3. TERÜLETI EGYENLŐTLENSÉGEK

3.1 Fogalmi keretek

Az egyenlőtlenség – pontosabban a nem-azonosság – a tér- és időbeliség alapkategóriája, ebből következően talán a legsokoldalúbban kutatott kérdésköre a területi vizsgálatoknak. A társadalmi egyenlőtlenség általában együtt jár a *szegénységgel, elmaradottsággal,* ezeknek az égető társadalmi problémáknak a vizsgálati eszközrendszere átfedésben van az általános egyenlőtlenségvizsgálati módszertannal.

Bár a módszertani eszköztárban alapvető különbséget nem okoz, a társadalmi szerkezetek és folyamatok vizsgálata során szokás megkülönböztetni egymástól *a területi különbség, differenciáltság* (differentiation) valamint *hasonlóság* illetve a *területi egyenlőtlenség* (inequality) fogalmát. A differenciáltság bármely körülmény, adottság térben különböző előfordulására utal, az egyenlőtlenség viszont azokra a jellemzőkre, amelyekhez határozott társadalmi (erkölcsi, politikai, megítélésbeli) *értéktartalom* kapcsolódik. Így a természetföldrajzi eltérések vagy az egyes tájak eltérő termékei, a területi specializáció csak differenciáló, tagoló tényezőnek számítanak, míg a jövedelmi vagy egészségügyi eltérések már egyenlőtlenségnek minősülnek.

Elsősorban az *ökológiai,* környezeti nézőpont hozta be az egyenlőtlenségi kategóriák közé a *diverzitás* fogalmát, a faji sokszínűség veszélyeztetettsége kapcsán. A fogalom azonban behatol a társadalomkutatásba is (amerikai kutatók a 20. századot a „diverzitás századaként" aposztrofálták, összefoglalóan utalva a migrációs keveredésre, a területi és társadalmi egyenlőtlenségek felhalmozódásának tendenciájára). A *diverzifikáció* a gazdaságból is ismert fogalom, a tevékenységek nemzetgazdaságon vagy vállalaton belüli kibővülésének (részben térbeli), a specializációval ellentétes iránya. Ugyanebbe a gondolati vonalba tartozik a *multikulturalitás* fogalma is, amely az együttlétező, de el is különülő kulturális jegyekre, tradíciókra utal. A területi egyenlőtlenségek közgazdasági jellegű kutatásához kapcsolódik leginkább a *koncentráció* kategóriája. Mindezeket a fogalmakat az *3.1. táblázatban* csoportosítva közöljük, ezekre érdemes kitekintenie annak is, aki csak kifejezetten egyik vagy másik fogalommal operál (a gazdasági diverzifikáltságot kutatva például érdemes tudni az ökológiai diverzitás fogalmáról és mérőszámairól is).

Különbözőség, azonosság, tagoltság (differenciáltság)
Heterogenitás, homogenitás, specializáltság, koncentráltság
Egyenlőtlenség, egyenlőség
Változatosság, egyöntetűség, diverzitás

3.1. táblázat *A területi egyenlőtlenségek kapcsán gyakran használt fogalmak*

Az egyenlőtlenségvizsgálatok sokszínűsége természetes következménye annak is, hogy történetileg változnak az azokat alakító tényezők. Az ezredforduló éveinek hazai területi folyamatai például számos tekintetben újak (*Nagy G. 2002a*), más viszonylatban azonban a korábbiakkal sokban megegyezők. A területi fejlődést befolyásoló tényezőket ezek alapján három csoportba sorolhatjuk (*Jakobi Á. 2002*):

1) *Hagyományos tényezők,* amelyek a múltban és a jelenben is azonos módon hatottak a területi egyenlőtlenségek alakulására,
2) *Átalakuló tényezők,* amelyek már a múltban is jelen voltak, hatásuk azonban jelenleg más, mint előzőleg.
3) *Új tényezők,* amelyek korábban nem léteztek (vagy a területi egyenlőtlenségek alakulására nem voltak hatással), újabban azonban befolyásolják a térségi viszonyokat.

A területi egyenlőtlenségek vizsgálata során meg kell különböztetni azok *állapotjellemzőit* (differenciáltság, kiegyenlítettség), illetve *változásuk* irányait (differenciálódás, kiegyenlítődés). Mivel teljes kiegyenlítettség elméletileg is csak nagyon kivételes esetekben fordul elő, így a *kiegyenlítődés* helyett helyesebb területi *közeledésről,* a különbségek *csökkenéséről* beszélni.

Az egyenlőtlenség a területi vizsgálatok egyik legvitatottabb kérdésköre is. Segít a különböző közelítések közötti szótértésben az, ha lehetőleg pontosan meghatározzuk, milyen értelemben, tartalommal beszélünk a területi egyenlőtlenségekről. Ennek híján ugyanis nem valóságos a vita, hisz nem ugyanarról a tartalomról esik szó. A véleményalkotás megalapozása, egyértelműsége több elemre bontható:

- a vizsgálati *tárgy* pontos meghatározása (a központi helyek térszerkezeti tagoltságáról, egyensúlytalanságairól éppúgy lehet beszélni például a városi jogállású települések földrajzi eloszlása, mint a tényleges városi funkciókat ellátó települések elemzése alapján, s a két közelítés sokban eltérő eredményeket hoz);

- a vizsgálatban használt *mérték, mutatószám* (az iskolázottság területi egyenlőtlenségei más-más képet adnak aszerint, hogy az analfabéták vagy a felsőfokú végzettségűek eloszlását vizsgáljuk, netán – valamifajta összevont mutatóként – az átlagosan elvégzett osztályszám alapján mondunk ítéletet);

- a vizsgálat *térségi szintje, aggregáltsága* (ugyanazon jelzőszám települési, városkörzeti vagy megyei szinten nagyon eltérő egyenlőtlenségi mértéket, tendenciát jelezhet);

- különböző *egyenlőtlenségi mutatók* eltérő eredményre vezethetnek (egy településen vagy térségen belül például a jövedelmi egyenlőtlenségek úgy is csökkenhetnek, hogy a szélső pólusokon lévő csoportok között polarizálódás van: az egyik tendencia a relatív szórás mutatójával, a másik a range-típusú mutatószámokkal ragadható meg → **3.2**);

- dinamikus elemzésekben lényeges a vizsgálat *időtávja* (rövid illetve hosszabb távon eltérő lehet az egyenlőtlenségek változásának tendenciája, egy nagytávlatú nivellálódási szakaszban például szinte törvényszerűen van több kisebb-nagyobb differenciálódási időszak).

A vizsgálati szempontrendszer mindenoldalú pontosítása sem vezet azonban számtani pontosságú, determinisztikus következtetésekre a területi társadalmi egyenlőtlenségek állapotai vagy alakulása kapcsán. A társadalom, mint összetett rendszer működésében ugyanis *együtt, egyidejűleg van jelen a két alapvető tendencia, a kiegyenlítődés és a differenciálódás.* Ugyanazon időszakon belül egyes szférákat polarizáció, másokat homogenizálódás jellemezhet, s a különböző térségi szinteken egy időben lehet jelen a kiegyenlítődés és a differenciálódás. Mindez az egyenlőtlenségvizsgálatok során összetett közelítést tesz kívánatossá: többfajta mutató, többfajta egyenlőtlenségi index, többfajta térségi szint tesztelését, illetve ha erre nem kerül sor, akkor a választott közelítés kereteinek egyértelmű meghatározását. E feltételek azonban nem teszik eleve lehetetlenné az ítéletalkotást, hisz a különböző tendenciák együttlétezése nem jelenti egyben azt is, hogy azok súlya, fontossága is azonos lenne. Általában nagy biztonsággal meghatározható például, hogy valamely társadalmi jelenségben egy adott időszakban a területi differenciálódás vagy a közeledés irányzata dominál-e.

Az egyenlőtlenségek, különbözőségek vizsgálata természetesen magában foglalja az azonosságok, hasonlóságok feltárását is, s az egyediség, a sajátos karakter is épp az összehasonlítások tükrében mutatkozik meg legélesebben.

Az egyenlőtlenségek mérésére mutatószámok (*egyenlőtlenségi indexek*) gazdag csokra ad lehetőséget, a jelenség különböző aspektusait számszerűsítve. E fejezetben ezeket tárgyaljuk. A területi egyenlőtlenségek mérésére használhatók továbbá az általában nem elsődlegesen ilyen célra bevett generális matematikai és statisztikai eszközök közül a különböző *távolságfüggvények* valamint *korrelációs mérőszámok* → **4.2** is.

3.2 Területi egyenlőtlenségi mutatók

A területi tagoltság nagyságának és változásának mérésére a statisztika és az elemző szakirodalom egyenlőtlenségi mutatószámok sokaságát konstruálta[1]. Az egyenlőtlenség (vagy hasonlóság, különbözőség) mérésére használt mutatószámok széles skálája arra vezethető vissza, hogy lényegében megszámlálhatatlan azoknak a lehetséges indexeknek (függvényeknek) a száma, amelyek matematikai szempontból alkalmasak az egyenlőtlenségek nagyságának és változásának mérésére (*Diewert, E. 2002*). Ezek közé a kritériumok közé tartozik például a *folytonosság*, *nem-negativitás* (legtöbb mutatószám értéke az egyenlőtlenség hiányában nulla) és *monotonitás* (az index növekvő értéke növekvő egyenlőtlenséget jelez), az azonos eloszlásra adott azonos egyenlőtlenségi mérték (identitás) és a *szimmetria* (A különbözősége B-től megegyezik B-nek A-tól való különbözőségével).

Azt, hogy egy adott elemzésben épp melyik egyenlőtlenségi mutatót választjuk, befolyásolja a vizsgálati kérdés és a rendelkezésre álló adatbázis is. Sok esetben jó, sőt szükséges megoldás *többfajta egyenlőtlenségi index kiszámítása* is, hisz olyan kitüntetett egyenlőtlenségi mutató nincs, ami a területi tagoltság minden oldalát egyedül képes lenne mérni. A szóba jöhető indexek közül az egyenlőtlenség nagyságának megítélése szempontjából kedvezőbbek a *korlátos (normalizált)* véges értékkészletű mutatók. Mivel ezen indexek értékkészlete a minimális és maximális érték által meghatározott zárt intervallum, értéküket az elméletileg lehetséges szélsőértékekhez viszonyíthatjuk (ezt a követelményt nem teljesítik például a különböző polarizációs indexek, és a matematikai-statisztikában egyébként centrális szerepű szórásmutatók).

A következőkben tárgyalt mutatószámok szinte mindegyike generális eszköz, nem pusztán területi, hanem bármely más megfigyelési egységre vonatkozó egyenlőtlenségek mérésére alkalmas. Ebből következik az is, hogy itt még nem kap hangsúlyt a térbeliség direkt szempontja, az a sajátosság, hogy *ugyanakkora egyenlőtlenségi mérték teljesen eltérő térbeli konfigurációban* is megjelenhet lényegesen eltérő következményekkel.

Általában nem függ ezen indexek használhatósága a vizsgált jelzőszámok tartalmától sem, az lényegében bármi lehet (ezért is találkozhatunk velük a legkülönbözőbb tudományágakban). A regionális elemzésekben leggyakrabban a *népesség és a jövedelmek* eloszlásának egyenlőtlenségeit mérik velük. Több mutatószám esetében kifejezetten abszolút adatok (illetve azokból számítható megoszlási viszonyszámok), másokban fajlagosok szerepelnek. A fejezetben az abszolút adatokat – megfelelően indexelve – x-szel, a fajlagosokat y-nal jelöljük (ahol ettől eltérünk, azt külön jelezzük). Minden esetben mérlegelendő az adatoknak a mutatószám által megkövetelt *mérési szintje* → **2.3**, legtöbbjük arányskálán mért adatokat kíván. A mutatószámok néhol nagyon bonyolultnak tűnő képletei a felidézett adatkezelési alapoknál több matematikai ismeretet nem követelnek meg. Mivel összetett matematikai lépéseket nem tartalmaznak, táblázatkezelő programok (pl. Excel) beépített függvényei segítségével mindegyik könnyen számítható.

[1] *P. B. Coulter (1989)* például közel 50 különböző egyenlőtlenségi indexet említ. Lásd még: *Kluge, G. 2003.*

3.2.1 A (területi) polarizáltság mérőszámai (Németh Nándor)

Az ebben az alfejezetben bemutatásra kerülő indexek a tárgykör matematikailag legegyszerűbb formulái: mindössze a használt adatsorok szélsőértékeire, kvantiliseire, illetve átlagára építenek. Mondandójukban ott található azonban az a tény, hogy *a legfejlettebb és a legelmaradottabb térségek, a leggazdagabb és a legszegényebb társadalmi csoportok közötti különbségekre* különleges társadalmi figyelem irányul.

1) Az adatsor terjedelme (range-arány)

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$K = \dfrac{x_{\max}}{x_{\min}}$ $K = \dfrac{y_{\max}}{y_{\min}}$	$x_{\max} = x_i$ maximuma; $x_{\min} = x_i$ minimuma $y_{\max} = y_i$ maximuma; $y_{\min} = y_i$ minimuma	A range-arány a vizsgált adatsorban előforduló legnagyobb és legkisebb ismérvérték *hányadosa*. Azt mutatja meg, hogy hányszoros különbség van adatsorunk két szélső értéke között.
Mértékegysége: dimenziótlan		*Értékkészlete:* $1 \leq K \langle \infty$
Megjegyzések: A mutatószám általában csak *arányskálán* mért adatok (ahol a minimum nem 0 és az adatok előjelében sincs különbség) esetében használható.		

2) A szóródás terjedelme (range)

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$P = x_{\max} - x_{\min}$ $P = y_{\max} - y_{\min}$	$x_{\max} = x_i$ maximuma; $x_{\min} = x_i$ minimuma $y_{\max} = y_i$ maximuma; $y_{\min} = y_i$ minimuma	A szóródás terjedelme az adatsorban előforduló legnagyobb és legkisebb ismérvérték *különbsége*. Könnyen számítható, jól értelmezhető mérőszám.
Mértékegysége: azonos a vizsgált adatéval		*Értékkészlete*: $0 \leq P \langle \infty$
Megjegyzések: A mutató hátránya, hogy csak a szélső értékekre épít, így egy-egy kiugró érték esetén értékét a véletlen számottevően befolyásolja.		

3) Relatív range (relatív terjedelem)

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$Q = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{\bar{x}}$ $Q = \dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{\bar{y}}$	$x_{\max} = x_i$ maximuma; $x_{\min} = x_i$ minimuma $y_{\max} = y_i$ maximuma; $y_{\min} = y_i$ minimuma $\bar{x} = x_i$ átlaga; $\bar{y} = y_i$ átlaga	A relatív range az adatsorban előforduló legnagyobb és legkisebb érték különbségét az adatsor átlagához viszonyítja, ezáltal különböző átlagú adatsorok terjedelmének összehasonlítására is alkalmas.
Mértékegysége: dimenziótlan		*Értékkészlete:* $0 \leq Q \langle \infty$
Megjegyzések: E csoport mutatószámai közül ezt használjuk leggyakrabban. A relatív range nem érzékeny az adatsor minimumára, tehát az nullával is egyenlő lehet. A relatív range az átlaghoz való viszonyítás segítségével különböző mértékegységű adatsorok összehasonlítására is alkalmas.		

