

Pere Balázs

Variációs elvek és módszerek  
a fizikában

Győr, 1998



# Tartalomjegyzék

Előszó	5
<b>1. Variációszámítás</b>	<b>7</b>
1.1. A brachisztochron-probléma . . . . .	7
1.2. A legegyszerűbb variációs probléma . . . . .	9
1.3. Euler módszere . . . . .	10
1.4. Lagrange módszere . . . . .	12
1.5. Hiányos Lagrange-függvények . . . . .	14
1.6. A brachisztochron-probléma megoldása . . . . .	17
1.7. Magasabb rendű deriváltakat tartalmazó Lagrange-függvények	19
1.8. Több ismeretlen függvényt tartalmazó Lagrange-függvények .	22
1.9. Több független változót tartalmazó Lagrange-függvények . . .	24
1.10. Variációs problémák mellékfeltételekkel . . . . .	26
<b>2. A fizika variációs elvei</b>	<b>37</b>
2.1. A Fermat-elv . . . . .	37
2.2. A Hamilton-elv . . . . .	40
<b>3. Variációs módszerek</b>	<b>48</b>
3.1. A Ritz-módszer . . . . .	48
3.2. A Luttinger-Thomas-féle variációs módszer . . . . .	49
3.3. Transzmissziós koefficiens . . . . .	54



## Előszó

A variációszámítás a matematikának az az ága, amely végtelen sok változótól függő függvények — úgynevezett funkcionálok — szélsőértékének meghatározásával foglalkozik. A variációszámításnak a fizika szempontjából az ad különös jelentőséget, hogy a természet szinte valamennyi alapvető törvénye megfogalmazható valamilyen — általában egy függvényről, tehát végtelen sok ismeretlentől függő — mennyiség szélsőértékéeként. A természettörvények ilyen alakú megfogalmazását variációs elvnek nevezzük. Kevés olyan fundamentális elv létezik, amelynek eleganciája annyira megkapó lenne s emellett olyan hatásosan tudna uralkodni a különböző fizikai diszciplínák központi területein, mint a variációs elvek családja. A szép matematikai felépítés mély fizikai tartalommal párosul, s ez a formalizmust könnyen kiterjeszthetővé teszi a fizika szerteágazó területeire. Az első variációs elv a geometriai optikához kapcsolódott, majd ezt követte a mechanika variációs elve. Az előbbi Fermat, az utóbbi Maupertuis, Euler és Lagrange nevéhez fűződik. E két variációs elvet Hamilton vetette össze és a XIX. század harmincas éveiben mutatta ki az optikai-mechanikai analógiát. A fény hullámtermészetének megértése az analógia továbbfejlesztését, a hullámmechanika kidolgozását sugallta. Majdnem száz évet kellett várni, hogy de Broglie és Schrödinger ezt az analógiát újraértelmezze. A megmaradási törvények és a mozgásegyenletek variációs megfogalmazásának kapcsolata nemcsak a tér és idő geometriai szimmetriájára irányította rá a figyelmet, hanem olyan általános módszert adott a fizikusok kezébe, amely a modern részecskefizika fontos eszköze lett. Meg kell még említenünk az úgynevezett variációs-módszereket is, melyek segítségével variációs problémák közelítő megoldásait számíthatjuk ki. (A második világháború alatt Amerikában az atombomba készítésénél gondot jelentett az urán tárolása: egy kb.  $1\text{kg}$ -os darab már „magától” felrobbant volna. Richard P. Feynman variációs módszerek segítségével határozta meg két kisebb tömegű urándarab közti lehető legkisebb távolságot.)

A könyv első részében egy példán keresztül rövid összefoglalót adok a variációszámítás matematikai alapjairól. A második részben a fizika variációs elvei közül a Fermat-elvet és a Hamilton-elvet mutatom be. A harmadik részben három variációs módszert ismertetek, a Ritz-módszert, a Luttinger-Thomas-módszert és egy kvantummechanikában használható módszert a transzmissziós koefficiens kiszámítására. Ezek a módszerek hatékonyságuk ellenére kevésbé ismertek, mint a fizikában használatos egyéb közelítő

módszerek, mint például a perturbációs számítás. A Ritz-módszer segítségével variációs problémák megoldására adhatunk nagyon jó becsléseket (tetszőleges pontossággal). A Luttinger-Thomas-módszerrel, mely a Ritz-módszeren alapul, periódikus mozgást végző mechanikai rendszerek periódusidejét és energiáját határozhatjuk meg. A transzmissziós koefficiens meghatározására szolgáló eljárás egy kicsit különbözik az előzőektől. Míg azokban egy már meglévő variációs elvet módosítottunk, itt egy teljesen új variációs módszert dolgozunk ki.

A variációs számítással kapcsolatban érdekes dolgok olvashatók még a fizika 1977 című kötetben.

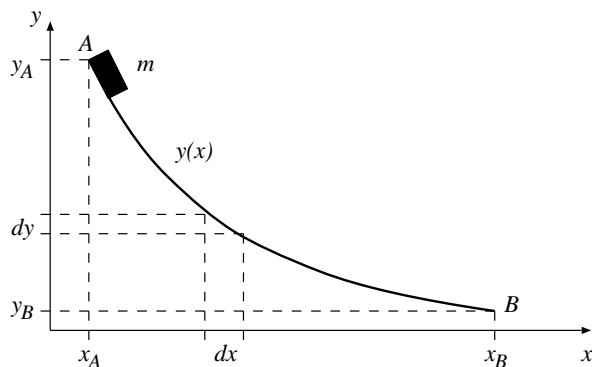
Pere Balázs

# 1. Variációszámítás

## 1.1. A brachisztochron-probléma

*Johann Bernoulli* (1667-1748) svájci matematikus 1696-ban vetette fel híres feladatát, a brachisztochron-problémát ( $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\zeta$  – legrövidebb,  $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\zeta$  – idő). Ennek a feladatnak igen nagy jelentősége volt a variációszámítás kifejlődésében<sup>1</sup>. Hatására sorra vetődtek fel a hasonló problémák és megoldásaik. Az egyes problémák rokonságot mutattak egymással, ezzel lehetőséget teremtettek a rendszerbe foglalásukra, és az így kialakult feladattípusok egységes tárgyalására. Ez elsősorban *Leonhard Euler* (1707-1783) és *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) nevéhez fűződik. Mivel a brachisztochron-probléma volt az első ilyen jellegű feladat, és egyben a legegyszerűbb problémátípusba tartozik, mi is ennek tárgyalásával kezdjük a variációszámítás bemutatását.

A feladat a következő: egy függőleges síkon vegyünk fel két pontot,  $A$ -t és  $B$ -t. Lehetőleg ne ugyanazon a függőleges egyenesen helyezkedjenek el. Milyen alakú az a pálya, amelyen a gravitációs mező hatására súrlódás nélkül csúszva egy test kezdősebesség nélkül a legrövidebb idő alatt jut el  $A$ -ból a  $B$ -be? (Ezzel feltételeztük, hogy az  $A$  pont magasabban helyezkedik el, mint a  $B$ ). Fogalmazzuk meg a feladatot a matematika segítségével is! Ehhez



1. ábra.

először is ki kell jelölnünk egy koordináta rendszert, amelyben a számításokat

<sup>1</sup>Már az ókori görögök is oldottak meg a mai értelemben variációszámítás témakörébe tartozó feladatokat.

elvégezzük. Ez legyen az  $A$  és  $B$  pontokat tartalmazó függőleges síkban,  $x$  tengelye legyen vízszintes,  $y$  tengelye pedig függőleges (1. ábra). A test a csúszás közben  $dt$  idő alatt  $ds$  utat tesz meg, miközben sebessége  $v$  nagyságú. A sebesség definíciójából tudjuk, hogy

$$dt = \frac{ds}{v}.$$

A pálya összes kis  $ds$  szakaszára felírva a fenti összefüggést, és ezeket összegezve megkapjuk az  $A$ -ból  $B$ -be érkezés idejét, a  $T$ -t.

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (1)$$

A  $ds$  szakasz hossza  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Emeljünk ki a gyökjel alól  $dx$ -et! Ezzel

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2)$$

adódik. A sebesség koordinátáfüggésének a megállapításához az energiamegmaradást kell segítségül hívnunk. A test összes energiája az  $A$  pontban  $E_A$ , ami csak a helyzeti energiával lesz egyenlő (a kezdősebesség nulla).

$$E_A = mgy_A$$

Az  $m$  a test tömege,  $g$  pedig a gravitációs gyorsulás. Egy tetszőleges,  $A$  és  $B$  közötti  $P$  pontban a test összes energiája a helyzeti és mozgási energia összege. Jelöljük ezt  $E_P$ -vel.

$$E_P = mgy + \frac{1}{2}mv^2$$

Tudjuk, hogy a test összes energiája a mozgás folyamán állandó, amit az  $E_A = E_P$ -vel fejezhetünk ki. E szerint

$$mgy_A = mgy + \frac{1}{2}mv^2$$

teljesül. A  $v$ -t kifejezve kapjuk a következő összefüggést:

$$v = \sqrt{2g(y_A - y)} \quad (3)$$



Helyettesítsük be (2)-t és (3)-t az (1) képletbe.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_A-y}} dx \quad (4)$$

Ha tehát (4) képletben  $y$  helyébe egy tetszőleges pálya alakját írjuk be, megkapjuk a pálya befutásához szükséges időt. Egy bizonyos pályánál, azaz  $y(x)$  függvénynél  $T$  értéke a többi pálya  $T$ -jéhez viszonyítva minimális lesz. Tehát a feladatunk az, hogy keressük meg a legkisebb  $T$ -hez tartozó  $y(x)$  függvényt. A megoldáshoz Euler és Lagrange két különböző úton jutott el. Az 1.3 és 1.4 pontokban bemutatjuk mind a két módszert.

## 1.2. A legegyszerűbb variációs probléma

Előtte azonban tisztáznunk kell néhány fogalmat. Szeretnénk meghatározni a (4) kifejezés szélsőértékét. A differenciálszámítással olyan kifejezések szélső értékét tudjuk meghatározni, amelyek véges sok változótól függenek. A (4) azonban nem ilyen, hanem „egy függvény függvénye”. A függvény függvényén — *funkcionálon* — olyan mennyiséget értünk, amely egy vagy több „változófüggvény”-nek az egész „alaptartományon” való viselkedésétől függ. A funkcionálok mindig a valós számok halmazára képeznek le. A változófüggvényt vagy függvényeket egy bizonyos pontosan kijelölt függvényosztályból választhatjuk, hasonlóan mint ahogy a közönséges függvények változója vagy változói is egy megengedett ponthalmazon változhatnak. A következőkben leszűkítjük az általunk vizsgált funkcionálok halmazát az integrál alakú funkcionálokra. Az integrálást a kijelölt alaptartományra terjesztjük ki, az integrandus pedig függvénye a változófüggvénynek, ezek bizonyos parciális deriváltjainak és a változófüggvények független változóinak. A közönséges függvényeknél azt keressük, hogy a függvény egy értékének melyik változó érték felel meg. A funkcionáloknál hasonló a helyzet, a funkcionál egy bizonyos értékéhez (általában a szélsőértékéhez) tartozó függvényt próbáljuk meghatározni. Az integrál alakú funkcionáloknál az integrandust *Lagrange-függvénynek* nevezzük. A megoldás során csak olyan változófüggvények jöhetnek szóba, amelyek az integrálás határain előre meghatározott értéket vesznek fel. A legegyszerűbb variációs problémán azt értjük, amikor csak egy függvényt keresünk, amely egyváltozós, és a Lagrange-függvényben a változófüggvényen és független változóján kívül csak az elsőrendű deriváltja

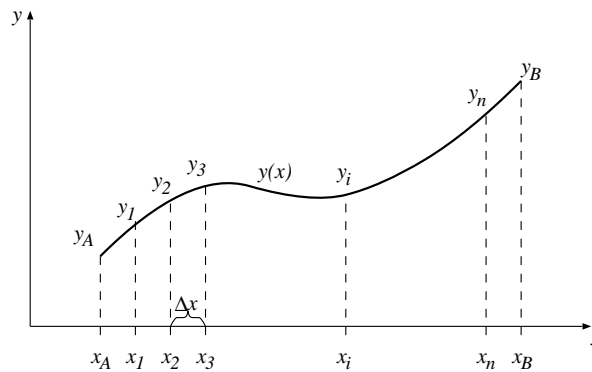
szerepel, továbbá adottak a következő peremfeltételek:  $y(x_A) = y_A$  és  $y(x_B) = y_B$ . A funkcionálokat mindig nagy betűvel jelöljük, változóját pedig, hogy megkülönböztessük a közönséges függvényektől, szögletes zárójelbe írjuk.

$$I[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} L(y(x), y'(x), x) dx \quad (5)$$

Az előző pontban említett feladatban keressük a (4) funkcionál minimális értékéhez tartozó  $y(x)$  függvényt. A variációszámítás témakörébe tartozó legtöbb feladat hasonló jellegű: keressük az adott funkcionál szélső értékéhez, vagy extrémumához tartozó *extremális függvényt*. A megoldást először Euler találta meg.

### 1.3. Euler módszere

A módszer lényege, hogy az  $y(x)$  függvényt véges sok pontjában felvett értékével közelítjük. Ezzel a funkcionál szélsőérték problémáját egy véges sok változótól függő mennyiség extrémumának meghatározására vezetjük vissza. Ezek után a differenciálszámítás hagyományos módszereivel meghatározzuk a szélső érték létezésének szükséges feltételét, majd az  $x$  független változó felosztását minden határon túl finomítva megkapjuk a variációs probléma megoldását. Osszuk fel az  $x_A \leq x \leq x_B$  intervallumot  $n + 1$  egyenlő részre (2. ábra)! Egy kis szakasz hossza  $\Delta x$ .



2. ábra.

$$\Delta x = \frac{x_B - x_A}{n + 1}$$

Jelöljük az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pontokhoz tartozó függvényértékeket  $y_1, y_2, \dots, y_n$ -nel, vagy másképpen  $y(x_i) = y_i$ -vel, ahol  $i = 1, 2, \dots, n$ . Az  $x_0 = x_A$  és  $x_{n+1} = x_B$ -hez tartozó értékek,  $y_A$  és  $y_B$ , a feladat kitűzésekor megadott számok. A függvény deriváltját egy differencia hányadossal, az integrált pedig egy összeggel közelítve az (5) funkcionálra az

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n+1} L(y_i, \underbrace{\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}}_{y'_i}, x_i) \Delta x \quad (6)$$

közelítő kifejezést kapjuk. Ezen függvény szélsőértékének létezéséhez szükséges feltétel az, hogy az összes parciális deriváltja eltűnjön.

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = \frac{\partial L(y_i, y'_i, x_i)}{\partial y_i} \Delta x + \left[ \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial L(y_i, y'_i, x_i)}{\partial y'_i} - \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial L(y_{i+1}, y'_{i+1}, x_{i+1})}{\partial y'_{i+1}} \right] \Delta x$$

Most tartsunk  $\Delta x$ -szel a nullához. Ekkor a

$$\left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx = 0$$

egyenletet kapjuk. Mivel  $dx$  értéke infinitezimálisan kicsiny, de nem nulla, a zárójelben lévő tagnak kell nullával egyenlőnek lennie.

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \quad (7)$$

Ez az egyenlet az  $y(x)$ -re nézve egy közönséges másodrendű differenciálegyenlet, hiszen a

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial x}$$

deriváltban szerepel az  $y(x)$  második deriváltja is. A (7) egyenlet neve *Euler-Lagrange-egyenlet*. Ennek megoldása megadja azt az  $y(x)$  függvényt, amely extremálissá teszi (5)-t.

