielégítik a (40) egyenletrendszert. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} - 4 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

A pontos megoldás $u: x \rightarrow (x-1)^2$, a közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = (4, 1, 0, 1, 4)$.

q.) Oldjuk meg végeselem-módszerrel a

$$\left. \begin{aligned} 2u - \frac{4}{3}u_{xx} &= 2x + 2 \\ u_x(0) &= 4 \\ u(3) &= 12 \end{aligned} \right\}.$$

peremérték-feladatot, ha a csomópontok halmaza $X = \{0, 1, 2, 3\}$.

A peremérték-feladat típusa vegyes feladat. A differenciálegyenlet együtthatói $a = \frac{4}{2}$ és $c = 2$, forrástagja

$f: 2x + 2$, a peremértékek $q_0 = 4, p_1 = 12$, és $n = 3, l = 3$. A tömeg- illetve a merevségi mátrixot a (20) és (21) kifejezésekbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

a mátrixok indexei 0-tól n -ig terjednek. $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (2, 4, 6, 8)$.

A Dirichlet-peremfeltétel szerint $u_3 = p_1 = 12$, az (u_0, u_1, u_2) változók pedig kielégítik a (36) egyenletrendszert. Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer jobboldala:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} - 4 \cdot \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 12 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

A közelítő megoldás értéke a csomópontokban $(u_0, u_1, u_2, u_3) = (-1, 2, 5, 12)$.

r.) **Adjunk közelítést $u(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$ értékére végeelem-módszerrel, ha az $u(t, x)$ függvény kielégíti az**

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{2}u_{xx} + 54x - 9 \\ u(0, x) &= \begin{cases} 3x & \text{ha } 0 \leq x < \frac{3}{4} \\ 6 & \text{ha } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u(t, 0) &= 0 \quad \text{ha } t > 0 \\ u(t, 1) &= 6 \quad \text{ha } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot. Alkalmazzunk előrenéző Euler idődiszkrétizációt.

A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $n = 3$, $L = 1$ így a tömeg- és a merevségi mátrix:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az időlépés nagysága $\tau = \frac{1}{9}$, a kezdőállapotban $(u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (0, 1, 2, 6)$, a $t = \tau$ időpontban a peremfeltételek alapján $(u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1) = (0, y_1, y_2, 6)$, a forrástag $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (-9, 9, 27, 45)$. Írjuk fel az (58)

egyenletrendszert az y_1, y_2 változókra.

$$9 \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 27 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{2}(y_1 - 1) + \frac{1}{2}(y_2 - 2) = 3$$

$$\frac{1}{2}(y_1 - 1) + \frac{4}{2}(y_2 - 2) = \frac{9}{2}$$

Az egyenletrendszer megoldása $y_1 = 2, y_2 = 4$, így $u\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right) \approx 2$.

s.) **Adjunk közelítést $u\left(\frac{1}{18}, \frac{2}{3}\right)$ értékére végeselem-módszerrel, ha az $u(t, x)$ függvény kielégíti az**

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 45x - 3 \\ u(0, x) &= \frac{9}{2}x(1 - x) \\ u(t, 0) &= 0 \quad \text{ha } t > 0 \\ u(t, 1) &= 2 \quad \text{ha } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot. Alkalmazzunk előrenéző Euler idődiszkrétizációt.

A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $n = 3$, $L = 1$ így a tömeg- és a merevségi mátrix:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az időlépés nagysága $\tau = \frac{1}{18}$, a kezdőállapotban $(u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (0, 1, 1, 0)$, a $t = \tau$ időpontban a perem-feltételek alapján $(u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1) = (0, y_1, y_2, 2)$, a forrástag $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (-3, 12, 27, 42)$. Írjuk fel az (58) egyenletrendszert az y_1, y_2 változókra.

$$18 \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = (-1) \cdot 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 27 \\ 42 \end{bmatrix}$$

$$4(y_1 - 1) + 1(y_2 - 1) = 1$$

$$1(y_1 - 1) + 4(y_2 - 1) + 2 = 6$$

Az egyenletrendszer megoldása $y_1 = 1, y_2 = 2$, így $u\left(\frac{1}{18}, \frac{2}{3}\right) \approx 2$.

t.) **Adjunk közelítést $u\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right)$ értékére végeselem-módszerrel, ha az $u(t, x)$ függvény kielégíti az**

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{4}u_{xx} + \frac{9}{2}u \\ u(0, x) &= 3x + 1 \\ u(t, 0) &= 1 \quad \text{ha } t > 0 \\ u(t, 1) &= 4 \quad \text{ha } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot. Alkalmazzunk előrenéző Euler idődiszkrétizációt.