4) Duál- mutató (Éltető – Frigyes index)

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
Súlyozatlan: $D = \frac{x_m}{x_a}$	$\bar{x} = x_i$ számtani átlaga; x_m = az $\bar{x}$ -nál nagyobb x_i értékek számtani átlaga; x_a = az $\bar{x}$ -nál nem nagyobb x_i értékek számtani átlaga;	A *duál-mutató* a teljes megoszlás átlaga fölötti értékek átlagának és a teljes megoszlás átlaga alatti értékek átlagának a hányadosa. Egyszerűsége és világos tartalma miatt igen elterjedt módszer.
Súlyozott: $D = \frac{y_m}{y_a}$	$\bar{y} = y_i$ súlyozott átlaga; y_m = az $\bar{y}$ -nál nagyobb y_i értékek súlyozott átlaga; y_a = az $\bar{y}$ -nál nem nagyobb y_i értékek súlyozott átlaga;	
Mértékegysége: dimenziótlan		*Értékkészlete:* $1 \leq D \langle \infty$

Megjegyzések: E formula másik, a jövedelem egyenlőtlenségek kutatásából ismert elnevezése az *Éltető–Frigyes-index* (Éltető Ödön és Frigyes Ervin magyar statisztikusok írták le elsőként – *Éltető – Frigyes 1968*). Ebben az esetben az átlag fölötti jövedelmek átlagát az átlag alatti jövedelmek átlagával vetjük össze. Teljes jövedelemegyenlőség esetén a mutató értéke 1, ennél nagyobb érték esetén az index azt a jövedelmi ollót mutatja, amely az átlagosan gazdagok (átlag felettiek) és az átlagosan szegények (átlag alattiak) jövedelme között fennáll. A mutató jó szolgálatot tesz *a területi egyenlőtlenségek tényezőkre bontásakor* is → **5.9.**

3.2.2 Szórás-típusú mérőszámok (Németh Nándor)

Szóródásnak nevezzük a statisztikában az adatok (általában a mennyiségi ismérvértékek) átlagos eltérését egymástól, vagy egy meghatározott, a sokaság egészét jellemző értéktől → **2.5.2**.

1) Szórás

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$	x_i = naturális mértékegységben megadott területi jellemző; $\bar{x} = x_i$ számtani átlaga	Az egyes értékek számtani átlagtól való négyzetes eltéréseinek átlagát hívjuk szórásnak. A szórás a variancia vagy *szórásnégyzet* pozitív négyzetgyöke.
Mértékegysége: megegyezik az alapadatokéval	*Értékkészlete*: $0 \leq \sigma \langle \infty$	

Megjegyzés: bár a szórás, mint generális statisztikai közép, mindenfajta ismérvérték esetében használható, fenti alapváltozata a területi vizsgálatokban jellemzően *abszolút mennyiségben megadott jellemzők* egyenlőtlenségeinek vizsgálatára szolgál, fajlagos mutatók esetén ritkábban használják, hisz ott felmerül a súlyozás igénye.

2) Relatív szórás

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$V = 100\left(\dfrac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}}{\bar{x}}\right)$	x_i = naturális mértékegységben megadott területi jellemző; $\bar{x} = x_i$ számtani átlaga	A relatív szórás a szórásnak vizsgált adatsor átlagához viszonyított mértékét jelzi.
Mértékegysége: %		*Értékkészlete:* $0 \leq V \langle \infty$

Megjegyzés sok esetben szükség lehet arra, hogy összehasonlíthatóvá tegyük a különböző mértékegységű jelzőszámok szórását. A megoldást az adja, ha a szóródási mérőszámot egy középértékhez viszonyítjuk. A leggyakrabban használt ilyen típusú mérőszám épp a relatív szórás (más néven variációs koefficiens, standard deviáció). Ha az index értékét 100-zal szorozzuk, akkor a mutató *az átlag százalékában* adja meg a szórást.

3) Súlyozott szórás

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i(y_i-\bar{y})^2}{\sum f_i}}$	$y_i = \dfrac{x_i}{f_i}$ fajlagos (arány) mutató értéke az i. területegységben (pl. egy főre jutó jövedelem) $\bar{y} = y_i$ súlyozott átlaga	Az egyes értékek súlyozott átlagtól való négyzetes eltéréseinek átlagát hívjuk súlyozott szórásnak.
Mértékegysége: megegyezik az alapadatokéval		*Értékkészlete:* $0 \leq \sigma \langle \infty$

Megjegyzés: A súlyozott szórás, a szóráshoz hasonlóan, csak korlátozottan teszi lehetővé különböző vizsgálati eredmények összehasonlítását, mivel végeredményünket a vizsgált mennyiségi ismérv mértékegységében kapjuk meg. Így tehát csak azonos mértékegységű jellemzők szórásai vethetőek össze. Éppen ezért a módszert leginkább olyan esetekben alkalmazzuk, amikor arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott társadalmi-gazdasági jelenség (területi) egyenlőtlenségei *időben* miképpen változtak. Jövedelemvizsgálatokban alkalmazva a mutatószámot a közgazdasági szakirodalom *σ (szigma) konvergenciaként* említi azt a helyzetet, amikor. az egyes országok (régiók) egy főre jutó jövedelmeinek keresztmetszeti adataiból számított *szórása* csökkenő tendenciát mutat → **3.4.2.**.

4) Súlyozott relatív szórás

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$V = 100\left[\frac{1}{\bar{y}}\sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 f_i}{\sum f_i}}\right]$	$y_i = \frac{x_i}{f_i}$ fajlagos (arány) mutató értéke az i. területegységben (pl. egy főre jutó jövedelem) $\bar{y} = y_i$ súlyozott átlaga	A súlyozott relatív szórás a vizsgált adatsor súlyozott átlagához viszonyítva adja meg az adatsor szóródásának mértékét.
Mértékegysége: %		*Értékkészlete:* $0 \le V \langle \infty$

Megjegyzés: a súlyozott relatív szórás hasonlóan viszonyul a súlyozott szóráshoz, mint a relatív szórás a szóráshoz: az adatsor (ez esetben súlyozott) átlagához viszonyítva fejezi ki a szóródás nagyságát. A mértékegység (%) itt is a 100-zal való szorzásból következik; e műveletet azonban el is hagyhatjuk, ezáltal mértékegység nélkülivé téve mutatónkat.

5) Átlagos (abszolút) eltérés

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{n}$	x_i = naturális mértékegységben megadott területi jellemző; $\bar{x} = x_i$ számtani átlaga	Az átlagos eltérés megmutatja, hogy az egyes ismérvértékek átlagosan mennyivel térnek el az átlaguktól. Az index fajlagos adatokra is számítható.
Mértékegysége: megegyezik az alapadatokéval		*Értékkészlete:* $0 \le \delta \langle \infty$

Megjegyzés: Az értékeknek a számtani átlagtól mért eltérése közvetlenül nem használható a szóródás mértékszámaként, mivel azok összege nulla. Ezért csak az eltérések abszolút értékeiből számított átlagnak van értelme. Mivel a matematikai-statisztika összetettebb módszereinek legtöbbje a szórás fogalmára épül, ezt a mutatószámot – bár jelentése magától értetődőbb a szórásénál – ritkábban használják.

6) Logaritmikus szórás

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$LA = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)\right]^2$	$y_i = \frac{x_i}{f_i}$ fajlagos (arány) mutató értéke az i. területegységben (pl. egy főre jutó jövedelem) $\bar{y} = y_i$ súlyozott átlaga	Ha az átlag 1, akkor (mivel log1 =0) az átlaghoz viszonyított fajlagos jövedelmek négyzetes logaritmus-összegének átlaga
Mértékegysége:		*Értékkészlete:* $0 \le \delta \langle \infty$

Megjegyzés: Ez az ún. Atkinson mutató (*Major K. – Nemes Nagy J. 2000, Cowell, F. A. – Flachaire, E. 2002*) egyik speciális esete. területi jövedelemegyenlőtlenségek vizsgálatában a nemzetközi szakirodalomban széleskörűen használt index. A logaritmikus átalakítás a közönséges szórásmutatóhoz képest csökkenti az egyedi extrém értékek súlyát az egyenlőtlenségekben

3.2.3 Területi megoszlások eltérését mérő indexek (Németh Nándor)

Az alábbi mutatószámok a megoszlási viszonyszám fogalmára (→ **2.2.3**) épülnek.

1) Koncentrációs (Hirschman-Herfindahl) – index

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$K = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \right)^2$	x_i = naturális mértékegységben megadott területi jellemző az *i.* területegységben;	Valamely naturális jellemző területegységek közötti koncentráltságának mértékét számszerűsíti. A megoszlást az index tulajdonképp a teljesen egyenleteshez (amikor minden megfigyelési egység részesedése azonos) viszonyítja. 0,6 feletti értéke már erős koncentráltságra, monopolhelyzetre utal.
Mértékegysége: dimenziótlan		*Értékkészlete:* $1/n \le K \le 1$

Megjegyzések: A fenti formula a területi kutatások egyik legelterjedtebb mutatószáma (*Hirschman, A. O. 1958*). Minimális értékét akkor veszi fel, ha a vizsgált társadalmi-gazdasági jelenség egyenletesen oszlik el a területegységek között, maximális értékét pedig akkor, ha a teljes volumen egy "kézben", egy területen összpontosul. Mivel a mutató minimuma függ az elemszámtól, jelentősen eltérő elemszámú vizsgálatok esetében a kapott eredményeket nem lehet közvetlenül összehasonlítani. A mutató elnevezését *két amerikai közgazdászról* kapta. Gyakran használják az indexet az ágazati koncentráció mérésére is. *Ez az egyik olyan index, ahol nem 0 a minimum!*

Az előző fejezetekben bemutatott indexek között több is fajlagos (relatív), két jellemző hányadosaként kapott változóból számítható. Arra a kérdésre például, hogy az egy főre jutó jövedelem mennyire szórt területileg, azonban úgy is választ kapunk, ha a jövedelem és a népesség eloszlását vetjük össze. Az alábbi indexek ezt a logikát követik.

2) A Hoover-index és „rokonai"

Képlete	*Jelölések*	*Értelmezése*
$h = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - f_i \rvert}{2}$	ahol: x_i és f_i két megoszlási viszonyszám, melyekre fennállnak az alábbi összefüggések: $\sum x_i = 100$ $\sum f_i = 100$	A Hoover-index két mennyiségi ismérv területi megoszlásának eltérését méri. A mutató szimmetrikus, a két összevetett megoszlás szerepe, sorrendje felcserélhető.
Mértékegysége: %		*Értékkészlete:* $0 \le h \le 100$

Megjegyzések: A Hoover-index az egyik legelterjedtebb, legáltalánosabban használt területi egyenlőtlenségi mutató (Elsőként *E. M. Hoover,* amerikai agrárközgazdász használta*, 1941-ben*). Azt adja meg, hogy az egyik vizsgált ismérv, társadalmi-gazdasági jelenség mennyiségének *hány százalékát kell a területegységek között átcsoportosítanunk ahhoz, hogy területi megoszlása a másik jellemzőével azonos legyen*. A területi kutatásokban leggyakrabban a népesség területi eloszlásával vetjük össze különféle társadalmi-gazdasági tartalommal bíró mennyiségi ismérvek eloszlását.

A mutatószámot *Robin Hood-indexnek* nevezzük abban a speciális esetben, amikor a jövedelem és a népesség területi eloszlásának egyenlőtlenségeit mérjük vele (*3.2.táblázat*). Ebben az esetben tehát:
h = a Robin Hood-index értéke (%)
x_i = az i. területegység részesedése (%) az összjövedelemből
f_i = az i. területegység részesedése (%) az össznépességből.

Év	Bp-vidék	7 régió	20 megye	150 kistérség	3100 település
1988	7,1	7,6	7,7	9,1	10,8
1989	7,5	8,1	8,2	9,8	11,7
1990	8,3	8,6	8,7	10,7	12,9
1991	7,5	8,0	8,2	10,6	13,3
1992	9,6	9,3	9,8	12,0	14,8
1993	9,9	9,6	10,2	12,6	15,1
1994	9,9	10,0	10,4	12,9	15,5
1995	9,5	9,7	10,1	12,6	15,2
1996	9,0	10,1	10,3	12,7	15,2
1997	9,3	10,5	10,7	13,2	15,4
1998	9,4	11,0	11,2	13,2	15,5
1999	9,7	11,1	11,2	13,6	15,8
2000	9,3	11,3	11,5	13,5	15,6
2001	9,3	11,1	11,4	13,4	15,4
2002	8,6	10,4	10,4	12,2	14,7
2003	8,6	10,4	10,6	12,6	14,8

3.2 táblázat *Az adóköteles jövedelmek és az állandó népesség megoszlása alapján számított Robin Hood-indexek Magyarországon különböző térségi szinteken*

F: *Nemes Nagy J.* számításai

Az elnevezés mögött a következő gondolat áll: vajon az összjövedelem hány százalékát kell elvenni a gazdagoktól (az átlag fölötti jövedelemmel rendelkezőktől) és odaadni a szegényeknek (az átlag alatti jövedelemmel rendelkezőknek) ahhoz, hogy kiegyenlítődjenek a jövedelmi különbségek a vizsgált területegységek között, vagyis az egy lakosra jutó jövedelem minden területegységben azonos, az átlaggal egyenlő legyen. Ebben a hipotetikus esetben az index értéke nulla. Viszont minél nagyobb a kapott érték, annál jelentősebb a jövedelem és a népesség területi eloszlásának eltérése, azaz a területi jövedelemegyenlőtlenség. Mivel a jövedelemvizsgálatok esetében értelmetlen, hogy valamely csoport vagy területegység népességaránya 0 legyen, a Robin Hood-index maximális értéke nem 100, hanem 100–min (f_i). (A jövedelemkiegyenlítés mögött természetesen nem csak a „sherwoodi” – tartósan aligha életképes – módszer állhat, hanem a valóságos jövedelmi felfelé-mobilitás és a térbeli migráció is.)

A településszociológia is a Hoover-index logikáját használja leggyakrabban a társadalmi csoportok térbeli koncentrálódásának, egymástól való lakóhelyi elkülönülésének, elemzésekor. *Disszimilaritási indexnek* nevezzük abban az esetben, ha két népességcsoport területi elhelyezkedésének különbségét mérjük vele (*Duncan – Duncan 1955, Probáld F. 1974, Csanádi G. – Ladányi J. 1992**,** Hutchens, R. 2001).*

A szegregáció statisztikai értelmezése szerint két társadalmi csoport között akkor nincs szegregáció, ha a két csoport mindegyik területi egységben azonos arányban van jelen. Minden más esetben a két csoport valamilyen mértékű szegregációjával van dolgunk. A disszimilaritási index tehát azt mutatja meg, hogy mennyiben tér el a két népességcsoport területi elhelyezkedése a szegregáció mentes elrendeződéstől. *Szegregációs indexnek* hívjuk ellenben e formulát abban az esetben, ha egy kiválasztott népességcsoport területi elhelyezkedését nem egy másik, sajátos jellemzőkkel bíró népességcsoportéhoz viszonyítjuk, hanem a helyi társadalom adott csoporton kívüli teljes egészéhez. Ekkor tehát az index azt mutatja meg, hogy egy adott népességcsoport területileg mekkora mértékben szegregálódik a teljes lakosságon belül.

A Hoover-indexet nemcsak két területi jellemző megoszlásának összevetésére, hanem térbeli megoszlások *időbeli* változásának mérésére is használhatjuk (ekkor a két megoszlási viszonyszám az adott jellemző kezdő illetve végső időpontbeli adatsora). Ha ilyen jellegű számításkor a nevezőben 2t szerepel (ahol t az időszak hosszát jelenti években), akkor az *egy évre eső átlagos területi eloszlás változásra* kapunk értéket. Ez akkor jöhet szóba, ha összehasonlító elemzésekben különböző hosszúságú időszakok változásait szeretnénk összevethetővé tenni. Ugyancsak összehasonlító vizsgálatok esetében jöhet szóba az a módosítás is, amikor a nevezőben 2n szerepel (n a területegységek száma), ekkor egy adott jelenségnek (például a népességnek) az *egy területegységre eső eloszlásváltozását* méri a mutató. Ha különböző országok területi egyenlőtlenségeit vizsgáljuk, így enyhíthető a területegységek eltérő számából adódó aggregációs torzítás (*Nemes Nagy J. 1987*).