### 1.4. Lagrange módszere

Euler gondolatmenete a benne szereplő közelítések pontosságának és a határátmenet jogosságának vizsgálata nélkül nem tekinthető szigorú matematikai levezetésnek. Euler sem érezte elég hatékonynak a módszerét, általánosabb variációs feladatoknál a (6) összeg áttekinthetlenné válik. Lagrange egy más úton, az úgynevezett *variációk módszerének* alkalmazásával is belátta, hogy a (5) funkcionál extrémális voltának szükséges feltétele a (7) differenciálegyenlet teljesülése. A módszer lényege a következő: tegyük fel, hogy az  $\bar{y}(x)$  eleget tesz az  $\bar{y}(x_A) = y_A$  és  $\bar{y}(x_B) = y_B$  feltételeknek, továbbá extrémálissá teszi a (5) funkcionált. Vegyünk egy olyan folytonos  $\eta(x)$  függvényt, amely az integrálás határain eltűnik, máshol pedig tetszőleges alakú, továbbá legyen  $\varepsilon$  egy tetszőleges valós szám! Ekkor az

$$y(x) = \bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x) \quad (8)$$

pontosan az  $\varepsilon = 0$  esetén lesz a keresett függvény. Írjuk be (8)-t a (5) funkcionálba!

$$I[\bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x)] = \int_{x_A}^{x_B} L(\bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x), \bar{y}'(x) + \varepsilon\eta'(x), x) dx$$

Ezzel a variációs problémát visszavezettük egy egyváltozós függvény szélsőérték vizsgálatára. Az  $\varepsilon = 0$  esetén a funkcionálnak szélső értéke lesz. Ez azt jelenti, hogy az  $I$   $\varepsilon$  szerinti első deriváltja az  $\varepsilon = 0$  helyen eltűnik.

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_{\varepsilon=0} \eta(x) + \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)_{\varepsilon=0} \eta'(x) \right] dx = 0$$

azaz

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (9)$$

Integráljuk parciálisan a (9) jobb oldalának második tagját!

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}'} \eta'(x) dx = \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}'} \eta(x) \right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}'} \eta(x) dx \quad (10)$$

A szögletes zárójelben lévő kiintegrált rész eltűnik, mivel  $\eta(x)$  olyan, hogy  $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$ . Így (9)

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}'} \right] \eta(x) dx = 0$$

alakú lesz. Mivel  $\eta(x)$  értéke az integrálási határok között tetszőleges lehet, csak úgy kapunk  $\frac{dI}{d\varepsilon}$ -ra nullát, ha a szögletes zárójelben lévő kifejezés mindenütt azonosan nulla. Hagyjuk el a felülvonásokat!

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Ez az  $y(x)$  extrémális függvényre egy differenciálegyenlet. Ugyanezt a differenciálegyenletet kapta Euler is.

Lagrange a számításokat nem a fent vázolt szabatos formában végezte el. A fenti számolás pontosan rávilágít a dolog lényegére, de azért ismerkedjünk meg az eredeti Lagrange által használt jelölésekkel is. Lagrange egy mennyiség kis megváltozását  $\delta$ -val jelölte. Ha az  $y(x)$  extrémális függvényt megváltoztatjuk, vagy *variáljuk*  $\delta y(x)$ -szel, az  $I$  is meg fog változni, mégpedig  $I + \delta I$ -re.

$$I + \delta I = \int_{x_A}^{x_B} L(y + \delta y, y' + \delta y', x) dx$$

Fejtsük hatványsorba a fenti kifejezés jobb oldalát az elsőrendű tagokig bezárólag az  $y$  körül (a szélsőérték létezésének vizsgálatához elég csak az elsőrendű deriváltakat vizsgálnunk).

$$\begin{aligned} I + \delta I &= \int_{x_A}^{x_B} L(y, y', x) dx + \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right] dx = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} L(y, y', x) dx + \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right] dx = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} L(y, y', x) dx + \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right] \delta y dx \end{aligned}$$

Akkor van  $I$ -nek szélsőértéke, ha az  $I + \delta I - I$  különbség, az  $I$  variációja nulla.

$$I + \delta I - I = \delta I = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right] \delta y \, dx = 0$$

Mivel  $\delta y$  nagyobb nullánál, a szögletes zárójelben lévő tagnak kell nullának lennie. Ugyan ezt megkaphatjuk, ha az előző levezetésnél bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\delta I = \left( \frac{dI}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} d\varepsilon \quad \text{és} \quad \delta y = \left( \frac{dy}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} d\varepsilon$$

A variációszámítást használó tudományterületeken általában a Lagrange által bevezetett jelöléseket használják.

A Lagrange módszert három szempontból is lehet általánosítani.

- Míg a Lagrange módszernél a variálandó görbét eleve extrémálisnak gondoltuk, ettől az előzetes feltételezéstől eltekinthetünk.
- Hasonlóképpen eltekinthetünk attól a korábbi kikötéstől is, hogy a megoldás-görbét egy — az  $\varepsilon$  paramétertől lineárisan függő — görbeseregbe ágyazzuk be. Legyen a görbesereg paramétertől való függősége tetszőleges!
- Végül eddig olyan görbéket képeztünk le egymásra, amelyeknél mindig csak az azonos abszcisszájú pontok voltak egymásnak megfelelően:  $y(x) = \bar{y}(x) + \varepsilon \eta(x)$ . Engedjünk meg tetszőleges leképezési törvényt!

A felsorolt módosítások a variáció legáltalánosabb formájához vezetnek. Ettől a tárgyalástól azonban itt eltekinthetünk, mivel az így kapható új információkat<sup>2</sup> az  $I[y(x)]$  funkcionál variációjáról nem fogjuk felhasználni.

## 1.5. Hiányos Lagrange-függvények

Előfordulhat, hogy egy konkrét feladatnál a Lagrange-függvény nem tartalmazza az egyik változót. Tekintsük először azt az esetet, amikor a

<sup>2</sup>Ilyen lenne például az egymáshoz kanonikusan konjugált változók megkeresése. Ennek nagy jelentősége van a kvantummechanikában.

Lagrange-függvény csak  $y'(x)$  és  $x$ -től függ. Az Euler-Lagrange-egyenlet természetesen ebben az esetben is teljesül.

$$\underbrace{\frac{\partial L(y', x)}{\partial y}}_0 - \frac{d}{dx} \frac{\partial L(y', x)}{\partial y'} = 0$$

Mivel a megmaradt tag egy  $x$  szerinti teljes derivált, tudjuk integrálni az egyenletet.

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = c \quad (11)$$

ahol a  $c$  egy tetszőleges konstans. A (11) már csak elsőrendű differenciálegyenlet, hiszen az  $L$  nem tartalmaz magasabb rendű deriváltakat. Ennek megoldása egyenértékű az Euler-Lagrange-egyenlet megoldásával.

Most térjünk át arra az esetre, amikor a Lagrange-függvény az  $y(x)$  és  $y'(x)$ -től függ, és benne az  $x$  expliciten nem fordul elő. Az Euler-Lagrange-egyenlet most is érvényes.

$$\frac{\partial L(y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L(y, y')}{\partial y'} = 0$$

Fejtsük ki az  $x$  szerinti deriváltat!

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y} y' - \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial x}}_0 = 0$$

Mint az első esetben, most is arra kellene törekednünk, hogy az egyenlet bal oldalát kifejezzük egy mennyiség  $x$  szerinti teljes deriváltjaként. Így egy integrálást el tudnánk végezni, és már csak egy elsőrendű differenciálegyenletet kellene megoldanunk. Szorozzuk be az egyenletet  $y'$ -vel!

$$\frac{\partial L}{\partial y} y' - \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} y'' y' - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y} y'^2 = 0$$

Az első tag az  $\frac{\partial L}{\partial y'} y''$ -vel együtt pont a Lagrange-függvény  $x$  szerinti teljes deriváltja lenne. Adjunk hozzá az egyenlethez  $\frac{\partial L}{\partial y'} y'' - \frac{\partial L}{\partial y'} y''$ -t, ami éppen nulla, azaz nem változtat meg semmit.

$$\frac{\partial L}{\partial y'} y'' + \frac{\partial L}{\partial y} y' - \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} y'' y' - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y} y'^2 - \frac{\partial L}{\partial y'} y'' = 0$$

Alakítsuk át ezt a következő módon:

$$\frac{dL}{dx} - \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) y' - \frac{\partial L}{\partial y''} y'' = 0$$

Innen már látszik az eredmény, hiszen ha az utolsó két tag egy szorzat deriváltja, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dx} \left( L - \frac{\partial L}{\partial y'} y' \right) = 0$$

Egy integrálással kapjuk a keresett összefüggést:

$$L - \frac{\partial L}{\partial y'} y' = c \quad (12)$$

ahol  $c$  egy tetszőleges konstans.

A (12) kiszámítására egy másik, talán egyszerűbb mód a következő. Alakítsuk át az (5) funkcionált úgy, hogy benne az  $x$ -ről az  $y$  szerinti integrálásra térünk át.

$$I = \int_{x_A}^{x_B} L(y(x), y'(x)) dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx(y)}{dy} L \left( y, \frac{1}{\frac{dx(y)}{dy}} \right) dy$$

Jelöljük az új Lagrange-függvényt  $L^*$ -gal.

$$L^* = x' L \left( y, \frac{1}{x'} \right)$$

ahol  $x' = \frac{dx(y)}{dy}$ . Ez olyan típusú hiányos Lagrange-függvény, amit elsőként vizsgáltunk meg, csak az  $x$  és  $y$  szerepet cseréltek. Az ehhez tartozó extrémális  $x(y)$  függvényt a következő képpen határozhatjuk meg:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x'} = c$$

ahol  $c$  egy tetszőleges konstans. Ezt kifejtve:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x'} = L \left( y, \frac{1}{x'} \right) - \frac{1}{x'} \frac{\partial L \left( y, \frac{1}{x'} \right)}{\partial \left( \frac{1}{x'} \right)} = L(y, y') - y' \frac{\partial L(y, y')}{\partial y'} = c$$



ami a keresett (12) összefüggés.

Meg kell még említenünk azt az esetet, amikor a Lagrange-függvény lineárisan függ  $y'$ -től, azaz

$$L(y, y', x) = M(y, x) + y'N(y, x) \quad (13)$$

ahol  $M$  és  $N$  az  $y$  és  $x$  tetszőleges függvényei. Ezt beírva az Euler-Lagrange-egyenletbe egy megszorítást kapunk  $M$ -re és  $N$ -re.

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

azaz a  $\vec{v} = (M, N)$  vektormező rotációmentes. Írjuk be (13)-at a (5) funkcionálba.

$$I[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} \left[ M(y, x) + \frac{dy}{dx} N(y, x) \right] dx = \int_{x_A}^{x_B} (M dx + N dy)$$

ami  $\vec{v} = (M, N)$  rotációmentessége miatt nem függ az  $y(x)$ -től, csak a végpontoktól<sup>3</sup>. Ezzel a variációs feladat értelmét veszítette.

## 1.6. A brachisztochron-probléma megoldása

Ezek után már nincs semmi akadály, hogy megoldjuk a brachisztochron-problémát. A Lagrange-függvényt leolvashatjuk a (4) funkcionálból.

$$L = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_A - y}} \quad (14)$$

(Az  $\frac{1}{\sqrt{2g}}$  konstans szorzó nem játszik szerepet az Euler-Lagrange-egyenlet felírásánál.) A (14)-es Lagrange-függvény hiányos, nem szerepel benne az  $x$  független változó, ezért a (12) képletet alkalmazhatjuk.

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{(1 + y'^2)(y_A - y)}} = c_1$$

<sup>3</sup>Ha egy vektormező rotációmentes, akkor előáll egy skalármező gradienseként. Továbbá  $\int_s \text{grad } \Phi \, d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_B) - \Phi(\vec{r}_A)$ , ahol az integrálást az  $\vec{r}_A$ -t  $\vec{r}_B$ -vel összekötő  $s$  görbe mentén végezzük el.

Ez a differenciálegyenlet elsőrendű és szétválasztható változójú, ezért egy egyszerű integrálással megoldható. Válasszuk szét a változókat!

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1-(y_A-y)c_1^2}{(y_A-y)c_1^2}}}$$

Helyettesítsük  $(y_A - y)c_1^2$ -t  $\cos^2 \frac{\varphi}{2}$ -vel.

$$(y_A - y)c_1^2 = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{c_1^2} + y_A$$

$$dy = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}}{c_1^2} d\varphi$$

Az integrálás az új változóval a következő lesz:

$$\int dx = \frac{1}{c_1^2} \int \cos^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

Ennek eredménye pedig az

$$x = \frac{1}{2c_1^2}(\varphi + \sin \varphi) + c_2$$

függvény. Továbbá az  $y$  átalakításából

$$y = -\frac{1}{2c_1^2}(1 + \cos \varphi) + y_A$$

adódik. Jelöljük az  $\frac{1}{2c_1^2}$ -et  $R$ -rel. Ezzel meg is kaptuk a két tetszőleges konstanstól,  $R$ -tól és  $c_2$ -től függő megoldást paraméteres alakban. A paraméter a  $\varphi$ .

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\varphi + \sin \varphi) + c_2 \\ y &= -R(1 + \cos \varphi) + y_A \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Ez egy ciklois egyenlete. Tehát a lejtő, amelyen a test súrlódás nélkül a legrövidebb időn belül ér  $A$ -ból  $B$ -be, ciklois alakú.

\* \* \*

Megjegyezzük, hogy a variációs számításban adódhat olyan feladat is, amely megfogalmazása teljesen értelmetlennek tűnik, ennek ellenére mégsem oldható meg. Erre egy egyszerű geometriai példa a következő. Az  $x$ -tengely két pontját olyan folytonos görbületű, minimális hosszúságú vonallal kell összekötni, amely végpontjaiban merőleges az  $x$ -tengelyre. Ezért a variációs számításban egy adott szélsőértékprobléma megoldásának a létezése mindig külön bizonyítást igényel.

