

Kontinuummechanika (óravázlat)

Készítette: Dr. Pere Balázs

Széchenyi István Egyetem
Alkalmazott Mechanika Tanszék

2019. szeptember 12.

Copyright ©2011-2019 Dr. Pere Balázs. Minden jog fenntartva.

Ez a dokumentum szabadon másolható és terjeszthető. Módosítása és kereskedelmi forgalomba kerülése csak a szerző írásbeli engedélyével lehetséges. (e-mail: pere.balazs@sze.hu)

Tartalomjegyzék

Jelölések	5
1. Kinematika	7
1.1. Anyagi pont és test helyzetének megadása	7
1.2. Elemi vonalszakasz, felület és térfogat alakváltozása	12
1.2.1. Elemi vonalszakasz megváltozása	12
1.2.2. Elemi felület megváltozása	16
1.2.3. Elemi térfogat megváltozása	18
1.3. A deformáció gradiens poláris felbontása	20
1.3.1. A deformáció gradiens VR poláris felbontása	22
1.3.2. A deformáció gradiens RU poláris felbontása	26
1.3.3. A nyújtó tenzorok sajátértékei és sajátvektorai közötti összefüggések	29
1.4. Alakváltozási tenzorok	30
1.4.1. Jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor	31
1.4.2. Green-Lagrange alakváltozási tenzor	32
1.4.3. További kezdeti konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok	33
1.4.4. Baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor	35
1.4.5. Euler-Almansi alakváltozási tenzor	36
1.4.6. További pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok	37
1.4.7. Alakváltozási tenzorok előretolása, visszahúzása	39
1.5. Alakváltozási tenzorok deviátoros felbontása	42
1.6. Merev test szerű elmozdulás és objektivitás	44
1.7. Időben változó alakváltozási mennyiségek	48
1.7.1. Idő szerinti deriválás	48
1.7.2. Sebességmező	51
1.7.3. Sebesség gradiens tenzor	52
1.8. Alakváltozási tenzorok idő szerinti objektív deriváltjai	55
2. Dinamika	58
2.1. Tömegmegmaradás	58
2.1.1. Tömeg	58
2.1.2. Tömeg-mérlegegyenlet	58
2.1.3. Integrálok idő szerinti deriváltja	58
2.2. Impulzus-tétel	58
2.2.1. Impulzus	58
2.2.2. Impulzus-tétel integrál alakja	58
2.2.3. Belső erők	58
2.2.4. Cauchy-féle feszültség tenzor	58
2.2.5. Impulzus-tétel differenciális alakja	58
2.3. Perdület-tétel	58
2.3.1. Perdület	58
2.3.2. Perdület-tétel integrál alakja	58
2.3.3. Perdület-tétel differenciális alakja	58
2.4. Energia-tétel, avagy a hőtan első főtétele	58
2.4.1. Energia	58
2.4.2. Energia-tétel integrál alakja	58
2.4.3. Celluláris (lokális) egyensúly, avagy az energia-tétel differenciális alakja	58
2.4.4. Belső energia	58
2.5. Entrópia-tétel, avagy a hőtan második főtétele	58
2.5.1. Reverzibilis, irreverzibilis folyamatok	58
2.5.2. Entrópia	58
2.5.3. Entrópia-tétel integrál alakja	58
2.5.4. Entrópia-tétel differenciális alakja	58
2.5.5. Clausius-Planck-egyenlőtlenség	58
2.6. Feszültség tenzorok	58

2.6.1.	Kirchhoff-féle feszültség	58
2.6.2.	I. Piola-Kirchhoff-féle feszültség	58
2.6.3.	Impulzus-tétel a kezdeti konfigurációban	58
2.6.4.	II. Piola-Kirchhoff-féle feszültség	58
2.6.5.	Biot-féle feszültség	58
2.7.	Helmholtz-féle szabadenergia	58
2.7.1.	Clausius-Duhem-egyenlőtlenség	58
2.7.2.	Belső paraméterek	58
2.7.3.	A hővezetés egyenlete	58
2.7.4.	A szabadenergia függvény általános szerkezete	58
3.	Anyagszerkezeti viselkedés	58
3.1.	Általános elvek????	58
3.2.	Egyszerű anyagmodellek	59
3.2.1.	Tisztán rugalmas elem	59
3.2.2.	Tisztán viszkózus elem	59
3.2.3.	Tisztán képlékeny elem????	59
3.3.	Összetett anyagmodellek	59
3.3.1.	Kelvin-Voigt modell	59
3.3.2.	Maxwell-modell	59
3.3.3.	Vegyes modell	59
3.4.	Anyagtörvények	59
3.4.1.	Objektivitás	59
	Tárgymutató	61
	Függelék	63
A.	Tenzoralgebra	63
A.1.	Vektorok	63
A.2.	Tenzorok	64
A.2.1.	Tenzorok szorzatainak determinánsa	64
A.3.	Harmadrendű tenzorok	64
A.4.	Negyedrendű tenzorok	64

Jelölések

$\text{adj}(\dots)$ mátrix adjungáltja

$\underline{\underline{a}}$ Euler-Almansi alakváltozási tenzor

$\underline{\underline{B}}$ Piola-féle alakváltozási tenzor

$\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor

$\tilde{\underline{\underline{b}}}$ a $\underline{\underline{b}}$ tenzor torzításos vagy deviátoros része

$\text{cof}(\dots)$ mátrix kofaktora

$\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor

$\underline{\underline{c}}$ Cauchy-féle alakváltozási tenzor

$\tilde{\underline{\underline{C}}}$ a $\underline{\underline{C}}$ tenzor torzításos vagy deviátoros része

$\vec{\chi}$ vektor-vektor függvény, a $\vec{r}$ és $\vec{R}$ között teremt kapcsolatot

δ_i^j Kronecker-szimbólum

$\det(\dots)$ mátrix determinánsa

$d\vec{A}$ elemi felület a kezdeti konfigurációban

$d\vec{a}$ elemi felület a pillanatnyi konfigurációban

dV elemi térfogat a kezdeti konfigurációban

dv elemi térfogat a pillanatnyi konfigurációban

$\underline{\underline{E}}$ Green-Lagrange alakváltozási tenzor

$\underline{\underline{e}}$ Euler-Almansi alakváltozási tenzor

$\underline{\underline{E}}^{(n)}$ általános Lagrange-féle alakváltozási tenzor

$\underline{\underline{e}}^{(n)}$ általános Euler-féle alakváltozási tenzor

$\varepsilon_{ijk}, \varepsilon^{ijk}$ Levi-Civita-szimbólum

$\vec{E}$ egységvektor a kezdeti konfigurációban

$\vec{e}$ egységvektor a pillanatnyi konfigurációban

$\vec{E}_I$ tenzor i -edik sajátvektora a kezdeti konfigurációban

$\vec{e}_i$ tenzor i -edik sajátvektora a pillanatnyi konfigurációban

$\phi(\dots)$ előretolás művelet

$\phi^{-1}(\dots)$ visszahúzás művelet

$\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens

Γ_{IJ}^K Christoffel-szimbólum a kezdeti konfigurációban

Γ_{ij}^k Christoffel-szimbólum a pillanatnyi konfigurációban

$\vec{G}^i$ kovariáns bázisvektor a kezdeti konfigurációban

$\vec{g}^i$ kovariáns bázisvektor a pillanatnyi konfigurációban

$\vec{G}_i$ kontravariáns bázisvektor a kezdeti konfigurációban

$\vec{g}_i$	kontravariáns bázisvektor a pillanatnyi konfigurációban
$\underline{\underline{H}}$	kezdeti konfigurációban értelmezett Hencky-féle alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{h}}$	pillanatnyi konfigurációban értelmezett Hencky-féle alakváltozási tenzor
$\underline{\underline{I}}$	egységtenzor
J	Jacobi-determináns, az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens determinánsa
$\underline{\underline{J}}_b$	a $\underline{\underline{b}}$ tenzor tisztán térfogatváltozást leíró része
$\underline{\underline{J}}_C$	a $\underline{\underline{C}}$ tenzor tisztán térfogatváltozást leíró része
$\underline{\underline{J}}_U$	az $\underline{\underline{U}}$ tenzor tisztán térfogatváltozást leíró része
$\underline{\underline{J}}_v$	az $\underline{\underline{v}}$ tenzor tisztán térfogatváltozást leíró része
λ_s	vonalelem arány vagy fajlagos nyúlás
λ_i, λ_I	nyújtó tenzor i -edik sajátértéke
$\underline{\underline{\Lambda}}$	A $\underline{\underline{v}}$ nyújtó tenzor a sajátvektorok bázisában
$\underline{\underline{\tilde{\Lambda}}}$	Az $\underline{\underline{U}}$ nyújtó tenzor a sajátvektorok bázisában
∇	Hamilton-féle (nabla) differenciál operátor a pillanatnyi konfigurációban
∇_0	Hamilton-féle (nabla) differenciál operátor a kezdeti konfigurációban
$\vec{N}$	felület normálvektora a kezdeti konfigurációban
$\vec{n}$	felület normálvektora a pillanatnyi konfigurációban
$\vec{N}_I$	tenzor i -edik egyre normált sajátvektora a kezdeti konfigurációban
$\vec{n}_i$	tenzor i -edik egyre normált sajátvektora a pillanatnyi konfigurációban
$\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{\tilde{Q}}}$	ortogonális transzformáció tenzora
$\underline{\underline{R}}$	ortogonális transzformáció, az elemi térfogat merev test szerű elfordulását írja le
$\vec{R}$	anyagi pont helyzete a kezdeti konfigurációban
$\vec{r}, \vec{r}(t)$	anyagi pont helyzete a pillanatnyi konfigurációban
$\underline{\underline{U}}$	poláris felbontás után a deformáció gradiens tisztán alakváltozást leíró része a kezdeti konfigurációban
$\underline{\underline{\tilde{U}}}$	az $\underline{\underline{U}}$ tenzor torzításos vagy deviátoros része
$\underline{\underline{v}}$	poláris felbontás után a deformáció gradiens tisztán alakváltozást leíró része a pillanatnyi konfigurációban
$\underline{\underline{\tilde{v}}}$	a $\underline{\underline{v}}$ tenzor torzításos vagy deviátoros része

1. Kinematika

1.1. Anyagi pont és test helyzetének megadása

A kinematika anyagok mozgásának leírásával foglalkozik, nem keresi a mozgás okát. A vizsgált anyagok lehetnek gázok, folyadékok és szilárd testek is. A továbbiakban a szilárd anyagok egy modelljével, a kontinuumokkal, azaz folytonos tömegeloszlású szilárd testek leírásával foglalkozunk. Feltételezzük, hogy a kontinuum anyagi pontok sokaságából áll, az anyagi pontok szorosan (hézagmentesen) egymás mellett helyezkednek el. Tekintsük egy test véges nagyságú tartományát, amelyet egy zárt felület határol. Ezt a tartományt, mint anyagi pontok halmazát jelöljük $\mathcal{B}$ -vel. A $\mathcal{B}$ egy tetszőleges anyagi pontját jelölje P ($P \in \mathcal{B}$). A háromdimenziós térben egy adott t időpillanatban minden anyagi ponthoz kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhető egy (x^1, x^2, x^3) számhármass, amelyet az anyagi pont koordinátáinak nevezünk. A hozzárendelést vagy leképezést jelölje κ . Ezek alapján

$$(x^1, x^2, x^3) = \kappa(P, t).$$

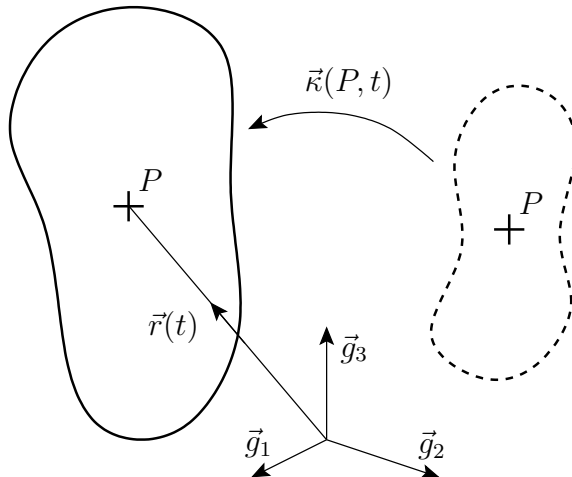
A számhármass egy hozzá kapcsolódó vonatkoztatási rendszerrel együtt adja meg az anyagi pont pontos helyét a t időpillanatban. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a tér, amelyben a test elhelyezkedik *euklideszi*¹. A vonatkoztatási rendszer legyen a $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ és $\vec{g}_3$ nem egy síkba eső vektorokból álló vektorhármass, amelyet szokás bázisvektoroknak is nevezni. Azt, hogy az x^1, x^2, x^3 koordináták és a $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ bázisvektorok egy adott időpillanathoz tartoznak, úgy is jelölhetjük, hogy $x^i = x^i(t)$ és $\vec{g}_i = \vec{g}_i(t)$, ahol $i = 1, 2, 3$. Ezek alapján egy adott t időpillanatban a P anyagi pontba mutató $\vec{r}$ helyvektor az

$$\vec{r}(t) = x^i(t) \vec{g}_i(t) \quad (1)$$

összeggel számítható². Szimbolikusan írhatjuk az

$$\vec{r}(t) = \vec{\kappa}(P, t) = \vec{\kappa}_t(P) \quad (2)$$

függvénykapcsolatot is, amely bár konkrét számításra alkalmatlan, jelzi hogy egy anyagi pont és egy számhármass (és a hozzá kapcsolódó bázis) kapcsolatáról van szó.



1. ábra. A testet alkotó anyagi pontok egy adott t időpillanatban történő hozzárendelése a tér egy három koordinátával megadott pontjához.

A (2) függvény inverze a $P = \vec{\kappa}_t^{-1}(\vec{r}(t))$ alakban írható.

Ha a $\mathcal{B}$ test mozgását (elmozdulását) szeretnénk leírni, legalább két különböző időpillanatban ismernünk kell a pontos helyzetét, azaz a testet alkotó P anyagi pontok helyzetét, mert a mozgást valamihez viszonyítanunk kell. Az egyik időpontot rögzítsük le, és jelöljük ezt a rögzített időpontot t_0 -val. A t_0 időpillanatban az anyagi pont helyvektorát jelölje

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) = x^i(t_0) \vec{g}_i(t_0) = X^I \vec{G}_I.$$

¹Nem euklideszi teret feltételezve a matematikai leírás egy kicsit bonyolultabb lenne. A tér amiben élünk nem euklideszi. Az euklideszi térrel történő közelítés a mérnöki gyakorlat szempontjából kielégítő pontosságú eredményeket szolgáltat.

²Az Einstein-féle összegzési konvenciónak megfelelően az azonos indexekre összegezni kell, például $x^i(t) \vec{g}_i(t) = \sum_{i=1}^3 x^i(t) \vec{g}_i(t)$.

Ezt szimbolikusan jelölhetjük az

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) = \vec{\kappa}(P, t_0) = \vec{\kappa}_0(P)$$

összefüggéssel is, ami maga után vonja, hogy $P = \vec{\kappa}_0^{-1}(\vec{R})$. A továbbiakban a t_0 időpillanathoz tartozó mennyiségeket általában nagy betűkkel fogjuk jelölni (beleértve az indexeket is), a tetszőleges t időpillanathoz tartozó mennyiségeket pedig kis betűkkel. A tetszőleges t időpillanatban a test helyzetét *pillanatnyi konfigurációnak* nevezzük, itt az egyes mennyiségek általában függvényei az időnek is. A t_0 időpillanatban a test helyzetét *kezdeti konfigurációnak* nevezzük. A kezdeti konfigurációban a rögzített t_0 idő miatt az egyes mennyiségek nem függenek az időtől.