A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $n = 3$, $L = 1$ így a tömeg- és a merevségi mátrix:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az időlépés nagysága $\tau = \frac{1}{9}$, a kezdőállapotban $(u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (1, 2, 3, 4)$, a $t = \tau$ időpontban a peremfeltételek alapján $(u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1) = (1, y_1, y_2, 4)$, a forrástag $f(x) = 0$. Írjuk fel az (58) egyenletrendszert az y_1, y_2 változókra.

$$9 \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \cdot 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{2}(y_1 - 2) + \frac{1}{2}(y_2 - 3) = 3$$

$$\frac{1}{2}(y_1 - 2) + \frac{4}{2}(y_2 - 3) = \frac{9}{2}$$

Az egyenletrendszer megoldása $y_1 = 3, y_2 = 5$, így $u(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}) \approx 5$.

u.) **Adjunk közelítést $u(\frac{1}{30}, 1)$ értékére végeelem-módszerrel, ha az $u(t, x)$ függvény kielégíti az**

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -15u_{xx} + 45x - 30 \\ u(0, x) &= \frac{2x^3 - 9x^2 + 13x + 6}{6} \\ u(t, 0) &= 1 \quad \text{ha } t > 0 \\ u(t, 3) &= 3 \quad \text{ha } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot. Alkalmazzunk előrenéző Euler idődiszkretizációt.

A csomópontok halmaza $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $n = 3$, $L = 3$ így a tömeg- és a merevségi mátrix:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az időlépés nagysága $\tau = \frac{1}{30}$, a kezdőállapotban $(u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (1, 2, 2, 3)$, a $t = \tau$ időpontban a peremfeltételek alapján $(u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1) = (1, y_1, y_2, 3)$, a forrástag $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (-30, 15, 60, 105)$. Írjuk fel az (58) egyenletrendszert az y_1, y_2 változókra.

$$30 \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 15 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 15 \\ 60 \\ 105 \end{bmatrix}$$

$$20(y_1 - 2) + 5(y_2 - 2) = 30$$

$$5(y_1 - 2) + 20(y_2 - 2) = 45$$

Az egyenletrendszer megoldása $y_1 = 3, y_2 = 4$, így $u(\frac{1}{30}, 1) \approx 3$.

v.) Adjunk közelítést $u\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$ értékére végeelem-módszerrel, ha az $u(t, x)$ függvény kielégíti az

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{27 - 54x}{2} \\ u(0, x) &= \begin{cases} 6 - 9x & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 9 - 9x & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u(t, 0) &= 6 \quad \text{ha } t > 0 \\ u(t, 1) &= 0 \quad \text{ha } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot. Alkalmazzunk hátranéző Euler idődiszkretizációt.

A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $n = 3$, $L = 1$ így a tömeg- és a merevségi mátrix:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az időlépés nagysága $\tau = \frac{1}{9}$, a kezdőállapotban $(u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (6, 3, 3, 0)$, a $t = \tau$ időpontban a peremfeltételek alapján $(u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1) = (6, y_1, y_2, 0)$, a forrástag $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (\frac{27}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{27}{2})$. Írjuk fel az (59) egyenletrendszert az y_1, y_2 változókra.

$$\begin{aligned} 9 \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) &= (-1) \cdot 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{27}{2} \\ \frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -\frac{27}{2} \end{bmatrix} \\ \frac{4}{2}(y_1 - 3) + \frac{1}{2}(y_2 - 3) &= -6y_1 + 3y_2 + \frac{39}{2} \\ \frac{1}{2}(y_1 - 3) + \frac{4}{2}(y_2 - 3) &= 3y_1 - 6y_2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $y_1 = 4, y_2 = 2$, így $u\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right) \approx 4$.

w.) Adjunk közelítést $u\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$ értékére végeelem-módszerrel, ha az $u(t, x)$ függvény kielégíti az

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{2}u_{xx} + \frac{51 - 54x}{2} \\ u(0, x) &= \frac{9x^2 - 9x + 4}{2} \\ u(t, 0) &= 2 \quad \text{ha } t > 0 \\ u(t, 1) &= 2 \quad \text{ha } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot. Alkalmazzunk hátranéző Euler idődiszkretizációt.