## 1.7. Magasabb rendű deriváltakat tartalmazó Lagrange-függvények

Könnyen előfordulhat, hogy egy feladat megoldása során azt tapasztaljuk, a Lagrange-függvény tartalmaz magasabb rendű deriváltakat is.

$$I[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} L(y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), x) dx \quad (16)$$

A gondolatmenet az extrémális függvény megtalálására most is hasonló lesz, mint a csak elsőrendű deriváltakat tartalmazó esetben. Tegyük fel, hogy  $\bar{y}(x)$  az extrémális függvény,  $\varepsilon$  egy tetszőleges valós szám,  $\eta(x)$  egy folytonos függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

$$\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0 \quad \eta'(x_A) = \eta'(x_B) = 0 \quad \dots \quad \eta^{(n-1)}(x_A) = \eta^{(n-1)}(x_B) = 0$$

továbbá az  $\bar{y}(x)$  eleget tesz a következő peremfeltételeknek:

$$\bar{y}(x_A) = y_A \quad \text{és} \quad \bar{y}(x_B) = y_B$$

Vizsgáljuk meg az

$$\begin{aligned} y(x) &= \bar{y}(x) + \varepsilon \eta(x) \\ y'(x) &= \bar{y}'(x) + \varepsilon \eta'(x) \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= \bar{y}^{(n)}(x) + \varepsilon \eta^{(n)}(x) \end{aligned}$$

függvények segítségével a (16) funkcionált! Képezzük a funkcionál  $\varepsilon$  szerinti deriváltját az  $\varepsilon = 0$  helyen:

$$\left( \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial y} \right)_{\varepsilon=0} \eta(x) + \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right)_{\varepsilon=0} \eta'(x) + \dots + \left( \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \right)_{\varepsilon=0} \eta^{(n)}(x) \right] dx = 0$$

A jobb oldal második tagját alakítsuk át úgy, mint ahogy azt tettük a (10) képletben, a harmadik tagot pedig a következő módon:

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}''} \eta''(x) dx &= \underbrace{\left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}''} \eta'(x) \right]_{x_A}^{x_B}}_0 - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}''} \eta'(x) dx = \\ &= - \underbrace{\left[ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}''} \eta(x) \right]_{x_A}^{x_B}}_0 + \int_{x_A}^{x_B} \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}''} \eta(x) dx \end{aligned}$$

A többi tagot is ennek mintájára addig integráljuk parciálisan, míg az  $\eta^{(i)}(x)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) helyett az  $\eta(x)$  szorzó nem szerepel bennük. Az így kapott tagokat írjuk vissza a funkcionál deriváltjába!

$$\left( \frac{dI}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}^{(n)}} \right] \eta(x) dx = 0$$

A funkcionál deriváltja akkor tűnik el, ha a szögletes zárójelben lévő tag azonosan nulla. (Ebben a tagban már csak az extrémális  $\bar{y}(x)$  szerepel) Az így kapható általánosított Euler-Lagrange-egyenlet megoldása adja meg az extrémális függvényt. Ez a differenciálegyenlet  $2n$  rendű lesz, és elhagyva a felülvonást a következő képpen néz ki:

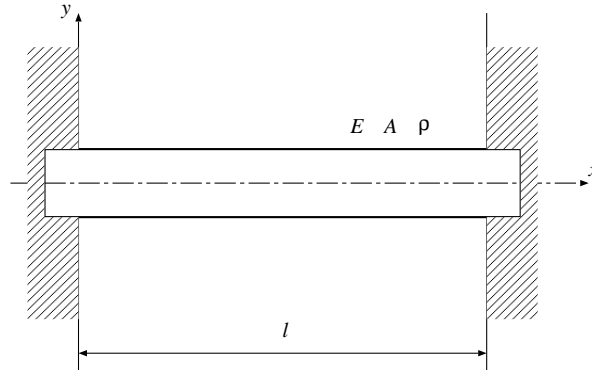
$$\frac{\partial L}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}^{(n)}} = 0 \quad (17)$$

**Példa:** *A gyengén hajlított rugalmas rúd.* Egy rugalmas rudat két végénél befalazunk. A gravitációs erő ellenében csak a saját súlyát kell megtartania (3. ábra). A rúd hossza  $l$ , keresztmetszete  $A$ , rugalmassági modulusa  $E$ , sűrűsége  $\rho$  és a keresztmetszet alakjától függő másodrendű nyomatéka  $I$ .

A Hooke-törvény segítségével kiszámítható, hogy a meghajlított rugalmas rúdban felhalmozott energia mennyisége a következő [1]:

$$E_{rug} = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{y''^2}{(1+y'^2)^{5/2}} dx \quad (18)$$

ahol  $y(x)$  a semleges szál egyenlete (semleges szálnak nevezzük az  $xy$  sík és a rúd azon részének metszetét, amely a hajlítás során nyújtatlan marad). A rúd egy



3. ábra.

kis darabjának helyzeti energiája a gravitációs térben a kis darab tömegének, egy bizonyos nullszinttől mért előjeles távolságának és a gravitációs gyorsulásnak a szorzata.

$$\tilde{E}_h = dm g y$$

De a  $dm$  kifejezhető a sűrűség és a semleges szál egyenlete segítségével:  $dm = \rho A \sqrt{dx^2 + dy^2} = \rho A \sqrt{1 + y'^2} dx$  A teljes rúd helyzeti energiája pedig

$$E_h = \rho g A \int_0^l y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (19)$$

lesz. A (18) és (19) összege adja a rúd összes energiáját, ami a rúd tartós nyugalmi helyzetében, amikor a rúd nem mozog, minimális.

$$U = \int_0^l \left[ \rho g A y \sqrt{1 + y'^2} + \frac{EI}{2} \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^{5/2}} \right] dx = \text{minimális}$$

Vizsgáljuk a rúd kis mértékű behajlását, amikor is az  $y'^2$  az 1 mellett elhanyagolható. Ekkor a feladat Lagrange-függvényére a következő adódik:

$$L = \rho g A y + \frac{EI}{2} y''^2$$

Ebben az esetben az Euler-Lagrange-egyenlet negyedrendű differenciálegyenlet lesz. (Lásd a (17) egyenlet  $n = 2$  esetben.)

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial y''} = \rho g A + EI y^{(4)} = 0$$

Ennek megoldása egy négy konstans tartalmazó függvény.

$$y(x) = -\frac{\rho g A}{24EI}x^4 + \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_2}{2}x^2 + c_3x + c_4 \quad (20)$$

Most adjuk meg a peremfeltételeket, amelyekkel a konstansok meghatározhatók. A rúd a két végénél rögzítve van.

$$y(0) = 0 \quad \text{és} \quad y(l) = 0$$

továbbá végei mereven be vannak fogva, ami miatt  $y(x)$  deriváltjaira kapunk még két feltételt.

$$y'(0) = 0 \quad \text{és} \quad y'(l) = 0$$

(Csuklóval rögzített vég esetén  $y'' = 0$ , szabad vég esetén pedig  $y''' = 0$  lenne a peremfeltétel.) Lederiválva (20)-t, és beírva a megfelelő feltételeket négy egyenletet kapunk a négy konstansra. Ezeket megoldva az extrémális függvény a következő lesz:

$$y(x) = -\frac{\rho g A}{24EI}x^2(l-x)^2$$

## 1.8. Több ismeretlen függvényt tartalmazó Lagrange-függvények

Általánosítsuk most a (5) funkcionált úgy, hogy benne ne csak egy  $y(x)$  ismeretlen függvény szerepeljen, hanem több.

$$I[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \int_{x_A}^{x_B} L(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x), x) dx \quad (21)$$

továbbá adottak a következő peremfeltételek:

$$y_i(x_A) = a_i \quad \text{és} \quad y_i(x_B) = b_i$$

ahol  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ilyen típusú funkcionált kapunk, ha például egy térgörbe alakját akarjuk meghatározni valamilyen variációs módszerrel. Erre példa a (2.2) fejezetben tárgyalt Hamilton-elv. Vezessük be a következő jelölést, amellyel egyszerűbb alakra hozható (21):

$$y_i(x) = y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \quad \text{és} \quad y_i' = y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)$$

Az új jelölésekkel kapjuk:

$$I[y_i(x)] = \int_{x_A}^{x_B} L(y_i(x), y_i'(x), x) dx \quad (22)$$

Most is a (22) funkcionál szélső értékét keressük. Tegyük fel, hogy  $\bar{y}_i(x)$  az extrémális függvény. Képezzük az alábbi függvényt:

$$y_i(x) = \bar{y}_i(x) + \varepsilon_i \eta_i(x) \quad (23)$$

és

$$y_i'(x) = \bar{y}_i'(x) + \varepsilon_i \eta_i'(x) \quad (24)$$

ahol  $\varepsilon_i$  tetszőleges szám,  $\eta_i(x)$  pedig olyan folytonos függvény, amely az  $x = x_A$  és  $x = x_B$  pontokban eltűnik, miközben  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ezzel a (21) funkcionál szélsőérték problémáját átalakítottuk egy  $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$   $n$  változós függvény szélsőérték problémájává, amit már meg tudunk oldani. Írjuk (23)-t és (24)-t a (22) funkcionálba, és képezzük az  $\varepsilon_i$  szerinti parciális deriváltjait az  $\varepsilon_i = 0$  helyen.

$$\left( \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_i} \right)_{\varepsilon_i=0} = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} \eta_i(x) + \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i'} \eta_i'(x) \right] dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Hasonló gondolatmenetet alkalmazva mint az 1.4 pontban, az integrandus második tagjának parciális integrálásával azt kapjuk, hogy

$$\left( \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_i} \right)_{\varepsilon_i=0} = \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i'} \right] \eta_i(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Mivel  $\eta(x)$  az integrálás határain belül tetszőleges, a szögletes zárójelben lévő tagnak azonosan nullának kell lennie. Hagyjuk el a felülvonásokat!

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y_i'} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

Ez  $n$  darab másodrendű differenciálegyenlet az  $n$  darab extrémális függvényre.

### 1.9. Több független változót tartalmazó Lagrange-függvények

A (5) következő általánosítási lehetősége, ha az egyetlen  $x$  független változó helyett több  $x_1, x_2, \dots, x_n$  független változót használunk. Ez azt jelenti, hogy a funkcionál egy  $n$ -szeres integrál lesz.

$$I[y(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \int \int \dots \int_V L(y(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial y(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1}, \frac{\partial y(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n}, x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (26)$$

Az integrálási tartományt  $V$ -vel jelöltük. A megoldás során csak olyan  $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  függvények jöhetnek szóba, amelyek az integrálás  $F$  peremén megadott értéket vesznek fel (peremfeltételek). A módszer hasonló az előző pontokban tárgyaltakhoz. Tegyük fel, hogy  $\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  az extrémális függvény,  $\varepsilon$  egy tetszőleges szám,  $\eta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pedig egy folytonos függvény, amely eltűnik az integrálás  $F$  peremén. Legyen  $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a következő alakú:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon \eta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

és ennek deriváltjai:

$$\frac{\partial y(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial \eta(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

ahol  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ha  $\varepsilon$ -nal tartunk a nullához, visszakapjuk az extrémális  $\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  függvényt. Helyettesítsük ezt az  $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  függvényt a (26) funkcionálba, és képezzük az így kapott  $\varepsilon$  változójú egyváltozós függvény deriváltját az  $\varepsilon = 0$  helyen:

$$\left( \frac{dI}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int \int \dots \int_V \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} \eta + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0 \quad (27)$$

A szorzatfüggvény deriválási szabályát felhasználva alakítsuk át az integrandus második tagját!

$$\int \int \dots \int_V \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \int \dots \int_V \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i} \right)} \eta \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n -$$



$$- \int \int \cdots \int_V \eta \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i} \right)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (28)$$

Itt az egyenlőség jobb oldalának első tagját tovább tudjuk alakítani. Vezessük be a következő jelölést:

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i}} \eta$$

Így egyszerűbb alakú lesz az átalakítandó kifejezés:

$$\int \int \cdots \int_V \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i}} \right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int \int \cdots \int_V \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (29)$$

A (29) integrált írhatjuk így is:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right] dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

ahol az  $a_i$ -k és  $b_i$ -k az integrálások alsó illetve felső határai. Az integrálási határok nem függetlenek, az  $x_1$  szerinti integrálás után  $a_1$  és  $b_1$  függeni fog az  $x_2, x_3, \dots, x_n$  változóktól, méghozzá úgy, hogy az  $(a_1, x_2, \dots, x_n)$  és az  $(b_1, x_2, \dots, x_n)$  pontok az integrálás  $F$  peremén helyezkednek el (tetszőleges  $x_2, x_3, \dots, x_n$  esetén). A fenti integrálban lévő összeg első tagját átalakíthatjuk a következő képpen:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \cdots \int_{a_n}^{b_n} [f_1(b_1, x_2, \dots, x_n) - f_1(a_1, x_2, \dots, x_n)] dx_2 dx_3 \cdots dx_n = 0 \end{aligned}$$

mivel  $f_i$ -ben szorzóként szerepel az  $\eta$ , ami az integrálás  $F$  peremén eltűnik. Ugyan ez a gondolatmenet elvégezhető a többi tagra is. Így azt kapjuk, hogy (29) egyenlő nullával. Ez alapján a (28) a következő lesz:

$$\int \int \cdots \int_V \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i}} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int \int \cdots \int_V \eta \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Ezt visszahelyettesítve a (27)-ba kapjuk a következőt:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \iiint_V \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i}\right)} \right] \eta dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

Mivel az  $\eta$  tetszőleges az integrálás határain belül, a szögletes zárójelben lévő kifejezésnek el kell tűnnie. Elhagyva a felülvonásokat kapjuk az eredményt, a

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)} = 0 \quad (30)$$

differenciálegyenletet, amelynek a megoldása az extrémális függvény.

\* \* \*

Egyes feladatok kapcsán előfordulhat az az eset, amikor a Lagrange-függvényben több ismeretlen függvény szerepel, amelyek többváltozósak és előfordulnak bennük a magasabb rendű deriváltak is. Ezt az esetet is le lehet vezetni az előző pontokban használt megfontolások alapján, ettől azonban itt eltekintünk.

### 1.10. Variációs problémák mellékfeltételekkel

Gyakran találkozunk olyan variációs problémával, amikor a szóba jöhető függvényeknek a differenciálhatósági és peremfeltételeken kívül még egyéb megkötéseknek is eleget kell tenniük. Az ilyen jellegű problémák megoldásával is foglalkozott Lagrange, és igyekezett a lehető legáltalánosabb megfogalmazásukat megadni. Mi most csak azt az esetet vizsgáljuk meg részletesebben, amikor a Lagrange-függvényben egy darab ismeretlen egyváltozós függvény és ennek elsőrendű deriváltja szerepel. Az általánosabb esetek az előző pontok mintájára kaphatók meg. A feladat a következő: keressük azt az  $y(x)$  függvényt, amelyen az

$$I[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} L(y(x), y'(x), x) dx \quad (31)$$

funkcionál szélső értéket vesz fel, és az  $y(x)$  megoldásnak a megadott peremfeltételeken kívül még  $n$  darab mellékfeltételt is ki kell elégítenie. A mellékfeltételek lehetnek egyenletek és differenciálegyenletek is.

Először vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a mellékfeltétel egy integrál segítségével fogalmazható meg (izoperimetrikus feladat):

$$J[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} G(y(x), y'(x), x) dx = k \quad (32)$$

ahol  $k$  konstans. Euler módszere szerint a variációs probléma egy  $n$  (véges) változós függvény szélsőérték-számításának formális általánosítása  $n \rightarrow \infty$ -re (lásd 1.3 fejezet). Ezek alapján ha ki tudjuk számítani egy  $n$  változójú közönséges függvény feltételes szélsőértékét, akkor ebből  $n \rightarrow \infty$  határátmenetet képezve megkapjuk a mellékfeltételes variációs probléma szélsőértékét is. Legyen  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a vizsgált függvény,  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$  pedig a mellékfeltétel. A legegyszerűbb megoldás az, ha  $g$ -ből kifejezzük valamelyik változót, és ezt beírjuk az  $f$ -be. Így  $n$  helyett már csak egy  $n - 1$  változós mellékfeltétel nélküli  $f^*$  függvény szélsőértékét kell meghatároznunk. Ennek szükséges feltétele:

$$\frac{\partial f^*(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

A megoldást megkaptuk, de a módszer nem túl szerencsés: elrontja az  $f$  függvény esetleg meglévő szimmetriáját. Jó lenne egy olyan módszert találni, amely nem változtatja meg az eredeti  $f$  függvény alakját. Erre a módszerre Lagrange jött rá. A módszer neve: Lagrange-féle multiplikátor-módszer. Képezzük az  $f$  függvény infinitezimális megváltozását egy  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pontban.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

vagy a *grad* vektor  $n$  dimenziós általánosítása segítségével:

$$df = \text{grad} f \cdot d\vec{x}$$

Az  $f$  függvénynek abban a pontban lehet szélsőértéke, ahol tetszőleges  $d\vec{x}$  infinitezimális „elmozdulásvektor” esetén az  $f$  függvény megváltozása nulla:

$$df = 0$$

Nyilván ez csak abban a pontban lehetséges, ahol  $\text{grad} f = 0$ . Nekünk azonban olyan pontokat kell vizsgálnunk, ahol teljesül a