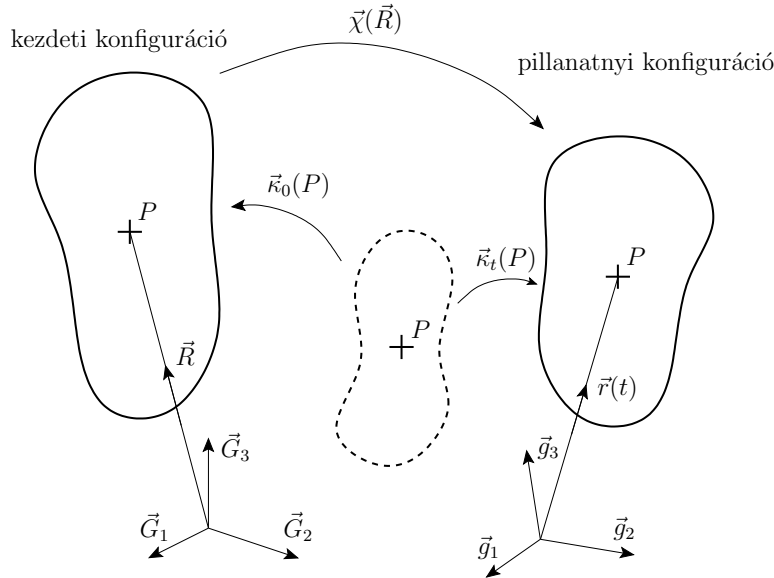
Az $\vec{r}$ és az $\vec{R}$ közötti kapcsolat leírható az

$$\vec{r}(t) = \vec{\kappa}_t(\vec{\kappa}_0^{-1}(\vec{R})) = \vec{\chi}(\vec{R}, t) = \vec{\chi}_t(\vec{R}) \quad (3)$$

függvénnyel is, az inverz kapcsolatot pedig az

$$\vec{R} = \vec{\kappa}_0(\vec{\kappa}_t^{-1}(\vec{r}(t))) = \chi_t^{-1}(\vec{r}(t)) \quad (4)$$

összefüggés adja meg. A későbbiekben nem fogjuk külön hangsúlyozni, hogy a $\vec{\chi}_t = \vec{\chi}_t(\vec{R}) = \vec{\chi}(\vec{R}, t)$ függvény még függ az időtől is, és jelölésére csak a $\vec{\chi} = \vec{\chi}(\vec{R})$ -t fogjuk használni.



2. ábra. A kezdeti és a pillanatnyi konfiguráció kapcsolatát leíró $\vec{\chi}$ függvény.

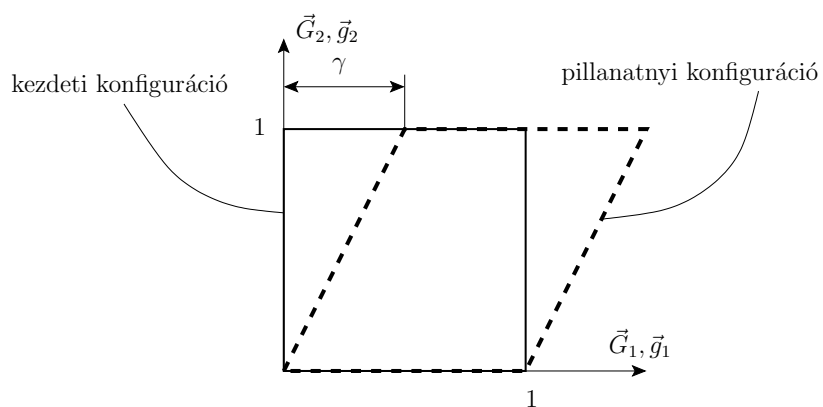
A kezdeti konfigurációt úgy is felfoghatjuk, hogy a test a t_0 időpillanatban „befagyott” az éppen aktuális állapotában, és a továbbiakban bármelyik t időpillanatot véve ugyanazt a mozdulatlan állapotot (térbeli helyzetet) látjuk. Vagyis $\vec{R} = \vec{R}(t) = \text{konstans}$. Ennek a későbbiekben azt lesz a következménye, hogy a kezdeti konfigurációban értelmezett $\vec{R}$ helyvektornak az idő szerinti deriváltja vagy deriváltjai nullával lesznek egyenlőek. Így tulajdonképpen mindig két testet vizsgálunk egy időben: a kezdeti konfigurációban „befagyott” testet, amelynek pontjait az $\vec{R}$ helyvektor adja meg, és a pillanatnyi konfigurációban lévő testet, amelynek pontjait az $\vec{r}(t)$ vektor adja meg. Ebből következően igaz lesz az

$$\vec{r}(t_0) = \vec{R}$$

egyenlőség is.

Feladatok

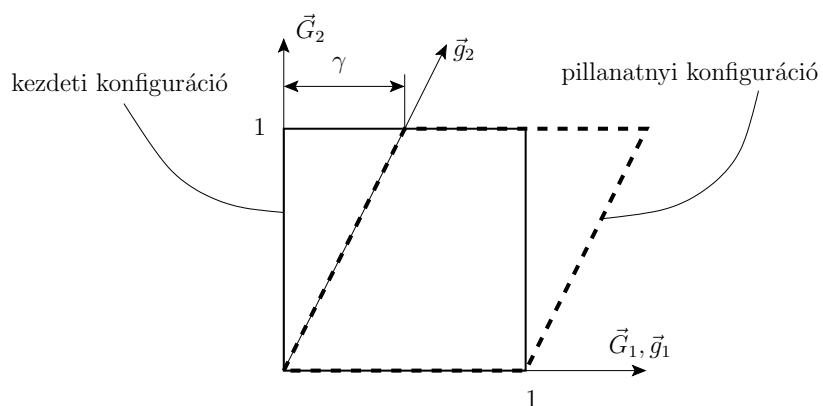
1. feladat (egyszerű nyírás). Adott egy egység oldalú kocka, mint kezdeti konfiguráció. A kocka alakváltozását a pillanatnyi konfigurációban a 3. ábra szemlélteti. A $\vec{g}_3$ irányba a kocka egyik pontja sem mozdul el. Határozza meg a kocka pontjainak elmozdulását leíró $\vec{\chi}$ függvényt az ábrán megadott bázisok segítségével!



3. ábra. Egyszerű nyírás.

♣

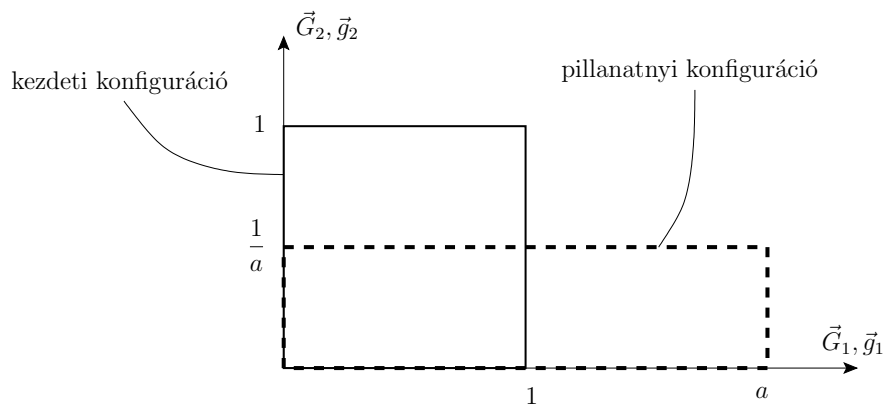
2. feladat. Oldja meg az 1. feladatot a 4. ábrán látható bázisokkal.



4. ábra. Egyszerű nyírás.

♣

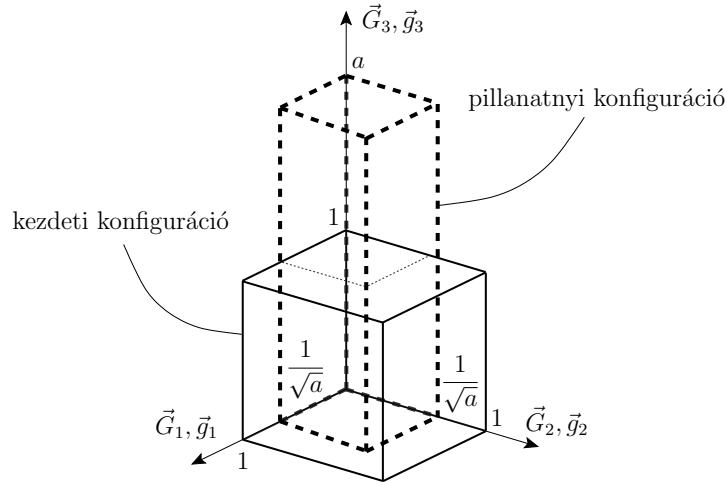
3. feladat (tisztá nyírás). Adott egy egység oldalú kocka, mint kezdeti konfigurációt. A kocka alakváltozását a pillanatnyi konfigurációban az 5. ábra szemlélteti. A $\vec{g}_3$ irányba a kocka egyik pontja sem mozdul el. Határozza meg a kocka pontjainak elmozdulását leíró $\vec{\chi}$ függvényt az ábrán megadott bázisok segítségével!



5. ábra. Tiszta nyírás.

♣

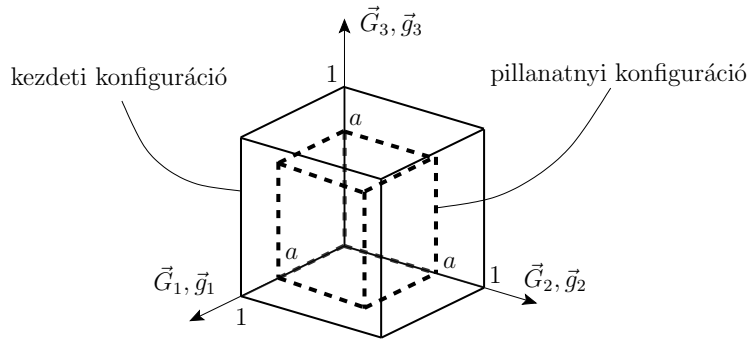
4. feladat. Adott egy egység oldalú kocka, mint kezdeti konfigurációt. A kocka alakváltozását a pillanatnyi konfigurációban a 6. ábra szemlélteti. Határozza meg a kocka pontjainak elmozdulását leíró χ függvényt az ábrán megadott bázisok segítségével!



6. ábra. A tiszta nyírás térbeli változata.

♣

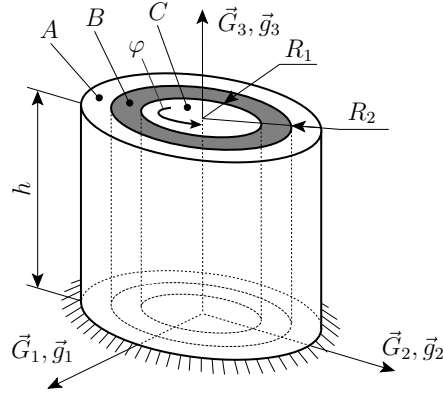
5. feladat. Adott egy egység oldalú kocka, mint kezdeti konfigurációt. A kocka alakváltozását a pillanatnyi konfigurációban a 7. ábra szemlélteti. Határozza meg a kocka pontjainak elmozdulását leíró χ függvényt az ábrán megadott bázisok segítségével!



7. ábra. Tiszta térfogatváltozás.

♣

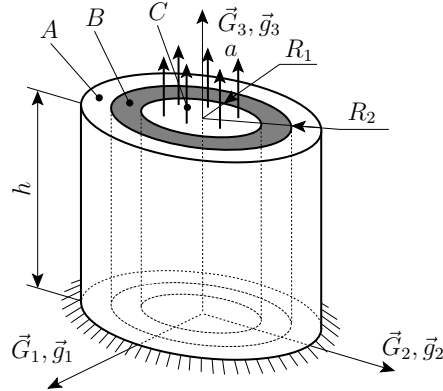
6. feladat. Adott a 8. ábra látható három testből felépített szerkezet. Mindhárom test forgásszimmetrikus, és szimmetriatengelyeik egybeesnek. A külső (A) és belső (C) testek merevnek tekinthetők, a B test pedig alakváltozásra képes test. A külső (A) testet mereven megfogluk, a belső (C) testet pedig a szimmetriatengely körül φ szöggel elforgattuk. Feltételezzük, hogy az A test a B testhez képes, valamint a B test a C testhez képes nem csúszik meg, valamint hogy a szimmetriatengelyre merőleges síkok az alakváltozás után is síkok maradnak. Feltételezzük továbbá, hogy a B test pontjai koncentrikus körökön mozdnak el, az elmozdulás nagysága pedig lineáris függvénye a szimmetriatengelytől mért távolságnak. Határozza meg a B test pontjainak elmozdulását leíró χ függvényt *alkalmasan választott* bázisok segítségével!



8. ábra. Csavarás.



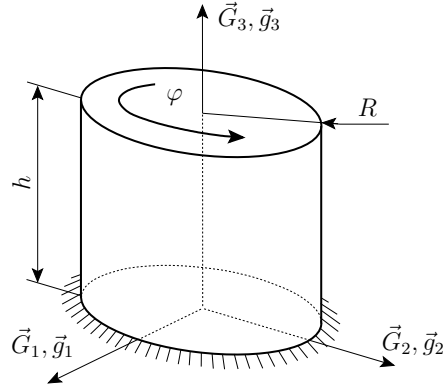
7. feladat. Adott a 9. ábra látható három testből felépített szerkezet. Mindhárom test forgásszimmetrikus, és szimmetriatengelyeik egybeesnek. A külső (A) és belső (C) testek merevnek tekinthetők, a B test pedig alakváltozásra képes test. A külső (A) testet mereven megfogluk, a belső (C) test pedig a szimmetriatengely irányába elmozdítottuk. Az elmozdulás értéke a . Feltételezzük, hogy az A test a B testhez képes, valamint a B test a C testhez képes nem csúszik meg. Feltételezzük továbbá, hogy a B test pontjai mind a szimmetriatengely irányába mozdulnak el, az elmozdulás nagysága pedig lineáris függvénye a szimmetriatengelytől mért távolságnak. Határozza meg a B test pontjainak elmozdulását leíró χ függvényt *alkalmasan választott* bázisok segítségével!



9. ábra. Forgásszimmetrikus nyírás.



8. feladat. Adott a 10. ábrán látható henger alakú alakváltozásra képes test. A test alsó felületét mereven megfogluk, a felső homlokfelületét pedig φ szöggel elforgattuk. Feltételezzük, hogy a henger keresztmetszetei az alakváltozás során síkok maradnak, alakjuk és nagyságuk sem változik meg, és a keresztmetszetek távolsága is változatlan marad. Feltételezzük továbbá, hogy a henger keresztmetszeteinek szögelfordulása a szimmetriatengely irányába mért távolság lineáris függvénye. Határozza meg a henger pontjainak elmozdulását leíró χ függvényt *alkalmasan választott* bázisok segítségével!



10. ábra. Csavarás.



9. feladat. Határozza meg $\vec{R} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})$ inverz leképezést az 1-8. feladatok esetére!

1.2. Elemi vonalszakasz, felület és térfogat alakváltozása

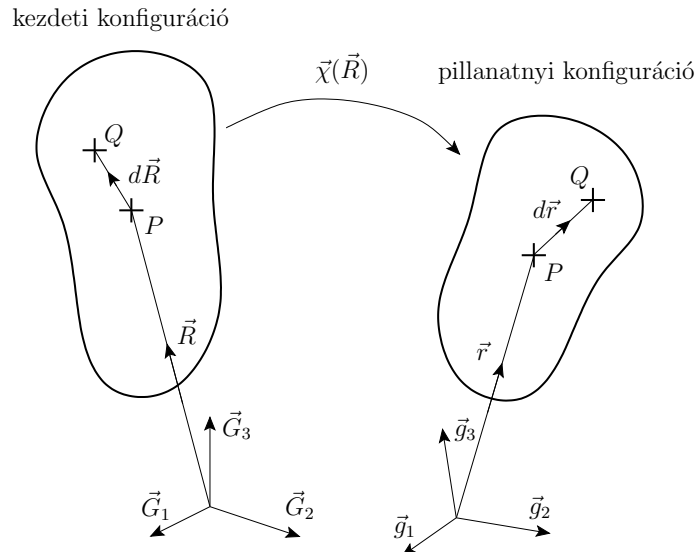
Az előző fejezetben bemutatott $\vec{\chi}$ függvény minden szükséges információt tartalmaz arra vonatkozóan, hogy a vizsgált test helyzetét, mozgását, alakváltozásait le tudjuk írni. A $\vec{\chi}$ függvény tulajdonképpen jóval több információt tartalmaz, mint amennyire szükségünk van az alakváltozások leírásához. A kérdés az, hogy mik azok a mennyiségek, amelyek csak az alakváltozással kapcsolatosak, és hogyan lehet ezeket kinyerni a $\vec{\chi}$ függvényből? Amire nincsen szükségünk, az a

1. merev test szerű elmozdulás (transzláció vagy térbeli eltolás) és a
2. merev test szerű elfordulás (rotáció vagy térbeli elforgatás).