Lényegében teljesen azonos jellegű a Hoover index-szel a manapság a közgazdasági szakirodalomban sokhelyütt, általában két területegység, régió foglalkozási szerkezetének, iparági struktúrájának, stb. összehasonlítására használt *Krugman index*, amelyben azonban a megoszlások abszolút különbségeinek összegét nem osztják el 2-vel. Ezzel a „takarékossággal” a mutató maximuma 200-ra nő, egyben elvész a fentiekben leírt világos értelmezhetőség. Ismerete fontos, de használatát semmiképp sem ajánljuk.

3) Entrópia

Képlete:	*Jelölések:*	*Értelmezése:*
$E=\sum_{i=1}^{n} x_i \log\frac{x_i}{f_i}$	x_i = az *i.* regionális egység részesedése a vizsgált volumen (pl. jövedelem) összértékéből; f_i = az *i.* regionális egység részesedése az összlakosságból	Az *információelméletből* vett entrópia, a Hoover-indexhez hasonlóan, két mennyiségi ismérv területi megoszlásának összevetésére alkalmas. A népességhez viszonyított fajlagos indexek logaritmusainak az összértékkel súlyozott összege.
Mértékegysége: dimenziótlan, x_i illetve f_i összege a teljes megfigyelési egységrendszerre egyenlő 1-gyel		*Értékkészlete:* $0 \leq E \langle \log\frac{1}{f_{\min}}$

Megjegyzések: matematikailag lehetőség van a vizsgálatban szereplő területegységeket aggregálva választ adni arra a kérdésre, hogy a területi egyenlőtlenség mekkora hányada adódik az aggregált *csoportok közötti,* illetve ezen aggregált *csoportokon belüli* heterogenitásból.

E felbontás lehetőségét a következő összefüggés adja:

összentrópia: $$E=\sum_{i=1}^{n} x_i \log\frac{x_i}{f_i}$$

a csoportok közötti entrópia: $$F=\sum_{k=1}^{m} X_k \frac{X_k}{F_k}$$

ahol:

X_k = a *k*-adik csoport részesedése x_i összvolumenéből;
F_k = a *k*-adik csoport részesedése f_i összvolumenéből;
M = az aggregált csoportok száma.

a csoportokon belüli egyenlőtlenség: $$G_k=\sum_{i\subset k} c_i \log\frac{c_i}{d_i}$$

ahol:

$c_i = x_i / X_k$: az *i*-edik területegység részesedése a c_i mutató szerint a *k*-adik csoportban, amelybe összevontuk;

$d_i = f_i / F_k$: az *i*-edik területegység részesedése (az f_i mutató szerint) a *k*-adik csoportban, amelybe összevontuk.

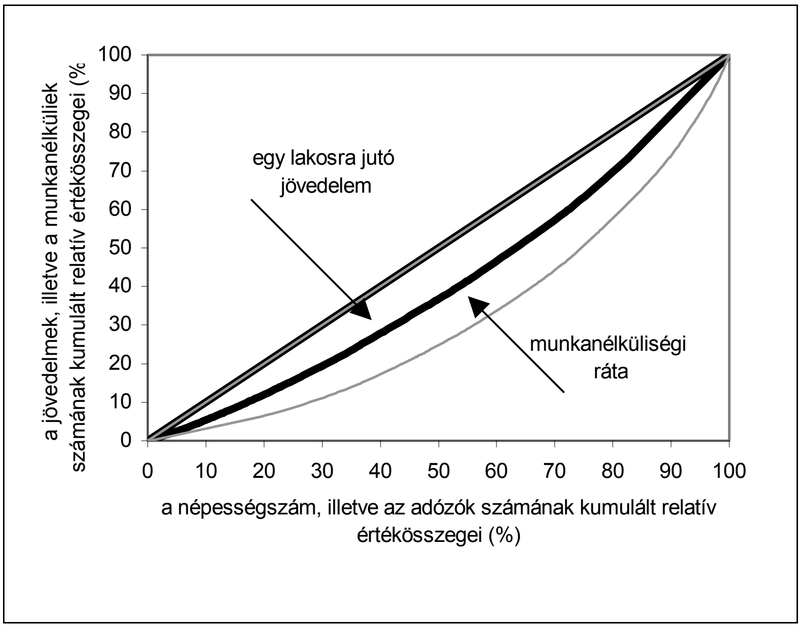
G_k természetszerűleg teljesen analóg E-vel, ám itt nem az összes területegységet, hanem csak a *k*-adik csoportba tartozókat vesszük figyelembe.

4) Redundancia mutató vagy Theil-index

Képlete:	*Jelölések:*	*Értelmezése:*
$R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{y}\log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)$	y_i = fajlagos mutató értéke az i.-ik területegységben $\bar{y} = y_i$ súlyozott átlaga	A *Theil-index* az entrópia koncepciójára épül és a vizsgált ismérv össz-volumenéből való részesedések rendezetlenségét méri.
Mértékegysége: dimenziótlan		*Értékkészlete:* $0 \le R \le \log n$
Megjegyzések. minimális értékét akkor veszi fel, ha minden fajlagos (pl. jövedelmi) érték azonos, maximumát pedig akkor, ha a vizsgált mennyiségi ismérv egy "kézben", egy területegységen összpontosul. A logaritmus alapja szerint különböző indexeket lehet számítani. Leggyakrabban a 10-es és a természetes alapú logaritmusokat használják.		

5) Lorenz-görbe

Immár 100 éves – *Lorenz, M. O. 1905* – ez a koncentráció ábrázolására és elemzésére szolgáló, egységoldalú négyzetben elhelyezett speciális grafikus ábra, amely a kumulált relatív gyakoriságok *(g_i)* függvényében ábrázolja a kumulált relatív értékösszegeket *(z_i)*. Amennyiben az egységeknek az értékösszegből való részesedése azonos, a kumulált relatív gyakoriságok és a kumulált relatív értékösszegek rendre megegyeznek *($g_i = z_i$)*. Mindez a koncentráció hiányára utal. Ilyen esetben a görbe egybeesik a négyzet átlójával. Ha a vizsgált területegységek között létezik olyan, amelyik a vizsgált mennyiségi ismérv értékösszegének igen nagy hányadát leköti, a relatív gyakoriságok és a relatív értékösszegek jelentősen eltérnek egymástól, a görbe távol esik az átlótól (lásd a *3.2. ábrát*). Szélsőséges esetben, teljes koncentráció esetén a görbe egybeesik a négyzet oldalaival.

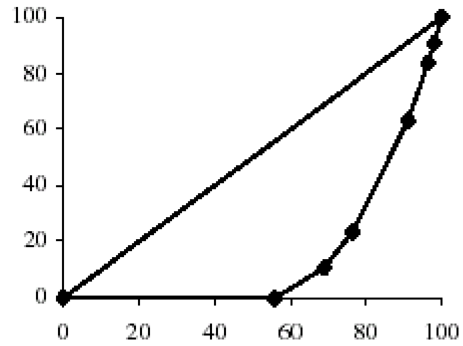


3.1 ábra *Kistérségi jövedelmi és munkanélküliségi egyenlőtlenségek Lorenz-görbéje, 2000*

A Lorenz-görbével a lakossági jövedelmek, valamint a munkanélküliség területi egyenlőtlenségeit ábrázoltuk (*3.1. ábra*) hazánk 150 kistérségének példáján. A vastag fekete vonal a jövedelmi, a vékony szürke pedig a munkanélküliségi differenciákat ábrázolja. Itt rá is térhetünk a Lorenz-görbe gyakorlati alkalmazásának egyik alapszabályára: mivel grafikus módszerről van szó, mely alapvetően vizuális összehasonlítást tesz lehetővé a felhasználó számára, alig van értelme egyetlen görbét készíteni, hiszen

– a gyakorlatban ritkán előforduló szélsőséges esetektől eltekintve – abból nem tudjuk teljes bizonyossággal megállapítani, hogy az adott jelenség egyenlőtlenségei milyen mértékűek. Ha viszont ugyanazt a jelenséget – adott térbeli keretek között maradva – több időpontban is ábrázoljuk, már jóval több információhoz jutunk. Meg tudjuk állapítani, hogy a vizsgált területi jellemző egyenlőtlenségei mely időpontban kisebbek, illetve nagyobbak, tehát nőtt vagy csökkent a differencia mértéke. Ugyanez a helyzet abban az esetben, amikor két különböző jelenség egy időpontban megfigyelt adatsorát vizsgáljuk.

A görbe felrajzolásának első lépéseként az adott relatív mutató szerint sorrendbe kell rendeznünk térségeinket; az már ránk van bízva, hogy csökkenő, avagy növekvő módot választunk-e. A Lorenz görbe növekvő sorrend esetén az *átló alá*, csökkenő sorrend esetén fölé kerül. Ha kevés egység adatait ábrázoljuk így, akkor a görbe nem simul ki, hanem a matematikában *törött vonalnak* nevezett formát ölti. A *3.2. ábrán* látható sajátos alakú Lorenz-görbén a népesség (vízszintes tengely) és az általa elvégzett iskolaévek (függőleges tengely) kumulált megoszlása látható, iskolázottsági lépcsőnként. Indiában 1990-ben a 15 évesnél idősebb népesség több mint fele egyáltalán nem járt iskolába (56%-os volt az írástudatlanság), ezért a görbe hosszú szakaszon a vízszintes tengellyel esik egybe.



3.2. ábra *Egy szélsőséges egyenlőtlenséget ábrázoló Lorenz-görbe: iskolázottság Indiában* (*McKay A. 2002*)

A Lorenz-görbe kétségtelen előnye az egyenlőtlenségek vizuális megjelenítése, alkalmazásának azonban esetenként gátat szab az, hogy a görbék *metszhetik* egymást (e módszer logikájából következően legfeljebb egy pontban[2]). Itt arról van szó, hogy a két (jövedelem)eloszlás jellege eltér. Ekkor nem, vagy nehezen lehet csak eldönteni, hogy melyik esetben nagyobb az egyenlőtlenség, ezért kénytelenek vagyunk valamilyen nem grafikus módszerhez, egyenlőtlenségi indexhez (vissza)fordulni, s ennek segítségével sorbarendezni a két esetet (a leggyakoribb index épp a következőkben bemutatásra kerülő Gini-együttható). Még így is kerülhetünk olyan helyzetbe, hogy a számszerű egyenlőtlenségi mérték sem segít, azonos értéket ad. Ekkor csak a kvalitatív magyarázat marad, például így: az azonos egyenlőtlenségi mérték mögött az egyik esetben a szegények erőteljes jövedelmi leszakadását kiegyensúlyozza az a tény, hogy a gazdagoknak kevésbé kiugró a jövedelmi szintje, inkább a széles középrétegek túlsúlya a jellemző, a másik esetben ellenben az egyenlőtlenség jó részét épp egy szűk felső réteg kiugró jövedelme hozza létre. (Képzelje el az ennek az esetnek megfelelő két Lorenz-görbét!).

[2] Az egymást átmetsző Lorenz görbék sorbarendezésének kérdésköréről, az ún. Lorenz-dominanciáról lásd *Aaberge, R. 2000 és Figini, P. 2000* tanulmányát.

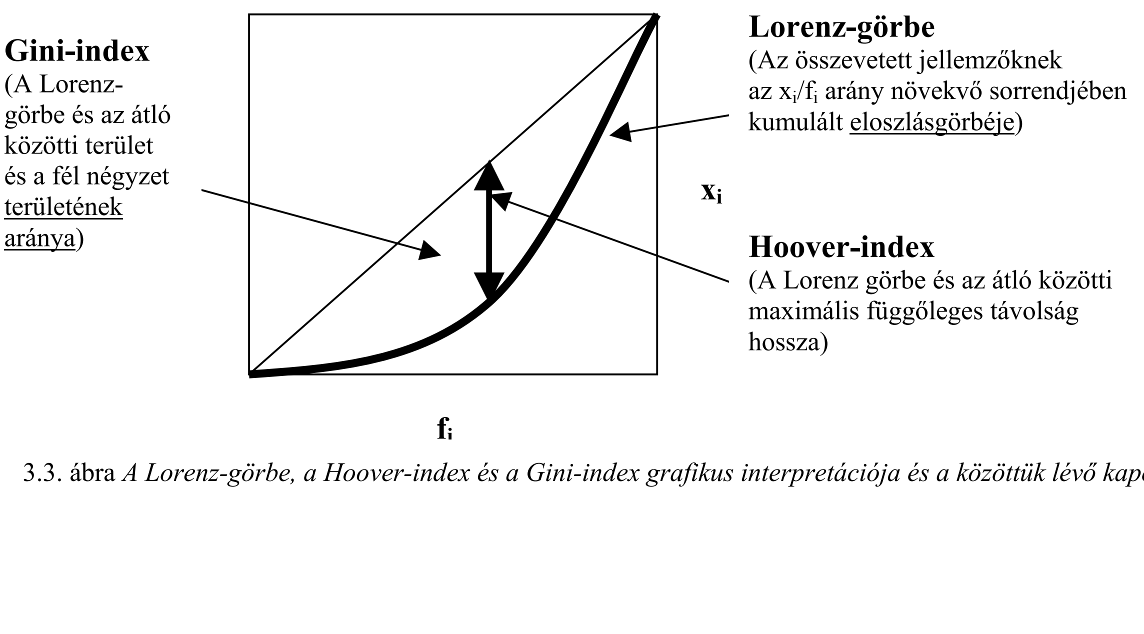
6) Gini-együttható(Gini-index)

Képlete:	*Jelölések:*	*Értelmezése:*
$G = \frac{1}{2\bar{x}n^2}\sum_i \sum_j \left\| x_i - x_j \right\|$	x_i = megoszlási viszonyszámként megadott területi jellemző az *i.* területegységben; x_j = megoszlási viszonyszámként megadott területi jellemző az *j.* területegységben; $\bar{x} = x_i$ átlaga	A Lorenz-görbe és a négyzet átlója által bezárt terület nagyságát méri, a koncentráció relatív nagyságát jellemzi. Minden megfigyelési egység részarányának az összes többiétől való átlagos eltérését viszonyítja az átlaghoz.
Mértékegysége: dimenziótlan		*Értékkészlete:* $0 \leq G \leq 1$
Megjegyzések: Névadója *Corrado Gini* (*1884-1965*) olasz demográfus, szociológus és statisztikus (*Gini, C. 1921 és 1936*). A 0 értéket akkor veszi fel, ha a Lorenz-görbe éppen egybeesik az átlóval, tehát a vizsgált mennyiségi ismérv területi eloszlása egyenletes. Másik szélső értékét akkor éri el, ha a vizsgált ismérv egyetlen egy területegységen, egyetlen "kézben" összpontosul; ilyenkor a Lorenz-görbe egybeesik a koordinátatengelyekkel. A jövedelemegyenlőtlenségek mérésének legelterjedtebb mutatója.		

7) Súlyozott Gini-együttható

Képlete:	*Jelölések:*	*Értelmezése:*
$G_S = \frac{1}{2\bar{y}_S}\sum_i \sum_j \frac{f_i f_j}{\left(\sum_i f_i\right)^2}\left\| y_i - y_j \right\|$	$y_i = \frac{x_i}{f_i}$ fajlagos (arány) mutató értéke az i. területegységben; $\bar{y} = y_i$ súlyozott átlaga	A Gini-koefficiens súlyozott változata is a Lorenz-görbe által bezárt területtel arányos. Itt viszont olyan Lorenz-görbét kell elképzelnünk, ahol a vizsgált fajlagos mutató két összetevője közül az egyik kumulált relatív gyakoriságainak függvényében ábrázolja a másik kumulált relatív értékösszegeit.
Mértékegysége: dimenziótlan		*Értékkészlete:* $0 \leq G_S \leq 1$
Megjegyzések: E formulát igen gyakran használja a területi kutatásokkal foglalkozó szakirodalom, hiszen nem sok olyan mérőszám áll rendelkezésünkre, melyek segítségével fajlagos mutatók – leggyakrabban valamiféle egy lakosra jutó jövedelem – területi koncentráltságát tudnánk mérni.		