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \quad (33)$$

feltétel. Ez nem teszi lehetővé, hogy a  $d\vec{x}$  vektor tetszőleges legyen, ugyanis teljesülni kell a következő feltételnek is:

$$g(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n) = c$$

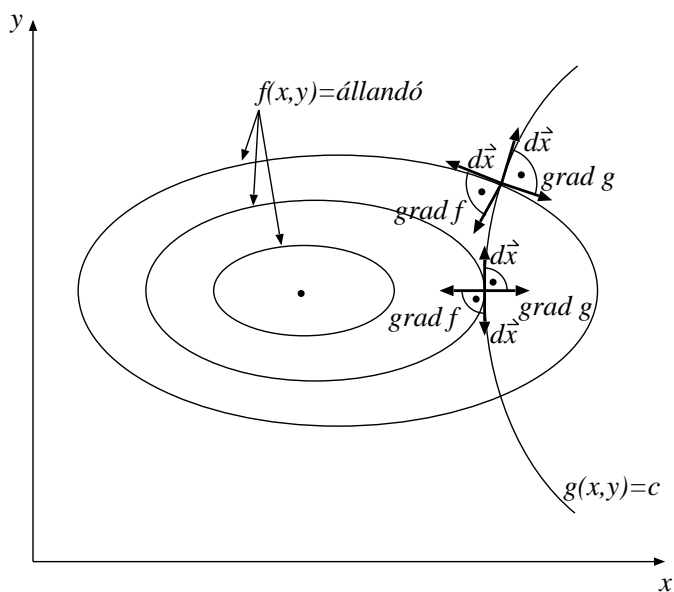
másképpen

$$dg = \text{grad } g \cdot d\vec{x} = 0 \quad (34)$$

Másrészt egy, a  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$  feltételnek eleget tevő pontban akkor lesz az  $f$  függvénynek feltételes szélsőértéke, ha ott

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{x} = 0$$

A  $\text{grad } f$  itt már nem biztos hogy nulla, viszont a skalárszorzat tulajdonságaiból következik, hogy a  $\text{grad } f$  merőleges  $d\vec{x}$  vektorra. Ezen megszorítás mellett a  $d\vec{x}$  tetszőleges, tehát bármilyen irányba mutathat, amely merőleges  $\text{grad } f$ -re. Viszont ugyanezt a  $d\vec{x}$ -et véve teljesülnie kell (34)-



4. ábra.

nek is, azaz  $\text{grad } g$  olyan irányú, hogy merőleges az összes  $\text{grad } f$ -re merőleges

vektorra. Ez csak úgy lehetséges, ha  $\text{grad} f$  párhuzamos  $\text{grad} g$ -vel<sup>4</sup>, azaz

$$\text{grad} f = \lambda \text{grad} g$$

Ezt egyszerű átalakítással a következő alakra hozhatjuk:

$$\text{grad}(f - \lambda g) = 0$$

azaz

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f - \lambda g) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (35)$$

Azt kaptuk, hogy az  $f^* = f - \lambda g$  függvény szélső értéke adja meg az  $f$  függvény  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$  melletti feltételes szélsőértékét. A  $\lambda$ -t Lagrange-multiplikátornak nevezzük. Az  $n + 1$  ismeretlent ( $x_1, x_2, \dots, x_n$  és  $\lambda$  értékét) az  $n$  számú egyenletet tartalmazó (35) egyenletrendszerből, valamint a (33) mellékfeltételekből határozhatjuk meg.

A Lagrange-féle multiplikátor-módszer minden további nélkül átvihető variációs számítási problémákra is. Euler módszerét alkalmazva (lásd 1.3 fejezet) azt kapjuk, hogy a (31) funkcionálnak a (32) mellékfeltétel mellett akkor lehet szélsőértéke, ha az  $y(x)$  függvény kielégíti az

$$L^* = L - \lambda G$$

Lagrange-függvénnyel felírt

$$\frac{\partial L^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial y'} = 0$$

Euler-Lagrange-egyenletet. Ez egy másodrendű differenciálegyenlet, melynek megoldásában  $\lambda$ -n kívül még két állandó is fellép. Ezeket a peremfeltételekből és a (32) mellékfeltételből határozhatjuk meg.

Lássuk be ezt most a Lagrange-féle variációs módszerrel is. Legyen  $\bar{y}(x)$  az extrémális függvény,  $\varepsilon_1$  tetszőleges konstans és  $\eta_1(x)$  olyan folytonos függvény, amely az integrálás határain eltűnik:

$$\eta_1(x_A) = \eta_1(x_B) = 0$$

---

<sup>4</sup>Ezt könnyebben megérthetjük, ha rajzolunk egy ábrát a kétdimenziós esetről (4. ábra). A  $df = dg = 0$  feltételnek az  $f(x, y) = \text{állandó}$  és  $g(x, y) = c$  görbék tesznek eleget. Keressük azokat a pontokat, ahol a két görbe érinti egymást, ugyanis ezekben a pontokban az  $f$ -en és a  $g$ -n történő  $d\vec{x}$  elmozdulásvektorok egybeesnek.

Ekkor az  $y(x) = \bar{y}(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x)$  függvény az  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  esetben visszaadja az extrémális függvényt. Valami azonban még hiányzik! A mellékfeltétel miatt nem alkalmazhatjuk ezt a módszert a megszokott formában. Az  $y(x)$  függvénynek mindig ki kell elégítenie a mellékfeltételt is, de a  $\varepsilon_1 \eta_1(x)$  tag hozzáadásával ez nem teljesül. Adjunk hozzá  $y(x)$ -hez még egy tagot, ami úgy kompenzálja  $\varepsilon_1 \eta_1(x)$  hatását, hogy így kielégül a (32) feltétel is.

$$y(x) = \bar{y}(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x)$$

ahol  $\varepsilon_2$  és  $\eta_2(x)$  hasonló tulajdonságúak, mint  $\varepsilon_1$  és  $\eta_1(x)$ . Ezt beírva a (31) funkcionálba, a funkcionál egy kétváltozós függvénné alakul:

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_A}^{x_B} L(\bar{y}(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x), \bar{y}'(x) + \varepsilon_1 \eta_1'(x) + \varepsilon_2 \eta_2'(x), x) dx \quad (36)$$

Az  $\varepsilon_1$  és  $\varepsilon_2$  nem függetlenek a (32) mellékfeltétel miatt:

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_A}^{x_B} G(\bar{y}(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x), \bar{y}'(x) + \varepsilon_1 \eta_1'(x) + \varepsilon_2 \eta_2'(x), x) dx = k \quad (37)$$

Keressük az  $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  kétváltozós függvény szélsőértékét a  $J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = k$  feltétel mellett. A Lagrange-féle multiplikátor-módszer szerint a feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} (I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \lambda J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (38)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$L^* = L - \lambda G \quad (39)$$

Mivel (36)-ban és (37)-ben az integrálási határok megegyeznek és az integrálás lineáris művelet, a (38) így is írható:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \int_{x_A}^{x_B} (L - \lambda G) dx &= \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L^*}{\partial \bar{y}} \eta_i(x) + \frac{\partial L^*}{\partial \bar{y}'} \eta_i'(x) \right] dx = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{\partial L^*}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial \bar{y}'} \right] \eta_i(x) dx = 0 \end{aligned}$$

ahol  $i = 1, 2$  (lásd 1.4 fejezet). Ebből már látszik, hogy az extrémális függvény a

$$\frac{\partial L^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial y'} = 0$$

differenciálegyenlet megoldása lesz. Ez a megoldás tartalmazni fogja a  $\lambda$  paramétert is, melynek értékét a  $\bar{y}(x)$  (32)-be helyettesítésével kaphatjuk meg.

Előfordulhat, hogy a mellékfeltételt nem egy (32) típusú integrál segítségével adjuk meg, hanem egy  $g(y(x), y'(x), x) = 0$  egyenlettel vagy differenciálegyenlettel. Ennek az esetnek a részletes tárgyalásával itt nem foglalkozunk, de a végeredményt megadjuk. Legyen  $\lambda(x)$  a Lagrange-multiplikátor, amely most függ  $x$ -től. Ezzel képezzük az

$$L^* = L + \lambda(x) g(y(x), y'(x), x) \quad (40)$$

függvényt, és azt kapjuk, hogy az extrémálisoknak ki kell elégíteniük a

$$\frac{\partial L^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial y'} = 0$$

Euler-Lagrange-egyenletet. Ez a differenciálegyenlet az adott mellékfeltételekkel együtt meghatározza az  $y(x)$  extrémális függvényt, valamint a még határozatlan  $\lambda(x)$  függvényt is, az integrálási állandókat pedig a határfeltételekből nyerhetjük.

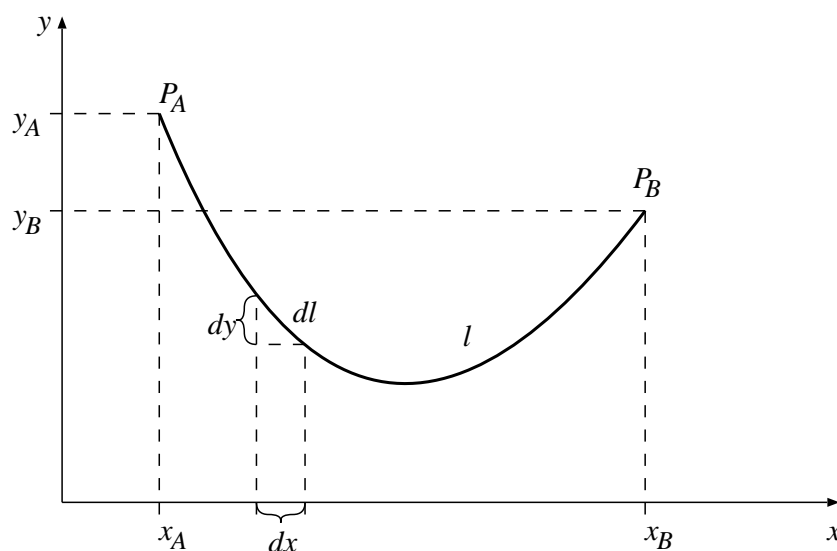
Abban az esetben, ha nem csak egy mellékfeltételt kell kielégíteni, a (39) és (40) a következő képpen módosul:

$$L^* = L - \sum_{i=1}^n \lambda_i G_i$$

illetve

$$L^* = L - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) g_i(y(x), y'(x), x)$$

A mellékfeltételes variációs számítás során az Euler-Lagrange-egyenlet megoldása mindig több szabadon választható konstanst tartalmaz, mint amennyit a peremfeltételekkel rögzítünk. Az ilyen esetek nem mindig oldhatók meg, a megoldhatóságot külön ellenőriznünk kell. Egy ilyen feladatra látunk most példát:



5. ábra.

**Példa:** *A láncgörbe.* Egy adott  $l$  hosszúságú kötél (vagy lánc) két végpontját  $P_A$  illetve  $P_B$  pontokban rögzítjük. ( $P_A$  és  $P_B$  nem ugyan azon a függőleges egyenesen helyezkednek el.) A  $P_A$  és  $P_B$  távolsága legyen kisebb, mint a kötél hossza. Milyen alakot vesz fel a kötél, ha rá csak a gravitációs tér hat?

A kötél olyan alakot vesz fel, hogy a potenciális energiája minimális legyen. Ha nem így történne, a kötél potenciális energiája mozgási energiává alakulna, és a kötél nem maradna nyugalomban. Az  $l$  hosszúságú kötél egy kicsiny  $dl$  darabjának potenciális energiája:

$$dU = \rho g y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ahol  $\rho$  a kötél lineáris sűrűsége,  $g$  a gravitációs gyorsulás. A teljes kötél potenciális energiája (lásd 5. ábra):

$$U = \rho g \int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Mielőtt nekilátnánk meghatározni az Euler-Lagrange-egyenletet, vegyük észre, hogy még egy dolgot figyelembe kell venni. Az  $y(x)$  függvényt adott hosszúságú



kötél esetére kell kiszámolni, ami egy mellékfeltételt jelent.

$$l = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (41)$$

Ezek alapján a következő funkcionálnak kell meghatározni a szélsőértékét:

$$\int_{x_A}^{x_B} \left( \rho g y \sqrt{1 + y'^2} - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx$$

A feladat Lagrange-függvénye az

$$L = (\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} \quad (42)$$

lesz, amiről érdemes észrevenni hogy hiányos, nem függ  $x$ -től. Az 1.5 fejezetben leírtak alapján az extremális függvénynek ki kell elégítenie az

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = c_1 \quad (43)$$

elsőrendű differenciálegyenletet, ahol  $c_1$  konstans. A (42)-t (43)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$(\rho g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} - (\rho g y - \lambda) \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$$

Fejezzük ki ebből  $y'$ -t:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left( \frac{\lambda - \rho g y}{c_1} \right)^2 - 1}$$

A változókat szétválasztva a következőt kapjuk:

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{\left( \frac{\lambda - \rho g y}{c_1} \right)^2 - 1}}$$

Végezzük el a következő helyettesítést:

$$\frac{\rho g y - \lambda}{c_1} = \operatorname{ch} u$$

Ekkor

$$dy = \frac{c_1}{\rho g} \operatorname{sh} u \, du$$

adódik.

$$\int dx = \frac{c_1}{\rho g} \int du \quad \Rightarrow \quad x = \frac{c_1}{\rho g} u + c_2$$

Térjünk vissza az  $u$ -ról ismét az  $y$ -ra:

$$y = \frac{c_1}{\rho g} \operatorname{ch} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x - c_2) \right) + \frac{\lambda}{\rho g} \quad (44)$$

Ezzel megkaptuk a differenciálegyenlet megoldását, a gond csak az, hogy több szabadon választható konstans szerepel benne, mint ahogy azt a differenciálegyenlet megkívánná. Be kell bizonyítanunk, hogy ennek ellenére a (44) jó megoldás. Írjuk fel a (44)-t  $P_A$  és  $P_B$  pontokban.

$$y_A = \frac{c_1}{\rho g} \operatorname{ch} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x_A - c_2) \right) + \frac{\lambda}{\rho g} \quad (45)$$

és

$$y_B = \frac{c_1}{\rho g} \operatorname{ch} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x_B - c_2) \right) + \frac{\lambda}{\rho g} \quad (46)$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból!

$$y_B - y_A = \frac{c_1}{\rho g} \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x_B - c_2) \right) - \operatorname{ch} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x_A - c_2) \right) \right]$$

Ezt a

$$\operatorname{ch}(\alpha + \beta) - \operatorname{ch}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta$$

azonosság segítségével így is írhatjuk:

$$y_B - y_A = \frac{2c_1}{\rho g} \operatorname{sh} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x_B + x_A - 2c_2) \right) \operatorname{sh} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x_B - x_A) \right) \quad (47)$$

Erre az összefüggésre még szükségünk lesz. Most vizsgáljuk meg a mellékfeltételt: írjuk be a (44) megoldást a (41) képletbe!

$$\begin{aligned} l &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\rho g}{c_1} (x - c_2) \right)} dx = \int_{x_A}^{x_B} \operatorname{ch} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x - c_2) \right) dx = \\ &= \frac{c_1}{\rho g} \left[ \operatorname{sh} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x_B - c_2) \right) - \operatorname{sh} \left( \frac{\rho g}{c_1} (x_A - c_2) \right) \right] \end{aligned}$$

Ezt a

$$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) - \operatorname{sh}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \alpha$$

azonosság segítségével így is írhatjuk:

$$l = \frac{2c_1}{\rho g} \operatorname{sh} \left( \frac{\rho g}{2c_1} (x_B - x_A) \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\rho g}{2c_1} (x_B + x_A - 2c_2) \right) \quad (48)$$

Emeljük négyzetre (47)-t és (48)-t, képezzük a különbségüket és vonjunk gyököt az így keletkezett egyenletből!

$$\sqrt{l^2 - (y_B - y_A)^2} = \frac{2c_1}{\rho g} \operatorname{sh} \left( \frac{\rho g}{2c_1} (x_B - x_A) \right)$$

Osszuk el mindkét oldalt  $x_B - x_A$ -val!

$$\frac{\sqrt{l^2 - (y_B - y_A)^2}}{x_B - x_A} = \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{\rho g}{2c_1} (x_B - x_A) \right)}{\frac{\rho g}{2c_1} (x_B - x_A)}$$

Vezessünk be új jelöléseket:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{l^2 - (y_B - y_A)^2}}{x_B - x_A} \quad \Lambda = \frac{\rho g}{2c_1} (x_B - x_A)$$