Hogy valami támpontot kapjunk, vizsgáljuk meg azoknak az elemi geometriai alakzatoknak a test mozgása során bekövetkezett megváltozását, amely alakzatokra a későbbiekben szükségünk lehet például egy a testre vonatkozó integrál felírásánál. Ilyen alakzat a testben egy elemi vonalszakasz, egy elemi felület vagy egy elemi térfogat. A következő alfejezetekben ezeket vesszük végig.

1.2.1. Elemi vonalszakasz megváltozása

Tekintsük a $\mathcal{B}$ test P anyagi pontját, és annak *elemi környezetében* lévő Q anyagi pontját (lásd 11. ábra). A kezdeti



11. ábra. Elemi vonalszakasz megváltozása.

konfigurációban legyen a P pontba mutató helyvektor

$$\vec{R}_P = \vec{R}, \quad (5)$$

a Q pontba mutató helyvektor pedig az

$$\vec{R}_Q = \vec{R} + d\vec{R}, \quad (6)$$

ahol $d\vec{R} = dX^I \vec{G}_I$. A 11. ábra alapján nyilvánvaló, hogy

$$d\vec{R} = \vec{R}_Q - \vec{R}_P. \quad (7)$$

Most nézzük meg ugyanezen anyagi pontok helyét a pillanatnyi konfigurációban. Feltételezve hogy ismerjük a $\vec{\chi}$ leképezést, az

$$\vec{r}_P = \vec{\chi}(\vec{R}_P) = \vec{\chi}(\vec{R}) \quad (8)$$

és

$$\vec{r}_Q = \vec{\chi}(\vec{R}_Q) = \vec{\chi}(\vec{R} + d\vec{R}) \quad (9)$$

összefüggéseket kapjuk. Szintén a 11. ábráról olvashatjuk le a

$$d\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P \quad (10)$$

összefüggést, ahol $d\vec{r} = dx^i \vec{g}_i$. Helyettesítsük be a (10) egyenletbe a (8) és (9) vektorokat.

$$d\vec{r} = \vec{\chi}(\vec{R} + d\vec{R}) - \vec{\chi}(\vec{R}) \quad (11)$$

Vagyis fel tudunk írni egy függvénykapcsolatot a $d\vec{r}$, $d\vec{R}$ és $\vec{R}$ között. Ezt jelölhetnénk akár a $d\vec{r} = d\vec{r}(\vec{R}, d\vec{R})$ függvényrel is. Mivel $d\vec{R}$ az $\vec{R}$ elemi környezetében lévő vektor, érdemes sorba fejteni a (11) függvényt.

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{\chi}(\vec{R}) + \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} dX^J + \dots + \\ &+ \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ (\sum_1^3 k_i = n)}} \frac{1}{k_1! k_2! k_3!} \frac{\partial^n \vec{\chi}(\vec{R})}{(\partial X^1)^{k_1} (\partial X^2)^{k_2} (\partial X^3)^{k_3}} (dX^1)^{k_1} (dX^2)^{k_2} (dX^3)^{k_3} + \dots - \vec{\chi}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (12)$$

1. Feltevés (helyi hatások elve). *A P pont környezetének alakváltozását, így a $d\vec{r}$ vektort nem befolyásolják a P ponttól távolabb lévő anyagi pontoknál bekövetkező alakváltozások.*

Következmény. *Elegendő a (12) sorfejtésből csak a lineáris tagokat figyelembe venni, a magasabb fokú tagok hatása elhanyagolható.*

Ezek alapján írható, hogy

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{\chi}(\vec{R}) + \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} dX^J - \vec{\chi}(\vec{R}) = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} dX^J = \\ &= \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} \delta_K^J dX^K = \underbrace{\frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J}}_{\underline{\underline{F}}(\vec{R})} \cdot \underbrace{\vec{G}_K dX^K}_{d\vec{R}} \end{aligned}$$

vagy röviden

$$d\vec{r} = \underline{\underline{F}}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} \quad (13)$$

2. Definíció. Az

$$\underline{\underline{F}}(\vec{R}) = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \vec{\chi}(\vec{R}) \circ \underbrace{\frac{\partial}{\partial X^J} \vec{G}^J}_{\nabla_0} = \vec{\chi}(\vec{R}) \circ \nabla_0$$

tenzort *deformáció gradiens*nek nevezzük.

A 2. definícióban a ∇_0 differenciál operátor alsó nulla indexe arra utal, hogy a deriválást a kezdeti konfigurációban kell elvégezni. Szokásosak még a következő jelölések is a deformáció gradiensre:

$$\underline{\underline{F}}(\vec{R}) = \frac{\partial \vec{r}(\vec{R})}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \frac{\partial \vec{r}}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{R}},$$

ahol felhasználtuk a (3) jelölést. Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens egy másodrendű tenzor, vagyis egy homogén-lineáris vektor-vektor függvény.

Megjegyzés: Görbevonali koordináta-rendszerben az

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}(\vec{R}) &= \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R})}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \frac{\partial}{\partial X^J} (x^i \vec{g}_i) \circ \vec{G}^J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J + x^i \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial X^J} \circ \vec{G}^J = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J + x^i \frac{\partial x^k}{\partial X^J} \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial x^k} \circ \vec{G}^J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J + x^k \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \frac{\partial \vec{g}_k}{\partial x^i} \circ \vec{G}^J = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J + x^k \Gamma_{ki}^l \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \vec{g}_l \circ \vec{G}^J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J + x^k \Gamma_{ki}^l \frac{\partial x^l}{\partial X^J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J = \\ &= \frac{\partial x^l}{\partial X^J} \delta_l^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J + x^k \Gamma_{ki}^l \frac{\partial x^l}{\partial X^J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J = \frac{\partial x^l}{\partial X^J} (\delta_l^i + x^k \Gamma_{ki}^l) \vec{g}_i \circ \vec{G}^J \end{aligned}$$

összefüggés érvényes, ahol Γ_{kl}^i az úgynevezett Christoffel-féle szimbólum³. Egyenesvonalú koordináta-rendszerben a Γ_{kl}^i Christoffel-szimbólumok értéke nulla, ezért itt használhatjuk az

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$$

egyszerűbb alakot.

Most számoljuk ki a fordított összefüggést. A (7) egyenlet jobb oldalát fejezzük ki a pillanatnyi konfigurációban lévő $\vec{r}_P$ és $\vec{r}_Q$ vektorokkal, felhasználva a (4) inverz $\vec{\chi}^{-1}$ függvényt.

$$d\vec{R} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{r}_Q) - \vec{\chi}^{-1}(\vec{r}_P) \quad (14)$$

A 11. ábra jelöléseivel a P és Q helyvektorokra a pillanatnyi konfigurációban az

$$\vec{r}_P = \vec{r}$$

és

$$\vec{r}_Q = \vec{r} + d\vec{r}$$

vektorok adódnak. Ezeket behelyettesítve a (14) egyenletbe egy újabb, a (11) összefüggéshez hasonló, de a $d\vec{R}$ -re kifejezett egyenletet kapunk.

$$d\vec{R} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{\chi}^{-1}(\vec{r}) \quad (15)$$

Az előzőekhez hasonlóan végezzük el a (15) sorba fejtését.

$$\begin{aligned} d\vec{R} &= \vec{\chi}^{-1}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} dx^j + \dots + \\ &+ \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ (\sum_1^3 k_i = n)}} \frac{1}{k_1! k_2! k_3!} \frac{\partial^n \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})}{(\partial x^1)^{k_1} (\partial x^2)^{k_2} (\partial x^3)^{k_3}} (dx^1)^{k_1} (dx^2)^{k_2} (dx^3)^{k_3} + \dots - \vec{\chi}^{-1}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (16)$$

A feltételezve hogy érvényes a helyi hatások elve, a (16) összefüggésből elhagyhatóak a lineárisnál magasabb fokú tagok.

$$d\vec{R} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} dx^j - \vec{\chi}^{-1}(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} dx^j =$$

³ A Γ_{kl}^i Christoffel-szimbólumokat például a $\frac{\partial \vec{g}_k}{\partial x^i} = \Gamma_{ki}^l \vec{g}_l$, vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Gamma_{ki}^l = \frac{\partial \vec{g}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{g}^l$ összefüggéssel is számíthatjuk.

$$= \frac{\partial \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} \delta_k^j dx^k = \underbrace{\frac{\partial \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j}}_{\underline{\underline{\tilde{F}}}(\vec{r})} \underbrace{\vec{g}^j \cdot \vec{g}_k dx^k}_{d\vec{r}},$$

vagy röviden

$$d\vec{R} = \underline{\underline{\tilde{F}}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (17)$$

Az $\underline{\underline{\tilde{F}}}$ szintén egy másodrendű tenzor, és hasonló szerepet játszik, mint a (13) egyenletben a deformáció gradiens. A kapcsolat az $\underline{\underline{F}}$ és $\underline{\underline{\tilde{F}}}$ között könnyen tisztázható. Szorozzuk meg a (13) mindkét oldalát balról az $\underline{\underline{\tilde{F}}}$ tenzorral.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{F}}} \cdot / \quad d\vec{r} &= \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R} \\ \Downarrow \\ \underline{\underline{\tilde{F}}} \cdot d\vec{r} &= \underline{\underline{\tilde{F}}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R} \end{aligned}$$

Ezt összevetve a (17) összefüggéssel belátható, hogy $\underline{\underline{\tilde{F}}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$, ahol $\underline{\underline{I}}$ az egységtenzor. Ezek után a (17) összefüggést írhatjuk az

$$d\vec{R} = \underline{\underline{F}}^{-1}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (18)$$

alakban is. Az $\underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-1}(\vec{r})$ tenzort a deformáció gradiens tenzor inverzének nevezzük. Szokásosak még a következő jelölések a deformáció gradiens inverzére:

$$\underline{\underline{F}}^{-1}(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} \circ \vec{g}^j = \vec{\chi}^{-1}(\vec{r}) \circ \nabla = \frac{\partial \vec{R}(\vec{r})}{\partial x^j} \circ \vec{g}^j = \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^j} \circ \vec{g}^j = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}},$$

ahol felhasználtuk a (4) jelölést. Itt a ∇ differenciál operátor a pillanatnyi konfigurációban történő deriválást jelenti.

Megjegyzés: Görbevonatú koordinátarendszerben az

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^{-1}(\vec{r}) &= \frac{\partial \vec{\chi}^{-1}(\vec{r})}{\partial x^j} \circ \vec{g}^j = \frac{\partial}{\partial x^j} (X^I \vec{G}_I) \circ \vec{g}^j = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j + X^I \frac{\partial \vec{G}_I}{\partial x^j} \circ \vec{g}^j = \\ &= \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j + X^I \frac{\partial X^K}{\partial x^j} \frac{\partial \vec{G}_I}{\partial X^K} \circ \vec{g}^j = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j + X^K \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \frac{\partial \vec{G}_K}{\partial X^I} \circ \vec{g}^j = \\ &= \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j + X^K \Gamma_{KI}^L \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \vec{G}_L \circ \vec{g}^j = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j + X^K \Gamma_{KL}^I \frac{\partial X^L}{\partial x^j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j = \\ &= \frac{\partial X^L}{\partial x^j} \delta_L^I \vec{G}_I \circ \vec{g}^j + X^K \Gamma_{KL}^I \frac{\partial X^L}{\partial x^j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j = \frac{\partial X^L}{\partial x^j} (\delta_L^I + X^K \Gamma_{KL}^I) \vec{G}_I \circ \vec{g}^j \end{aligned}$$

összefüggés érvényes, ahol a Γ_{KL}^I Christoffel-féle szimbólumokat a kezdeti konfigurációban kell kiszámítani⁴. Egyenesvonalú koordinátarendszerben a Γ_{KL}^I Christoffel szimbólumok értéke nulla, ezért itt használhatjuk az

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j$$

egyszerűbb alakot.

Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiensnek akkor és csakis akkor létezik az $\underline{\underline{F}}^{-1}$ inverze, ha a determinánsa nem nulla, vagyis $\det(\underline{\underline{F}}) \neq 0$.

Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens egy úgynevezett kétpont tenzor. A kétpont tenzorokra az jellemző, hogy két koordinátarendszer között teremtenek kapcsolatot, bázisuk a két koordinátarendszer bázisainak diadikus szorzataként állítható elő. Összefoglalva mondhatjuk, hogy a $d\vec{R}$ vagy $d\vec{r}$ elemi vonalszakasz megváltozását az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens segítségével egyértelműen le tudjuk írni (lásd a (13) és (18) egyenletek).

* * *

Ezen a ponton még kevésbe látszik, de a deformáció gradiens az alakváltozások, sőt később a feszültségállapot és az anyagtörvények felírásánál és számításánál is kulcsszerepet fog játszani. A deformációgradiens az az alapváltozó lesz a kontinuummechanikai feladatnál, amelynek meghatározásával a feladatot megoldottnak tekinthetjük, ugyanis segítségével minden más mennyiséget származtatni tudunk. Az $\underline{\underline{F}}$ a deriválások miatt kevesebb információt tartalmaz, mint a $\vec{\chi}$ függvény.

⁴A Γ_{KL}^I Christoffel szimbólumokat például a $\frac{\partial \vec{G}_K}{\partial X^I} = \Gamma_{KI}^L \vec{G}_L$, vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Gamma_{KI}^L = \frac{\partial \vec{G}_K}{\partial X^I} \cdot \vec{G}^L$ összefüggéssel is számíthatjuk.

Feladatok

10. feladat. Számítsa ki az 1-8. feladatok megoldása során kapott $\bar{\chi}$ függvényekből kiindulva az egyes alakváltozásokhoz tartozó $\underline{F}$ deformáció gradienseket! Írja fel az egyes deformáció gradiens tenzorok mátrixát a megfelelő bázisok segítségével.

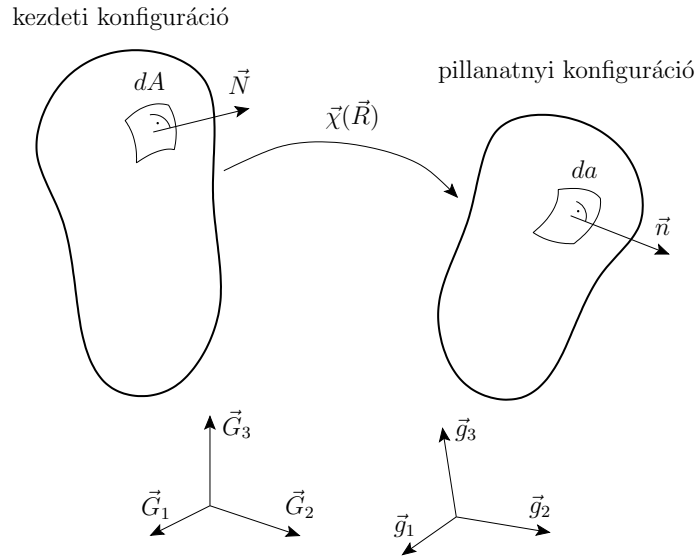
11. feladat. Számítsa ki a 9. feladat megoldása során kapott $\bar{\chi}^{-1}$ függvényekből kiindulva az egyes alakváltozásokhoz tartozó deformáció gradiensek $\underline{F}^{-1}$ inverzét! Írja fel az egyes inverz deformáció gradiens tenzorok mátrixát a megfelelő bázisok segítségével.