A fentiekben bemutatott egyenlőtlenségi indexek közötti kapcsolatot a *3.3 ábra* foglalja össze.



3.3. ábra *A Lorenz-görbe, a Hoover-index és a Gini-index grafikus interpretációja és a közöttük lévő kapcsolat*

3.2.4 Néhány további szempont az egyenlőtlenségi mutatók használatához

Ahogy arra a fejezet bevezetőjében utaltunk, az itt bemutatottakon túlmenően számos egyéb indexet is használnak a társadalomkutatók. Ezek közül – részletezésük nélkül, de utalva az eredeti forrásokra, illetve néhány alkalmazási példára – még néhány külön említést érdemel.

Elsőként talán *Amartya Sen* Nobel-díjas közgazdásznak a szegénység mérésére használt komplex mutatóját említhetjük (*Sen, A. 1979, Förtster M. F. 1998, Szívós I. – Tóth I. Gy. 1998*), ami a szegénységi küszöb alatt élők arányát, ezek jövedelmi elmaradását valamint a Gini indexet kombinálja. Sok jövedelemegyenlőtlenségi tanulmány használja az *Atkinson* és a *Dalton* mutatót *(Atkinson, A. B. 1970, Dalton, H. 1920, Major K. – Nemes Nagy J. 1999).* A táji diverzitás ismert mutatója a *Shannon-index* (*Nagendra, H. 2002*). E témakörbe sorolhatók a különböző ágazati specializációs indexek is (*Jeney L. – Szabó P. 2001*).

A *Theil-féle* entrópia-mutató kapcsán emeltük ki az egyenlőtlenségek tényezőkre bontásának lehetőségét. A *dekompozíció* lehet kifejezetten területi szempontú (így például a területi megfigyelési alapegységek összevonása régiókba, különböző *földrajzi zónákba*), de lehet a teljes egyenlőtlenségen belüli *város-falu* diszparitás hatását is mérni így. A tényezőkre bontás más útja az, amikor a jövedelemkomponenseket tagoljuk, a teljes jövedelmi kört bérekre, profitra és társadalmi juttatásokra vagy épp a GDP-t *ágazatokra*. Sok helyütt fontos megosztó dimenzió a faji, etnikai egyenlőtlenség (ennek a térbeli jövedelemkülönbségekre gyakorolt hatásáról lásd *Sethy, R. – Somananthan, R. 2001).* A felbontások főként hosszabb távú történeti elemzésekben érdekesek, kimutatván a különböző komponensek esetleg eltérő viselkedését. Ilyen közelítést használ *Shorrock, A és Wan, G. (2003)* számos ország jövedelemegyenlőtlenségeinek térségi és ágazati felbontását vizsgálva hosszú távon.

A különböző egyenlőtlenségi mutatók matematikai tulajdonságainak vizsgálata is széles kutatási mezőt képez, és új és újabb mutatók konstruálást eredményezi (legújabban lásd *Hutchens, R. 2001*). Ezen belül vizsgálták például azt (*Cowell, F. A. – Flachaire, E. 2002*), hogy a különböző egyenlőtlenségi indexek mennyire érzékenyek egy-egy extrém alacsony vagy magas érték jelenlétére az adatsorban. Az entrópia-mutatók ebből a szempontból nem ideálisak, egy-egy kiugró jövedelmi érték nagyon megváltoztatja az értéküket, összességében a Gini-indexet minősítették e szempontból a legjobbnak (a legkevésbé érzékenynek). Az extrém adatok problémája a területi kutatásokban is visszatérően megjelenik; ez érvel például sokkal inkább a Hoover-index, mint a szórás egyenlőtlenségi mutatóként való használata mellett.

Viszonylag ritka a területi kutatásokban, hogy két megfigyelési egységet olyan jellemzők alapján vetünk egybe, amelyek *két kimenetűek* (0 és 1). Gyakoribb eset ez a szociológiai, véleménykutatási vizsgálatokban. Ilyen esetekben is többfajta egyenlőtlenségi mutatót használhatunk, ezek közül is a legismertebb az ún. *összeillesztési koefficiens,* amelyben az azonos (egyaránt 1-es illetve egyaránt 0) értéket felvevő esetek (válaszok) számát viszonyítjuk az összes esethez (a mutató 0 és 1 közötti értéket vehet fel, logikája az előjel-korrelációhoz hasonló → **4.2**).

Minden itt bemutatott index természetesen érzékeny a területi aggregációra illetve a térfelosztás változására is. Az erősen aggregált, összevont egységekből számított egyenlőtlenségi mértékek általában mindig kisebbek az elemi egységekből számítottaknál[3].

---

[3] Az aggregációs hatásról részleteiben lásd *Dusek T. 2004*

3.2.5 A térbeli szegregáció sajátos mérőszámai

A társadalmi csoportok, etnikumok térbeli elkülönülése, a szegregáció mérésére természetszerűleg használhatók a területi megoszlások eltérését mérő, az előzőekben bemutatott indexek, mindenek előtt a disszimilaritási indexnek is nevezett *Hoover-mutató*. Ezen túlmenően érdemes megismerkedni néhány további mérőszámmal, különös tekintettel arra, hogy filozófiájukban a potenciális térbeli kapcsolatok, a *találkozás, az ütközés vagy épp a kooperáció* lehetősége erőteljesebben jelennek meg, mint a „térsemleges" disszimilaritási indexekben[4].

A szegregációvizsgálat egy adott terület (a szegregáció vizsgálatában legtöbbször egy-egy nagyváros, de elvileg bármely területegység) térfelosztását, kisebb egységekre tagolását feltételezi n darab területegységre, ahol ezek a teljes vizsgált területet átfedés mentesen és teljesen lefedik (például: Budapest és kerületei). Egy-egy index önmagában szinte értelmezhetetlen, ezért használatuknak csak több időpont, különböző területek vagy különböző társadalmi csoportok *összehasonlításakor* van értelme.

Használjuk a következő jelöléseket:

x_i egy adott társadalmi csoport (pl. az x etnikum) létszáma az i. területegységben („kerületben")
X az adott (x) társadalmi csoport teljes létszáma vizsgált területen („Budapesten")
y_i egy másik társadalmi csoport (pl. az y etnikum) létszáma az i. területegységben („kerületben")
Y az adott (y) társadalmi csoport teljes létszáma vizsgált területen („Budapesten")
p_i az i. területegység („kerület") népessége
P a teljes terület („Budapest") össznépessége
R (X/P vagy ezzel analóg módon Y/P) az adott társadalmi csoport és a teljes népesség aránya a vizsgált területen („Budapesten"), R 0 és 1 közötti értéket vehet fel

E jelölések felhasználásával nézzünk két összekapcsolódó mutatószámot!

Interakciós index

$$\mathrm{IA} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i}{X}\right)\left(\frac{y_i}{p_i}\right)\right]$$

Ez a mutató, ha a teljes népesség csupán két csoportra osztódik, akkor *maximumként 1-et* érhet el. A minimális érték – hasonlóan a **3.2.3** fejezetben bemutatott koncentrációs indexhez – függ a területegységek számától, sok egység, részletes térfelosztás esetén 0-hoz közeli (1/n) lehet. Értéke – a szorzat két tagjának értelmezése alapján ez könnyen belátható –, annál nagyobb, minél inkább az a jellemző, hogy ahol az egyik társadalmi csoport (x) nagy hányada tömörül, ugyanezen a területegységen a másik csoport nagy létszámával kerül szembe, ami valószínűsíti a kölcsönkapcsolatokat (interakciókat). Az interakciós index *alacsony* (nullához közeli) értékei jelzik az erős szegregáltságot.

Izolációs index

$$\mathrm{IZ} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i}{X}\right)\left(\frac{x_i}{p_i}\right)\right]$$

Ez a mutatószám is akkor veheti fel az *elméleti maximumát, 1*-et, ha pusztán két csoportra osztjuk a népességet, minimumát ugyancsak befolyásolja a térfelosztás részletessége. Ha értelmezzük a tartalmát, láthatjuk, hogy a maximumot akkor közelíti meg, hogy, ha az adott társadalmi csoport

---

[4] Az amerikai szegregációt átfogóan elemző kiadvány – *U.S. Census Bureau 2003, Appendix B* – 17 módszert, indexet ajánl a szegregáció különböző aspektusainak mérésére. A fejezetben ebből emeltünk ki néhányat.

(etnikum) kizárólagosan vagy döntően egy vagy néhány területegységben él, de itt a teljes népességhez viszonyítva nagy létszámban. Az izolációs index *magas* (1-hez közeli) értékei jelzik a szegregáltságot.

3.3 Kiegyenlítődés és differenciálódás

Elsősorban az extrém méretű és kifejezetten növekvő világszintű fejlettségi tagoltság, de az országokon belüli fejlettségi különbségek tartós jellege, újabb és újabb polarizáló momentumok megjelenése a területi kutatásnak mindmáig előterébe állítja a területi kiegyenlítődés és a differenciálódás tendenciáinak vizsgálatát (mindez többszintű *konvergencia-vitaként* ismert a szakirodalomban). A mértékek feltárásán túlmenően a vizsgálatok természetesen a hajtóerőket is keresik, a polarizáló faktorokat és a területi közeledést eredményező beavatkozási eszközöket. A kutatási téma elsődlegesen a közgazdasági és a regionális politikai indíttatású vizsgálatoknak van az előterében. A bevetett kutatási eszköztár szinte a teljes regionális elemzési módszerkészletet felhasználja, kezdve a vizsgálatok indikátorai kiválasztásának kérdéskörétől, a térségi szintek és egységek, az időtáv problémáján át a különböző egyenlőtlenségi indexek használatán át az összefüggéskeresés módszereiig.

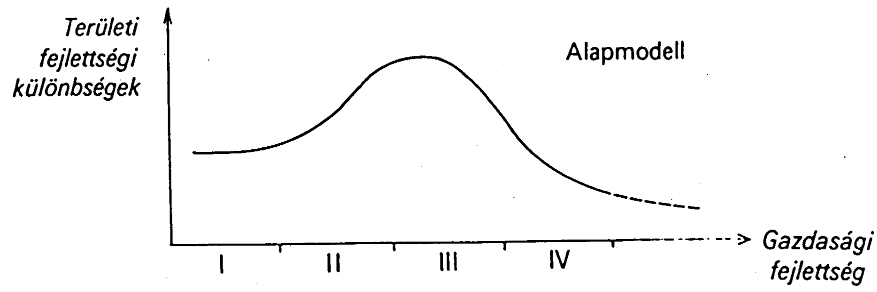
3.3.1 A Williamson hipotézis

A fejlettség-fejlődés és az egyenlőtlenségek nemzetközi szintű vizsgálatához kapcsolódóan (*Kuznets, S. 1955*) a kutatási téma fontos momentuma volt *J. G. Williamson* munkájának megjelenése, amelyben mintegy 30 ország belső, területi jövedelemegyenlőtlenségeit vizsgálta történeti és keresztmetszeti adatok alapján (*Williamson, J. G. 1965*). Számításaiban a fő területi jelzőszám az *egy lakosra jutó jövedelem* (GDP, személyi jövedelem) volt, az egyenlőtlenségek mérésére a *súlyozott relatív szórást* alkalmazta a szerző. A számítások egy fordított U alakú összefüggést valószínűsítettek (a nemzetközi összehasonlításokban erősen jelenlévő általános metodikai korlátokkal együtt), azaz a legfejletlenebb országokban viszonylag kicsiny, a közepes fejlettségűekben nagy, míg a legfejlettebbekben ismét kisebb fejlettségi tagoltságot. A modellben megfogalmazódó reláció mindmáig a regionális fejlődés egyik alapkérdése (*Davies, S. – Hallet, M. 2002*)

Ezt az alapsémát újabb országok bevonásával az *3.4. ábra* modellje szerinti összefüggésre pontosíthattuk (*Nemes Nagy J. 1987*). A modell I. szakasza a prekapitalista időszak agrárdominanciájú területi gazdasági arányait generalizálja, a II. szakasz a kapitalista nagyipar kibontakozásának, a nagy területi koncentrációk kialakulásának időszaka. A III. szakaszban a tőkés termelési viszonyok teljes uralomra jutása után megkezdődik az éles fejlettségi és strukturális dualizmus spontán és az állami gazdaságpolitika által befolyásolt csökkenése. Ez utóbbi faktor a IV. szakaszban kialakuló regionális politikával tovább erősíti a regionális közeledést.

A területi gazdasági mozgásfolyamatokra, a regionális arányok változására ható legfontosabb tényezők közül három emelhető ki:

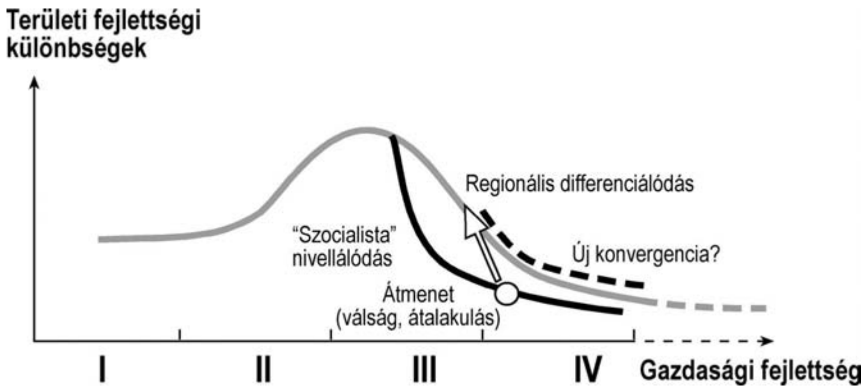
- a *naturális* és az *árutermelő* gazdálkodás súlyának változása,
- a gazdaság *ágazati* szerkezetének történelmi átalakulása,
- az állami *területfejlesztési (regionális) politika* kialakulása és hatása.



3.4. ábra *Regionális fejlettségi különbségek történeti változása* (*Nemes Nagy J. 1987*)

A három tényezőcsoport közül a legfontosabbnak talán a második (ágazati szerkezetátalakulás) minősíthető, legalábbis a hosszú történeti távú analízisek, amelyekben az egyenlőtlenségek tényezőit kutatták, erre utalnak (legújabban például *Caselli, F. – Coleman, W. J. 2001*)

A modell hátterét adó empirikus kutatás a hatvanas-nyolcvanas évek közötti periódusra vonatkozóan azt, az adott pillanatban alig megkérdőjelezhetően pozitív jellemzőt is felszínre hozta, hogy a vizsgálatban szereplő kelet-közép-európai szocialista országok a velük nagyjából azonos fejlettségi szinten álló piacgazdaságokhoz képest *regionálisan kiegyenlítettebb*, kevésbé tagolt térszerkezetűek voltak, a gazdasági fejlettség regionális szóródása szignifikánsan kisebb volt ezekben az országokban. A rendszerváltozást követően az országok szinte azonnal elkezdték a „felzárkózást” a modell generális trendjéhez (*Nagy G. 2002b*) a regionális fejlettségi, jövedelmi egyenlőtlenségek növekedésének indultak (az országokat a modell koordinátarendszerében reprezentáló pont „függőleges” irányban mozdult el). Mivel a fejlettségi („vízszintes”) skálán az országok még csak mostanában mozdulnak el a 15 évvel ezelőtti szintről, a modellnek megfelelően az újabb regionális kiegyenlítődési szakasz még várat magára (*3.5. ábra*).