Így a

$$\operatorname{sh} \Lambda = \varepsilon \Lambda \quad (49)$$

egyenletet kell megoldani. Ennek az egyenletnek biztosan megoldása a  $\Lambda = 0$ , ekkor azonban  $c_1$  értékét nem tudjuk meghatározni (nullával kellene osztanunk). Ezért olyan megoldást kell keresnünk, ahol  $\Lambda \neq 0$ . Segítségképpen rajzoljuk fel az (49) grafikus megoldását! (6. ábra) A (49)-nek csak akkor van zérustól különböző megoldása, ha az  $\varepsilon \Lambda$  egyenes meredeksége nagyobb, mint a  $\operatorname{sh} \Lambda$ -nak a  $\Lambda = 0$  pontban, akkor ugyanis  $\varepsilon \Lambda$  metszi  $\operatorname{sh} \Lambda$ -t két  $\Lambda \neq 0$  pontban is. (A két pont abszcisszájának abszolútértéke megegyezik, csak előjelben különböznek. Ennek oka az, hogy az  $\varepsilon \Lambda$  és  $\operatorname{sh} \Lambda$  szimmetrikusak az orrigóra.) Az  $\operatorname{sh} \Lambda$  meredeksége  $\Lambda = 0$ -ban 1, ugyanis

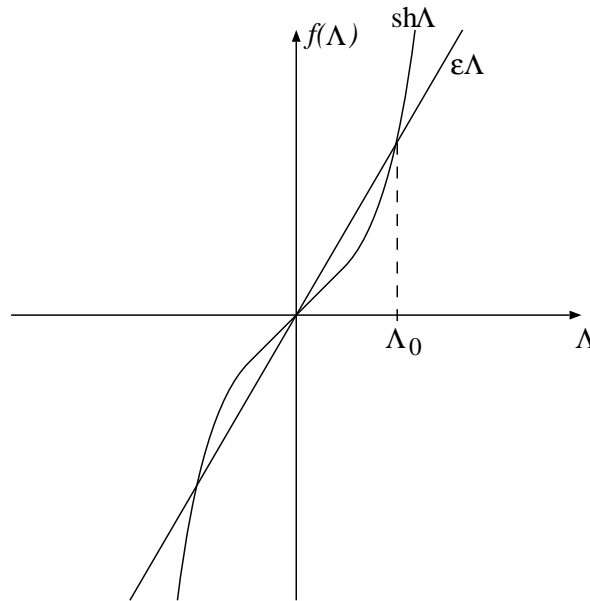
$$\frac{d}{d\Lambda} \operatorname{sh} \Lambda = \operatorname{ch} \Lambda$$

és

$$\operatorname{ch} 0 = 1$$

Tehát  $\varepsilon$ -nak nagyobbnak kell lennie egynél. A feladat szövegéből tudjuk, hogy

$$l > \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



6. ábra.

ezért

$$\varepsilon > \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} - (y_B - y_A)}{x_B - x_A}$$

azaz

$$\varepsilon > 1$$

Látható, hogy létezik megoldás, a kérdés már csak az, hogy pozitív-e vagy negatív? Az 5. ábrára nézve megállapíthatjuk, hogy  $c_1$  pozitív, ekkor azonban az (49) megoldásaiból is a pozitívval kell számolnunk (ugyanis  $\Lambda = \frac{\rho g}{c_1}(x_B - x_A)$  és feltesszük, hogy  $x_B > x_A$ ). A (49) egyenletet csak valamilyen közelítő módszerrel tudjuk megoldani. A  $c_1$  meghatározása után  $c_2$  a (47) vagy (48) segítségével, majd  $\lambda$  az (45) vagy (46) segítségével határozható meg. Láttuk tehát, hogy a feladatnak létezik megoldása, és az egyértelmű is.

## 2. A fizika variációs elvei

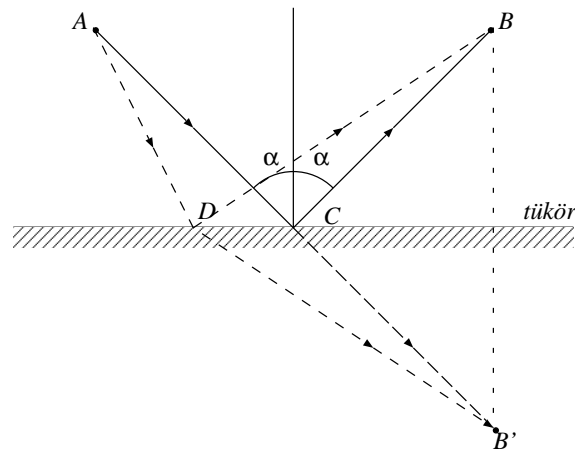
Ebben a fejezetben a fizika variációs elveiből kettőt ragadunk ki, a *Fermat-elvet* és a *Hamilton-elvet*. Mielőtt belekezdenénk, fontos tisztázni a különbséget a *variációs elvek* és a következő fejezetben tárgyalt *variációs módszerek* között.

Variációs elvekről akkor beszélünk, amikor a fizika egyes nagy témaköreit (klasszikus és relativisztikus mechanika, elektrodinamika, termodinamika, kvantummechanika stb.) próbáljuk megfogalmazni a variációs számítás segítségével. Ilyenkor egy funkcionálba „belesűrítjük” az adott fizikai rendszer összes tulajdonságát, és ezen funkcionál segítségével le tudjuk írni a fizikai rendszer viselkedését. (Például a klasszikus mechanikában ehhez nem szükséges ismernünk a Newton-axiómákat.)

Variációs módszereket akkor használhatunk, ha nem tudunk vagy nem akarunk megoldani egy differenciálegyenletet, és megelégszünk valamilyen közelítő eredménnyel is. A 3. fejezetben erre fogunk látni két példát.

### 2.1. A Fermat-elv

A fény terjedésének kérdéseivel már az ókori görögök is foglalkoztak. *Heron* és *Klaudiosz Ptolemaiosz* szerint az  $A$  pontból  $B$  pontba visszaverődő fénysugár a megtételhez szükséges *legrövidebb utat* választja. A fény



7. ábra.

tükrözésekor a  $C$  pontban verődik vissza, mert az  $ADB'$  út hosszabb, mint az  $ACB'$  (7. ábra). 1665-ben *Pierre Fermat* a legrövidebb út elvét akarta felhasználni a fénytörési törvények levezetéséhez, azonban rájött, hogy ezt módosítani kell, ugyanis így a beeső és a megtört fénysugár egy egyenesbe esne. Fermat bevezette a *legrövidebb idő* elvét. A fény mindig olyan úton halad, amely megtételéhez a lehető legkevesebb időre van szüksége. Matematikailag megfogalmazva:

$$\int_A^B dt = \text{minimális}$$

Látni fogjuk, hogy célszerűbb ezt az integrált megszorozni a  $c$  fénysebességgel. Ez a művelet a minimum tulajdonságot nem befolyásolja.

$$c \int_A^B dt = \text{minimális} \quad (50)$$

A fény sebessége abban a közegben, ahol éppen halad:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

a közeg törésmutatóját pedig így definiálhatjuk:

$$n = \frac{c}{v}$$

Ezek segítségével az (50)-t a következő alakra hozhatjuk:

$$c \int_A^B \frac{dt}{ds} ds = \int_A^B \frac{c}{v} ds = \int_A^B n ds = \text{minimális} \quad (51)$$

Ha a közeg, ahol a fény terjed nem homogén, a törésmutató minden helyen más értéket vesz fel:  $n = n(\vec{r})$ . Ilyenkor a következő variációszámítási feladatot kell megoldanunk:

$$\int_A^B n(\vec{r}) ds = \int_A^B n(\vec{r}) |\dot{\vec{r}}| dt = \int_A^B n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \text{minimális}$$

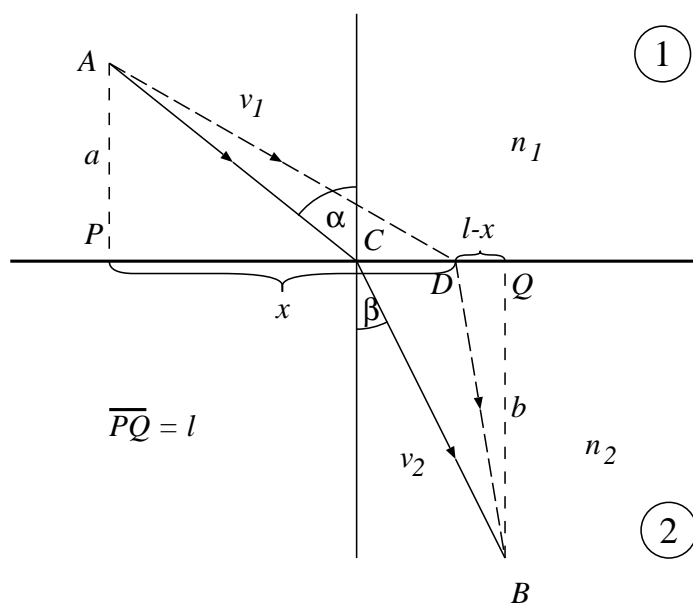
ahol keressük az  $\vec{r}(t)$  vektorfüggvényt, ami a fény „trajektóriája”. Nézzünk meg a Fermat-elv alkalmazására két egyszerű példát.

a. Homogén közegben a törésmutató mindenhol ugyan az a konstans érték. Ekkor a

$$n \int_A^B ds$$

funkcionált kell minimalizálnunk. Ennek megoldása az  $A$  és  $B$  pontokat összekötő legrövidebb út, az egyenes lesz. *Homogén közegben a fény mindig egyenes mentén terjed.*

b. Legyen két egymással érintkező különböző törésmutatójú homogén közeg. A fény a közegethatárhoz érve megtörik. A 8. ábra jelöléseit használva



8. ábra.

a Fermat-elvet így írhatjuk fel:

$$n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (l-x)^2} = \text{minimális} \quad (52)$$

A fény sebessége az  $n_1$  törésmutatójú 1. közegben  $v_1$ , az  $n_2$  törésmutatójú 2. közegben pedig  $v_2$ . Keressük a  $C$  pont helyét, amin a fénysugár áthaladva a

legrövidebb idő alatt ér  $B$ -be. Az (52) szélsőértékét az  $x$  szerinti deriválással határozhatjuk meg:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n_2 \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} = 0$$

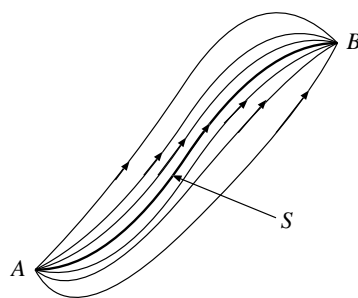
vagy másképpen

$$\begin{aligned} n_1 \sin \alpha &= n_2 \sin \beta \\ \Downarrow \\ \frac{n_2}{n_1} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \end{aligned}$$

Ez éppen a *Snellius-Descartes-féle törési törvény*.

\* \* \*

A Fermat-elv könnyen érthetővé és szemléletessé tehető azáltal, hogy figyelembe vesszük a fény hullámjellegét. A végtelen vékony fénysugár csupán egy matematikai absztrakció, a valóságban a fény a véges hullámhossza miatt



9. ábra:

egy kiterjedt tartományban, egy véges szélességű sávban terjed. A 9. ábrán látható  $A$  pontból a fény különböző utakon juthat  $B$ -be, és ezeken a terjedés ideje általában különböző. Emiatt az  $A$  pontból azonos fázissal induló hullámok  $B$ -be már nagyon különböző fázissal érkeznek meg, s így az interferencia révén kioltják egymást. Kivételt csupán az az  $S$  görbe képez, melyen haladva a terjedési idő a környező görbékhez tartozó időkhöz képest minimális, mert ekkor az  $S$ -hez közeli pályákon haladó hullámok terjedési ideje —  $s$  ezzel együtt  $B$ -be érkezésükkor a fázisuk — első közelítésben azonos. Ezek a hullámok erősítik egymást, s ezért  $S$  mentén valóban fényterjedést figyelhetünk meg.

## 2.2. A Hamilton-elv

A Fermat-elv nagyon tömören és elegánsan fogalmazta meg a fény terjedésének törvényeit. Egyetlen mennyiség extrémálissá válása



meghatározta a fény útját. A fizikusok szerettek volna a fizika más területein is hasonló „rendező elveket” találni, amikor is valamilyen mennyiség zérussá, végtelenné, extrémálissá válása vagy éppen változatlansága kitünteti a környező világ egyes állapotait. A legrövidebb idő elvének viszonylag korai megfogalmazása érthető, hiszen egyszerű, a hétköznapi életből átvett fogalmakat használ, olyanokat, mint út, idő, sebesség. *Louis Maupertuis* 1744-ben jelentette be a párizsi Akadémia ülésén, hogy sikerült megtalálnia azt a mennyiséget, amely a mechanikában a valóságos mozgás esetén minimális, és ezt *hatásnak* nevezte el:

$$S = \int m v ds$$

ahol  $m$  a test tömege,  $v$  a sebessége. A hatás egyáltalán nem evidens fogalom, hanem bonyolult mennyiség, így nem csoda, hogy nyolcvan évet késett a Fermat-elvhez képest. Euler és Lagrange érdeme, hogy Maupertuis elvét jól használható matematikai formába öntötték. Maupertuis hatásdefinícióját úgy módosították, hogy az időt vették független változónak.

$$S = \int L dt$$

Most már csak az  $L$  Lagrange-függvény alakját kell meghatározni. Ezt akár próbálgatással is megtehetnénk, viszont tanulságosabb, ha a mechanika néhány tapasztalati ténye alapján vezetjük le.

A levezetésben általánosított koordinátákat használunk, amiket  $q_1, q_2, \dots, q_n$ -el jelölünk. A  $q_i$ -k között<sup>5</sup> lehetnek távolságok, szögek stb., tehát fizikai dimenziójuk is különbözhet. Csak az lényeges, hogy a  $q_i$ -k megadása egyértelműen rögzítse a rendszer konfigurációját<sup>6</sup>. A tapasztalat szerint egy adott  $t$  időpontban a mozgó tömegpont mechanikai állapotát általános koordinátáinak ( $q_i$ ) és sebességeinek ( $\dot{q}_i$ ) egyidejű megadása teljes mértékben meghatározza. (A független  $q_i$  koordináták számát a mechanikai rendszer szabadsági fokának nevezzük.) A mechanikai rendszer minden lényeges tulajdonságát tartalmazó  $L$  Lagrange-függvény tehát szintén  $q_i, \dot{q}_i$  és esetleg  $t$  függvénye lehet. A  $q_i$  magasabb rendű deriváltjait nem tartalmazhatja, mivel ez azt jelentené, hogy az állapot jellemzéséhez például  $\ddot{q}_i$  megadása is szükséges lenne, pedig azt  $q_i$  és  $\dot{q}_i$  már egyértelműen meghatározza. Ezek alapján a Hamilton-elvet a

<sup>5</sup>Ezentúl a  $q_i = q_1, q_2, \dots, q_n$  és  $\dot{q}_i = \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  jelölést használjuk.

<sup>6</sup>Egy mechanikai rendszer egy időponthoz tartozó helyzetét

következő alakban írhatjuk:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (53)$$

A fenti kifejezés a valóságban megvalósuló mozgás során szélsőértéket vesz fel. Az integrálást a mozgás kezdeti ( $t_1$ ) és végső ( $t_2$ ) helyzete között kell elvégezni. Az 1.4 fejezetből tudjuk, hogy (53)-nak annál a  $q_i$  függvényénél lesz szélső értéke, amely kielégíti a

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (54)$$

differenciálegyenletet. Ez egyben a mechanikai rendszer mozgásegyenlete is lesz. Az (54) általános megoldása  $2n$  tetszőleges állandót tartalmaz, amelyek a kezdőfeltételekből számolhatók ki, azaz meg kell adnunk egy tetszőleges időpillanatban a rendszert jellemző állapotváltozókat, a  $q_i$ -k és  $\dot{q}_i$ -k értékeit.

