

## Ipari matematika 2. vizsga – 2014. december 11.

A feladatok megoldásához 90 perc áll rendelkezésre. Az összes kötelező feladat helyes megoldásával 45 pont szerezhető, az elégséges érdemjegy megszerzéséhez legalább 23 pont elérése szükséges.

### 1. feladat (9 pont)

Határozzuk meg a  $(0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 1)$  pontokra illeszkedő interpolációs polinomot!

### 2. feladat (9 pont)

Adjunk közelítést az  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$  integrál értékére az  $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}\pi, x_2 = \frac{1}{2}\pi$  alappontokban felvett függvényértékek alapján!

### 3. feladat (9 pont)

Adjunk közelítést az ismeretlen  $f(x)$  függvény második deriváltjára az  $x = 1$  pontban, az  $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 5$  függvényértékek ismeretében!

### 4. feladat (9 pont)

Végezzük el az  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & 16 \end{bmatrix}$  mátrix LU-felbontását! Legyen  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Oldjuk meg az  $A \cdot x = b$  lineáris egyenletrendszert két lépésben, az  $L \cdot y = b$ , majd az  $U \cdot x = y$  egyenletrendszerek megoldásával!

### 5. feladat (9 pont)

Adjunk közelítő megoldást az alábbi peremérték-feladatra két belső pont alapján! Az első deriváltat közelítsük *előremutató*, a második deriváltakat pedig *centrális* sémával. A kapott eredményt ábrázoljuk grafikonon.

$$\left. \begin{aligned} 8u_{xx} + 6u_x + 4u &= \frac{9x+4}{2} \\ u(0) &= 1 \\ u(6) &= 5 \end{aligned} \right\}$$

### +1 feladat (10 pont)

Határozzuk meg, hogy az első derivált alábbi közelítésének hibája a  $h$  rácsállandó hányadik hatványával arányos!

$$f_x(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

## Ipari matematika 2. - Matlab – 2014. december 11.

A kérdések megválaszolásához 30 perc áll rendelkezésre.

### 1. feladat (7 pont)

Tekintsük az alábbi peremérték-feladatot!

$$\left. \begin{aligned} u_{xx}(x) + u_x(x) + u(x) &= \cos(x) \\ u(0) &= 0 \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Pontos megoldása ismert:  $u(x) = \sin(x)$ . A `pef.m` Matlab-szkript módosításával oldjuk meg a feladatot numerikusan is, az alábbi táblázat konfigurációit feltételezve, és számítsuk ki a közelítő megoldások hibáját (a pontos megoldástól vett legnagyobb eltérést), az eredményeket rögzítsük a táblázatban.

Séma (első derivált)	centrális derivált			előremutató derivált		
Rácsállandó ( $h = \frac{L}{n}$ )	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{\pi}{64}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{\pi}{64}$
Hiba ( $\Delta = \max_i  u_i - \sin(x_i) $ )						

Mindkét séma esetén ábrázoljuk  $\log(\Delta)$ -t  $\log(h)$  függvényében. A grafikonokat mentsük le `.eps` formátumban. Melyik séma használata eredményez kisebb hibákat? A  $h$  rácsállandó hányadik hatványával arányos hibát tapasztalunk az egyes sémák esetén?

### 2. feladat (3 pont)

A `pde.m` Matlab-szkript az alábbi parciális differenciálegyenlet numerikus szimulációját végzi:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 10 \cdot u_x(x) = 0 \\ u(0, x) &= \sin(\pi x)^{20} \\ u(t, 0) &= 0 \\ u(t, 1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenlet 1-es erősségű diffúzió és jobbról fújó, 10-es erősségű szél együttes hatását írja le. Tekintsük meg az animációt!

- Növeljük meg a `tau` időlépés nagyságát `0.0006`-ra, és csökkentjük az időlépések `m` számát `300`-ra. Tekintsük meg az animációt az első deriváltra alkalmazott előrenéző, centrális és hátranéző sémák használata mellett is! Mit tapasztalunk?
- A `tau` időlépés nagysága maradjon `0.0006`, az időlépések `m` száma pedig `300`, de a változtassuk meg a szélirányt, azaz a `b` változó értékét állítsuk `(-10)`-re. Végezzük el az előbbi vizsgálatokat. Mit tapasztalunk?