3.5. ábra *„Visszatérés a trendvonalra” a volt szocialista országokban*

Az országos fejlettség és a regionális tagoltság összefüggéseinek vizsgálata mindmáig egyik központi témaköre a regionális fejlődés kutatásának. A legújabb publikációk közül a fejlett országokat vizsgálja ebből a szempontból az OECD (*OECD 2001*), a harmadik világ országainak egyenlőtlenségi sémájáról a Világbank számos kutatási jelentése ad módszertani elemeket is tartalmazó áttekintést (*Shankar, R. – Shah, A. 2001, Litchfield, J: A. 1999*). Általában jelentősen kiterjedtek a fejlődő világ, mindenek előtt Latin-Amerika, Délkelet-Ázsia és a Dél-Afrika országainak regionális tagoltságát elemző munkák (ellenpéldaként: nagyon kevés az empirikus információ az arab országokról). Kiterjedt elemzések vannak az új térbeli keretekben fejlődő Oroszország regionális folyamatairól is (*Fedorov, L. 2002*). A kapcsolódó írások érintik a regionális egyenlőtlenségek mérésének, elemzésének módszertanát is.

Az országokon belüli régiók fejlettségi arányainak vizsgálatához *Európában* a 20. század utolsó évtizedében három tényezőcsoport külön lökést adott. Az első az, hogy az átalakuló, *globalizálódó* *gazdaság számos új eleme, szektora* jelent meg a fejlett országokban, kissé megrengetve a korábbi évtizedek közeledési irányzatát a fejlett és periférikus térségek között. Ezekben az országokban a területi egyenlőtlenségek stagnáltak vagy kissé *növekedtek*. Mindezzel párhuzamosan folyamatosan mozgásban van *kontinens gazdasági magterülete*, korábbi központjától (a dél-angol – észak-német zónától) délkeleti irányban mozogva az alpi térséget tette a legdinamikusabb makro-régióvá. Folyamatos tesztelés tárgyává teszik a regionális egyenlőtlenségek alakulását az EU nagy volumenű *regionális támogatási forrásainak* hatását számon kérők is. A válaszok ellentmondásosak és vitatottak, Írország felzárkózása az egyik (a regionális politikát hatásosnak tartó), Görögország lassú elmozdulása a másik (a támogatások csekély hozadékát hangsúlyozó) álláspontot támogatja. A viták mögött nyilvánvalóan megjelenik egy időtáv-probléma is: az ezredforduló körüli stagnáló tagoltság nem kérdőjelezheti meg a kontinens egészére az évszázad második felében alapvetően jellemző közeledési irányzatot (*Fayolle, J. – Lecuyer, A. 2000, Terrasi, M. 1999*).

Az empirikus vizsgálatok újabb eredménye, hogy kimutatható az ún. *konvergencia-klubok* jelensége: ha az egyenlőtlenség a teljes mintában nem is csökken, egyes területegységek (régiók, országok) homogenizálódó csoportokba tömörülnek. Ennek következtében a jövedelem-eloszlást leíró sűrűségfüggvények „többcsúcsúvá" (multimodálissá) válnak (*Quah, D. T. 1996*). Ezt a jelenséget a világméretű egyenlőtlenségek országszintű vizsgálataiban is tapasztalták (*Canova*, *F. 2001*). Ez a jelenség kapcsolatban van a társadalmi jelzőszámok *területi autokorreláltságával* → **4.3** is, a fejlettségi, jövedelmi hasonulás ugyanis jellemzően nem térben véletlenszerűen elhelyezkedő elemek, hanem az egymáshoz térben is közeli egységek között megy végbe.

Az egyenlőtlenségek világméretű vizsgálatában sokoldalúan bizonyított az, hogy a gazdasági értéktermelés, gazdasági fejlettség mutatószámai tükrében növekvő egyenlőtlenségek vannak, más társadalmi jellemzők – például az iskolázottság vagy az élettartam mutatói – ellenben közeledést jeleznek (*Hobijn, B. - Franses, P. H. 2003*). A különbség azzal is összefügg, hogy míg a jövedelmek felülről lényegében nem korlátosak, addig az iskolázás és az élettartam esetében megjelölhető egy elméleti maximum. E közelítés érdekes eredménye az is, hogy a különböző mutatószámok tükrében eltérő az országok „klasztereződése" is (a volt szocialista országok például jellemzően jobb pozícióban vannak az iskolázottsági indikátorok tekintetében, mint a jövedelemszint tükrében).

3.3.2 A σ és β konvergencia (Major Klára)

A β (béta) és a σ (szigma) konvergencia fogalmai az 1990-es évek makroökonómiai kutatásának meghatározó irányává vált ún. konvergencia-vitában kristályosodtak ki és terjedtek el (*Major K. 2001*). A vitában azt kívánták eldönteni, hogy az egy főre jutó GDP különbözőségében hosszú távon csökkenés vagy növekedés várható-e. A vita igen széles körűvé vált, és egyfelől mára újabb módszertanok kifejlődéséhez vezetett, másrészt további kutatásokat ösztönzött az előbb említett diszciplina keretein kívül is, mélyen érintve többek között a regionális tudományt. Az új módszereket alkalmazták a regionális jövedelmi egyenlőtlenségek vizsgálatában, pl. Ausztria esetében ld. *Hofer - Wörgötter (1997),* Görögországra *Siriopoulos – Asteriou (1998),* Finnországra *Kangasharju (1999),* Svédország esetében *Persson (1997).* A regionális tudomány esetében a nagy „lökést" az Európai Unión belül kiemelten kezelt regionális politika, és az emiatt szintén kiemelt jelentőséggel bíró európai regionális folyamatok vizsgálata jelentette. Számos tanulmány alkalmazta ezen új módszertanok valamelyikét az EU régiói esetében is.

A σ konvergencia

Akkor beszélünk σ konvergenciáról, ha az egyes országok egy főre jutó jövedelmeinek keresztmetszeti adataiból számított *szórás* csökkenő tendenciát mutat.

Az eredmények értelmezéséhez fontos szem előtt tartanunk, hogy a szórás a jövedelmi egyenlőtlenségek abszolút mutatója. Értéke növekedhet akkor is, ha az egyes vizsgálati egységek relatív jövedelmi pozíciója változatlan marad, csak egyszerűen növekszik a jövedelmek abszolút nagysága (pl. $ helyett Ft mértékegységre térünk át). Ha vizsgálat a relatív jövedelmi pozícióban bekövetkezett változás vizsgálatára irányul, akkor a szórás helyett a relatív szórás lehet a megfelelő mutató, ez azonban nincs közvetlen kapcsolatban a σ konvergencia fogalmával.

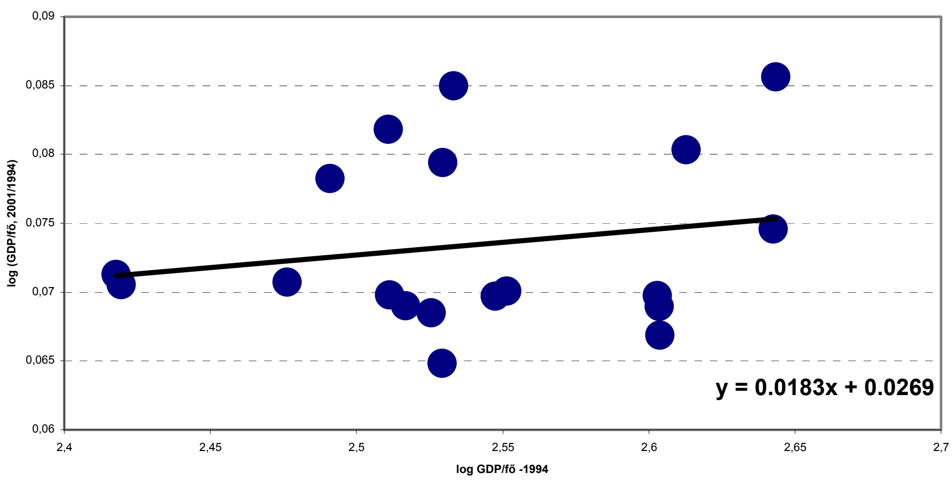
A β konvergencia

A kiinduló alapötlet nagyon egyszerűen megfogalmazható. Ha igaz az (ami a *Solow*-modellből[5] következik), hogy szegényebb országok egy főre jutó jövedelme gyorsabb ütemben növekszik, mint a gazdagabb országok egy főre jutó jövedelme, akkor annak hosszú távon azt kell eredményeznie, hogy a szegényebb országok felzárkóznak a gazdagabb országokhoz.

Teszteljük tehát empirikusan ezt a hipotézist! A fentiekben megfogalmazott, ún. abszolút konvergencia hipotézis empirikus tesztelésére a növekedéselméleti irodalomban keresztmetszeti adatokon végzett lineáris regressziós becslést → **4.4** szoktak alkalmazni (*3.6. ábra*). Ekkor magyarázó változónak a vizsgálati periódus elején megfigyelt jövedelmi adatokat ($\ln y_{i0}$) veszik, ahol i az ország indexe, a 0 jelöli a kiinduló időpontot. Magyarázott változó pedig a vizsgálati periódusban megfigyelt átlagos növekedési ütem, amit a jövedelmek logaritmusának egész periódus alatti változása mutat. A becsült regressziós egyenlet tehát:

$$\Delta \ln y_i = \alpha + \beta \ln y_{i0} + \varepsilon_t$$

Az egyenletben α, β az ismeretlen paraméterek, ε_t képviseli a véletlen tényező hatását. Ez utóbbiról feltesszük, hogy várható értéke zérus.



3.6. ábra *A regionális fejlettségi különbségek növekedése Magyarországon 1994-2001 között, β-divergencia (Budapest nélküli számítás)*

A konvergencia hipotézis érvényességéhez az kell, hogy a becsült β paraméter negatív legyen. Ebben az esetben pontosan az történik, amit sejtettünk: a gazdagabb országok növekedési üteme alacsonyabb, következésképpen várható a felzárkózás. Ennek gyorsaságára szintén a β paraméter adhat becslést. A *β konvergencia* elnevezés is innen származik: a kérdéses jelenség, azaz a konvergencia szempontjából a regressziós egyenlet β paramétere a meghatározó.

[5] A Solow-modell a makroökonómiai növekedéselmélet 1956-ban született, de máig meghatározó modellje. A β konvergencia fogalma ennek empirikus tesztelése közben született meg. A modell ismertetésétől most eltekintünk, ez számos makroökonómia tankönyvben megtalálható, lásd pl. *Mankiw 2002.*

Az abszolút konvergencia hipotézisének tesztelése igen változatos empirikus eredményeket hozott. Az első számítások, melyek során az OECD országokra valamint az USA tagállamaira végezték el a teszteket, a konvergencia hipotézis mellett szóltak. Hamar világossá vált ugyanakkor, hogy a számítási eredmények értékelése során eltekintettek egy módszertani sajátosságtól, melyet *mintavételi torzításnak* lehet nevezni. Az 1990-es években fejlett országokra végezve a tesztet, az nyilvánvalóan alá kell, hogy támassza a konvergencia hipotézist, de semmiképpen se utasíthatja el, még abban a szélsőséges esetben sem, ha 1990-ben ugyanazon országok tartoznának a fejlettek közé, mint pl. 1930-ban. Mivel azok az országok, amelyek nem tudtak lépést tartani a fejlődéssel a minta kiválasztásának módja miatt nem kerültek be a mintába, így szükségszerűen kimutatták a jövedelmi különbségek csökkenését. A szakirodalom egyértelműen rámutat arra is, hogy *β értéke erősen függ a minta elemszámától.*

A hibát korrigálandó, a további számításokat – a rendelkezésre álló adatok függvényében – igyekeztek az országok lehető legszélesebb körére kiterjeszteni. Ezek a tesztek azonban szinte mind, kivétel nélkül elutasították az abszolút konvergencia hipotézist, azaz azt a feltevést, miszerint az országok egy főre jutó jövedelmei közelednének egymáshoz. A megoldást és a további kutatást a konvergencia fogalmának megújítása jelentette.

A feltételes konvergencia

A β konvergencia tesztelése során kapott negatív eredmények illetve a korábban ismertetett módszertani problémák a konvergencia tesztelésének egyéb útjait igényelték. Egyik megoldás a β konvergencia fogalmának módosítását jelentette. A fenti következtetés ugyanis, miszerint a gazdagabb országok növekedési üteme kisebb, csak *feltételesen* igaz. Nem teljesen azonosak ugyanis a vizsgálatba bevont országok gazdaságai, a korábbi regresszióból hiányzott az országspecifikus tényezők figyelembevétele. Ezért a feltételes konvergencia fogalma beépített a vizsgálódásba az egyes országok sajátosságainak figyelembevételét is. A fogalom elnevezése is innen származik: beszélhetünk konvergenciáról, de csak feltételesen, leszámítva az országspecifikus tényezők hatását.

A hipotézis teszteléséhez a korábbi regressziós technikát ki kell egészíteni kontroll és környezeti változókkal, melyek az országspecifikus hatásokat kiszűrik. Az alkalmazott ökonometriai eszköz többnyire az instrumentális változók (INST) vagy a 2 lépéses OLS becslés (2SLS) módszere. Az alkalmazott kontroll és környezeti változók

- az oktatási kiadások GDP-hez viszonyított aránya;
- a beruházási kiadások GDP-hez viszonyított aránya;
- a kormányzati kiadások GDP-hez viszonyított aránya;
- a politikai instabilitás mérőszáma;
- a külkereskedelmi cserearány mutatószáma;

Instrumentális változóknak a korábban felsorolt változók késleltetett értékei szerepelnek.

A feltételes konvergenciára vonatkozó tesztek a világ országai vonatkozásában rendre *igazolták* a feltételes konvergencia hipotézisét. Beláthatjuk azonban, hogy a feltételes konvergencia fogalma pontosan arra a kérdésre nem ad választ, ahonnan elindultunk: akkor most várható-e vagy sem a jövedelemi differenciálódás csökkenése.

A β együttható negatív előjele (amit általánosságban neveznek *β-konvergenciának)* csak szükséges, de nem elégséges feltétele a konvergenciának. Lehetséges olyan eset, amikor az együttható negatív, még sincs szó jövedelmi kiegyenlítődésről. Ez például akkor fordul elő, amikor a vizsgált egységek (pl. régiók) között fejlettségi *inverzió* következik be. Ekkor a lassan növekedő fejlett illetve a gyorsan felzárkózó elmaradott térségek (amelyek épp a béta konvergencia szerint viselkednek) helyet cserélnek, s az időszak végén akár ugyanakkora vagy nagyobb is lehet az egyenlőtlenség nagysága, mint a kezdetiben (azaz szigma konvergencia nincs), csak épp ellentétes térszerkezetben (ez a helyzet például 20. század második felében Belgiumban, ahol Flandria és Vallónia helyet cserélt a fejlettségi skálán).

3.4 Időbeli átmenetek: a Markov-láncok (Major Klára)

A területi egyenlőtlenségek időbeli változását a területegységek pozícióváltozása kíséri. Közeledés esetén egyre több átlaghoz közeli fejlettségű, jövedelmű térség bukkan fel, a differenciálódás általában a szélső pozíciókban eredményez sűrűsödét. A fejezet e folyamat leírására is alkalmas módszert ír le, amely bár régóta ismert a hazai területi kutatásokban is, alig alkalmazott. Megalkotója *Andrej Andrejevics Markov orosz matematikus, (1856-1922).* A matematikai modell kifejlesztését követően azt számos tudományágban, a regionális tudományoktól kezdve a szociológián át a közgazdaságtanig, számtalan vizsgálatban alkalmazták már[6].

3.4.1 A koncepció

A Markov-láncok modelljének kulcsfogalmai a *mozgás* és a *sokasági eloszlás*.