A Lagrange-függvény soha nincs egyértelműen meghatározva, hanem csak egy divergencia-kifejezés erejéig. Esetünkben ez azt jelenti, hogy ha egy mechanikai rendszer  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  Lagrange-függvényéhez egy tetszőleges  $f(q_i, t)$  függvény teljes időderiváltját hozzáadjuk, az így kapott  $L'(q_i, \dot{q}_i, t)$  Lagrange-függvény is ugyanazokhoz a mozgásegyenletekhez vezet, mint  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Ezt könnyen beláthatjuk, hiszen

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q_i, t) dt = \\ &= S + f(q_i(t_2), t_2) - f(q_i(t_1), t_1) = S + \text{konstans} \end{aligned}$$

Az  $S'$  extrémumának helyét a hozzáadott konstans nem befolyásolja, így ugyanazok a  $q_i$  függvények teszik extrémálissá, mint  $S$ -t.

Határozzuk meg egy inerciarendszerben szabadon mozgó tömegpont Lagrange-függvényét. (A számolás során Descartes-koordinátákat használunk.) Tetszőleges vonatkoztatási rendszerből nézve az idő és a tér nem homogén, és a tér nem izotrop, azaz van kitüntetett időpont, kitüntetett hely és kitüntetett irány. Szerencsére mindig található olyan vonatkoztatási rendszer, amely ezekkel a kellemetlen tulajdonságokkal nem rendelkezik: belőle nézve az *idő homogén*, a *tér pedig homogén és izotrop*. Az ilyen vonatkoztatási rendszereket *inerciarendszereknek* nevezzük. Az ilyen

vonatkoztatási rendszerben mozgó tömegpont Lagrange-függvénye nem tartalmazhatja expliciten sem az  $\vec{r}$  helyvektort, sem a  $t$  időt. A tér izotrop voltából következik, hogy a Lagrange-függvény csak a tömegpont sebességének nagyságától függhet, azaz

$$L = L(v^2)$$

A függés pontos formáját a Galilei-féle relativitási elv segítségével határozhatjuk meg. A *Galilei-féle relativitási elv* kimondja, hogy az *inerciarendszerek minden mechanikai jelenség szempontjából ekvivalensek*. A  $K$  inerciarendszerben legyen a tömegpont Lagrange-függvénye  $L(v^2)$ . Mozogjon egy  $K'$  rendszer  $K$ -val szembe állandó  $\delta v$  infinitezimális sebességgel. Ekkor a  $K'$ -ben mozgó tömegpont sebessége  $v' = v + \delta v$  lesz, Lagrange-függvénye pedig

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2v\delta v + \delta v^2)$$

Fejtsük ezt Taylor-sorba, és hanyagoljuk el az elsónél magasabb rendű tagokat! (A hatás variálásánál is csak az elsőrendű tagokra van szükség.)

$$L' = L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} 2v\delta v$$

Mivel a Galilei-féle relativitási elv szerint  $K$ -ról  $K'$ -re való áttérés során a mozgásegyenletek alakja nem változhat, a  $K$  és  $K'$ -beli Lagrange-függvény legfeljebb egy idő szerinti teljes deriváltban különbözhet egymástól. Ezért a jobboldal második tagja szükségképpen egy legfeljebb koordinátáktól és időtől függő teljes idő szerinti derivált. Ez csak úgy lehetséges, ha a  $\frac{\partial L}{\partial v^2}$  derivált konstans. Ebből már látható, hogy a Lagrange-függvény  $v^2$ -től függése csak ilyen lehet:

$$L = a v^2$$

A tapasztalat szerint az  $a$  szorzó  $\frac{m}{2}$ -vel egyenlő, ahol  $m$  a mozgó tömegpont tömege. A Lagrange-függvény additivitása miatt az egymással és külső térrel kölcsönhatásban nem álló tömegpontok rendszerének Lagrange-függvénye a következő lesz:

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j v_j^2 \quad (55)$$

Ebből a Lagrange-függvényből az (54) segítségével képzett mozgásegyenletek szerint  $v_j$  állandó lesz ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Tehát az inerciarendszerben

magára hagyott tömegpont (vagy tömegpontok) állandó irányú és nagyságú sebességgel mozognak. Vizsgáljuk most a tömegpontok úgynevezett *zárt rendszerét*, amelyben a tömegpontok egymással kölcsönhatnak ugyan, de külső testekkel már nem. Az ilyen zárt rendszer Lagrange-függvénye két részből áll. Egyrészt a kölcsönhatásmentes (55) tagból, és a kölcsönhatást jellemző  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$  függvényből.

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j v_j^2 - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \quad (56)$$

ahol  $\vec{r}_j$  a  $j$ -edik tömegpont helykoordinátáit jelöli. Az (56) első tagját a rendszer *kinetikus energiájának*, a másodikat pedig a rendszer *potenciális energiájának* nevezzük. Ebből a Lagrange-függvényből származtatott mozgásegyenletek a már jól ismert Newton-egyenletek:

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_j} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ahol  $-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_j}$  a  $j$ -edik tömegpontra ható erő<sup>7</sup>.

A Hamilton-elv sokkal nagyobb elvi és gyakorlati jelentőséggel bír, minthogy csak a Newton-egyenletek egyszerű átfogalmazásának tekintsük. Gyakorlati jelentősége abban nyilvánul meg, hogy segítségével nagyon könnyen áttérhetünk görbevonaltú koordinátákra a mozgásegyenletek felírásánál. A Newton-egyenletek áttranszformálása nagyon hosszadalmas feladat a második időderiváltak transzformációja miatt, a Lagrange-függvény azonban csak az elsőrendű deriváltakat tartalmazza. A Hamilton-elv akkor is érvényes, ha a mozgást valamilyen kényszerfeltétel korlátozza. Ha például a tömegpont csak a  $G(\vec{r}) = \text{állandó}$  egyenlettel megadott felületen mozoghat, akkor a hatás minimumát az

$$\int_{t_1}^{t_2} G(\vec{r}) dt = \text{állandó}$$

alakban is írható mellékfeltétel mellett kell megkeresnünk (lásd 1.10 fejezet).

---

<sup>7</sup>  $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_j}$  a  $\left( \frac{\partial V}{\partial x_j}, \frac{\partial V}{\partial y_j}, \frac{\partial V}{\partial z_j} \right)$  vektort jelöli.

Egy későbbi feladatnál szükségünk lesz a következőre: Deriváljuk le  $t$  szerint a hatást.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_0 \dot{q} dt + \frac{d}{dt} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Rendezzük át a fenti egyenletet:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &\Downarrow \\ \frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) &= \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

A zárójelben lévő kifejezés mínusz egyszerűsítését a mechanikai rendszer energiájának nevezzük. Látható, hogy ha a Lagrange-függvény nem függ explicite az időtől, a rendszer energiája állandó marad.

A Hamilton-elv alkalmazható kiterjedt testekre (úgynevezett kontinuumokra), és fontos szerepet játszott a kvantummechanika kialakulásában is.

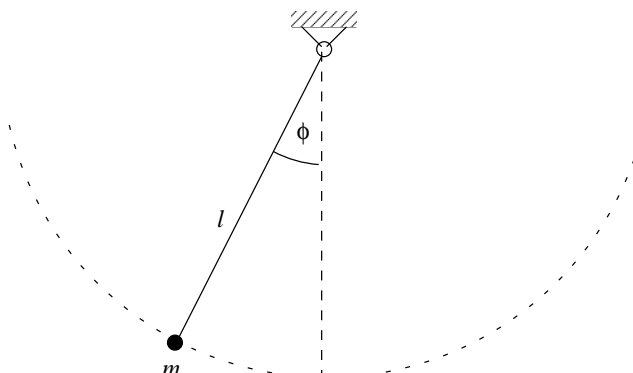
**Példa:** *A matematikai inga.* Írjuk le a matematikai inga mozgását kis amplitúdójú lengések esetén.

Célszerű a számolás során polárkoordinátákat használni (10. ábra). Az inga kinetikus (mozgási) energiája  $\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$ . Potenciális energiája, ha a nullszintet a  $\varphi = 0$ -nál vesszük fel,  $mgl(1 - \cos \varphi)$ -vel lesz egyenlő. A Lagrange-függvény a mozgási és potenciális energia különbsége.

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi)$$

Képezzük a Lagrange-függvény  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  és  $t$  szerinti deriváltjait:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mgl \sin \varphi & \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\ddot{\varphi} \end{aligned}$$



10. ábra.

Ebből a mozgásegyenletre

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$$

adódik. Osszuk el az egyenletet  $ml^2$ -tel:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Kis szögek esetén  $\sin \varphi$  közel megegyezik  $\varphi$ -vel. Ezt felhasználva kis kitérések esetén a mozgásegyenletet közelíthetjük a

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

egyenlettel. Ennek megoldása a

$$\varphi = \alpha \sin(\omega t + \beta)$$

függvény, ahol  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $\alpha$  és  $\beta$  pedig szabadon választható konstansok, melyeket a kezdeti feltételekből határozhatunk meg. Legyen a  $t = 0$  időpillanatban az inga kitérése  $\varphi_0$ , a szögsebessége pedig zérus.

$$\varphi(0) = \alpha \sin(\omega t + \beta) = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(0) = \alpha \omega \cos(\omega t + \beta) = 0$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva  $\alpha = \varphi_0$ -t és  $\beta = \frac{\pi}{2}$ -t kapunk a konstansokra. A mozgást tehát a

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \varphi_0 \cos(\omega t)$$

függvény írja le.

Számoljuk ki a lengés  $T$  periódusidejét. Periódikus mozgásoknál a rendszer állapota  $\varphi(t)$ -ben és  $\varphi(t + T)$ -ben megegyezik. Legyen speciálisan  $t = 0$ . Ekkor

$$\begin{aligned}\cos(0) &= \cos(\omega T) \\ \Downarrow \\ 2\pi k &= \omega T\end{aligned}$$

ahol  $k$  egész szám. Keressük a legkisebb időt két azonos állapot között. Ezt  $k = 1$  esetén kapjuk meg:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

### 3. Variációs módszerek

#### 3.1. A Ritz-módszer

A variációs számítás legegyszerűbb feladata, az

$$I[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} L(y(x), y'(x), x) dx \quad (57)$$

funkcionál extrémumának megtalálása egy differenciálegyenlet megoldására vezethető vissza. Ha azonban a variációs feladatot nem akarjuk (vagy nem tudjuk) teljesen pontosan megoldani, megelégszünk egy közelítő megoldással, a feladat lényegesen leegyszerűsíthető.

Válasszunk egy olyan  $\tilde{y}(c_1, c_2, \dots, c_n, x)$  függvényosztályt, melynek elemei  $n$  számú paramétertől függenek, és mindegyikük kielégíti az előírt  $\tilde{y}_A = y(x_A)$  és  $\tilde{y}_B = y(x_B)$  peremfeltételeket. Az  $I$  funkcionál értéke ezen függvényosztályon csak a  $c_i$  paraméterek függvénye, így ezen függvények közül  $I$  extrémumát az Euler-Lagrange-egyenlet megkerülésével, a

$$\frac{\partial I(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (58)$$

egyenletrendszer megoldásával elemi úton megkaphatjuk. Az így kapott  $\tilde{y}(x)$  függvényt az igazi extrémális közelítésének, az  $I[\tilde{y}(x)]$ -t pedig a funkcionál igazi extrémum értéke közelítésének foghatjuk fel. A közelítés jóságát az dönti el, hogy az  $I[\tilde{y}(x)]$  értéke mennyire közelíti meg az extrémális  $\bar{y}(x)$  függvényénél felvett  $I[\bar{y}(x)]$  értéket.  $I[y(x)]$ -nek szélsőértéke van az  $\bar{y}(x)$  extrémális függvényénél, ezért ha  $\tilde{y}(x)$  eltérése  $\bar{y}(x)$ -től kicsiny, az  $I[\tilde{y}(x)]$  közel megegyezik  $I[\bar{y}(x)]$ -el.

$$I[\tilde{y}(x)] - I[\bar{y}(x)] = I[\bar{y}(x) + \delta y] - I[\bar{y}(x)] = \delta I = 0$$

A (58) egyenletrendszer segítségével olyan  $c_i$  paramétereket választhatunk ki, amelyeknél  $I[\tilde{y}(x)]$  maximális mértékben közelíti  $I[\bar{y}(x)]$  szélsőértéket. Nagy mértékben növeli a pontosságot, ha van valami elképzelésünk (sejtésünk) a megoldásról, és eszerint választjuk meg a  $y(c_1, c_2, \dots, c_n, x)$  függvényosztályt<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Minél több paraméter szerepel  $y(c_1, c_2, \dots, c_n, x)$ -ban, annál jobb közelítést kapunk. Továbbá úgy célszerű megválasztanunk  $y(c_1, c_2, \dots, c_n, x)$ -t, hogy azt visszaírva a funkcionálba el tudjuk végezni az integrálást.

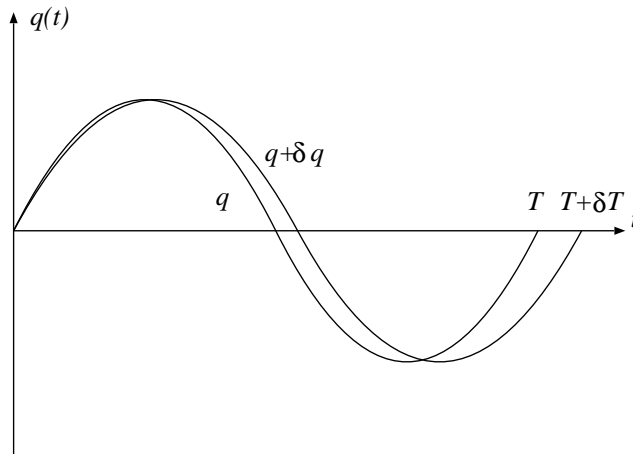


### 3.2. A Luttinger-Thomas-féle variációs módszer

A Luttinger-Thomas-féle variációs módszert periódikus mozgások periódusidejének megbecslésére használhatjuk. Azt állítjuk, hogy ha a periódikus mozgást végző rendszer Lagrange-függvénye nem függ explicit az időtől, akkor a

$$Z[q(t)] = \int_0^T [L(q, \dot{q}) + E] dt \quad (59)$$

funkcionál a megvalósuló mozgásnál szélsőértéket vesz fel. Az  $E$  a rendszer energiája, amely abban az esetben, ha a Lagrange-függvény nem függ expliciten az időtől, állandó. Legyen a megvalósuló mozgás trajektóriája  $q(t)$ . Megmutatjuk, hogy ha ezt kis mértékben megváltoztatjuk ( $q + \delta q$ ),  $Z$  értéke első rendben nem fog változni. Nem muszály csak a  $T$  periódusidejű virtuális trajektóriák körében maradnunk, megváltoztathatjuk  $q$ -t úgy is, hogy a periódusidő  $T + \delta T$ -re változzék (11. ábra). Még így is elég jó közelítést adhatunk a valódi mozgásra. Ekkor (59)-t így írhatjuk:



11. ábra.

$$Z + \delta Z = \int_0^{T+\delta T} [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) + E] dt$$

Fejtsük a jobb oldalt Taylor-sorba  $q$  és  $T$  szerint az első rendű tagokig bezárólag:

$$\begin{aligned} Z + \delta Z &= \int_0^T [L(q, \dot{q}) + E] dt + \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt + \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T L dt + \frac{\partial}{\partial T} (ET) \right] \delta T = \int_0^T [L(q, \dot{q}) + E] dt + \\ &+ \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt + \left[ \frac{\partial S}{\partial T} + E \right] \delta T \end{aligned}$$

Mindkét oldalból vonjunk ki  $Z$ -t! Így a jobb oldalon két tag fog állni, amelyek összege megadja  $Z$  megváltozását.

$$\delta Z = \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt + \left[ \frac{\partial S}{\partial T} + E \right] \delta T \quad (60)$$

A jobb oldal első tagjáról már tudjuk, hogy nulla lesz (lásd 1.4 fejezet). A második tagot részletesebben meg kell vizsgálnunk. Induljunk ki a Hamilton-elvből, vizsgáljuk a mozgás egy periódusát:

$$S = \int_0^T L(q, \dot{q}) dt$$

Tudjuk, hogy a rendszer energiáját a következő kifejezés adja meg:

$$E = \dot{q} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q})$$

Fejtsük ki ebből az  $L$ -t és helyettesítsük be a hatásba:

$$S = \int_0^T \left[ \dot{q} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - E \right] dt = \int_{q(0)}^{q(T)} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} dq - ET$$

Periódikus mozgás esetén  $q(0) = q(T)$ , ezért az integrál értéke nulla lesz. A maradékot deriváljuk le  $T$  szerint:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dT} &= -E \\ &\Downarrow \\ \frac{dS}{dT} + E &= 0 \end{aligned}$$

A számolás során  $q$  a megvalósuló mozgás trajektóriája volt, ugyanúgy mint (60)-ban, tehát a (60) jobb oldalának második tagja is egyenlő nullával.