12. feladat. Ellenőrizze, hogy a 10. feladatban kapott deformáció gradiensek valóban az inverzei-e a 11. feladatban kapott eredményeknek.

13. feladat. Adott a $d\vec{R} = dX^2 \vec{G}_2$ elemi vonalszakasz a kezdeti konfigurációban. Számítsa ki a pillanatnyi konfigurációba leképezett $d\vec{r}$ vektort az 1. feladatban és a 2. feladatban kapott deformáció gradiensek felhasználásával is. Hasonlítsa össze az eredményeket.

1.2.2. Elemi felület megváltozása

Az elemi vonalszakasz után most vizsgáljuk egy elemi dA felület alakváltozás során bekövetkezett megváltozását. Legyen kezdetben (a kezdeti konfigurációban) a dA elemi felület normálvektora $\vec{N}$. Ugyanezen felületelemet a pillanatnyi konfigurációban (alakváltozás után) jelölje da , normálvektora pedig legyen az $\vec{n}$ (lásd a 12. ábrát).



12. ábra. Elemi felület megváltozása.

Mindkét normálvektorra legyen igaz, hogy

$$|\vec{N}| = |\vec{n}| = 1$$

A dA és da elemi felületek skalár mennyiségek, de az $\vec{N}$ és $\vec{n}$ normálvektorok segítségével bevezethetünk vektor felületelemeket is a következő módon:

$$d\vec{A} = \vec{N} dA$$

és

$$d\vec{a} = \vec{n} da.$$

Nyilvánvaló, hogy $dA = |d\vec{A}|$ illetve $da = |d\vec{a}|$. A feladat a $d\vec{A}$ és a $d\vec{a}$ elemi felületvektorok közötti kapcsolat megkeresése azon feltétel mellett, hogy az alakváltozást leíró $\underline{F}$ deformáció gradiens invertálható, vagyis $\det(\underline{F}) \neq 0$.

Kiindulásként írjuk fel az elemi felületeket két-két vektor (elemi vonalszakasz) vektoriális szorzataként (lásd a 13. ábrát). Ha az elemi felületek elegendően kicsik, akkor az ily módon történő felírással csak kis hibát követünk el. Ha az elemi felületek mérete tart a nullához, akkor az elkövetett hiba értéke is nullához konvergál.



13. ábra. Elemi felületek előállítása két vektor vektoriális szorzataként.

A 13. ábra alapján írhatjuk, hogy

$$d\vec{A} = d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2 \quad (19)$$

és

$$d\vec{a} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2. \quad (20)$$

Az elemi vonalszakaszok transzformációját az 1.2.1. fejezet (13) összefüggése alapján számíthatjuk. Helyettesítsük be a (13) összefüggést a (20) egyenletbe.

$$d\vec{a} = \left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_1 \right) \times \left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_2 \right).$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienssel jobbról.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} = \left(\left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_1 \right) \times \left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_2 \right) \right) \cdot \underline{\underline{F}}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt jobbról egy olyan tetszőleges $d\vec{L}$ vektorral, amely nem esik egy síkba a $d\vec{R}_1$ és $d\vec{R}_2$ vektorokkal.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{L} = \left(\left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_1 \right) \times \left(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}_2 \right) \right) \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{L}$$

Felhasználva az $\left((\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}) \times (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}) \right) \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{c}) = \det(\underline{\underline{A}}) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ azonosságot az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens kiemelhető a jobb oldalból.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{L} = \det(\underline{\underline{F}}) \left(d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2 \right) \cdot d\vec{L}$$

A jobb oldalon zárójelben álló tag nem más, mint a kezdeti konfigurációban értelmezett, (19) összefüggéssel számított elemi felület.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{L} = \det(\underline{\underline{F}}) d\vec{A} \cdot d\vec{L}$$

Mivel a $d\vec{L}$ vektort tetszőlegesnek vettük fel, az egyenlőség csak akkor igaz, ha a $d\vec{L}$ vektort balról szorzó vektor mindkét oldalon megegyezik.

$$d\vec{a} \cdot \underline{\underline{F}} = \det(\underline{\underline{F}}) d\vec{A}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt jobbról a deformáció gradiens $\underline{\underline{F}}^{-1}$ inverzével.

$$d\vec{a} = \det(\underline{\underline{F}}) d\vec{A} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$$

Vegyük mindkét oldal transzponáltját azért, hogy a $d\vec{A}$ vektor a jobb oldali kifejezés végére kerüljön.

$$d\vec{a} = \det(\underline{\underline{F}}) \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot d\vec{A}$$

A bal oldal transzponálása csak annyit eredményez, hogy a $d\vec{a}$ vektor sorvektorból oszlopvektor lesz, de mivel ennek itt különösebb hatása nincsen, nem különböztetjük meg őket egymástól. A deformáció gradiens determinánsának jelölésére vezessünk be egy új jelölést. Mivel a deformáció gradiens tulajdonképpen egy leképezés Jacobi mátrixaként is felfogható a megfelelő bázisok felhasználásával, ezért az $\underline{\underline{F}}$ determinánsát Jacobi determinánsnak is nevezhetjük, és a

$$J = \det(\underline{\underline{F}}) \quad (21)$$

jelölést fogjuk rá használni a továbbiakban. Így megkaptuk a

$$d\vec{a} = J \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot d\vec{A} \quad (22)$$

vagy

$$d\vec{a} = J \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \vec{N} dA \quad (23)$$

végeredményt, amely *Nanson-formulaként* is ismert. Az inverz összefüggés a fentiekhez hasonló módon is megkapható, de talán egyszerűbb a (22) eredményből kiindulni. Szorozzuk meg a (22) egyenletet balról a deformáció gradiens $\underline{\underline{F}}^T$ transzponáltjával, majd osszuk el az egyenletet a J Jacobi determinánssal.

$$d\vec{A} = J^{-1} \underline{\underline{F}}^T \cdot d\vec{a} \quad (24)$$

vagy

$$d\vec{A} = J^{-1} \underline{\underline{F}}^T \cdot \vec{n} da \quad (25)$$

A kezdeti konfigurációban adott $d\vec{A}$, és a pillanatnyi konfigurációban neki megfelelő $d\vec{a}$ elemi felületek közötti kapcsolatot a (22) vagy (23) összefüggések, az inverz kapcsolatot pedig a (24) vagy (25) összefüggések adják meg.

* * *

A lineáris algebrából ismert egy mátrix inverzének kiszámítására szolgáló

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{\text{adj}(\underline{\underline{A}})}{\det(\underline{\underline{A}})} \quad (26)$$

összefüggés, ahol az $\text{adj}(\underline{\underline{A}})$ a mátrix adjungáltját jelenti. Mivel a tenzorok egy adott bázisban (koordinátarendszerben vagy koordináta-rendszerekben) vett reprezentációja egy négyzetes mátrix, ezért a (26) egyenlet érvényes tenzorokra is. Helyettesítsük be a (26) összefüggést a (21) képlettel együtt a (22) Nanson-formulába.

$$d\vec{a} = \det(\underline{\underline{F}}) \frac{(\text{adj}(\underline{\underline{F}}))^T}{\det(\underline{\underline{F}})} \cdot d\vec{A},$$

majd az egyszerűsítések után a

$$d\vec{a} = (\text{adj}(\underline{\underline{F}}))^T \cdot d\vec{A} \quad (27)$$

adódik. Vagyis a deformáció gradiens tenzor adjungáltja teremt kapcsolatot a kezdeti és pillanatnyi konfigurációban lévő felületelemek között. Szokásos még a mátrix un. kofaktorának (cofactor) használata is.

$$\text{cof}(\underline{\underline{F}}) = (\text{adj}(\underline{\underline{F}}))^T$$

A mátrix adjungáltjának transzponáltja jelenti a mátrix kofaktorát. Az új jelöléssel a (27) összefüggést az

$$d\vec{a} = \text{cof}(\underline{\underline{F}}) \cdot d\vec{A} \quad (28)$$

alakban is írhatjuk.

Feladatok

14. feladat. Számítsa ki az 1., 3., 4. és 5. feladatokban szereplő egységoldalú kocka oldallapjainak területét az alakváltozás után a Nanson-formula segítségével. Ellenőrizze a számítást elemi matematikai módszerekkel.

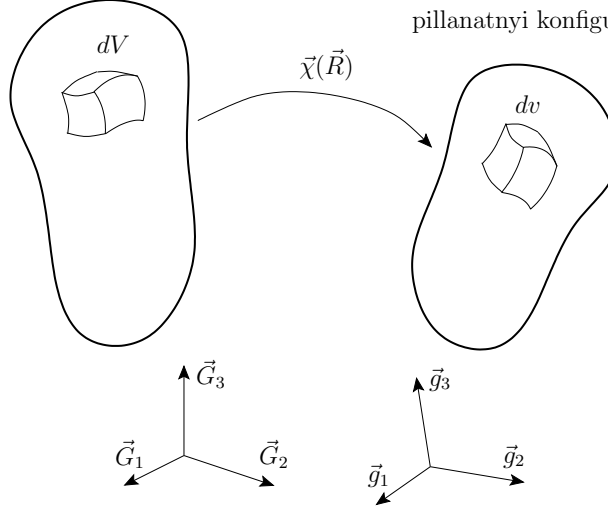
15. feladat. Vezesse le a (24) összefüggést a 13. ábra jelöléseinek felhasználásával.

1.2.3. Elemi térfogat megváltozása

Egy test egy tetszőleges elemi térfogatát jelölje dV a kezdeti konfigurációban, és dv a pillanatnyi konfigurációban (lásd a 14. ábra).

kezdeti konfiguráció

pillanatnyi konfiguráció



14. ábra. Elemi térfogat alakváltozás során bekövetkező megváltozása.

A két elemi térfogat közötti kapcsolat megadásához írjuk fel részletesebben az elemi térfogatoakat. Feltételezve, hogy mind a dV , mind a dv elegendően kicsinyek, mindkét elemi térfogat kellő pontossággal állítható elő az egy csúcsból kiinduló, az oldallapok metszetgörbéit érintő vektorok úgynevezett vegyes szorzataiként (lásd a 15. ábra).



15. ábra. Elemi térfogat előállítása a kezdeti és pillanatnyi konfigurációban.

Legyen $d\vec{R}_1$, $d\vec{R}_2$ és $d\vec{R}_3$ a kezdeti konfigurációban lévő dV elemi térfogat egy csúcsából kiinduló, az oldallapok metszetgörbéit érintő három vektor (feltételezzük, hogy a dV térfogat nem elfajuló, azaz $dV \neq 0$). Hasonló módon legyen $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$ és $d\vec{r}_3$ a pillanatnyi konfigurációban lévő dv elemi térfogat egy csúcsából kiinduló, az oldallapok metszetgörbéit érintő három vektor. Feltételezzük, hogy az alakváltozást leíró deformáció gradiens invertálható, azaz $\det(\underline{F}) \neq 0$. A fentiek alapján a dV és dv térfogatelemek a

$$dV = (d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2) \cdot d\vec{R}_3 \quad (29)$$

és

$$dv = (d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_3 \quad (30)$$

szorzatokkal számíthatóak. A (13) összefüggés felhasználásával a (30) egyenlet jobb oldala átalakítható.

$$dv = \left((\underline{F} \cdot d\vec{R}_1) \times (\underline{F} \cdot d\vec{R}_2) \right) \cdot (\underline{F} \cdot d\vec{R}_3)$$

Az $\left((\underline{A} \cdot \vec{a}) \times (\underline{A} \cdot \vec{b}) \right) \cdot (\underline{A} \cdot \vec{c}) = \det(\underline{A}) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ azonosság felhasználásával az $\underline{F}$ deformáció gradiens kiemelhető a jobb oldalból.

$$dv = \det(\underline{F}) (d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2) \cdot d\vec{R}_3$$

A (29) összefüggést behelyettesítve a jobb oldalon lévő vegyes szorzat helyébe, és alkalmazva a (21) jelölést a

$$dv = J dV \quad (31)$$

összefüggést kapjuk. Az inverz kapcsolatot a (31) egyenlet mindkét oldalának a J Jacobi-determinánssal történő osztásával kapható meg.

$$dV = J^{-1}dv \quad (32)$$

Összefoglalva kijelenthetjük, hogy a (31) és (32) összefüggések teremtenek kapcsolatot a kezdeti konfigurációban adott dV elemi térfogat és a pillanatnyi konfigurációban adott dv elemi térfogat között.

Feladatok

16. feladat. Számítsa ki az 1., 3., 4. és 5. feladatokban szereplő egységoldalú kocka térfogatát az alakváltozás után a $dv = J dV$ képlet segítségével. Ellenőrizze a számítást elemi matematikai módszerekkel.

17. feladat. Vezesse le a (32) összefüggést a 15. ábra jelöléseinek felhasználásával.

1.3. A deformáció gradiens poláris felbontása

Mint ahogy már az 1.2 fejezetben utaltunk rá, a $\chi(\vec{R})$ függvény több információt tartalmaz a vizsgált test mozgásáról, mint amennyire az alakváltozások leírásához szükség van. Az $\underline{F}$ deformáció gradiens a $\chi(\vec{R})$ függvény deriválásával áll elő, vagyis a $\chi(\vec{R})$ függvényben lévő konstansok, amelyek a test pontjainak helyét határozzák meg, eltűnnek. Ezekre az alakváltozások leírásához szerencsére nincs is szükség, ugyanis ezek a test merev test szerű translációs mozgásával lennének kapcsolatosak. Van azonban még egy másik merev test szerű mozgással kapcsolatos információ is a deformáció gradiensben, amelyet célszerű leválasztani róla. Ez a merev test szerű elfordulás, vagy rotáció. A rotáció deformáció gradiensről történő leválasztásához a következő matematikából ismert tételből indulunk ki.

3. Tétel (poláris felbontás tétele). *Legyen $\underline{F}$ egy valós, nem elfajuló ($\det(\underline{F}) > 0$) tenzor. Az $\underline{F}$ mindig felbontható egy $\underline{R}$ ortogonális transzformáció⁵ (vagy tenzor), és egy $\underline{U}$ vagy $\underline{v}$ szimmetrikus, pozitív definit tenzor szorzatára a következő módon:*

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U}, \quad (33)$$

vagy

$$\underline{F} = \underline{v} \cdot \underline{R}. \quad (34)$$

Vagyis a deformáció egy $\underline{R}$ forgatás és egy $\underline{U}$ vagy $\underline{v}$ nyújtás (stretch) egymásutánjából áll össze.

4. Definíció. A (33) egyenletben szereplő $\underline{U}$ szimmetrikus, pozitív definit tenzort *jobboldali* vagy *anyagi nyújtó tenzornak* nevezzük (material stretch tensor).

A „jobboldali” jelző arra utal, hogy a (33) felbontásban az $\underline{R}$ forgató tenzort jobbról szorozzuk az $\underline{U}$ tenzonnal. Az „anyagi” jelző arra utal, hogy az $\underline{U}$ tenzor a kezdeti konfigurációban értelmezett (lásd lejjebb).

5. Definíció. A (34) egyenletben szereplő $\underline{v}$ szimmetrikus, pozitív definit tenzort *baloldali* vagy *térbeli nyújtó tenzornak* nevezzük.

A „baloldali” jelző arra utal, hogy a (34) felbontásban az $\underline{R}$ forgató tenzort balról szorozzuk a $\underline{v}$ tenzonnal. Az „térbeli” jelző arra utal, hogy az $\underline{v}$ tenzor a pillanatnyi konfigurációban értelmezett (lásd lejjebb).