A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $n = 3$, $L = 1$ így a tömeg- és a merevségi mátrix:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az időlépés nagysága $\tau = \frac{1}{9}$, a kezdőállapotban $(u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (2, 1, 1, 2)$, a $t = \tau$ időpontban a peremfeltételek alapján $(u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1) = (2, y_1, y_2, 2)$, a forrástag $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (\frac{51}{2}, \frac{33}{2}, \frac{15}{2}, -\frac{3}{2})$. Írjuk fel az (59)

egyenletrendszert az y_1, y_2 változókra.

$$9 \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ y_1 \\ y_2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ y_1 \\ y_2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{51}{2} \\ \frac{33}{2} \\ \frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{2}(y_1 - 1) + \frac{1}{2}(y_2 - 1) = 3y_1 - \frac{3}{2}y_2 + \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2}(y_1 - 1) + \frac{4}{2}(y_2 - 1) = -\frac{3}{2}y_1 + 3y_2 - \frac{1}{2}$$

Az egyenletrendszer megoldása $y_1 = 3, y_2 = 4$, így $u\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right) \approx 3$.

x.) **Adjunk közelítést $u\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{3}\right)$ értékére végeelem-módszerrel, ha az $u(t, x)$ függvény kielégíti az**

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -u_{xx} - 9u + 21 - 81x \\ u(0, x) &= 27x^2(1 - x) \\ u(t, 0) &= 0 \quad \text{ha } t > 0 \\ u(t, 1) &= 0 \quad \text{ha } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot. Alkalmazzunk hátranéző Euler idődiszkretizációt.

A csomópontok halmaza $X = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, $n = 3$, $L = 1$ így a tömeg- és a merevségi mátrix:

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az időlépés nagysága $\tau = \frac{1}{18}$, a kezdőállapotban $(u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (0, 4, 4, 0)$, a $t = \tau$ időpontban a perem-feltételek alapján $(u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1) = (0, y_1, y_2, 0)$, a forrástag $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (21, -6, -33, -50)$. Írjuk fel az (59) egyenletrendszert az y_1, y_2 változókra.

$$18 \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} - 9 \cdot \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ -6 \\ -33 \\ -60 \end{bmatrix}$$

$$4(y_1 - 4) + 1(y_2 - 4) = 4y_1 - \frac{7}{2}y_2 - 2$$

$$1(y_1 - 4) + 4(y_2 - 4) = -\frac{7}{2}y_1 + 4y_2 - 11$$

Az egyenletrendszer megoldása $y_1 = 2, y_2 = 4$, így $u\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{3}\right) \approx 2$.

y.) Adjunk közelítést $u\left(\frac{1}{9}, 2\right)$ értékére végeselem-módszerrel, ha az $u(t, x)$ függvény kielégíti az

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -3u_{xx} + \frac{3}{2}x \\ u(0, x) &= \frac{2x^3 - 9x^2 + 13x + 6}{6} \\ u(t, 0) &= 1 \quad \text{ha } t > 0 \\ u(t, 3) &= 2 \quad \text{ha } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdeti- és peremérték-feladatot. Alkalmazzunk hátranéző Euler idődiszkretizációt.

A csomópontok halmaza $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $n = 3$, $L = 3$ így a tömeg- és a merevségi mátrix:

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az időlépés nagysága $\tau = \frac{1}{9}$, a kezdőállapotban $(u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (1, 2, 2, 3)$, a $t = \tau$ időpontban a peremfeltételek alapján $(u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1) = (1, y_1, y_2, 2)$, a forrástag $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (0, \frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2})$. Írjuk fel az (59) egyenletrendszert az y_1, y_2 változókra.

$$\begin{aligned} 9 \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) &= 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} \\ \frac{12}{2}(y_1 - 2) + \frac{3}{2}(y_2 - 2) &= 6y_1 - 3y_2 - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}(y_1 - 2) + \frac{12}{2}(y_2 - 2) - \frac{3}{2} &= -3y_1 + 6y_2 - 3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $y_1 = 3, y_2 = 3$, így $u\left(\frac{1}{9}, 2\right) \approx 3$.

Ajánlott irodalom

- [1] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. Theory and practice of finite elements. Vol. 159. Springer, 2004.
- [2] Stoyan, Gisbert és Takó, Galina. Numerikus módszerek 3. Typotex, Budapest 1997.