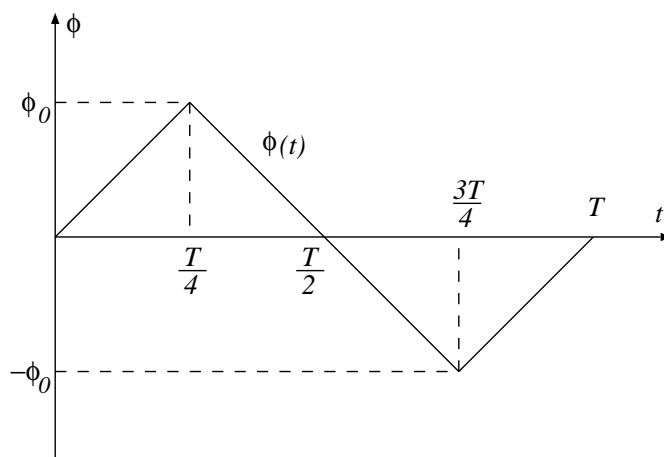
Beláttuk tehát, hogy (59) a  $T$  és  $q$  kis megváltozása esetén első rendben változatlan, azaz extrémuma van. Ezt a tulajdonságát felhasználhatjuk a periódusidő megbecslésére. Adjunk meg egy  $q(c_1, c_2, \dots, c_n, t)$  függvényt, amely a valódi mozgás trajektóriájához hasonló, helyettesítsük be (59)-be, és képezzük (59)  $c_1, c_2, \dots, c_n$  és  $T$  szerinti deriváltjait. Ott kapunk szélsőértéket, ahol a deriváltak mind eltűnnek. Ez  $n+1$  egyenlet  $c_1, c_2, \dots, c_n$  és  $T$ -re, melyből  $T$  meghatározható<sup>9</sup>.

**Példa:** A matematikai inga periódusideje. Becsüljük meg a matematikai inga periódusidejét nagy amplitúdójú lengések esetén!

A 2.2 fejezet végén felírtuk a matematikai inga Lagrange-függvényét:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi) \quad (61)$$

Keresnünk kell egy függvényt, ami hasonló mozgást ír le, mint az inga mozgása. Erről jóformán csak annyit tudunk, hogy periódikus és talán a szinusz függvényhez hasonlít. Azt is szem előtt kell tartanunk, hogy a közelítő függvényt (61)-be írva az integrálást el tudjuk végezni. A legegyszerűbb lehetőség egy „fűrészfog” alakú függvény:



12. ábra.

<sup>9</sup>„Melléktermékként” kapunk egy becslést  $E$ -re is.

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{4\varphi_0}{T}t & \text{ha } 0 < t < \frac{T}{4} \\ -\frac{4\varphi_0}{T}t + 2\varphi_0 & \text{ha } \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4} \\ \frac{4\varphi_0}{T}t - 4\varphi_0 & \text{ha } \frac{3T}{4} < t < T \end{cases}$$

ahol  $\varphi(t)$ -n tulajdonképpen  $\varphi(\varphi_0, t)$ -t értünk (12. ábra). Ez elég durva közelítése a valóságnak, bár látni fogjuk, hogy ennek ellenére nagyon jó becslést fogunk kapni  $T$ -re. Szükségünk lesz még  $\varphi(t)$  deriváltjára is.

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{4\varphi_0}{T} & \text{ha } 0 < t < \frac{T}{4} \\ -\frac{4\varphi_0}{T} & \text{ha } \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4} \\ \frac{4\varphi_0}{T} & \text{ha } \frac{3T}{4} < t < T \end{cases}$$

Írjuk be  $\varphi(t)$ -t és  $\dot{\varphi}(t)$ -t a (61)-ba, azt pedig (59)-be.

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{\frac{T}{4}} \left[ \frac{1}{2}ml^2 \frac{16\varphi_0^2}{T^2} - mgl \left( 1 - \cos \left( \frac{4\varphi_0}{T}t \right) \right) \right] dt + \\ &+ \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left[ \frac{1}{2}ml^2 \frac{16\varphi_0^2}{T^2} - mgl \left( 1 - \cos \left( -\frac{4\varphi_0}{T}t + 2\varphi_0 \right) \right) \right] dt + \\ &+ \int_{\frac{3T}{4}}^T \left[ \frac{1}{2}ml^2 \frac{16\varphi_0^2}{T^2} - mgl \left( 1 - \cos \left( \frac{4\varphi_0}{T}t - 4\varphi_0 \right) \right) \right] dt + \int_0^T E dt \end{aligned} \quad (62)$$

Az integrálás elvégzése után a

$$Z = \frac{8ml^2\varphi_0^2}{T} - mglT \left( 1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) + ET$$

képletet kapjuk. A  $T$ -t és  $\varphi_0$ -t úgy kell megválasztani, hogy  $\frac{\partial Z}{\partial \varphi_0}$  és  $\frac{\partial Z}{\partial T}$  nulla legyen. A  $T$  periódusidő meghatározásához elegendő csak a  $\varphi_0$  szerinti deriválást

elvégezni.

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi_0} = \frac{16ml^2\varphi_0}{T} + mglT \frac{\varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0}{\varphi_0^2} = 0$$

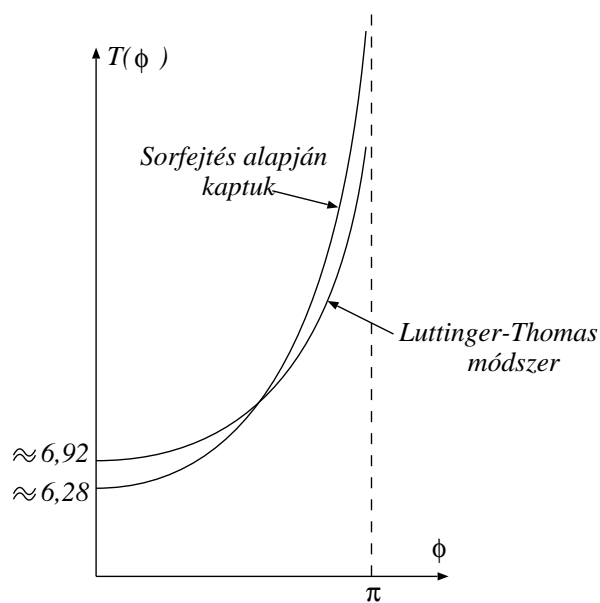
↓

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{\varphi_0^3}{\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0}} \quad (63)$$

Ha a mozgásegyenlet alapján számoltuk volna ki a periódusidőt, a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \frac{91}{12288}\varphi_0^4 + \dots \right) \quad (64)$$

végtelen sort kaptuk volna [2]. A sor első három tagjával számolva ábrázoljuk



13. ábra.

(63)-t és (64)-t (13. ábra)! Láthatjuk, hogy sokkal jobb közelítést kaptunk  $T$ -re, mint a  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  konstans érték. A (64) közepes kitérések ( $\varphi_0 \approx 90^\circ$ ) esetén kevesebb mint 5%-os hibával becsli meg a  $T$ -t.

A következő fejezetben egy kvantummechanikában használható variációs módszert fogunk bemutatni.

### 3.3. Transzmissziós koefficiens

Egy részecske halad egy potenciálgát felé. Mi fog történni a részecskével az ütközés után, ha a részecske energiája kisebb a potenciálgát nagyságánál? A klasszikus fizikai szemléletünk alapján azt mondhatnánk, hogy visszapattan arról. Az elemi részecskék világában azonban más a helyzet. A részecske át is haladhat az akadályon annak ellenére, hogy nincsen hozzá elegendő energiája. Ezt a jelenséget *alagút-effektus*nak nevezzük. Nem tudjuk pontosan megmondani azt, hogy a részecske áthalad-e vagy inkább visszapattan a potenciálgátról, csak az egyes események valószínűségéről kapunk információt. Néhány speciális esetben ki tudjuk pontosan számolni annak a valószínűségét, hogy a részecske áthalad-e gáton, de kicsit bonyolultabb alakú potenciálgátaknál már bajban vagyunk. Könnyen egy olyan differenciálegyenlettel kerülhetünk szembe, amelyet nem tudunk megoldani. Ekkor kell segítségül hívni a különböző közelítő módszereket.

A most ismertetésre kerülő módszer nem a kérdéses differenciálegyenlet megoldását segíti. Valójában nem is erre van szükségünk, hanem az áthaladás valószínűségére, azaz a *transzmissziós koefficiensre*, ami egy szám. Induljunk ki a Schrödinger-egyenletből.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \tilde{U}(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

A fenti egyenletben  $\hbar$  a Planck állandó,  $m$  a részecske tömege,  $\psi(x)$  a részecske hullámfüggvénye,  $E$  pedig az energiája. A potenciálgát alakját az  $\tilde{U}(x)$  függvény írja le. Célszerű lenne az egyenletet olyan alakra hozni, hogy később minél áttekinthetőbb eredményre jussunk. Szorozzuk meg mindkét oldalt  $-\frac{2m}{\hbar^2}$ -tel! Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = k^2 \quad \text{és} \quad \frac{2m}{\hbar^2}\tilde{U}(x) = U(x)$$

Így a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\psi(x) = U(x)\psi(x) \quad (65)$$

A továbbiakban a  $k$ -t<sup>10</sup> mindig pozitívnak tekintjük ( $k > 0$ ). A (65) homogén változata, a

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\psi(x) = 0$$

egyenlet a szabadon mozgó részecskéket írja le. Ennek megoldása a

$$\psi(x) = ae^{ikx} + be^{-ikx}$$

ahol  $a$  és  $b$  konstansok. A  $\psi(x)$  első tagja a jobbra haladó, második tagja a balra haladó részecskét írja le. Az inhomogén egyenlet megoldásában segítségünkre lesz, ha megoldjuk a

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)G_k(x) = -4\pi\delta(x) \quad (66)$$

egyenletet.  $G_k(x)$ -et a (65) *Green-függvényének* nevezzük. A  $k$  index arra utal, hogy a (66) által leírt részecske hullámvektora  $k$ .  $\delta(x)$  a Dirac-delta függvény, a  $-4\pi$  szorzó pedig tradicionális okokból szerepel az egyenletben. Az egyenlet az  $x \neq 0$  helyeken olyan, mint a homogén egyenlet, de az  $x = 0$ -ban valami történik vele. Ennek alapján könnyen felírhatjuk a megoldást az  $x < 0$  és  $x > 0$  helyeken.

$$G_k(x) = \begin{cases} ae^{ikx} + be^{-ikx} & \text{ha } x < 0 \\ ce^{ikx} + de^{-ikx} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

De vajon mi a helyzet az  $x = 0$  pontban? Csak olyan megoldásokkal foglalkozunk, amelyek folytonosak<sup>11</sup>. Ekkor ha a  $G_k(x)$  függvénnyel tartunk balról és jobbról is nullához, ugyanazt az értéket kell kapnunk.

$$G_k(0^-) = G_k(0^+) \quad \Rightarrow \quad a + b = c + d$$

A (66) egyenlet segítségével további információt kapunk a  $G_k(x)$  függvény deriváltjairól. Először is számoljuk ki a deriváltak „ugrását” az  $x = 0$  pontban.

$$G'_k(0^+) - G'_k(0^-) = ikc - ikd - ika + ikb$$

<sup>10</sup>A  $k$  tulajdonléppen a részecske hullámvektora,  $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ . Mivel csak egydimenziós mozgásokat vizsgálunk, elhagyjuk a vektorjelöléseket.

<sup>11</sup>A Schrödinger-egyenlet megoldásaitól megköveteljük, hogy egyértékűek, folytonosak és négyzetesen integrálhatóak legyenek.

Integráljuk az (66) egyenletet  $x$  szerint a nulla körüli infinitezimális tartományon. Az eredmény:

$$G'_k(0^+) - G'_k(0^-) = -4\pi$$

Az utóbbi két egyenletből levonhatjuk a konklúziót:

$$ikc - ikd - ika + ikb = -4\pi$$

Tehát van a (66) egyenlet megoldására egy függvény négy szabadon választható konstanssal, és két feltétellel a konstansokra (a függvény  $x = 0$  körüli viselkedéséből). Ez összesen két szabadon választható konstans enged meg a megoldásban. A feltételek segítségével küszöböljük ki az  $a$  és  $d$  konstansokat!

$$G_k(x) = \begin{cases} ce^{ikx} + be^{-ikx} + \frac{2\pi}{ik}e^{ikx} & \text{ha } x < 0 \\ ce^{ikx} + be^{-ikx} + \frac{2\pi}{ik}e^{-ikx} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Ez tehát a két szabadon választható konstansból függő megoldás. Ha a két konstans megfelelően választjuk meg, a (66) egyenlet az  $x = 0$  pontból kiinduló részecskét ír le. Legyen  $b = c = -\frac{2\pi}{ik}$ . Ekkor:

$$G_k(x) = -\frac{2\pi}{ik}e^{ik|x|} \quad (67)$$

Ez olyan, mintha az  $x = 0$ -ban egy pontszerű részecskeforrás lenne. A (65) egyenlet jobb oldalán álló  $U(x)\psi(x)$  egy részecskeforrást jelent (hiszen belőle részecskék indulnak balra — visszavert vagy reflektált részecske — és jobbra — áthaladó vagy transzmittált részecske) melyet pontszerű forrással helyettesítettünk a (66)-ban.

Az (65) egyenlet egy differenciálegyenlet. Csináljunk belőle a Green-függvény segítségével egy integrálegyenletet!

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\psi(x) &= U(x)\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')U(x')\psi(x')dx' = \\ (66) \quad &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)G_k(x-x')U(x')\psi(x')dx' = \end{aligned}$$



$$= \left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \underbrace{\left( \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x')U(x')\psi(x')dx' \right)}_{\psi(x)}$$

vagyis

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x')U(x')\psi(x')dx' \quad (68)$$

De még valami hiányzik. Egy inhomogén differenciálegyenlet megoldását úgy kapjuk meg, ha a homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Itt a (68) tekinthető az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának. A homogén egyenlet megoldása:

$$\psi(x) = ae^{ikx} + be^{-ikx} \quad (69)$$

A (65) egyenlet homogén változatának megoldásánál két esetet kell vizsgálnunk, nevezetesen amikor a részecske balról jön, és amikor a részecske jobbról jön.