A poláris felbontás szemléltetésére szorozzuk meg a (33) tenzoregyenlet mindkét oldalát a $d\vec{R}$ vektorral jobbról. A (13) alapján az egyenlet mindkét oldala a $d\vec{r}$ vektort adja eredményül, de a jobb oldalon az $\underline{U}$ tenzonnal történő szorzás után kapunk egy részeredményt.

$$\underbrace{\underline{F} \cdot d\vec{R}}_{d\vec{r}} = \underline{R} \cdot \underbrace{\underline{U} \cdot d\vec{R}}_{d\vec{r}} \quad (35)$$

A $d\vec{R}$ vektor egy un. köztes konfigurációban értelmezett vektor. Az $\underline{F}$ deformáció gradiens kétpont tenzor, azaz két koordináta-rendszer között teremt kapcsolatot. Legyen az $\underline{R}$ elforgatás szintén kétpont tenzor. Ekkor viszont az

⁵ Akkor nevezzük az $\underline{R}$ transzformációt ortogonálisnak, ha igaz az $\underline{R}^T = \underline{R}^{-1}$ egyenlőség. Ebből következik, hogy $\underline{R}^T \cdot \underline{R} = \underline{R} \cdot \underline{R}^T = \underline{I}$, ahol $\underline{I}$ az egységtenzor. Könnyen belátható még a $\det(\underline{R}) = 1$ egyenlőség is.

$\underline{\underline{U}}$ már egyértelműen a kezdeti konfigurációhoz kötött tenzort fog jelenteni. Írjuk fel a (35) egyenletet a megfelelő bázisok feltüntetésével is:

$$\underbrace{\left(F_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J\right) \cdot \left(dR^K \vec{G}_K\right)}_{dr^i \vec{g}_i} = \underbrace{\left(R_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J\right) \cdot \left(U_{.L}^K \vec{G}_K \circ \vec{G}^L\right) \cdot \left(dR^M \vec{G}_M\right)}_{d\vec{R}^K \vec{G}_K},$$

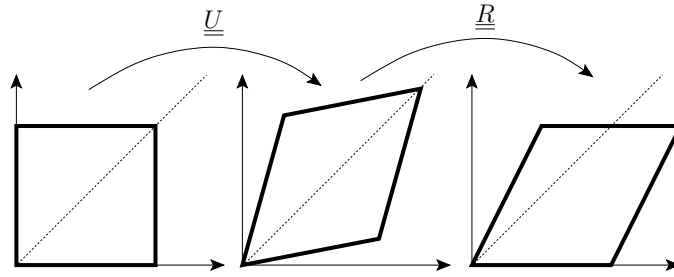
ahol $F_{.J}^i$ az 1.2.1. fejezet $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} (\delta_l^i + x^k \Gamma_{kl}^i) \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$ képletének tömörebb $\underline{\underline{F}} = F_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$ jelöléséből származik. A $\vec{g}^n$ ($n = 1, 2, 3$) vektorokkal jobbról történő szorzás után az

$$F_{.K}^n dR^K = R_{.J}^n U_{.M}^J dR^M$$

egyenletet kapjuk, amelyet a dR^M illetve dR^K koordináták elhagyása és index átnevezések után az

$$F_{.K}^n = R_{.J}^n U_{.K}^J$$

mátrixegyenletként is tudunk írni⁶. Az $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ felbontást egy elemi kocka deformációján a 16. ábra szemlélteti.



16. ábra. Elemi kocka alakváltozásának $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ felbontása.

Az ábrán jól látható, hogy az $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ felbontás során először nyújtjuk az elemi kockát, majd utána merev test szerűen elforgatjuk.

Most vizsgáljuk meg a (34) poláris felbontást. Szorozzuk meg a (34) mindkét oldalát a $d\vec{R}$ vektorral jobbról. A (13) alapján az egyenlet mindkét oldala a $d\vec{r}$ vektort adja eredményül, de a jobb oldalon az $\underline{\underline{R}}$ tenzorral történő szorzás után kapunk egy részeredményt.

$$\underbrace{\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{R}} \cdot d\vec{R}}_{d\vec{r}} \quad (36)$$

A $d\vec{r}$ vektor egy un. köztes konfigurációban értelmezett vektor. Itt a korábbiakkal összevetve a $\underline{\underline{v}}$ egyértelműen a pillanatnyi konfigurációhoz kötött tenzort fog jelenteni. (Ezért jelöltük már eleve kis betűvel.) Írjuk fel a (36) egyenletet a megfelelő bázisok feltüntetésével is:

$$\underbrace{\left(F_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J\right) \cdot \left(dR^K \vec{G}_K\right)}_{dr^i \vec{g}_i} = \underbrace{\left(v_{.j}^i \vec{g}_i \circ \vec{g}^j\right) \cdot \left(R_{.L}^k \vec{g}_k \circ \vec{G}^L\right) \cdot \left(dR^M \vec{G}_M\right)}_{d\vec{r}^k \vec{g}_k},$$

ahol $F_{.J}^i$ az (1.2.1). fejezet $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} (\delta_l^i + x^k \Gamma_{kl}^i) \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$ képletének tömörebb $\underline{\underline{F}} = F_{.J}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$ jelöléséből származik. A $\vec{g}^n$ ($n = 1, 2, 3$) vektorokkal jobbról történő szorzás után az

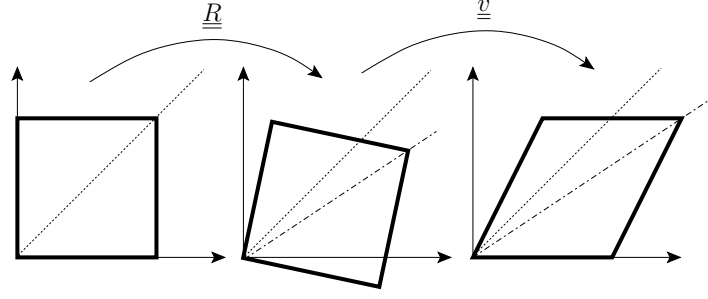
$$F_{.K}^n dR^K = v_{.j}^n R_{.M}^j dR^M$$

egyenletet kapjuk, amelyet a dR^M illetve dR^K koordináták elhagyása és index átnevezések után az

$$F_{.K}^n = v_{.j}^n R_{.K}^j$$

⁶Ha nem írjuk ki a tenzor bázisát, az alsó illetve felső indexnél érdemes jelölni, hogy melyik az első és melyik a második index. Ezt a második index elé írt ponttal tesszük meg. Ennek a mátrixok transzponálásának jelölésénél van szerepe, pl. $(F_{.J}^i)^T = F_J^i$.

mátrixegyenletként is tudunk írni. Az $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ felbontást egy elemi kocka deformációján a 17. ábra szemlélteti.



17. ábra. Elemi kocka alakváltozásának $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ felbontása.

Az ábrán látható, hogy az $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ felbontás során először merev test szerűen elforgatjuk az elemi kockát, majd utána nyújtjuk.

1.3.1. A deformáció gradiens VR poláris felbontása

A következőkben bemutatjuk a poláris felbontás menetét, és az $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzor valamint az $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ jobb- és baloldali nyújtó tenzorok kiszámításának módszerét. Induljunk ki abból, hogy csak az $\underline{\underline{F}}$ tenzort ismerjük. Szorozzuk meg az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienst jobbról a saját maga transzponáltjával, és alkalmazzuk még az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens (34) poláris felbontását

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{v}}^T = \underline{\underline{v}}^2, \quad (37)$$

ahol felhasználtuk hogy a $\underline{\underline{v}}$ szimmetrikus. A $\underline{\underline{v}}^2$ az $\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}^T = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}$ szorzást jelöli. A $\underline{\underline{v}}^2$ birtokában meg kellene határoznunk a $\underline{\underline{v}}$ tenzort, vagyis az $\underline{\underline{v}}^2$ tenzoron egy gyökkvonást kellene elvégeznünk. Egy tenzorból gyököt vonni nem tartozik az egyszerű műveletek közé, azonban ha diagonalizáljuk a tenzort, azaz áttaszformáljuk egy olyan alakba, hogy csak a tenzor mátrixának főátlójában maradjon nullától különböző elem, a gyökkvonás a főátlóban álló elemeken elvégzett gyökkvonással lesz egyenértékű. A tenzor mátrixának diagonalizálását a sajátérték feladat megoldásán keresztül oldhatjuk meg. Keressük meg az(oka)t a λ_i^2 skalár számo(ka)t és a hozzá(juk) tartozó $\vec{e}_i$ vektor(oka)t, amely(ek)re igaz a következő egyenlet:

$$\underline{\underline{v}}^2 \cdot \vec{e}_i = \lambda_i^2 \vec{e}_i. \quad (38)$$

Az elkövetkező számítások során továbbra is alkalmazzuk az Einstein-féle összegzési konvenciót, de a λ_i sajátértékek indexére nem végzünk el összegzést, és az index értéke mindig meg fog egyezni a mellette álló mennyiség i indexével. Ezt úgy fogjuk jelölni, hogy a λ_i sajátérték indexe álló betűvel lesz jelölve, a másik mennyiség indexe pedig dőlt betűvel (lásd a (38) egyenlet). Rendezzük át a (38) egyenletet felhasználva az $\vec{e}_i = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e}_i$ összefüggést.

$$(\underline{\underline{v}}^2 - \lambda_i^2 \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{e}_i = \vec{0} \quad (39)$$

Ez tulajdonképpen egy homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszer, amelynek csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha a zárójelben álló együttható mátrix determinánsa nulla, azaz

$$\det(\underline{\underline{v}}^2 - \lambda_i^2 \underline{\underline{I}}) = 0. \quad (40)$$

A determináns kiszámításához szükség van a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzor koordinátáira. Írjuk fel ezeket a $\vec{g}_i \circ \vec{g}^j$ bázisban.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}}^2 &= \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}^T = (v^i_{\cdot j} \vec{g}_i \circ \vec{g}^j) \cdot (v^k_{\cdot l} \vec{g}^l \circ \vec{g}_k) = v^i_{\cdot j} v^k_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \underbrace{\vec{g}^j \cdot \vec{g}^l}_{g^{jl}} \circ \vec{g}_k = \\ &= v^i_{\cdot j} v^k_{\cdot l} g^{jl} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k = v^i_{\cdot j} v^{jk} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k = v^i_{\cdot j} v^{jk} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l g_{lk} = v^i_{\cdot j} v^j_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l = (v^2)_{\cdot l}^i \vec{g}_i \circ \vec{g}^l \end{aligned} \quad (41)$$

Mivel az $\underline{\underline{F}}$, és ezen keresztül a $\underline{\underline{v}}$ is adott, csak a λ_i^2 értékének megfelelő megválasztásával érhető el a (40) egyenlőség teljesülése. A (40) egyenletben szereplő determináns kifejtése után az ún. karakterisztikus egyenletet kapjuk.

$$\lambda_i^6 - (v^2)_I \lambda_i^4 + (v^2)_{II} \lambda_i^2 - (v^2)_{III} = 0, \quad (42)$$

ahol $(v^2)_I$, $(v^2)_{II}$ és $(v^2)_{III}$ a $\underline{v}$ tenzor első, második és harmadik skalár invariánsait jelentik. Az egyes skalár invariánsokra a következő kifejezések adódnak:

$$(v^2)_I = \text{tr}(\underline{v}),$$

ahol a $\text{tr}(\underline{v})$ (trace - nyom) a $\underline{v}$ tenzor mátrixának főatlójában álló elemek összegét jelenti. Az invariáns kifejezés itt azt jelenti, hogy a bázis megválasztásától függetlenül mindig ugyan azt az összeget fogjuk kapni. A második skalár invariánst a

$$(v^2)_{II} = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{v}^2))^2 - \text{tr}(\underline{v}^2 \cdot \underline{v}^2) \right)$$

összefüggéssel számíthatjuk ki. A harmadik skalárinvariánsra a $\underline{v}^2$ determinánsát kapjuk⁷.

$$(v^2)_{III} = \det(\underline{v}^2).$$

A (42) karakterisztikus egyenlet a λ_i^2 -re nézve egy harmadfokú algebrai egyenlet, amelynek mindig van három (nem feltétlenül különböző) megoldása. Mivel a $\underline{v}$ tenzor szimmetrikus és pozitív definit, a megoldások mindig valósak lesznek és értékük mindig nullánál nagyobbra adódik. A (42) karakterisztikus egyenlet λ_i^2 ($i = 1, 2, 3$) megoldásai a $\underline{v}^2$ tenzor sajátértékei lesznek. Minden egyes λ_i^2 sajátértékhez létezik egy $\vec{e}_i$ sajátvektor, amelyet a (39) homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszerbe történő visszahelyettesítéssel kapunk meg. Mivel az egyenletrendszer homogén, a megoldásai, amik az $\vec{e}_i$ vektor koordinátáit jelentik, csak egy konstans erejéig határozottak. Többszörös multiplicitású gyökök esetén több konstans is megjelenik, ahol a konstans(ok) értéke szabadon megválasztható. Végezzük el a sajátvektorok egyre normálását. A normált sajátvektorokat jelölje $\vec{n}_i$.

$$\vec{n}_i = \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|} \quad (43)$$

Könnyen belátható, hogy igaz lesz az

$$\underline{v}^2 \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^2 \vec{n}_i \quad (44)$$

egyenlet is. Igazolható, hogy a sajátvektorok (az $\vec{e}_i$ és az $\vec{n}_i$ is) merőlegesek egymásra. Szorozzuk meg a (44) egyenletet balról az $\vec{n}_j$ ($i \neq j$) sajátvektorral, majd ezután szorozzuk meg a j -edik sajátértékre felírt sajátérték egyenletet balról az $\vec{n}_i$ ($i \neq j$) sajátvektorral.

$$\vec{n}_j \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^2 \vec{n}_j \cdot \vec{n}_i, \quad (45)$$

és

$$\vec{n}_i \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_j = \lambda_j^2 \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j. \quad (46)$$

Vonjuk ki egymásból a (45) és (46) egyenleteket.

$$\vec{n}_j \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_i - \vec{n}_i \cdot \underline{v}^2 \cdot \vec{n}_j = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \vec{n}_j \cdot \vec{n}_i$$

Mivel a $\underline{v}^2$ tenzor szimmetrikus, az egyenlet bal oldala mindig null értéket vesz fel. Az $i \neq j$ feltétel miatt az elfajuló esetektől eltekintve igaz az $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$ feltétel is, vagyis a jobb oldal csak akkor lesz nulla, ha $\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = 0$, azaz a sajátvektorok merőlegesek egymásra. Ezt általánosan, a (43) egyenletet is figyelembe véve az

$$\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \quad (47)$$

egyenlőséggel is kifejezhetjük. Az $\vec{n}_i$ sajátvektorok reciprok vektorait az

$$\vec{n}^1 = \vec{n}_2 \times \vec{n}_3, \quad \vec{n}^2 = \vec{n}_3 \times \vec{n}_1 \quad \text{és} \quad \vec{n}^3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

képletekkel számíthatjuk. Tömören írható a

$$\vec{n}^k = \varepsilon^{ijk} \vec{n}_i \times \vec{n}_j \quad (48)$$

⁷Általánosan mondhatjuk, hogy egy $\underline{A}$ tenzor skalár invariánsai az $A_I = \text{tr}(\underline{A})$, $A_{II} = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{A}))^2 - \text{tr}(\underline{A}^2) \right)$ és $A_{III} = \frac{1}{6} \left((\text{tr}(\underline{A}))^3 - 3\text{tr}(\underline{A}^2) \text{tr}(\underline{A}) + 2\text{tr}(\underline{A}^3) \right) = \det(\underline{A})$ összefüggésekkel számíthatók. De ez csak egy lehetséges választás, mivel a skalár invariánsok skalár-skalár függvényei is skalár invariánsok lesznek.

