

Ipari matematika 2. vizsga – 2015. január 15.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes kötelező feladat helyes megoldásával 45 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 23 pont elérése szükséges.

1. feladat (9 pont)

Határozzuk meg a $(0, 6), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ pontokra illeszkedő interpolációs polinomot!

2. feladat (9 pont)

Adjunk közelítést az $\int_1^2 e^x dx$ integrál értékére az $x_0 = 1, x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 2$ alappontokban felvett függvényértékek alapján!

3. feladat (9 pont)

Adjunk közelítést az ismeretlen $f(x)$ függvény második deriváltjára az $x = 2$ pontban, az $f(0) = 1, f(2) = 3, f(4) = -1$ függvényértékek ismeretében!

4. feladat (9 pont)

Végezzük el az $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -9 & 14 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix LU-felbontását! Legyen $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Oldjuk meg az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszert két lépésben, az $L \cdot y = b$, majd az $U \cdot x = y$ egyenletrendszerek megoldásával!

5. feladat (9 pont)

Adjunk közelítő megoldást az alábbi peremérték-feladatra két belső pont alapján! Mind az első, mind a második deriváltat közelítsük *centrális* sémával. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} -3u_{xx} - 6u_x + 7u &= 2x + 21 \\ u(0) &= 2 \\ u(3) &= 11 \end{aligned} \right\}$$

+1 feladat (11 pont)

Határozzuk meg, hogy az

$$\int_x^{x+h} f(\xi) d\xi \approx h \left(\frac{1}{6} f(x) + \frac{4}{6} f\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6} f(x+h) \right)$$

kvadrátúra-képlet (Simpson-formula) egyetlen h hosszúságú részintervallumon jelentkező hibája a h hatványával arányos! Hogyan alakul a hiba, ha az integrálási tartomány a $[0, 1]$ intervallum, melyet először h hosszúságú részintervallumokra bontunk, majd mindegyiken alkalmazzuk a Simpson-formulát?

Ipari matematika 2. - Matlab – 2015. január 15.

A kérdések megválaszolásához 30 perc áll rendelkezésre.

1. feladat (7 pont)

Tekintsük az alábbi peremérték-feladatot!

$$\left. \begin{aligned} u_{xx}(x) + u_x(x) + u(x) &= \cos(x) \\ u(0) &= 0 \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Pontos megoldása ismert: $u(x) = \sin(x)$. A `pef.m` Matlab-szkript módosításával oldjuk meg a feladatot numerikusan is, az alábbi táblázat konfigurációit feltételezve, és számítsuk ki a közelítő megoldások hibáját (a pontos megoldástól vett legnagyobb eltérést), az eredményeket rögzítsük a táblázatban.

Séma (első derivált)	centrális derivált			előremutató derivált		
Rácsállandó ($h = \frac{L}{n}$)	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{\pi}{64}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{\pi}{64}$
Hiba ($\Delta = \max_i u_i - \sin(x_i) $)						

Mindkét séma esetén ábrázoljuk $\log(\Delta)$ -t $\log(h)$ függvényében. A grafikonokat mentsük le `.eps` formátumban. Melyik séma használata eredményez kisebb hibákat? A h rácsállandó hányadik hatványával arányos hibát tapasztalunk az egyes sémák esetén?

2. feladat (3 pont)

A `pde.m` Matlab-szkript az alábbi parciális differenciálegyenlet numerikus szimulációját végzi:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 10 \cdot u_x(x) = 0 \\ u(0, x) &= (\sin(\pi x))^{20} \\ u(t, 0) &= 0 \\ u(t, 1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenlet 1-es erősségű diffúzió és jobbról fújó, 10-es erősségű szél együttes hatását írja le. Tekintsük meg az animációt!

- Növeljük meg a `tau` időlépés nagyságát `0.0006`-ra, és csökkentjük az időlépések `m` számát `300`-ra. Tekintsük meg az animációt az első deriváltra alkalmazott előrenéző, centrális és hátranéző sémák használata mellett is! Mit tapasztalunk?
- A `tau` időlépés nagysága maradjon `0.0006`, az időlépések `m` száma pedig `300`, de a változtassuk meg a szélirányt, azaz a `b` változó értékét állítsuk `(-10)`-re. Végezzük el az előbbi vizsgálatokat. Mit tapasztalunk?