Mozgás, mivel változást, dinamikát, valamilyen átalakulást vizsgál. Ez abban is megnyilvánul, hogy az elemzés során mindig több, különböző időpontra vonatkozó adatokat használunk és nem csak azok összehasonlítására törekszünk, de arra is, hogy az egyik időpontban megfigyelt jelenségből következtessünk a következő időpontra várható bekövetkezésre. A *mozgás* tehát abban az értelemben is kulcsfogalom, hogy az elemzés során törvényszerűséget keresünk, szabályt, amely magára a *változásnak a magyarázatára* irányul.

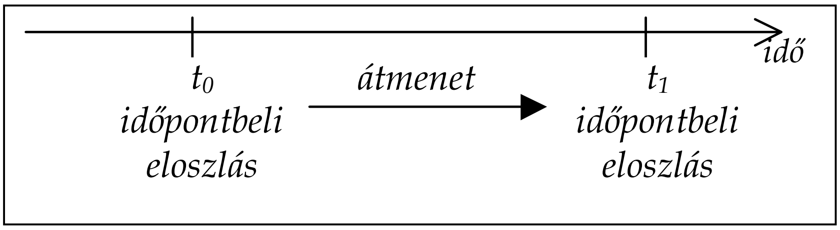
A Markov-láncok modelljében a vizsgált objektum, amelynek időbeni változására magyarázatot keresünk, a különböző időpontokban megfigyelt *sokasági eloszlás*. Ezen fogalom azt írja le, hogy hogyan oszlik meg a vizsgált sokaság a vizsgálati jellemző szerint egy időpontban. Ehhez a megfigyelési egységeket különböző kategóriákba kell majd sorolnunk, ezeknek a kategóriáknak az általános neve a Markov-modell irodalmában *állapot.*

- Például ha a vizsgált jelenség a lakosság állandó lakóhely szerinti területi megoszlása, akkor az egyes állapotok (vagyis kategóriák) a területi egységek lesznek, amelyek a vizsgálati szinttől függően lehetnek kistérségek, megyék, régiók, településnagyság-csoportok.
- Egy másik példát tekintve a népesség adott időpontban vett iskolai végzettség szerinti megoszlását vizsgálva a szóba jöhető állapotok a lehetséges iskolai végzettség szerinti kategóriák, pl. általános iskola, szakiskola, érettségi, diplomázott illetve doktori fokozatot szerzett.

A kategóriák meghatározása és az egyes szóba jöhető állapotok elkülönítése a *problémafelvetéstől függ*: önmagában a Markov láncok modelljének tárgyalása során teljesen érdektelen, hogy az iskolai végzettség kategóriái 0-20-ig terjedő egész számok lesznek, melyek az elvégzett évfolyamok számát mutatják, vagy képezünk öt kategóriát az előbb említett iskolai végzettségek figyelembevételével. A módszertan alkalmazásához csak az fontos, hogy a kutató eldöntse, hogy milyen kategóriákat képez. Természetesen a vizsgálati kérdés szempontjából rosszul definiált állapotok értelmezhetetlen vagy intuícióellenes kutatási eredményekhez vezethetnek.

[6] A fejezet a kötetben részleteiben nem tárgyalt *elemi mátrix-számítási ismereteket* feltételez.

A *3.7. ábra* a Markov modell alapfogalmai közötti sematikus kapcsolatot mutatja. A vizsgálat a két időszakra jellemző eloszlás és a közöttük kapcsolatot teremtő *átmenet* szabályszerűségeinek leírására irányul. A mozgást tehát a továbbiakban átmenetnek fogjuk nevezni.



3.7. ábra *A Markov-modell alapfogalmai közötti kapcsolat*

3.4.2 Példák a Markov-láncok alkalmazására

A továbbiakban három különböző tudományterületről vett példával igyekszünk bemutatni a Markov láncok lehetséges alkalmazási területeit. Az első példa egy klasszikus földrajzi jelenség, a vándorlás Markov-modellel történő leírását mutatja be röviden. A második példában egy kis időre átugrunk a szociológia területére, míg végül területi/gazdasági problémával zárjuk e rövid fejezetet.

Vándorlás

A vándorlás vizsgálata során mindig felmerül az a kérdés, hogy milyen jellemzői vannak a vándorlási folyamatnak, tendenciaként megfigyelhető-e bizonyos területekről, településtípusokról történő elvándorlás, illetve más településekre, terület- vagy tájegységekre, településtípusokra történő beköltözés. Ezt a kérdést Markov-lánc modellel is megvizsgálhatjuk.

Ekkor a vizsgálati sokaság egy ország népessége, s a lehetséges állapotok a népesség lakóhelye. Amennyiben arra vagyunk kiváncsiak, hogy a vándorlás hogyan érinti a lakosság településtípusonkénti megoszlását, akkor az egyes állapotok lehetnek főváros, város, egyéb település. Amennyiben a főváros és a vidék közötti vándorlást vizsgáljuk, úgy csak két állapotot definiálunk, ezek a főváros és vidék. A vándorlási kérdés vizsgálata során területegységek közötti mozgást is vizsgálhatunk, ekkor pl. megyei szintű vizsgálatoknál az egyes állapotok az adott ország megyéi. Regionális szinten vizsgálva a folyamatokat az egyes régiók alkotják majd a Markov-modell állapotait.

Az állapotok meghatározása tehát a kutató feladata, s ez az általa vizsgálni kívánt probléma jellegétől függ. Az állapotok meghatározása után pedig kezdődhet a Markov-modell alkalmazása!

Társadalmi mobilitás

Társadalmi mobilitásról akkor beszélünk, ha a társadalom valamelyik tagjának megváltozik a szociológiai helyzete, társadalmi státusza. A vizsgált mozgás tehát ebben az esetben nem fizikai, de ettől eltekintve nincsen lényeges különbség a korábban említett példákhoz képest. A kutatónak most is azzal kell kezdenie a kutatást, hogy a vizsgálandó problémának leginkább megfelelő állapotokat meghatározza. Társadalmi mobilitás esetében a társadalmi státusz valamilyen mutatószámát szokás alkalmazni. Ez lehet egyetlen mutató (iskolai végzettség, jövedelmi helyet, vagyoni helyzet, foglalkozás) illetve olyan kompozit mutató, amit az előbb említett mutatókból lett összeállítva.

Jövedelmi differenciáltság változása

Jövedelmi differenciáltság vizsgálatakor a vizsgálati sokaság és az állapotok meghatározása egyaránt komoly megfontolásokat igényel. Vizsgálati sokaságnak gazdaságilag homogén, vagy homogénnek tekinthető egységek, pl. országok, régiók, megyék, kistérségek választhatók. A sokaság megválasztását általában a vizsgált kérdés alapjaiban meghatározza.

A továbbiakban beszéljünk országokról! Az egyes országok jövedelmei *folytonos* változók, azaz számtalan különböző értéket felvehetnek. Hogyan határozzuk meg az egyes állapotokat? Más állapotnak számít-e az, ha egy ország egy főre jutó GDP-je mondjuk 4500$, míg egy másik országé 4625$? Ilyen esetekben az állapotokat ún. diszkretizálással lehet meghatározni: ún. jövedelmi kategóriákat hozunk létre, és az egyes kategóriához tartozás fogja az adott állapothoz tartozást jelenteni. Ez azt jelenti, hogy a lehetséges jövedelemadatok által meghatározottan *intervallumokat* képezünk, és mindazon országokat azonos állapotban lévőnek gondoljuk, amelyek azonos intervallumba esnek.

Nézzünk néhány példát jövedelmi kategóriákra! A gazdasági elemzésekben igen gyakran használatos az alábbi beosztás.

Jövedelmi kategória	*Jövedelem a sokasági átlag %-ban*
1	0 – 25
2	25 – 50
3	50 – 100
4	100 – 200
5	200 – .

Látható, hogy az egyes osztályközök „hossza” nem azonos, ennek oka a jövedelmek ismert lognormális eloszlása. Igy az alacsonyabb jövedelmi kategóriákban, ahol általában lényegesen több a megfigyelés, rövidebb kategóriákat kell képezni, mint a magasabb jövedelemértékeknél.

Ha egészen biztosak szeretnénk lenni benne, hogy minden kategória azonos súllyal szerepeljen a vizsgálódásban, akkor úgy kell megválasztanunk a jövedelmi kategóriákat, hogy azokba azonos számú megfigyelés essen. Ebben az esetben természetesen nem lehet apriori, a vizsgálat elvégzése előtt megmondani, hogy melyek lesznek a kategória-határok, hiszen azok a megfigyelt adatok függvényében alakulnak majd.

3.4.3 A Markov láncok modellje

A modell részletes tárgyalását néhány alapfogalom meghatározásával kezdjük.

*Állapottér*nek hívjuk a lehetséges állapotok halmazát. Korábban már említettük, hogy a kutatónak a vizsgált probléma jellegétől függően meg kell határoznia, hogy hány kategóriát képez és pontosan definiálnia azokat. Mi most itt feltételezzük, hogy ezen a kutatási szakaszon már túl vagyunk, s a továbbiakban a meghatározott állapotok számát n-el, az egyes állapotokat pedig az 1-től n-ig terjedő természetes számokkal fogjuk jelölni. *A modell alkalmazásának fontos feltétele, hogy véges számú kategóriát kell meghatároznunk.*

A sokasági eloszlást az egyes kategóriákhoz tartozás valószínűségeiből álló vektorral írjuk le. Minden egyes állapothoz így tartozik egy 0 és 1 közötti valós szám, ami azt mutatja meg, hogy milyen valószínűséggel tartozik egy elem az adott állapotba. Az i állapotba tartozás valószínűségét egy adott időpontban p_i-vel fogjuk jelölni. Az egyes p_i valószínűségeket egy vektorba rendezhetjük, $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots ,p_n)$, a továbbiakban sokasági eloszlás alatt ezen vektort kell érteni. Az egyes kategóriáknak egyértelműen és átfedésmentesen kell felosztaniuk a vizsgálati tartományt, ezért az egyes kategóriákhoz tartozások valószínűségeinek együtt éppen 1-et kell adniuk, azaz egy eloszlásvektorra igaz lesz az, hogy

$$\sum p_i = 1 \qquad (3/1)$$

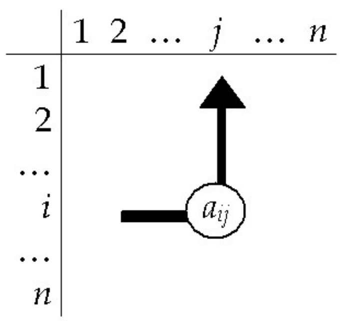
Sztochasztikus mátrix olyan négyzetes nemnegatív mátrix, amelynek soraiban szereplő elemek összege 1. Azaz ha **A** sztochasztikus mátrix, amelynek általános (i-ik sorának és j-ik oszlopában található) eleme a_{ij}, akkor minden i-re igaz lesz, hogy

$$\sum a_{ij} = 1 \qquad (3/2)$$

Az összefüggésekből látható az analógia: valójában a sztochasztikus mátrixok sorai maguk is eloszlások és értelmezhetők eloszlásvektorként. *A sztochasztikus mátrixok nagyon fontos tulajdonsága, hogy két sztochasztikus mátrix szorzata szintén sztochasztikus mátrixot ad.* Ennek a későbbiek során még fontos szerepe lesz.

Mozgás

Legyen az **A** mátrix nxn-es sztochasztikus mátrix és ennek i-ik sorában és j-ik oszlopában található eleme a_{ij}. Az **A** mátrixot a Markov-lánc *átmenetmátrixának* hívjuk, ha az a_{ij} elem azt mutatja meg, hogy mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a jelenlegi időpontban az i állapotban található elem a következő időpontban a j állapotban lesz (ld. *3.8. ábra*). A mátrix elnevezése is erre utal: átmenetek valószínűségeit határozza meg, ezért is hívjuk átmenetmátrixnak.



3.8. ábra *Az átmenetmátrix egy elemének értelmezése*

Az átmenetmátrix fontos tulajdonságai az alábbiak.

- A mátrix főátlójában szereplő értékek, pl. a_{ii} azt mutatja meg, hogy milyen valószínűséggel lesz a következő időpontban egy elem az i állapotban, feltéve, hogy most is az i állapotban van. A főátlóban szereplő értékek tehát a helybenmaradás, a nem-mozgás valószínűségét adják meg, ezért az átmenetmátrix által leírt mobilitás számszerűsítése során kiemelt szerepük lesz (erről még a későbbiekben lesz szó).
- Mivel az átmenetmátrix sztochasztikus mátrix, ezért sorai eloszlást adnak meg. Hogyan értelmezhető az átmenetmátrix egy sora? Tekintsük pl. az i-ik sort. Az a_{i1} elem azt mutatja meg, hogy milyen valószínűséggel mozdulunk át az i állapotból az *1*-esbe. Az a_{i2} szerint az i-ből a *2*-esbe. Az általános, a_{ij} elem az i állapotból a j-be történő átmozdulás valószínűségét adja meg, míg végül az utolsó, a_{in} az i állapotból az n állapotba történő átmenet valószínűségét adja meg. A mátrix i-ik sora tehát az összes szóba jöhető esetet sorra veszi, ahova az i állapotból a következő időszakra az egyes elemek átkerülhetnek, beleértve az adott állapotban maradás esetét is. Ezért a mátrix adott sora így valóban eloszlást fejez ki; azt mutatja meg, hogy az i állapotból indulva, milyen a következő időszakra várható állapot eloszlása.

Az alábbiakban tekintsünk néhány tankönyvi példát átmenetmátrixra! Minden példánkban n=2 lesz, azaz az állapottér elemeinek száma 2. A könnyebb értelmezhetőség kedvéért tételezzük fel, hogy az alábbi példákban az egyes állapotok az átlagos alatti (1-es állapot) illetve átlagos feletti (2-es állapot) jövedelmi szinteket jelentik.

Legyen az első példánk átmenetmátrixa $\mathbf{A}_1$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

E példában az átmenetmátrix főátlójában szereplő elemek értéke egyaránt ¾, azaz annak valószínűsége, hogy egy átlagon aluli jövedelemmel rendelkező egyén a következő időszakban is átlagon aluli jövedelemmel fog rendelkezni 75% , míg annak valószínűsége, hogy az átlagosnál jobb jövedelmi pozíciót ér el mindössze 25%. Hasonlóképpen értelmezhetőek az átmenetmátrix értékei az átlagosnál magasabb jövedelmi kategóriájú egyénekre is.

Következő példánk átmenetmátrixát jelöljük **I**-vel.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az I mátrix szintén átmenetmátrix, hiszen soraiban szereplő elemek összege 1. Ezen mátrix azonban nagyon speciálisnak tekinthető a vizsgált mozgás szempontjából: az átlagosnál alacsonyabb jövedelmű egyének 1 valószínűséggel maradnak átlagosnál alacsonyabbak, míg az átlagosnál magasabb jövedelmű egyének 1 valószínűséggel maradnak az átlagosnál nagyobb jövedelműek. A jelen állapot tehát ebben az esetben teljes egészében determinálja a következő időszakra várható állapotot méghozzá anélkül, hogy bármilyen változás állna be az egyes elemek pozíciójában. Ezért ezt a mátrixot *a teljesen immobil rendszer* átmenetmátrixának gondoljuk.

Következő példánk átmenetmátrixát $\mathbf{I}_p$-vel fogjuk jelölni.

$$I_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

I és $\mathbf{I}_p$ mátrixok nagyon hasonló és mégis nagyon különböző rendszereket írnak le. Hasonlóak abban, hogy mindkét esetben egyértelműen determinálja a jelen állapot a jövőre várhatót, és különböznek abban, hogy $\mathbf{I}_p$ a teljes immobilitással szemben egy állandóan mozgásban lévő rendszert ír le. Mi jellemzi ezt? A jelen időszakban átlagon aluli jövedelmű egyed a következő időszakra 1 valószínűséggel átlagon felüli jövedelmű lesz, és ha egy újabb periódus eltelik akkor újra 1 valószínűséggel átlagon aluli jövedelmi pozíció fogja jellemezni. Az $\mathbf{I}_p$ mátrix által leírt mozgás tehát *ciklikus*.