összefüggés, ahol

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{az } i, j \text{ és } k \text{ páros permutációi esetén, ha } i \neq j \neq k \neq i, \\ -1 & \text{az } i, j \text{ és } k \text{ páratlan permutációi esetén, ha } i \neq j \neq k \neq i, \\ 0 & \text{ha } i = j \text{ vagy } j = k \text{ vagy } k = i. \end{cases}$$

az un. Levi-Civita-szimbólum. Szorozzuk meg a (48) egyenletet jobbról az $\vec{n}_p$ sajátvektorral skalárisan.

$$\vec{n}^k \cdot \vec{n}_p = \varepsilon^{ijk} (\vec{n}_i \times \vec{n}_j) \cdot \vec{n}_p \quad (49)$$

A normált sajátvektorok ortogonális tulajdonsága miatt

$$\varepsilon_{ijp} = (\vec{n}_i \times \vec{n}_j) \cdot \vec{n}_p,$$

ahol

$$\varepsilon_{ijp} = \begin{cases} 1 & \text{az } i, j \text{ és } p \text{ páros permutációi esetén, ha } i \neq j \neq p \neq i, \\ -1 & \text{az } i, j \text{ és } p \text{ páratlan permutációi esetén, ha } i \neq j \neq p \neq i, \\ 0 & \text{ha } i = j \text{ vagy } j = p \text{ vagy } p = i. \end{cases}$$

Ekkor a reciprok vektorra érvényes

$$\vec{n}^k \cdot \vec{n}_p = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijp} = \delta_p^k \quad (50)$$

összefüggést kapjuk, amely tulajdonképpen a reciprok vektor definíciója. Összevetve ezt a (47) egyenlettel következik, hogy az $\vec{n}_i$ sajátvektor azonosan egyenlő a saját maga reciprok vektorával, azaz az $\vec{n}^i$ vektorral.

A $\underline{\underline{v}}^2$ diagonalizálásához szorozzuk meg a (44) egyenletet balról az $\vec{n}^j$ sajátvektorral skalárisan

$$\vec{n}^j \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^2 \vec{n}^j \cdot \vec{n}_i = \lambda_i^2 \delta_i^j, \quad (51)$$

majd szorozzuk meg az egyenletet balról $\vec{g}_j$ -vel és jobbról $\vec{g}^i$ -vel diadikusan.

$$\vec{g}_j \circ \vec{n}^j \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \vec{n}_i \circ \vec{g}^i = \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i \quad (52)$$

Könnyen belátható, hogy a bal oldalt balról szorzó $\vec{g}_j \circ \vec{n}^j$ tenzor inverze a bal oldalt jobbról szorzó $\vec{n}_i \circ \vec{g}^i$ tenzornak. Szorozzuk össze az említett két tenzort.

$$(\vec{g}_j \circ \vec{n}^j) \cdot (\vec{n}_i \circ \vec{g}^i) = \vec{g}_j \circ \underbrace{\vec{n}^j \cdot \vec{n}_i}_{\delta_i^j} \circ \vec{g}^i = \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i = \underline{\underline{I}},$$

vagyis mivel a szorzatuk az egységtenzor, tényleg egymás inverzei. Vezessük be a

$$\underline{\underline{Q}} = \vec{n}_i \circ \vec{g}^i \quad (53)$$

és

$$\underline{\underline{Q}}^{-1} = \vec{g}_j \circ \vec{n}^j, \quad (54)$$

valamint az

$$\underline{\underline{\Lambda}}^2 = \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} = \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i \quad (55)$$

jelöléseket. Legyen a $\vec{g}^i$ egy ortonormált bázis. Ez esetben az (55) tenzor mátrixa a $\vec{g}_j \circ \vec{g}^i$ bázisban diagonális lesz, azaz csak a főátlóban lesznek nullától különböző elemek, amik nevezetesen a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzor sajátértékei

$$[\underline{\underline{\Lambda}}^2] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix},$$

valamint a $\underline{\underline{Q}}$ tenzor $\vec{g}_j \circ \vec{g}^i$ bázisban felírt mátrixának egyes oszlopaiban a $\vec{n}_i$ sajátvektorok helyezkednek el. Ekkor a $\underline{\underline{Q}}$ inverzére a $\underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{Q}}^T$ összefüggést kapjuk, vagyis ortonormált bázis esetén a $\underline{\underline{Q}}$ egy ortogonális transzformációt (elforgatást) jelent. Az (52) egyenletet a fenti jelölésekkel a tömörebb

$$\underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\Lambda}}^2, \quad (56)$$

vagy

$$\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\Lambda}}^2$$

alakban is írhatjuk. Ezzel tulajdonképpen a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzort, és vele együtt az $\vec{n}_i$ sajátvektorait transzformáljuk át úgy, hogy a tenzor diagonális legyen a $\vec{g}_j \circ \vec{g}^i$ bázisban. Hogy ezt jobban lássuk, az indexátnevezések után helyettesítsük be a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzor (41) alakját az (52) képletbe.

$$\begin{aligned} \vec{g}_j \circ \vec{n}^j \cdot (v_{.l}^k v_{.m}^l \vec{g}_k \circ \vec{g}^m) \cdot \vec{n}_i \circ \vec{g}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i \\ &\Downarrow \\ \underbrace{(\vec{n}^j \cdot \vec{g}_k)}_{(Q^{-1})_{.k}^j} v_{.l}^k v_{.m}^l \underbrace{(\vec{g}^m \cdot \vec{n}_i)}_{Q_{.i}^m} \vec{g}_j \circ \vec{g}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i \\ &\Downarrow \\ ((Q^{-1})_{.k}^j v_{.l}^k v_{.m}^l Q_{.i}^m) \vec{g}_j \circ \vec{g}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{g}_j \circ \vec{g}^i, \end{aligned}$$

ahol

$$Q_{.i}^m = \vec{g}^m \cdot (\vec{n}_j \circ \vec{g}^j) \cdot \vec{g}_i = (\vec{g}^m \cdot \vec{n}_j) \circ \underbrace{(\vec{g}^j \cdot \vec{g}_i)}_{\delta_i^j} = \vec{g}^m \cdot \vec{n}_i,$$

és

$$(Q^{-1})_{.k}^j = \vec{g}^j \cdot (\vec{g}_i \circ \vec{n}^i) \cdot \vec{g}_k = \underbrace{(\vec{g}^j \cdot \vec{g}_i)}_{\delta_i^j} \circ (\vec{n}^i \cdot \vec{g}_k) = \vec{n}^j \cdot \vec{g}_k.$$

Az $\vec{n}_i$ és $\vec{n}^j$ sajátvektorok és reciprok sajátvektorok ismeretében az (53) és (54) összefüggésekkel a $\underline{\underline{Q}}$ és $\underline{\underline{Q}}^{-1}$ kiszámítható, majd a $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ meghatározható. A $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ -ből a $\underline{\underline{\Lambda}}$ gyökvonás útján állítható elő

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \sqrt{\underline{\underline{\Lambda}}^2}.$$

A gyökvonást a $\vec{g}_j \circ \vec{g}^i$ bázisban úgy tudjuk elvégezni, hogy a főátlóban álló elemekből külön-külön gyököt vonunk

$$[\underline{\underline{\Lambda}}] = \left[\sqrt{\underline{\underline{\Lambda}}^2} \right] = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

A $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ és a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzorok ugyan abban a koordinátarendszerben diagonálisak, ezért a sajátvektor rendszerük is megegyezik. Ha a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzort előállítottuk, akkor az inverz transzformációval, azaz a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzort balról $\underline{\underline{Q}}$ -val és jobbról $\underline{\underline{Q}}^{-1}$ tenzorral szorozva a $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzor előállítható

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{v}}.$$

Ebből következik, hogy $\underline{\underline{v}}$ és $\underline{\underline{v}}^2$ sajátvektorai is megegyeznek.

A $\underline{\underline{v}}^2$ diagonalizálásának lehetséges egy másik megközelítése is. Az (51) egyenletet szorozzuk balról az $\vec{n}_j$ és jobbról az $\vec{n}^i$ vektorokkal diadikusan.

$$\underbrace{\vec{n}_j \circ \vec{n}^j}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \underbrace{\vec{n}_i \circ \vec{n}^i}_{\underline{\underline{I}}} = \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{n}_j \circ \vec{n}^i \quad (57)$$

Mivel az $\vec{n}_i \circ \vec{n}^i$ szorzat az egységtenzorral egyenlő, tulajdonképpen nem csináltunk semmit a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzorral, a sajátvektorai változatlanok maradtak, de kicseréltük a bázisát $\vec{g}_j \circ \vec{g}^i$ -ről $\vec{n}_j \circ \vec{n}^i$ -re. A $\underline{\underline{v}}^2$ tenzor viszont a sajátvektorainak a bázisában diagonális, és ahogy a jobb oldalból látszik a főátlóban a sajátértékek vannak. Helyettesítsük be a (41) összefüggést az (57) képletbe.

$$\begin{aligned} \vec{n}_j \circ \vec{n}^j \cdot (v_{.l}^k v_{.m}^l \vec{g}_k \circ \vec{g}^m) \cdot \vec{n}_i \circ \vec{n}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{n}_j \circ \vec{n}^i \\ &\Downarrow \\ (\vec{n}^j \cdot \vec{g}_k) (v_{.l}^k v_{.m}^l) (\vec{g}^m \cdot \vec{n}_i) \vec{n}_j \circ \vec{n}^i &= \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{n}_j \circ \vec{n}^i \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\left((Q^{-1})^j_{.k} v^k_{.l} v^l_{.m} Q^m_{.i} \right) \vec{n}_j \circ \vec{n}^i = \lambda_i^2 \delta_i^j \vec{n}_j \circ \vec{n}^i$$

Sokszor előnyös a $\underline{\underline{v}}$ tenzort a sajátvektorainak a koordináta-rendszerében felírni

$$\underline{\underline{v}} = \lambda_i \vec{n}_i \circ \vec{n}^i. \quad (58)$$

Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens poláris felbontásából csak az $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzor előállítás van hátra. Szorozzuk be a (34) egyenletet balról a $\underline{\underline{v}}$ tenzor inverzével.

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{v}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}$$

Ezzel a $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó és $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzorok is előálltak, vagyis elvégeztük az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ poláris felbontását.

1.3.2. A deformáció gradiens RU poláris felbontása

A következőkben a deformáció gradiens $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ poláris felbontását végezzük el. Mivel a poláris felbontás gondolatmenete nagyon hasonló mint a $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ felbontás esete, a felbontást csak vázlatosan, a különbségeket kiemelve végezzük el. Szorozzuk meg az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienst balról a saját maga transzponáltjával.

$$\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^T \cdot \underbrace{\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^2, \quad (59)$$

ahol felhasználtuk, hogy az $\underline{\underline{U}}$ tenzor szimmetrikus. Az $\underline{\underline{U}}^2$ az $\underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}}$ szorzást jelöli. A $\underline{\underline{U}}^2$ birtokában meg kellene határozunk a $\underline{\underline{v}}$ tenzort, vagyis az $\underline{\underline{v}}^2$ tenzoron egy gyökkvonást kellene elvégeznünk. Ehhez végezzük el az $\underline{\underline{U}}^2$ diagonalizálását. Első lépésként oldjuk meg az

$$\underline{\underline{U}}^2 \cdot \vec{E}_I = \lambda_I^2 \vec{E}_I$$

sajátérték feladatot, azaz keressük meg azokat a λ_I sajátértékeket, amelyek mellett az $\vec{E}_I$ vektorok koordinátái meghatározhatóak az

$$(\underline{\underline{U}}^2 - \lambda_I^2 \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{E}_I = \vec{0}$$

homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszerből. Ez az egyenletrendszer csak akkor oldható meg, ha

$$\det(\underline{\underline{U}}^2 - \lambda_I^2 \underline{\underline{I}}) = 0.$$

A determináns részletes kifejtéséhez szükség van az $\underline{\underline{U}}^2$ koordinátáira a $\vec{G}_I \circ \vec{G}^J$ bázisban.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}}^2 &= \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{U}} = \left(U_J^I \vec{G}^J \circ \vec{G}_I \right) \cdot \left(U_L^K \vec{G}_K \circ \vec{G}^L \right) = U_J^I U_L^K \vec{G}^J \circ \underbrace{\vec{G}_I \cdot \vec{G}_K}_{G_{IK}} \circ \vec{G}^L = \\ &= U_J^I U_L^K G_{IK} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = U_{JK} U_L^K \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = U_{JK} U_L^K \vec{G}_I \circ \vec{G}^L G^{IJ} = U_{.K}^I U_{.L}^K \vec{G}_I \circ \vec{G}^L = (U^2)_{.L}^I \vec{G}_I \circ \vec{G}^L \end{aligned} \quad (60)$$

A determináns kifejtése után a

$$\lambda_I^6 - (U^2)_I \lambda_I^4 + (U^2)_{II} \lambda_I^2 - (U^2)_{III} = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, amely egy harmadfokú algebrai egyenletet jelent a λ_I^2 sajátértékekre. A karakterisztikus egyenletben az egyes skalárinvariánsokra az

$$(U^2)_I = \text{tr}(\underline{\underline{U}}^2),$$

$$(U^2)_{II} = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{\underline{U}}^2))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{U}}^2) \right)$$

és

$$(U^2)_{III} = \det(\underline{\underline{U}}^2)$$

mennyiségek adódnak. Az egyenletrendszer megoldásaként a λ_I^2 sajátértékeket és az $\vec{E}_I$ sajátvektorokat kapjuk. Az egyre normált sajátvektorokat jelölje $\vec{N}_I$.

$$\vec{N}_I = \frac{\vec{E}_I}{|\vec{E}_I|} \quad (61)$$

Könnyen belátható, hogy igaz lesz az

$$\underline{\underline{U}}^2 \cdot \vec{N}_I = \lambda_I^2 \vec{N}_I \quad (62)$$

egyenlet is. A korábbiakhoz hasonlóan igazolható, hogy a sajátvektorok (az $\vec{E}_I$ és az $\vec{N}_I$ is) merőlegesek egymásra. Ezt általánosan, a (61) egyenletet is figyelembe véve az

$$\vec{N}_I \cdot \vec{N}_J = \begin{cases} 1 & \text{ha } I = J, \\ 0 & \text{ha } I \neq J. \end{cases} \quad (63)$$

egyenlőséggel is kifejezhetjük. Az $\vec{N}_I$ sajátvektorok reciprok vektorait az

$$\vec{N}^1 = \vec{N}_2 \times \vec{N}_3, \quad \vec{N}^2 = \vec{N}_3 \times \vec{N}_1 \quad \text{és} \quad \vec{N}^3 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$$

képletekkel számíthatjuk. Tömören írható a

$$\vec{N}^K = \varepsilon^{IJK} \vec{N}_I \times \vec{N}_J \quad (64)$$

összefüggés is. Szorozzuk meg ezt az egyenletet jobbról az $\vec{N}_P$ sajátvektorral skalárisan.

$$\vec{N}^K \cdot \vec{N}_P = \varepsilon^{IJK} (\vec{N}_I \times \vec{N}_J) \cdot \vec{N}_P \quad (65)$$

A normált sajátvektorok ortogonális tulajdonsága miatt

$$\varepsilon_{IJP} = (\vec{N}_I \times \vec{N}_J) \cdot \vec{N}_P.$$

Ekkor a reciprok vektorra érvényes

$$\vec{N}^K \cdot \vec{N}_P = \varepsilon^{IJK} \varepsilon_{IJP} = \delta_P^K \quad (66)$$

összefüggést kapjuk, amely tulajdonképpen a reciprok vektor definíciója. Összevetve ezt a (63) egyenlettel következik, hogy az $\vec{N}_I$ sajátvektor azonosan egyenlő a saját maga reciprok vektorával, azaz az $\vec{N}^I$ vektorral.