A részecske balról,  $x = -\infty$  felől jön. Látni fogjuk, hogy  $a = A$  és  $b = 0$ . Az  $A$  a  $\psi(x)$  hullámfüggvény amplitúdója. A Schrödinger egyenletből kapható integrálegyenlet a következő alakú lesz<sup>12</sup>:

$$\psi_k(x) = Ae^{ikx} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x')U(x')\psi_k(x')dx' \quad (70)$$

Egyszerű számolással meggyőződhetünk róla, hogy ez kielégíti a (65)-t. Ez az egyenlet, szemben a differenciálegyenlettel, már tartalmazza a peremfeltételeket a mozgásra. Nagy negatív  $x$ -ekre van egy beeső és egy visszaverődött részecske, nagy pozitív  $x$ -ekre pedig van egy részecske, amely áthaladt a potenciálgáton. Nézzük meg ezt részletesebben.

Ha  $x \rightarrow -\infty$ , akkor a Green-függvény abszolút érték jelen belül nagy negatív szám fog állni, ezért az abszolút érték jel elhagyása után a kitevőbe egy negatív előjelet kell írunk, hogy a kitevő pozitív maradjon.

$$G_k(x-x') = \frac{2\pi i}{k} e^{-ik(x-x')}$$

<sup>12</sup>A  $\psi(x)$  hullámfüggvényt  $k$  és  $-k$  indexszel látjuk el annak megkülönböztetése végett, hogy az általa leírt részecske balról illetve jobbról jött.

Írjuk be ezt a (70) egyenletbe! Egyszerűsítések után kapjuk a következőt:

$$\psi_k(x) = Ae^{ikx} + \underbrace{\left[ \frac{-i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} U(x') \psi_k(x') dx' \right]}_{AR} e^{-ikx} \quad (71)$$

ahol  $R$ -t reflexiós koefficiensnek nevezzük.

Ha  $x \rightarrow \infty$ , akkor a Green-függvényen belüli abszolút érték jelet elhagyhatjuk, ettől a kitevő előjele nem fog megváltozni.

$$G_k(x - x') = \frac{2\pi i}{k} e^{ik(x-x')}$$

Ezt a (70)-be írva, és az egyszerűsítéseket elvégezve megkapjuk a balról jövő részecske hullámfüggvényének a másik felét.

$$\psi_k(x) = \underbrace{\left[ A - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi(x') dx' \right]}_{AT} e^{ikx} \quad (72)$$

ahol  $T$ -t transzmissziós koefficiensnek nevezzük.

Összefoglalva a (71) és (72) egyenleteket a hullámfüggvényre kapjuk a

$$\psi_k(x) = A \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{ha } x \rightarrow -\infty \\ Te^{ikx} & \text{ha } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (73)$$

ami valóban a balról jövő részecskét írja le.

Mielőtt áttérnénk a jobbról jövő részecskére, alakítsuk át egy kicsit a (70)-t. A (72)-ből tudjuk, hogy

$$AT = A - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi_k(x') dx'$$

Ebből az  $A$ -t kifejezve az

$$A = \frac{i}{2k(1-T)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi_k(x') dx'$$

kapjuk. Helyettesítsük ezt be a (70)-be. Az eredmény:

$$\psi_k(x) = \frac{i}{2k(1-T)} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi_k(x') dx' - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x') \psi_k(x') dx' \quad (74)$$

Erre még később szükségünk lesz. Most térjünk át a második esetre.

A részecske jobbról,  $x = \infty$  felől jön. Most az (69) egyenletben  $a = 0$  és  $b = A$  értékeket kell adni a konstansoknak. A Schrödinger egyenletből kapható integrálegyenlet ebben az esetben

$$\psi_{-k}(x) = Ae^{-ikx} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x') \psi_{-k}(x') dx' \quad (75)$$

Visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez is kielégíti a (65) egyenletet. Nézzük meg itt is a peremfeltételeket.

Ha  $x \rightarrow -\infty$ , a Green-függvény, hasonlóan az előző esethez, a következő alakú lesz:

$$G_k(x-x') = \frac{2\pi i}{k} e^{-ik(x-x')}$$

Ezt beírva (75)-ba, majd elvégezve az egyszerűsítéseket

$$\psi_{-k}(x) = \underbrace{\left[ A - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} U(x') \psi_{-k}(x') dx' \right]}_{AT'} e^{-ikx} \quad (76)$$

adódik.  $T'$  a transzmissziós koefficiens.

Ha  $x \rightarrow \infty$ , a Green-függvény

$$G_k(x-x') = \frac{2\pi i}{k} e^{ik(x-x')}$$

lesz. A (75)-ba behelyettesítve kapjuk a következőt:

$$\psi_{-k}(x) = Ae^{-ikx} + \underbrace{\left[ \frac{-i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi_{-k}(x') dx' \right]}_{AR'} e^{ikx} \quad (77)$$

ahol  $R'$  a reflexiós koefficiens.

Összefoglalva a (76) és (77) egyenleteket a hullámfüggvényre azt kapjuk, hogy

$$\psi_{-k}(x) = A \begin{cases} T' e^{-ikx} & \text{ha } x \rightarrow -\infty \\ e^{-ikx} + R' e^{ikx} & \text{ha } x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (78)$$

Alakítsuk át most is a (75) egyenletet a (76) segítségével.

$$AT' = A - \frac{i}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} U(x') \psi_{-k}(x') dx'$$

Ebből  $A$ -t kifejezve az

$$A = \frac{i}{2k(1-T')} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} U(x') \psi_{-k}(x') dx'$$

kapjuk. Helyettesítsük ezt vissza a (75)-ba. Az eredmény:

$$\psi_{-k}(x) = \frac{i}{2k(1-T')} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} U(x') \psi_{-k}(x') dx' - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x') \psi_{-k}(x') dx' \quad (79)$$

Erre az egyenletre is szükségünk lesz. A második eset tárgyalásánál, mikor a részecske jobbról jött, az  $R$  reflexiós és  $T$  transzmissziós koeficiensek helyett az  $R'$  és  $T'$  jelöléseket használtuk. Semmi okunk sincs feltételezni, hogy a részecske jobbról is és balról is ugyan olyannak „látja” a potenciálgátat (kivéve ha az szimmetrikus), hiszen a számolás során is látszik, a  $T$ -re és  $T'$ -re különböző képleteket kapunk. Viszont fontos lenne tudnunk, milyen kapcsolatban áll egymással a  $T$  és a  $T'$ .

Tudjuk, hogy ha egy hullámfüggvény megoldása a Schrödinger-egyenletnek, akkor annak időtükrözöttje is megoldás. Egy hullámfüggvény időtükrözöttjét pedig úgy kapjuk meg, ha a  $t$  helyébe  $-t$ -t írunk, és komplex konjugáljuk a függvényt. Mivel most a hullámfüggvény időfüggését nem vizsgáljuk, csak egyszerűen konjugálnunk kell  $\psi(x)$ -t. Nézzük a balról jövő részecskét, és vegyük a (73) komplex konjugáltját:

$$\psi_k^*(x) = A \begin{cases} e^{-ikx} + R^* e^{ikx} & \text{ha } x \rightarrow -\infty \\ T^* e^{-ikx} & \text{ha } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Vonjuk ki ebből az eredeti hullámfüggvény  $R^*$ -szorosát.

$$\psi_k^*(x) - R^* \psi_k(x) = AT^* \begin{cases} \frac{1 - |R|^2}{T^*} e^{-ikx} & \text{ha } x \rightarrow -\infty \\ e^{-ikx} - \frac{R^* T}{T^*} e^{ikx} & \text{ha } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Ha ebben a függvényben nem lenne benne az egész függvényt szorzó  $T^*$ , pont úgy nézne ki, mint egy jobbról becsapódó részecske hullámfüggvénye. A jobbról becsapódó részecske hullámfüggvénye viszont a (78). Ebből következik, hogy

$$T' = \frac{1 - |R|^2}{T^*} \quad \text{és} \quad R' = R^* \frac{T}{T^*}$$

Az első egyenletet átalakítva

$$T'T^* + RR^* = 1$$

kapunk ( $RR^* = |R|^2$ ). Viszont tudjuk, hogy az áthaladás valószínűségének és a visszaverődés valószínűségének az összege pontosan egyet kell hogy adjon.

$$|T|^2 + |R|^2 = 1 \quad \text{azaz} \quad TT^* + RR^* = 1$$

Ebből már világosan látszik, hogy

$$T = T'$$

Ezek után minden eddigi képletben, ahol  $T'$  állt,  $T$ -t fogunk írni.

És most következik a módszer lényege. Szorozzuk meg a (74) egyenletet  $U(x)\psi_{-k}(x)$ -el és integráljuk  $x$  szerint  $-\infty$ -tól  $\infty$ -ig.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x)U(x)\psi_{-k}(x)dx &= \frac{i}{2k(1-T)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}U(x)\psi_{-k}(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'}U(x')\psi_k(x')dx' - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x')U(x)\psi_{-k}(x)U(x')\psi_k(x')dx dx' \end{aligned}$$

Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon  $\frac{1}{1-T}$  álljon:

$$\frac{1}{1-T} = \frac{2k \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x) U(x) \psi_{-k}(x) dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x) \psi_{-k}(x) U(x') \psi_k(x') dx dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) \psi_{-k}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi_k(x') dx'} \quad (80)$$

Ez egy funkcionál, hiszen a jobb oldalba különböző  $\psi_k(x)$  és  $\psi_{-k}(x)$  függvényeket helyettesíthetünk, a bal oldalon pedig egy szám fog állni. (Feltesszük, hogy a jobb oldalon a nevező nem nulla.) Vezessük be a következő jelöléseket:

$$F = -\frac{2k}{i} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x) U(x) \psi_{-k}(x) dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x) \phi(x) U(x') \psi_k(x') dx dx' \right]$$

és

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) \psi_{-k}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi_k(x') dx'$$

(80)-t a következő képpen írhatjuk:

$$\frac{1}{1-T} = -\frac{F}{G} \quad (81)$$

Ha  $F$ -be és  $G$ -be beírjuk a  $\psi_k$ -t és  $\psi_{-k}$ -t, megkapjuk a  $T$  transzmissziós koefficiens pontos értékét. Ha a  $\frac{1}{1-T}$  szélső értéket venne fel a  $\psi_k$  és  $\psi_{-k}$  hullámfüggvényeknél, a (80)-t felhasználhatnánk a  $T$  közelítő meghatározására. Mivel  $U(x)$  előre megadott alakú függvény, a  $T$  csak a  $\psi_k(x)$  és  $\psi_{-k}(x)$  függvényektől függ. Változtassuk meg kis mértékben  $\psi_k$ -t és  $\psi_{-k}$ -t:

$$\psi_k \rightarrow \psi_k + \delta\psi_k \quad \psi_{-k} \rightarrow \psi_{-k} + \delta\psi_{-k}$$

Ekkor az  $F$ ,  $G$  és  $T$  is megváltozik, és (81)-ből a

$$\delta \frac{1}{1-T} = -\frac{\delta FG - F\delta G}{G^2}$$

összefüggést kapjuk. Szorozzuk meg mindkét oldalt  $G$ -vel:

$$G \delta \frac{1}{1-T} = -\delta F + \frac{F}{G} \delta G$$

Itt az  $\frac{F}{G}$  a (81) alapján a pontos  $T$  értéket adja meg.

$$G \delta \frac{1}{1-T} = -\delta F - \frac{1}{1-T} \delta G \quad (82)$$

Számoljuk ki  $\delta F$  és  $\delta G$  értékét!

$$\begin{aligned} \delta F &= -\frac{2k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ U(x') \psi_{-k}(x') + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x) \psi_{-k}(x) U(x') dx \right] \delta \psi_k dx' - \\ &- \frac{2k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ U(x) \psi_k(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x) U(x') \psi_k(x') dx' \right] \delta \psi_{-k} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta G &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-ikx'} U(x') \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) \psi_{-k}(x) dx \right] \delta \psi_k dx' + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{ikx} U(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi_k(x') dx' \right] \delta \psi_{-k} dx \end{aligned}$$

Írjuk ezt be (82)-be.

$$G \delta \frac{1}{1-T} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2k}{i} U(x') \xi(x') \right] \delta \psi_k dx' + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2k}{i} U(x) \zeta(x) \right] \delta \psi_{-k} dx$$

ahol

$$\xi(x') = \psi_{-k}(x') + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x) \psi_{-k}(x) dx - \frac{i}{2k(1-T)} e^{-ikx'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(x) \psi_{-k}(x) dx$$

és

$$\zeta(x) = \psi_k(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x-x') U(x') \psi_k(x') dx' - \frac{i}{2k(1-T)} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} U(x') \psi_k(x') dx'$$

Ha a (79) képletben felcseréljük  $x$ -et  $x'$ -vel és az így kapott  $\psi_{-k}(x')$  függvényt beírjuk  $\xi(x')$ -be, továbbá (74)-ből  $\psi_k(x)$ -t beírjuk  $\zeta(x)$ -be,  $G \delta \frac{1}{1-T}$  nullával

lesz egyenlő, azaz (80)-nak szélsőértéke van  $\psi_k(x)$  és  $\psi_{-k}(x)$ -nél. Ezért ha (80)-ba beírunk egy  $\psi_k(x)$ -től és  $\psi_{-k}(x)$ -től alig különböző  $\tilde{\psi}_k = \psi_k + \delta\psi_k$  és  $\tilde{\psi}_{-k} = \psi_{-k} + \delta\psi_{-k}$  függvényt és kiszámoljuk  $T$  értékét, az nagy pontossággal egyezni fog a valódi értékkel.

A Ritz- és Luttinger-Thomas-módszerben olyan függvényeknél kerestük a funkcionál szélsőértékét, amelyek tartalmaztak néhány szabadon választható paramétert. Az egyes módszerekben használt funkcionálok szélsőérték tulajdonságait felhasználva megválaszthattuk a paraméterek értékét úgy, hogy a legjobban közelítsék a valódi mozgást leíró függvényeket. A transzmissziós koeficiens kiszámításánál azonban nem ez a helyzet. A Ritz- és Luttinger-Thomas-módszerben a levezetés során a funkcionálban szereplő változófüggvényeket mind kicseréltük egy másik, az eredetitől kis mértékben különböző függvényekre, a transzmissziós koeficiens meghatározásánál azonban nem. Itt a funkcionálban benne maradt egy  $\frac{F}{G}$  szorzó, amely a valódi mozgást leíró függvényeket tartalmazza. Ezekben nem szerepel semmilyen szabadon választható paraméter. Ha egy  $\psi_k(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$  és  $\psi_{-k}(b_1, b_2, \dots, b_n, x)$  függvényt írunk a funkcionálba (ahol  $a_i$  és  $b_i$  szabadon választható paraméterek és  $i = 1, 2, \dots, n$ ), a szélső érték meghatározásához ismernünk kellene az eredeti  $\psi_k(x)$  és  $\psi_{-k}(x)$  függvényeket is. Mivel általában nem ismerjük ezeket, nem tudjuk használni a módszert az  $a_i$  és  $b_i$  paraméterek meghatározására. A Ritz- és Luttinger-Thomas-módszernél az  $I$  és  $Z$  funkcionálnak nincsen pontos fizikai jelentése, mindkettő csak segédmenyiség, míg a transzmissziós koeficiens kiszámításánál az  $\frac{1}{1-T}$ -nek határozott fizikai jelentése van, és ez az a mennyiség amit szeretnénk meghatározni.



## Irodalomjegyzék

- [1] Kósa András: *Variációszámítás*, Tankönyvkiadó, 1973, 167. oldal
- [2] Hraskó Péter: *Elméleti fizika I.*, JPTE Pécs, 1995, 62. oldal
- [3] Hraskó Péter: *Kvantummechanika*, jegyzet
- [4] Frank-Mises: *A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei I.*, Műszaki könyvkiadó, 1966
- [5] Jánossy-Gnädig-Tasnádi: *Vektorszámítás III.*, Tankönyvkiadó, 1983
- [6] Fényes Imre: *Modern fizikai kisenciklopédia*, Gondolat könyvkiadó, 1971
- [7] Landau-Lifsic: *Elméleti fizika I.*, Tankönyvkiadó, 1974