Utolsó példánként tekintsük az alábbi **A*** mátrixot!

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Milyen az a mozgás, ahol a lehetséges jövőbeni állapotok kialakulásának valószínűsége minden kezdeti állapotban azonos? Áltagosnál alacsonyabb jövedelmi szintről indulva egyaránt 50% a valószínűsége annak, hogy maradunk a jelenlegi szinten, illetve annak, hogy az átlagosnál magasabb jövedelmi szintet érünk el. Ez az eset ezért pontosan úgy interpretálható, mint amikor a jelen állapotnak igazából semmilyen prediktív (előrejelző) ereje nincsen a várható állapot tekintetében, a jövő képletesen szólva egy kockadobás bizonyosságával jelezhető csak előre.

Hasonlítsuk össze $\mathbf{I}_p$ és **A*** mátrixokat az általuk leírt mozgási folyamat *mobilitása* szempontjából! Melyiket tekinthetjük vajon az **I** mátrix által leírt teljesen mobil rendszer ellenpólusának? Első ránézésre az $\mathbf{I}_p$ mátrix nagyobb mozgást ír le, hiszen minden elem minden időszakban 1 valószínűséggel máshol lesz, mint ahol korábban volt. Mobilitás szempontjából azonban fontosabb az a tulajdonság, hogy mennyiben determinálja a jelen állapot a jövőt, és ebből a szempontból az **I** mátrix ellentéteként az **A*** mátrixot kell állítanunk. Az **I** mátrix esetében a jelen egyértelműen determinálja a jövőt, és ez a determináció a stagnálás, míg **A*** esetében a jelen állapot semmit nem tud mondani a várható állapotról.

Az előzőekben kifejtett gondolatot egyetlen számszerű mutatóba is összegezhetjük.

Az **A** átmenetmátrix által leírt mozgási folyamat által képviselt mobilitás mértékét az alábbi, ún. mobilitási mutatóval számszerűsíthetjük:

$$M(A) = \frac{n - \sum a_{ii}}{n-1} \qquad (3/3)$$

azaz a mobilitási mutató az átmenetmátrix főátlójában szereplő értékeket használja a mobilitás mérésére. Mi ennek az oka? Mint korábban említettük, a főátlóban szereplő értékek a változatlanságot, az adott állapotban maradás valószínűségét mérik. Ezért ezen elemek összege a mobilitás ellentételeként az immobilitás egy mérőszámát adja. A (5/3) képlet konkrét formáját az határozta meg, hogy a fenti specifikáció révén az általunk meghatározott két szélsőséges mobilitást felmutató mátrixok, **I** és **A*** esetén a (3/3) képlet speciális értékeket vesz fel. Számítsuk ki a teljes immobilitás és teljes mobilitás esetére a mobilitási mutató értékét!

$$M(I) = \frac{n - n(1)}{n-1} = 0$$

Az **I** mátrix esetében a főátlóban szereplő 1-esek összege éppen n, ezért a mobilitási mutató értéke zérus. Az **A*** mátrix esetében a főátlóban szereplő $1/n$ értékek összege pedig 1, ezért a mutató éppen 1 értéket vesz fel.

$$M(A^*) = \frac{n - n(\frac{1}{n})}{n-1} = 1$$

A gyakorlati alkalmazásokban érdekes esetekben a mobilitási mutató értéke e két szélsőséges érték közé esik, így azt százalékos formában értelmezhetjük a mobilitás mérőszámaként.

A következő időszakra várható eloszlás

Térjünk vissza az átmenetmátrix elemeinek értelmezéséhez! Az átmenetmátrix egyes elemei a jelen állapot ismeretében nyújtanak információt a következő állapotban várható állapotok bekövetkezési valószínűségeiről. De gyakran szükség van arra, hogy a jelen állapot ismerete nélkül is tudjunk valamit mondani arról, hogy milyen valószínűséggel lesz egy tetszőleges elem a következő időszakban a j állapotban.

Ehhez az átmenetmátrixon kívül további információkra is szükség van. A következő időpontbeli j állapotba tetszőleges állapotból el lehet jutni, így ahhoz, hogy a fenti kérdést megválaszoljuk, szükséges a jelen állapot eloszlásának ismerete.

Tekintsük végig, hogy milyen állapotokból lehet a következő időszakra a j állapotba eljutni! Az 1 állapotból a_{1j} valószínűséggel lehet a következő időszakra a j állapotba kerülni, és ha az 1 állapotban az elemek p_1 valószínűséggel tartózkodnak, akkor a teljes sokaság $p_1 a_{1j}$ aránya fog az 1 állapotból a j állapotba átmenni egy időszak alatt.

Hasonló okoskodással láthatjuk a 2 állapot esetében is, hogy a $p_2 a_{2j}$ szorzat mutatja a sokaság azon hányadát, amely várhatóan a 2 állapotból megy a j-be egy időszak alatt. Ha az összes állapotra elvégezzük ezt a számítást, akkor ezen szorzatok összegeként éppen azt kapjuk, hogy milyen valószínűséggel lesz egy elem a *j* állapotban egy időszakkal később. Jelöljük ezt a valószínűséget p_j'-vel, akkor a fenti okoskodás alapján ez éppen

$$p'_j = \sum_l p_l a_{lj} = [p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{ij} \\ ... \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

a kiinduló állapot eloszlásvektorának és az **A** átmenetmátrix *j*-ik oszlopának a skalár-szorzatával fog megegyezni.

Ezt a gondolatmenetet tetszőleges *j* állapotra el lehet végezni, azaz tetszőleges állapotra kiszámíthatjuk, hogy (függetlenül a kiinduló állapottól, pusztán a jelen pillanatra jellemző eloszlás ismeretében) mekkora lesz az egyes állapotokba kerülés valószínűsége. Ehhez a jelen állapot eloszlásvektorát az **A** átmenetmátrix minden oszlopával meg kell szoroznunk, azaz építve a lineáris algebra elemi műveleteinek ismeretére, ezt lineáris algebrai jelölésekkel az alábbi formában írhatjuk fel:

$$\mathbf{p}_t \mathbf{A} = \mathbf{p}_{t+1} \quad (3/4)$$

ahol a *t* és *t+1* indexekkel az egymást követő időpontokat fogjuk jelölni a továbbiakban.

Lényegében véve a fenti egyenletet tekinthetjük a Markov-láncok modellje alapegyenletének, ez határozza meg az átmenet szabályát, a mozgás törvényét, amely az adott időpont eloszlásának ismeretében meghatározza a következő időszakra várható eloszlást. Az átmenetmátrix ismeretében így tetszőleges időpontbeli eloszláshoz készíthetünk előrejelzést a következő időszakra várható eloszlásra. A modell ezen tulajdonsága révén fogjuk majd előrejelzések készítésére felhasználni.

A Markov-lánc tulajdonságai

Stacionaritás

Az itt tárgyalt Markov-ánc modellt ún. stacionárius Markov-áncnak is hívják. A stacioner jelző a jelen esetben azt jelenti, hogy az *i* állapot elhagyásának valószínűsége független attól, hogy milyen régóta tartózkodnak az egyes elemek az *i* állapotban. Az átmenetmátrix vonatkozásában ez úgy jelenik meg, hogy a mátrix egyes elemei nem függnek az időtől.

Ez az általunk eddig nem nagyon bolygatott kérdés valójában nagyon fontos tulajdonsága a Markov-láncnak, ezért is szentelünk most neki egy kis részt. Hogyan lehet ezt a tulajdonságot értelmezni? Az átmenetmátrix idő-függetlensége egyfajta „történeti függetlenséget” takar: a múltnak nincsen nagyobb hatása a jövőben bekövetkező folyamatokra, mint ami a jelen állapotból már kirajzolódik. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy a múlt csak a jelenre gyakorolt hatásán keresztül befolyásolja a jövőt, közvetlenül nem.

A stacionaritás tulajdonsága matematikailag és statisztikailag egyaránt lényegesen könnyebbé teszi a tárgyalás menetét és a módszer alkalmazását. A területi és társadalmi folyamatok vizsgálata során azonban gyakorta bizonyul inadekvátnak. A gazdasági, népesedési, terjedési folyamatoknak az a feltételezett tulajdonsága, hogy a mozgás valószínűsége független az adott állapotban tartózkodás időtartamától sokszor intuícióellenes is, gondoljunk például a munkaerőpiaci folyamatokra. A munkanélkülivé válás egyik igen gyakran emlegetett problémája éppen abban van, hogy minél tovább munkanélküli valaki, annál nagyobb valószínűséggel vész el teljesen a munkaerőpiacról. A Markov-lánc modell alkalmazásai során így, ha kiinduló hipotézisnek fel is kell tételeznünk a stacionaritást a kutatónak meg kell győződnie arról (pl. stacionaritás tesztek elvégzésével), hogy a vizsgált jelenség valóban felmutatja ezt a történeti függetlenség tulajdonságot, és ha szükséges, tovább kell lépni a stacionaritás feloldása felé.

A t-lépéses átmenetmátrixok

Építsük tovább az előző gondolatmenetet, ne pusztán két egymást követő, *t* és *t+1* időszakra alkalmazzuk a (3/4) összefüggést, de egymást követő időpontok egész sorozatára. Ezt könnyen megtehetjük, hiszen a (3/4) egyenlet *rekurzív* összefüggést ad meg: a két egymást követő időpontbeli eloszlást egymásból származtatja.

Tekintsünk egy kezdeti időpontot, amit a továbbiakban 0-val fogunk indexelni. Ezen kezdeti időpontra jellemző eloszlást jelölje $\mathbf{p}_0$. Ekkor az **A** átmenetmátrixszal jellemezhető Markov-lánc következő időpontra várható eloszlását az (3/4) egyenlet szerint

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0\mathbf{A} \qquad (3/5)$$

összefüggés írja le.

Mi lesz a második időpontra várható eloszlás? Újfent alkalmazzuk a (3/4) képletet, de egyben helyettesítsük be (3/5)-öt is:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1\mathbf{A} = \mathbf{p}_0\mathbf{A}^2$$

ahol $\mathbf{A}^2$ az **A** átmenetmátrix négyzetét jelöli. Ezt a gondolatmenetet ismételve láthatjuk, hogy az átmenetre vonatkozó (3/4) összefüggés felhasználásával egy tetszőleges időpontban várható eloszlást ki tudunk számolni egy kezdeti időpontbeli eloszlás és az átmenetmátrix ismeretében, azaz

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_0\mathbf{A}^t \qquad (3/6)$$

Mit tudunk mondani az átmenetmátrix hatványairól? Emlékezzünk, hogy az átmenetmátrix definiálása során már említettük, hogy két átmenetmátrix szorzata szintén átmenetmátrixot ad. Ebből azonnal következik, hogy mivel $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$, ezért $\mathbf{A}^2$ is átmenetmátrix. Egy tetszőleges időpontbeli eloszlást tehát a kiinduló időpontbeli eloszlás és egy átmenetmátrix szorzataként kaphatjuk meg.

Hogyan lehet értelmezni az átmenetmátrix hatványainak elemeit? Ehhez bevezetünk egy új fogalmat: mivel az **A** átmenetmátrix egy tetszőleges a_{ij} eleme azt mutatja meg, hogy milyen valószínűséggel lesz a jelen pillanatban az *i* állapotban tartózkodó egyed *a következő időpontban* a *j* állapotban, ezért ezt *egylépéses átmenetvalószínűségnek* is hívjuk. Hasonlóképpen juthatunk el $\mathbf{A}^2$ elemeinek az értelmezéséhez!

A továbbiakban jelölje $a_{ij}^{(2)}$ az $\mathbf{A}^2$ mátrix *i*-ik sorának *j*-ik elemét. A mátrix szorzás műveleti szabályai szerint ezen elem értékét az **A** átmenetmátrix elemeinek ismeretében az

$$a_{ij}^{(2)} = a_{i1}\cdot a_{1j} + a_{i2}\cdot a_{2j} + \ldots + a_{il}\cdot a_{lj} + \ldots + a_{in}\cdot a_{nj}$$

összefüggés szerint lehet kiszámítani. A fenti összeg egyes tagjai rendre azt mutatják meg, hogy milyen valószínűséggel fog a *t* időpontban az *i* állapotban tartozkodó elem a *t+1* időpontban átmenni az *l* állapotba, majd onnan a *t+2*-ben a *j* állapotba. Az összeg egyik tagja tehát azt mutatja meg hogyan lehet két időszak alatt, két lépésben eljutni az *i* állapotból a *j*-be valamelyik közbülső állapot közvetítésével. Nyilván ha az összes lehetséges közbülső állapotra ezeket a valószínűségeket összegezzük, akkor a közbülső állapotoktól teljesen független értéket kapunk, amely mindösszesen három paraméter jellemez:

- az induló állapot, jelen esetben *i*;
- a cél állapot, jelen esetben *j*;
- és az eléréséhez szükséges lépések száma, jelen esetben kettő.

Az $\mathbf{A}^2$ átmenetmátrix egyes elemei tehát a két periódus alatti átmenetek valószínűségeit mutatják meg, ezért e mátrixot *kétlépéses átmenetmátrixnak* nevezzük. Ezt a gondolatmenetet továbbvihetjük az átmenetmátrix tetszőleges hatványára és ennek megfelelően az $\mathbf{A}^t$ átmenetmátrixot az **A** mátrix által leírt Markov-lánc *t-lépéses átmenetmátrixának* hívjuk.

Az invariáns eloszlás

Mivel a Markov lánc modell a mozgásra, a változásra irányul, felmerül a kérdés, hogy van-e nyugvópontja a modell által leírt rendszernek, elérhető-e olyan állapot, amikor a kialakult eloszlás már nem változik tovább. Ezt az eloszlást invariáns vagy stacioner (néhány alkalmazásban ergodikus) eloszlásnak hívjuk. Jelölje p* az invariáns eloszlást, nyilván erre érvényes lesz (3/4) alkalmazásából, hogy

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*\mathbf{A}$$

amely mátrixegyenlet megoldásával megkaphatjuk a kérdéses eloszlásokat. Mivel egy n-ed rendű sztochasztikus mátrix rangja legfeljebb $n–1$, ezért a fenti egyenletnek létezik megoldása. Az igazi kérdés valójában az, mennyire lehet jellemzőnek tekinteni az invariáns eloszlást, a Markov lánc által leírt mozgás a rendszert az invariáns eloszlás(ok) felé viszi-e?

Ennek a kérdésnek a megválaszolása messze túlmutat jelenlegi keretünkön, csak megemlítjük, hogy a gyakorlati alkalmazásokban érdekes esetekben általában nagyon gyorsan kialakul az invariáns eloszlás. A módszerhez kapcsolódó további matematikai-statisztikai kérdések (pl. a stacionaritás tesztelésének) részletezése nélkül, végezetül egy példát mutatunk be.

3.4.4 Kistérségek jövedelemeloszlásának Markov-folyamattal történő modellezése

A vizsgálat során Magyarország 150 kistérségének egy főre jutó adóköteles jövedelmeinek differenciálódási folyamait fogjuk elemezni. A vizsgálatban az 1988-1998 évtized folyamataira koncentrálunk.

A vizsgálat célja a relatív jövedelmi pozíciók változásának feltárása, ezért a forintban kifejezett, folyóáras adatokat minden egyes évben elosztottuk a kistérségek adott évi átlagos egy állandó lakosra jutó jövedelmeivel, s így az egyes kistérségeket az átlagos jövedelem százalékában kifejezett jövedelmek jellemzik. Így a vizsgálat 11 évére a vizsgálat tárgyát képező 150 kistérség relatív jövedelmi pozícióját kifejező mutatót kaptunk, melynek időbeni változása képezi e vizsgálat tárgyát.