Az $\underline{\underline{U}}^2$ diagonalizálásához szorozzuk meg a (62) egyenletet balról az $\vec{N}^J$ sajátvektorral skalárisan

$$\vec{N}^J \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \vec{N}_I = \lambda_I^2 \vec{N}^J \cdot \vec{N}_I = \lambda_I^2 \delta_I^J, \quad (67)$$

majd szorozzuk meg az egyenletet balról $\vec{G}_J$ -vel és jobbról $\vec{G}^I$ -vel diadikusan.

$$\vec{G}_J \circ \vec{N}^J \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \vec{N}_I \circ \vec{G}^I = \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I \quad (68)$$

Könnyen belátható, hogy a bal oldalt balról szorzó $\vec{G}_J \circ \vec{N}^J$ tenzor inverze a bal oldalt jobbról szorzó $\vec{N}_I \circ \vec{G}^I$ tenzornak. Szorozzuk össze az említett két tenzort.

$$(\vec{G}_J \circ \vec{N}^J) \cdot (\vec{N}_I \circ \vec{G}^I) = \vec{G}_J \circ \underbrace{\vec{N}^J \cdot \vec{N}_I}_{\delta_I^J} \circ \vec{G}^I = \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I = \vec{G}_I \circ \vec{G}^I = \underline{\underline{I}},$$

vagyis mivel a szorzatuk az egységtenzor, tényleg egymás inverzei. Vezessük be a

$$\tilde{\underline{\underline{Q}}} = \vec{N}_I \circ \vec{G}^I \quad (69)$$

és

$$\tilde{\underline{\underline{Q}}}^{-1} = \vec{G}_J \circ \vec{N}^J, \quad (70)$$

valamint az

$$\tilde{\underline{\underline{\Lambda}}}^2 = \tilde{\underline{\underline{\Lambda}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\Lambda}}} = \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I \quad (71)$$

jelöléseket. Legyen a $\vec{G}^I$ egy ortonormált bázis. Ez esetben a (71) tenzor mátrixa a $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ bázisban diagonális lesz, azaz csak a főátlóban lesznek nullától különböző elemek, amik nevezetesen az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzor sajátértékei

$$[\underline{\underline{\Lambda}}^2] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix},$$

valamint a $\underline{\underline{Q}}$ tenzor $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ bázisban felírt mátrixának egyes oszlopaiban a $\vec{N}_I$ sajátvektorok helyezkednek el. Ekkor a $\underline{\underline{Q}}$ inverzére a $\underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{Q}}^T$ összefüggést kapjuk, vagyis ortonormált bázis esetén a $\underline{\underline{Q}}$ egy ortogonális transzformációt (elforgatást) jelent. A (68) egyenletet a fenti jelölésekkel a tömörebb

$$\underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\Lambda}}^2, \quad (72)$$

vagy

$$\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\Lambda}}^2$$

alakban is írhatjuk. Ezzel tulajdonképpen az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzort, és vele együtt az $\vec{N}_I$ sajátvektorait transzformáljuk át úgy, hogy a tenzor diagonális legyen a $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ bázisban. Hogy ezt jobban lássuk, az indexátnevezések után helyettesítsük be az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzor (60) alakját a (68) képletbe.

$$\begin{aligned} \vec{G}_J \circ \vec{N}^J \cdot \left(U_{.L}^K U_{.M}^L \vec{G}_K \circ \vec{G}^M \right) \cdot \vec{N}_I \circ \vec{G}^I &= \lambda_1^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I \\ &\Downarrow \\ \underbrace{\left(\vec{N}^J \cdot \vec{G}_K \right)}_{(\tilde{Q}^{-1})_{.K}^J} U_{.L}^K U_{.M}^L \underbrace{\left(\vec{G}^M \cdot \vec{N}_I \right)}_{\tilde{Q}_{.I}^M} \vec{G}_J \circ \vec{G}^I &= \lambda_1^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I \\ &\Downarrow \\ \left((\tilde{Q}^{-1})_{.K}^J U_{.L}^K U_{.M}^L \tilde{Q}_{.I}^M \right) \vec{G}_J \circ \vec{G}^I &= \lambda_1^2 \delta_I^J \vec{G}_J \circ \vec{G}^I, \end{aligned}$$

ahol

$$\tilde{Q}_{.I}^M = \vec{G}^M \cdot \left(\vec{N}_J \circ \vec{G}^J \right) \cdot \vec{G}_I = \left(\vec{G}^M \cdot \vec{N}_J \right) \circ \underbrace{\left(\vec{G}^J \cdot \vec{G}_I \right)}_{\delta_I^J} = \vec{G}^M \cdot \vec{N}_I,$$

és

$$\left(\tilde{Q}^{-1} \right)_{.K}^J = \vec{G}^J \cdot \left(\vec{G}_I \circ \vec{N}^I \right) \cdot \vec{G}_K = \underbrace{\left(\vec{G}^J \cdot \vec{G}_I \right)}_{\delta_I^J} \circ \left(\vec{N}^I \cdot \vec{G}_K \right) = \vec{N}^J \cdot \vec{G}_K.$$

Az $\vec{N}_I$ és $\vec{N}^J$ sajátvektorok és reciprok sajátvektorok ismeretében a (69) és (70) összefüggésekkel a $\underline{\underline{Q}}$ és $\underline{\underline{Q}}^{-1}$ kiszámítható, majd a $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ meghatározható. A $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ -ből a $\underline{\underline{\Lambda}}$ gyökvonás útján állítható elő

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \sqrt{\underline{\underline{\Lambda}}^2}.$$

A gyökvonást a $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ bázisban úgy tudjuk elvégezni, hogy a főátlóban álló elemekből külön-külön gyököt vonunk

$$[\underline{\underline{\Lambda}}] = \left[\sqrt{\underline{\underline{\Lambda}}^2} \right] = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

A $\underline{\underline{\Lambda}}^2$ és a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzorok ugyan abban a koordinátarendszerben diagonálisak, ezért a sajátvektor rendszerük is megegyezik. Ha a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzort előállítottuk, akkor az inverz transzformációval, azaz a $\underline{\underline{\Lambda}}$ tenzort balról $\underline{\underline{Q}}$ -val és jobbról $\underline{\underline{Q}}^{-1}$ tenzorral szorozva az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor előállítható

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{U}}.$$

Ebből következik, hogy $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{U}}^2$ sajátvektorai is megegyeznek.

Az $\underline{\underline{U}}^2$ diagonalizálásának lehetséges egy másik megközelítése is. A (67) egyenletet szorozzuk balról az $\vec{N}_J$ és jobbról az $\vec{N}^I$ vektorokkal diadikusan.

$$\underbrace{\vec{N}_J \circ \vec{N}^J}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \underbrace{\vec{N}_I \circ \vec{N}^I}_{\underline{\underline{I}}} = \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{N}_J \circ \vec{N}^I \quad (73)$$

Mivel az $\vec{N}_I \circ \vec{N}^I$ szorzat az egységtenzorral egyenlő, tulajdonképpen nem csináltunk semmit az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzorral, a sajátvektorai változatlanok maradtak, de kicseréltük a bázisát $\vec{G}_J \circ \vec{G}^I$ -ről $\vec{N}_J \circ \vec{N}^I$ -re. Az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzor viszont a sajátvektorainak a bázisában diagonális, és ahogy a jobb oldalból látszik a főátlóban a sajátértékek vannak. Helyettesítsük be a (60) összefüggést a (73) képletbe.

$$\begin{aligned} \vec{N}_J \circ \vec{N}^J \cdot \left(U_{.L}^K U_{.M}^L \vec{G}_K \circ \vec{G}^M \right) \cdot \vec{N}_I \circ \vec{N}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{N}_J \circ \vec{N}^I \\ \Downarrow \\ \left(\vec{N}^J \cdot \vec{G}_K \right) \left(U_{.L}^K U_{.M}^L \right) \left(\vec{G}^M \cdot \vec{N}_I \right) \vec{N}_J \circ \vec{N}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{N}_J \circ \vec{N}^I \\ \Downarrow \\ \left(\left(\vec{Q}^{-1} \right)^J_{.K} U_{.L}^K U_{.M}^L \vec{Q}_I^M \right) \vec{N}_J \circ \vec{N}^I &= \lambda_I^2 \delta_I^J \vec{N}_J \circ \vec{N}^I \end{aligned}$$

Sokszor előnyös a $\underline{\underline{U}}$ tenzort a sajátvektorainak a koordináta-rendszerében felírni

$$\underline{\underline{U}} = \lambda_I \vec{N}_I \circ \vec{N}^I. \quad (74)$$

Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens poláris felbontásából csak az $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzor előállítására van hátra. Szorozzuk be a (33) egyenletet jobbról az $\underline{\underline{U}}$ tenzor inverzével.

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1}$$

Ezzel az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó és $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzorok is előálltak, vagyis elvégeztük az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ poláris felbontását.

1.3.3. A nyújtó tenzorok sajátértékei és sajátvektorai közötti összefüggések

Most vizsgáljuk meg azt, hogy milyen kapcsolatban állnak egymással a $\underline{\underline{v}}$ tenzor λ_i sajátértékei illetve $\vec{n}_i$ sajátvektorai és a $\underline{\underline{U}}$ tenzor λ_I sajátértékei illetve $\vec{N}_I$ sajátvektorai. Szorozzuk meg az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienst egyszer balról, egyszer pedig jobbról a saját maga transzponáltjával, és alkalmazzuk mindkét esetben a (33) és (34) poláris felbontásokat.

$$\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{v}}^T \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \underline{\underline{R}} \quad (75)$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{v}}^2 = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{R}}^T \quad (76)$$

Látható, hogy az $\underline{\underline{U}}^2$ tenzorból egy ortogonális transzformációval (elforgatással) kapható meg a $\underline{\underline{v}}^2$ tenzor. Ez azt jelenti, hogy a két tenzor sajátértékei megegyeznek egymással, vagyis $\lambda_i = \lambda_I$ (ha $i = I = 1, 2$ vagy 3). Helyettesítsük be a (75) és (76) egyenletekbe a (74) és (58) összefüggések négyzetét.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}}^2 &= \lambda_I^2 \vec{N}_I \circ \vec{N}^I = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{v}}^2 \cdot \underline{\underline{R}} = \lambda_i^2 \underbrace{\underline{\underline{R}}^T \cdot \vec{n}_i}_{\vec{N}_I} \circ \underbrace{\vec{n}^i \cdot \underline{\underline{R}}}_{\vec{N}^I} \\ \underline{\underline{v}}^2 &= \lambda_i^2 \vec{n}_i \circ \vec{n}^i = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{R}}^T = \lambda_I^2 \underbrace{\underline{\underline{R}} \cdot \vec{N}_I}_{\vec{n}_i} \circ \underbrace{\vec{N}^I \cdot \underline{\underline{R}}^T}_{\vec{n}^i} \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\vec{n}_i = \underline{\underline{R}} \cdot \vec{N}_I$$

és

$$\vec{n}^i = \vec{N}^I \cdot \underline{\underline{R}}^T,$$

valamint ezek inverzei, az

$$\vec{N}_I = \underline{\underline{R}}^T \cdot \vec{n}_i$$

és

$$\vec{N}^I = \vec{n}^i \cdot \underline{\underline{R}},$$

vagyis az $\underline{\underline{U}}$ sajátvektorai a $\underline{\underline{v}}$ sajátvektoraiból (és fordítva) az $\underline{\underline{R}}$ ortogonális transzformáció útján, a fenti összefüggések segítségével kaphatók meg. Könnyen belátható, hogy

$$\underline{\underline{R}} = \vec{n}_i \circ \vec{N}^I = \vec{n}^i \circ \vec{N}_I,$$

ugyanis

$$\begin{aligned}\vec{n}_i &= \underline{\underline{R}} \cdot \vec{N}_I = (\vec{n}_i \circ \vec{N}^I) \cdot \vec{N}_I = \vec{n}_i \circ \underbrace{\vec{N}^I \cdot \vec{N}_I}_1, \\ \vec{n}^i &= \vec{N}^I \cdot \underline{\underline{R}}^T = \vec{N}^I \cdot (\vec{N}_I \circ \vec{n}^i) = \underbrace{\vec{N}^I \cdot \vec{N}_I}_1 \circ \vec{n}^i, \\ \vec{N}_I &= \underline{\underline{R}}^T \cdot \vec{n}_i = (\vec{N}_I \circ \vec{n}^i) \cdot \vec{n}_i = \vec{N}_I \circ \underbrace{\vec{n}^i \cdot \vec{n}_i}_1, \\ \vec{N}^I &= \vec{n}^i \cdot \underline{\underline{R}} = \vec{n}^i \cdot (\vec{n}_i \circ \vec{N}^I) = \underbrace{\vec{n}^i \cdot \vec{n}_i}_1 \circ \vec{N}^I.\end{aligned}$$

A fentieknek megfelelően írjuk fel a deformáció gradienst az $\vec{n}_i$, $\vec{n}^i$, $\vec{N}_I$ és $\vec{N}^I$ sajátvektorok bázisában. Helyettesítsük be a (74) összefüggést a (33) poláris felbontásba

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot (\lambda_I \vec{N}_I \circ \vec{N}^I) = \lambda_I \underbrace{\underline{\underline{R}} \cdot \vec{N}_I}_{\vec{n}_i} \circ \vec{N}^I = \lambda_I \vec{n}_i \circ \vec{N}^I,$$

vagy az (58) összefüggést a (34) poláris felbontásba

$$\underline{\underline{F}} = (\lambda_i \vec{n}_i \circ \vec{n}^i) \cdot \underline{\underline{R}} = \lambda_i \vec{n}_i \circ \underbrace{\vec{n}^i \cdot \underline{\underline{R}}}_{\vec{N}^I} = \lambda_i \vec{n}_i \circ \vec{N}^I.$$

Feladatok

18. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezések deformáció gradiensének első, második és harmadik skalár invariánsait.

19. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezések deformáció gradiensének sajátértékeit és sajátvektorait.

20. feladat. Végezze el az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatok leképezéséhez tartozó $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiensek $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}$ poláris felbontását. Írja fel az $\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ tenzorok mátrixait a megfelelő bázisokban.

21. feladat. Hasonlítsa össze az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatok leképezéséhez tartozó $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiensek és $\underline{\underline{U}}$ illetve $\underline{\underline{v}}$ tenzorok sajátértékeit és sajátvektorait. Mit lehet elmondani az $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ tenzorok sajátvektorainak és az $\underline{\underline{R}}$ tenzornak a kapcsolatáról?

22. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezésekhez tartozó $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ tenzorok skalár invariánsait, és hasonlítsa össze őket a 18. feladatban kapott eredményekkel.

1.4. Alakváltozási tenzorok

Az előző fejezetben bemutatott $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ jobb- és baloldali nyújtó tenzorokat úgy kaptuk meg, hogy az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienstről leválasztottuk az $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzort. Ezért a nyújtó tenzorok mentesek mindenféle merev test szerű mozgástól, tisztán csak a test alakváltozását írják le. Ennek ellenére az esetek többségében mégsem ezeket a tenzorokat szokás használni az alakváltozások leírására. A következő fejezetekben újabb alakváltozási tenzorokat fogunk definiálni.

1.4.1. Jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor

Számítsuk ki, hogy egy test egy tetszőleges pontjában egy kezdetben $d\vec{R}$ vonalelem *hossza* a test alakváltozása során hogyan változik meg. Legyen kezdetben a vonalelem hossza dS , iránya pedig $\vec{E}$, azaz

$$d\vec{R} = dS\vec{E}, \quad (77)$$

ahol $|\vec{E}| = 1$. A vonalelem dS hosszát a

$$\sqrt{d\vec{R} \cdot d\vec{R}} = \sqrt{dS^2 \vec{E} \cdot \vec{E}} = dS \quad (78)$$

összefüggéssel számolhatjuk ki. Az alakváltozás után az vonalelem (elemi vonalszakasz) hossza és iránya is megváltozik. A deformált vonalelemet a (13) képlettel határozhatjuk meg. Jelöljük a deformált vonalelem hosszát ds -sel, irányát pedig $\vec{e}$ -vel. Ezek alapján

$$d\vec{r} = ds \vec{e}, \quad (79)$$

ahol $|\vec{e}| = 1$. A deformált $d\vec{r}$ vonalelem hosszát a

$$\sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{ds^2 \vec{e} \cdot \vec{e}} = ds \quad (80)$$

összefüggéssel kapjuk meg. Most számítsuk ki a ds hosszt a $d\vec{R}$ vonalelem méretének és irányának, valamint az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiensnek a segítségével. Helyettesítsük be a (13) és (77) összefüggéseket a (80) egyenletbe.

$$ds = \sqrt{d\vec{R} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}} = dS \sqrt{\vec{E} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{E}} \quad (81)$$

A könnyebb érthetőség kedvéért írjuk fel ugyan ezt a bázisok feltüntetésével is

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx^i \vec{g}_i) \cdot (dx^j \vec{g}_j)} = \sqrt{\left((F^i_{\cdot J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J) \cdot dX^K \vec{G}_K \right) \cdot \left((F^l_{\cdot M} \vec{g}_l \circ \vec{G}^M) \cdot dX^N \vec{G}_N \right)} = \\ &= \sqrt{(dX^J F^i_{\cdot J} \vec{g}_i) \cdot (dX^M F^l_{\cdot M} \vec{g}_l)} = \sqrt{dX^J F^i_{\cdot J} g_{il} F^l_{\cdot M} dX^M} = \\ &= \sqrt{dS E^J F^i_{\cdot J} g_{il} F^l_{\cdot M} E^M} = dS \sqrt{E^J F^i_{\cdot J} g_{il} F^l_{\cdot M} E^M}, \end{aligned}$$

ahol $d\vec{R} = dS\vec{E} = dS E^I \vec{G}_I$. Jól látszik, hogy a gyökjel alatt álló $F^i_{\cdot J}$ tenzor koordináta J második indexét az E^J , míg az i első indexét a g_{il} metrikus tenzoron keresztül az $F^l_{\cdot M}$ tenzor koordináta l indexe „szorozza”. Emiatt kell a (81) egyenlet jobb oldalán a gyök alatt a bal oldalon álló deformáció gradienset transzponálni. Vezessünk be egy új jelölést az $\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$ tenzorra.