A számítások arra irányulnak, hogy meghatározzuk, mekkora valószínűséggel várható egy alacsony jövedelmű kistérség felzárkózása. A valószínűségek meghatározása előtt ezért elsősorban el kell különítenünk az „alacsony" illetve „magas" jövedelmű kistérségeket, azaz e kvalitatív jellemzőket kvantitatív értékekre kell átváltanunk. A kistérségek ilyen jövedelmi kategóriákba sorolása lehetővé teszi, hogy a rendelkezésre álló 10 éves időszak alatti mozgásokat megfigyeljük, s számszerűsítsük átmenetvalószínűségek formájában.

A jövedelmi kategóriák elhatárolására több megközelítés is létezik. A problémát alapvetően az jelenti, hogy a különböző „diszkretizálások" révén elvileg egymástól különböző eredmények és mobilitási értékek adódhatnak. Gyakori megoldás az állapottér diszkretizálására az azonos számú megfigyelés alapján történő választás. Ez azt jelenti, hogy oly módon alakítjuk ki az egyes jövedelmi kategóriákat, hogy azokba közel azonos számú kistérség essen a megfigyelési időszakban. Az eljárás mellett szól, hogy az így kialakuló kategóriák nem lesznek érzékenyek a szélsőséges elemszámok okozta mérési torzításokra, ugyanakkor hátránya, hogy nem szaktudományi megfontolásokra épül, s nem feltétlenül lehet tudományos alapokon magyarázatot adni az ily módon kialakuló határokra. A jelen alkalmazásban ezen dilemma nem merült fel annyira élesen, hogy az a módszer ellen szólna; az azonos megfigyelési egységek alapján elkülönített jövedelmi kategóriák nem képeztek olyan extrém értékeket, hogy azokat mindenképpen el kellene vetnünk. Öt jövedelmi kategória esetén az ezen elv alapján számított jövedelmi kategóriák és a kategóriába eső megfigyelési egységek számát mutatja a *3.3. táblázat.*

A kiszámított jövedelmi kategóriákat az alábbiak szerint írhatjuk le. A kistérségek közel 20%-ában az átlagos jövedelem mintegy felénél alacsonyabb értékeket vesz fel a jövedelemszint, ezen kistérségek tartoznak a legalacsonyabb jövedelmi kategóriába. Az átlagos jövedelem fele és háromnegyede közé eső jövedelmű kistérségeket soroltuk a második kategóriába, s ezek szintén közel az összes kistérség 20%-át teszik ki. Átlag alatti jövedelmű a kistérségek közel 60%-a, így a harmadik jövedelmi kategóriába az átlag háromnegyedénél nagyobb, de az átlagos jövedelemnél alacsonyabb jövedelmű kistérségek kerültek. Az átlagosnál magasabb jövedelemmel rendelkező kistérségek negyedik és ötödik kategóriába sorolásához az átlag 136%-nál húztuk meg a határt.

Jövedelmi kategória	Megfigyelések száma az 1 lépéses átmenetmátrix számítása során	Megfigyelések száma a 10 lépéses átmenetmátrix számítása során
– 0,49	296	30
0,49 – 0,76	302	33
0,76 – 1,02	300	28
1,02 – 1,36	304	31
1,36 –	298	28

3.3. táblázat *Az egyes jövedelmi kategóriák határai az átlagos jövedelemszint százalékában*

Az egy lépéses átmenetvalószínűségek mátrixa alapján a kistérségek jövedelmi mobilitása igen alacsonynak nevezhető, mindössze 9,5% annak a „valószínűsége”, hogy az adott jövedelmi pozícióból kimozdulnak egy év alatt (*3.4. táblázat*). Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy tíz kistérségből kilenc jövedelmi pozíciója várhatóan változatlan marad egyetlen év leforgása alatt. A mátrix főátlójában szereplő értékek 1-hez közeli magas értékei is mutatják, hogy viszonylag alacsony az elmozdulás az egyes kategóriákból.

A megfigyelt években nem volt arra példa, hogy valamelyik kistérség mindjárt két jövedelmi kategóriát is váltott volna, ezt az mutatja, hogy a főátló melletti cellákat leszámítva, a többi mező értéke zérus. Az általunk alkotott jövedelmi kategóriák esetében tehát viszonylagos stabilitást és kis mértékű elmozdulásokat tapasztalhattunk a szomszédos kategóriákba.

Az ilyen típusú mobilitásvizsgálatok gyakori eredménye, hogy a főátlóban szereplő értékek között az alacsony és magas jövedelmekhez tartozó valószínűségek magasabbak (0,98 és 0,96) szemben a középső jövedelmi kategóriákhoz tartozó 0,89 és 0,91-es értékekkel. Ez azt jelzi, hogy a megfigyelt mobilitás nagy része a közepes jövedelmi kategóriákban zajlott le: az alacsony és a magas jövedelmi kategóriák esetében nagyobb valószínűséggel figyelhetünk meg immobilitást. Ez arra utal, hogy a legalacsonyabb jövedelmű kistérségek felzárkózásának kisebb a valószínűsége, ahogy hasonlóképpen annak is, hogy a magasabb jövedelmű kistérségek visszaessenek.

A középső rétegek esetében megfigyelhető magasabb mobilitás irányulhat felfelé és lefelé egyaránt. A jelen esetben a két különböző irányba történő elmozdulás valószínűsége közel azonos. A későbbiekben erre a kérdésre még visszatérünk, itt csak utalni szeretnénk arra, hogy a közepes jövedelműeknél megfigyelt nagyobb mobilitás utalhat polarizációra: egy részük felzárkózik, más részük leszakad, amely az összes kistérség vonatkozásában a jövedelmi különbségek növekedését is előrevetítheti. Ennek pontos megítéléséhez azonban további számításokat kell végezni.

	1	2	3	4	5
1	0,98	0,02			
2	0,03	0,91	0,06		
3		0,06	0,89	0,05	
4			0,06	0,89	0,06
5				0,04	0,96

3.4. táblázat *Az egy lépéses átmenetvalószínűségek mátrixa, mobilitási mutató értéke = 9,5%*

A valószínűségek értékelése során azt is figyelembe kell venni, hogy az általunk képezett öt kategória igen széles jövedelmi sávot ölel fel, amely eleve előrevetíti az alacsony mobilitást. Ha például egy kistérség jövedelme egy adott évben az átlag 40%-át éri el, akkor ahhoz, hogy elérje a következő kategóriához szükséges 50%-ot az kell, hogy az adott kistérség jövedelmének növekedése 20%ponttal legyen magasabb, mint az átlag növekedése. Ez igen magas érték, és éppen az alacsonyabb jövedelmű kistérségek esetében lesz ennek a növekedésnek a valószínűsége alacsony. Ha a következő jövedelmi kategória határa nem 50%-nál, hanem pl. 42%-nál lenne, akkor az átlagot 5%ponttal meghaladó mértékű növekedés elégséges ahhoz, hogy a kistérség másik kategóriába kerüljön. Ez is mutatja, hogy a mobilitási mutató értékét fenntartással kell kezelnünk: annak értéke erősen függ attól, hogy hány jövedelmi kategóriát hozunk létre. A jövedelmi kategóriák számát növelve magasabb mobilitást találunk. A számításokat elvégeztük kilenc jövedelmi kategória esetében is, az eredményeket mutatja az *3.5 táblázat*.

Jövedelmi kategóriák	Megfigyelések száma		1	2	3	4	5	6	7	8	9
– 0,34	166	1	0,96	0,04							
0,34 – 0,53	164	2	0,04	0,92	0,04						
0,53 – 0,68	166	3		0,06	0,87	0,07					
0,68 – 0,81	168	4			0,11	0,82	0,07				
0,81 – 0,96	167	5				0,07	0,85	0,08			
0,96 – 1,13	166	6					0,10	0,83	0,07		
1,13 – 1,32	168	7						0,09	0,80	0,11	
1,32 – 1,67	165	8							0,12	0,86	0,02
1,67 –	170	9								0,03	0,97

3.5. táblázat *Az egy lépéses átmenetvalószínűségek mátrixa, mobilitási mutató értéke = 14,2%*

Kilenc jövedelmi kategória esetében a mobilitási mutató értéke 14,2%-ra emelkedik, ugyanakkor a korábban elmondottak továbbra is érvényesek. Továbbra sem jellemző, hogy egy kistérség egy év alatt két kategóriát ugorjon, amelyet leolvashatunk az átmeneti mátrixból oly módon, hogy a főátló melletti celláktól eltekintve, minden egyéb mező értéke zérus. A magasabbnak mért mobilitás továbbra is a középső jövedelmi kategóriákra jellemző inkább, a felfelé illetve lefelé történő elmozdulás valószínűsége nagyon hasonló, közel azonos.

A 10 év alatt várható változásokat az egy lépéses átmenetmátrix 10-ik hatványának számításával is, illetve az adatokból történő közvetlen becslés révén is megkaphatjuk. Az előbbi esetében továbbra is feltételezzük a stacioner átmenetmátrix létezését. A 10 év alatt végbement mozgások alapján számított mobilitás értéke nagyobb lesz, mint amit egy lépésben, egy év alatt várható változások számítása során tapasztalhattunk. Ezért önmagában az a tény, hogy a 10 lépéses átmenetmátrixot magasabb mobilitási mutató jellemzi, nem hordoz többletinformációt a tényleges folyamatokról.

	1	2	3	4	5
1	0,86	0,11	0,03		
2	0,19	0,47	0,26	0,07	0,01
3	0,05	0,25	0,43	0,21	0,07
4	0,01	0,07	0,22	0,41	0,29
5		0,01	0,06	0,23	0,71

3.6. táblázat *Az egy lépéses átmenetvalószínűségek mátrixának 10-ik hatványa, a mobilitási mutató értéke = 53,1%*

Meghatározó azonban az az információ, amit az egy lépéses mátrix 10-ik hatványával nyert 10 lépéses átmenetmátrix (amelyet a továbbiakban az egyszerűség kedvéért számított 10 lépéses mártixnak fogunk hívni) és a 10 év megfigyelt változásai alapján a relatív gyakoriságokból közvetlenül becsült 10 lépéses átmenetmátrix összevetésével nyerhetünk. A számított és becsült mátrixokból (*3.6. és 3.7. táblázatok*) számított mobilitási mutatók értéke között igen jelentős eltérés mutatkozik: a számított mátrix mobilitási mutatója 53,1% szemben a megfigyelt 37,1%-os mobilitási mutatóval. Az egy lépéses mátrix hatványozásával nyert mátrix tehát túlbecsüli a tényleges mobilitást. Ezt láthatjuk abból is, hogy a számított mátrix esetében mindössze három zérus értéket felvevő átmenetvalószínűséget látunk, míg a becsült mátrix esetében az egylépéseshez hasonló módon a főátlóval szomszédos elemeket leszámítva, a többi mező értéke mind zérus. Ugyanezt más oldalról megközelítve: a számított mátrix főátlójának elemei rendre kisebbek a becsült 10 lépéses átmenetmátrix főátlójának elemeinél.

A mobilitás ilyen típusú felülbecslése nem szokatlan, általában azzal magyarázható, hogy a vizsgált jelenség maga nem stacioner. A feltevés feloldása azonban további kutatásokat igényel. Jelen esetben utalhat arra, hogy az egy lépéses átmenetmátrix alapján több évre előre készített predikciónk a tényleges eloszlás torzított becslését adhatja.

	1	2	3	4	5
1	0,93	0,07			
2	0,18	0,64	0,18		
3		0,18	0,57	0,25	
4			0,23	0,52	0,26
5			0,04	0,11	0,86

3.7. táblázat *A 10 lépéses átmenetvalószínűségek mátrixa, a mobilitási mutató értéke = 37,1%*

Az átmenetmátrix segítéségével készíthetünk előrejelzést a 10 év múlva várható eloszlásról oly módon, hogy az 1998. évre jellemző eloszlás és az átmenetmátrix szorzataként előálló eloszlás lesz a 2008-ra várható jövedelemeloszlás (*3.8. táblázat*). Az átmenetmátrix vizsgálatánál korábban láttuk, hogy az elsősorban a középső jövedelmi értékek esetében jelez előre mobilitást, s ennek konkrét megvalósulását olvashatjuk le a. A jövőben várható eloszlás ugyanis arra utal, hogy a jelenben végbemenő folyamatok elsősorban polarizációra utalnak: a legmagasabb és legalacsonyabb jövedelmi kategóriákban lévő megfigyelések aránya növekedhet. Érdekes, hogy a harmadik jövedelmi kategória esetében, melyben az átlag körüli kistérségek szerepelnek, a várható részarány megmaradt 20%-on. Az alacsony és legmagasabb jövedelmi kategóriák arányának növekedése tehát elsősorban a szomszédos jövedelmi kategóriákban végbement változás hatását nyeli el: a legalacsonyabb jövedelmi kategóriának a növekedése a második kategóriából leszakadó, míg a legmagasabb jövedelmi kategóriának a növekedése a negyedik kategóriából felzárkózó kistérségek révén alakulhat ki.

Ez természetesen nem azt jelenti, hogy ne lehetnének a legalacsonyabb kategóriából felzárkózó, illetve a legmagasabb kategóriából visszaeső kistérségek, ezeknek a valószínűségét az átmenetmátrix első és ötödik sorának főátlótól különböző értékei mutatják. Az egyes egyedi utak lehetnek a fenti sémától eltérőek is, globálisan azonban a fent leírt folyamat lehet a jellemző, mely a sok kistérség egyedi pályájának összegzésével kialakuló képet mutatja. Az *3.7. táblázatban* található átmenetmátrix mutatja, hogy 7% a valószínűsége annak, hogy a legalacsonyabb jövedelmi kategóriából induló kistérség felzárkózzon a következő jövedelmi kategóriába, s 18% annak a valószínűsége, hogy a második jövedelmi kategóriában található kistérség a legalacsonyabb jövedelműek közé visszaessen. Így tehát nagy valószínűséggel mindkét esetre találhatunk majd példát, a folyamatok azonban nagy valószínűséggel arra mutatnak, hogy a második jövedelmi kategóriában található kistérségek száma csökkenhet a legalacsonyabb jövedelmi kategória javára (ezt itt természetesen a további erős leszakadás jele).

	1998-ik évi eloszlás	2008-ra várható eloszlás
1	0,23	0,25
2	0,19	0,16
3	0,20	0,20
4	0,17	0,15
5	0,21	0,24

3.8. táblázat *A 10 lépéses átmenetmátrix alapján várható eloszlás*[7]

A relatív jövedelmi pozíciók alapján felírt átmenetmátrix a jövedelmi mobilitiás 1988-1998 között megfigyelt folyamatait próbálja meg számszerűsíteni. A mátrix segítségével adott előrejelzés a megfigyelt és eddig lezajlott folyamat folytatódása esetén kirajzoló eloszlás egy becslését adja. A módszer nem alkalmas tehát fordulópontok, várható strukturális változások „jóslására”, hacsak ezek csírája nincsen már elrejtve a vizsgálati évek adataiban. A módszer további korlátját jelenti, hogy nem tartalmaz „magyarázó változókat”, vagyis nem tudja integrálni a változó gazdasági környezet, jogi szabályozás, földrajzi elhelyezkedés stb. tényezőket. A metodika ebben a formában azonban nem is célozza meg ilyen típusú kérdések vizsgálatát. Amire azonban választ adhat, a lezajlott 10 éves fejlődés főbb jellemzőinek meghatározása s ennek további folytatódása esetén várhatóan kirajzolódó jövedelemeloszlás prognosztizálása.

[7] A becslést a metodikai problémák miatt fenntartásokkal kell kezelni, pontosabb becslést a stacionaritás feloldása és Monte Carlo-módszerek alkalmazásával lehet megadni.