6. Definíció. A deformáció gradiens tenzor saját transzponáltjával vett

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$$

szorzatát *jobbaldali Cauchy-Green deformációs tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{C}}$ -vel jelöljük. Deformálatlan esetben $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}}$.

Az elnevezésben azért szerepel a jobbaldali jelző, mert jobb oldalról szorzunk az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienssel (és balról a transzponáltjával). A $\underline{\underline{C}}$ a kezdeti konfigurációban értelmezett tenzor, ugyanis

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \left(F^i_{\cdot J} \vec{G}^J \circ \vec{g}_i \right) \cdot \left(F^k_{\cdot L} \vec{g}_k \circ \vec{G}^L \right) = F^i_{\cdot J} g_{ik} F^k_{\cdot L} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = C_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L. \quad (82)$$

A $\underline{\underline{C}}$ jobbaldali Cauchy-Green deformációs tenzor tulajdonképpen a deformált test (pillanatnyi konfiguráció) kezdeti konfigurációba áttanszformált metrikus tenzora, vagyis a segítségével tudjuk megmondani a kezdeti konfigurációban lévő vonalelem pillanatnyi konfigurációban mérhető hosszát. Osszuk el a (81) egyenlet mindkét oldalát a dS kezdeti hosszal.

7. Definíció. Egy elemi vonalszakasz pillanatnyi konfigurációban vett ds hosszának és kezdeti konfigurációban vett dS hosszának

$$\lambda_s = \frac{ds}{dS}$$

hányadosát *vonalelem aránynak*, vagy *fajlagos nyúlásnak* nevezzük. Ha nincs alakváltozás, akkor $\lambda_s = 1$.

A (81) felhasználásával a λ_s fajlagos nyúlás az

$$\lambda_s = \sqrt{\vec{E} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{E}} = \sqrt{\vec{E} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \vec{E}} \quad (83)$$

alakban is írható. Az (59) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^2. \quad (84)$$

Ez azt jelenti, hogy a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor sajátértékei és sajátvektorai megegyeznek az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor $\underline{\underline{U}}^2$ négyzetének λ_I^2 sajátértékeivel és $\vec{N}_I$ és $\vec{N}^I$ sajátvektoraival. Emiatt a sajátvektorok koordinátarendszerében (bázisában) a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor a

$$\underline{\underline{C}} = \lambda_I^2 \vec{N}_I \circ \vec{N}^I \quad (85)$$

alakban írható. Mutasson a $d\vec{R}_I$ elemi vonalszakasz az I -edik sajátvektor irányába, azaz $d\vec{R}_I = dS \vec{N}_I$. Ekkor a (83) és (85) felhasználásával

$$\lambda_s = \sqrt{\lambda_I^2 \vec{N}_I \cdot \vec{N}_I \circ \vec{N}^I \cdot \vec{N}_I} = \sqrt{\lambda_I^2} = \lambda_I,$$

vagyis a λ_I az $\vec{N}_I$ irányban bekövetkező fajlagos nyúlást jelenti. A λ_I fajlagos nyúlást főnyúlásnak, az $\vec{N}_I$ irányt pedig alakváltozási főiránynak is nevezzük.

Feladatok

23. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezések jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzorait.

24. feladat. Számítsa ki az 1., 2.(!), 3., 4. és 5. feladatokban megadott leképezések esetén a kezdeti konfigurációban az egyes koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok hosszát a deformáció után (a pillanatnyi konfigurációban).

1.4.2. Green-Lagrange alakváltozási tenzor

A következő két fejezetben olyan kezdeti konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok kerülnek bemutatásra, amelyek kevésbé szemléletesek, kevésbé tűnnek használhatónak, azonban a későbbiekben, amikor az alakváltozási energiáról és a feszültségi tenzorokról lesz szó, nélkülözhetetlenek bizonyulnak. Az első ilyen tenzor bevezetéséhez számoljuk ki a következőt: a dS hosszúságú és $\vec{E}$ irányú elemi vonalszakasz megváltozott ds hosszát emeljük négyzetre, és vonjuk ki belőle az eredeti elemi vonalszakasz hosszának négyzetét. Az eredményt osszuk el az eredeti vonalszakasz hossz négyzetének kétszeresével. A (81) és (84) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} &= \frac{1}{2} \frac{dS^2 \vec{E} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \vec{E} - dS^2}{dS^2} = \frac{1}{2} \frac{dS^2 \vec{E} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \vec{E} - dS^2 \overbrace{\vec{E} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \vec{E}}^1}{dS^2} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \right) \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

Az utolsó tagban zárójelben álló tenzorra vezessünk be egy új jelölést.

8. Definíció. Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens vagy a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor segítségével számított

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \quad (86)$$

tenzort *Green-Lagrange alakváltozási tenzornak* nevezzük. Deformáció mentes állapotban $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$, ahol $\underline{\underline{0}}$ a zérus tenzor.

Az $\underline{\underline{E}}$ a kezdeti konfigurációban értelmezett mennyiség. Ennek belátásához használjuk fel a (82) összefüggést.

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(F_J^i g_{ik} F_L^k \vec{G}^J \circ \vec{G}^L - G_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L \right) = \frac{1}{2} (F_J^i g_{ik} F_L^k - G_{JL}) \vec{G}^J \circ \vec{G}^L =$$

$$= \frac{1}{2} (C_{JL} - G_{JL}) \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = E_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L,$$

ahol $\underline{\underline{I}} = \vec{G}_L \circ \vec{G}^L = g_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L$. Annak kiderítéséhez, hogy mik az $\underline{\underline{E}}$ Green-Lagrange alakváltozási tenzor sajátértékei és sajátvektorai, írjuk fel az $\underline{\underline{E}}$ -t a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor sajátvektoraiból álló bázisban (lásd a (85) képlet).

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\lambda_I^2 \vec{N}_I \circ \vec{N}^I - \vec{N}_I \circ \vec{N}^I \right) = \left(\frac{1}{2} (\lambda_I^2 - 1) \right) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I,$$

ahol $\underline{\underline{I}} = \vec{N}_I \circ \vec{N}^I$. Látható, hogy az $\underline{\underline{E}}$ Green-Lagrange alakváltozási tenzor diagonális az $\vec{N}_I \circ \vec{N}^J$ bázisban, ebből következik, hogy sajátvektorai megegyeznek a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor sajátvektoraival, sajátértékei pedig az $\frac{1}{2} (\lambda_I^2 - 1)$ értékek lesznek ($I = 1, 2, 3$).

1.4.3. További kezdeti konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok

A további kezdeti konfigurációban értelmezett tenzorok jelentősége kisebb, de érdemes megemlíteni őket.

9. Definíció. A $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (87)$$

inverzét *Piola-féle deformációs tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{B}}$ -vel jelöljük.

A $\underline{\underline{B}}$ tenzor a bázisok és koordináták feltüntetésével az

$$\underline{\underline{B}} = (C^{-1})^{IJ} \vec{G}_I \circ \vec{G}_J = B^{IJ} \vec{G}_I \circ \vec{G}_J \quad (88)$$

alakban írható. Ennek belátásához szorozzuk össze a $\underline{\underline{C}}$ és $\underline{\underline{B}}$ tenzorokat felhasználva a (82) és (88) alakokat.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{B}} &= \left(C_{IJ} \vec{G}^I \circ \vec{G}^J \right) \cdot \left(B^{KL} \vec{G}_K \circ \vec{G}_L \right) = C_{IJ} B^{KL} \vec{G}^I \circ \underbrace{\vec{G}^J \cdot \vec{G}_K}_{\delta_K^J} \circ \vec{G}_L = \\ &= C_{IJ} B^{JL} \vec{G}^I \circ \vec{G}_L = C_{IJ} (C^{-1})^{JL} \vec{G}^I \circ \vec{G}_L = \delta_I^L \vec{G}^I \circ \vec{G}_L = \vec{G}^I \circ \vec{G}_I = \underline{\underline{I}} \end{aligned}$$

Ha a $\underline{\underline{C}}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor a sajátvektorok bázisában a (85) összefüggéssel írható, akkor a (87) miatt

$$\underline{\underline{B}} = \lambda_I^{-2} \vec{N}_I \circ \vec{N}^I,$$

vagyis a $\underline{\underline{B}}$ sajátértékei megegyeznek a $\underline{\underline{C}}$ sajátértékeinek inverzeivel.

10. Definíció. Az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor felhasználásával kapott

$$\underline{\underline{H}} = \ln \underline{\underline{U}}$$

tenzort kezdeti konfigurációban értelmezett *Hencky-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{H}}$ -val jelöljük.

Felmerülhet a kérdés, hogy hogyan kell kiszámítani egy tenzor logaritmusát. Ha a tenzort a sajátvektorai bázisába transzformáljuk, akkor a logaritmus függvényt a főátlóban lévő elemekre kell alkalmazni.

$$\underline{\underline{H}} = \ln(\lambda_I) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I$$

Innen rögtön látszik az is, hogy a $\underline{\underline{H}}$ Hencky-féle alakváltozási tenzor sajátvektorai megegyeznek az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor sajátvektoraival.

11. Definíció. Az $\vec{N}_I \circ \vec{N}^I$ bázisban diagonális

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} = f(\lambda_I) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I$$

tenzort *általános Lagrange-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, ha az $f(\lambda)$ függvény monoton növekvő, és igaz rá az $f(1) = 0$ és $\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 1$ feltétel.

Legyen $f(\lambda) = \frac{1}{n}(\lambda^n - 1)$, ahol a $n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, vagyis egy tetszőleges egész szám. Ekkor az általános Lagrange-féle alakváltozási tenzor az

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} = \frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I \quad (89)$$

alakban írható. Az ezzel a függvénnyel kapott alakváltozási tenzorokat különböző n értékekre az 1. táblázat mutatja.

n	Jele	Sajátvektorok bázisában	Tenzoros alakban	Elnevezés
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$\underline{\underline{E}} =$	$\underline{\underline{E}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_I^2 - 1) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$	Green-Langrange
1		$\underline{\underline{E}}^{(1)} = (\lambda_I - 1) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}}$	Biot-féle
0	$\underline{\underline{H}} =$	$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \ln(\lambda_I) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\ln(\underline{\underline{U}})$	Hencky-féle
-1		$\underline{\underline{E}}^{(-1)} = (1 - \lambda_I^{-1}) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{U}}^{-1}$	„True”
-2		$\underline{\underline{E}}^{(-2)} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_I^{-2}) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I =$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T})$	visszaforogatott Euler-Almansi
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

1. táblázat. Lagrange-féle alakváltozási tenzorok.

Látható, hogy mindegyik Lagrange-féle alakváltozási tenzor a kezdeti konfigurációban értelmezett (erre utal a „Lagrange-féle” jelző), és mindegyik Lagrange-féle alakváltozásnak ugyan azok az $\vec{N}_I$ vektorok a sajátvektorai. Látszólag a Hencky-féle alakváltozási tenzor kilóg a sorból, de bizonyítható hogy rá is érvényes a (89) összefüggés. Ismert a matematikából az

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

nevezetes határérték. Végezzük el az $m = \frac{1}{n}$, $y = e^x$ és ebből következően $x = \ln(y)$ helyettesítést a fenti határértékben

$$y = \lim_{m \rightarrow 0} (1 + m \ln(y))^{\frac{1}{m}}.$$

Fejessük ki innen az $\ln(y)$ -t.

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} y^m &= \lim_{m \rightarrow 0} (1 + m \ln(y)), \\ &\Downarrow \\ \lim_{m \rightarrow 0} (y^m - 1) &= \lim_{m \rightarrow 0} m \ln(y), \\ &\Downarrow \\ \ln(y) &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m} (y^m - 1). \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az

$$\ln(\lambda_I) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1)$$

összefüggést, azaz a Hencky-féle alakváltozási tenzor is (89) alakú.

Megjegyzés: Fejtsük sorba az $\frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1)$ kifejezést a $\lambda_I = 1$ érték körül

$$\frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1) \approx \lambda_I - 1 + \frac{(n-1)(\lambda_I - 1)^2}{2} + \frac{(n^2 - 3n + 2)(\lambda_I - 1)^3}{6} + \dots$$

Ha $\lambda_I - 1 \ll 1$, akkor a fenti kifejezés minden n értékre közelítőleg ugyan azt az eredményt adja, nevezetesen a sorfejtés lineáris tagját

$$\frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1) \approx \lambda_I - 1.$$

Ezek után mondhatjuk, hogy kis alakváltozások esetében, ha $\varepsilon_I \approx \lambda_I - 1 \ll 1$, bármelyik Lagrange-féle alakváltozási tenzor közelítőleg megegyezik a kis alakváltozások elméletéből ismert $\underline{\underline{\varepsilon}}$ infinitezimális alakváltozási tenzorral

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} \approx \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

A (89) összefüggést az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor (74) alakjának felhasználásával egy kicsit tömörebben is felírhatjuk. Ha

$$\underline{\underline{U}} = \lambda_I \vec{N}_I \circ \vec{N}^I,$$

akkor

$$\underline{\underline{U}}^2 = \lambda_I \lambda_J \vec{N}_I \circ \underbrace{\vec{N}^I \cdot \vec{N}_J}_{\delta_J^I} \circ \vec{N}^J = \lambda_I^2 \vec{N}_I \circ \vec{N}^I,$$

ezt továbbgondolva pedig következik, hogy

$$\underline{\underline{U}}^n = \lambda_I^n \vec{N}_I \circ \vec{N}^I.$$

Helyettesítsük be ezt az eredményt a (89) képletbe.

$$\underline{\underline{E}}^{(n)} = \frac{1}{n} (\lambda_I^n - 1) \vec{N}_I \circ \vec{N}^I = \frac{1}{n} (\underline{\underline{U}}^n - \underline{\underline{I}}), \quad (90)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\vec{N}_I \circ \vec{N}^I = \underline{\underline{I}}$.

1.4.4. Baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor

Most az 1.4.1. fejezetben megfogalmazott feladatnak az inverzét oldjuk meg, vagyis meg kellene határozni egy elemi vonalszakasz dS eredeti hosszát és az $\vec{E}$ eredeti irányát a kezdeti konfigurációban, ha adott az alakváltozás utáni ds hossz és $\vec{e}$ irány. A dS hosszt a (78) képlettel kapjuk meg. Helyettesítsük be ide a (18) összefüggést.

$$dS = \sqrt{d\vec{r} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d\vec{r}} = ds \sqrt{\vec{e} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \vec{e}} \quad (91)$$

A könnyebb érthetőség kedvéért írjuk fel ugyan ezt a bázisok feltüntetésével is

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(dX^I \vec{G}_I) \cdot (dX^J \vec{G}_J)} = \sqrt{\left((F^{-1})_{\cdot j}^I \vec{G}_I \circ \vec{g}^j \right) \cdot dx^k \vec{g}_k} \cdot \left((F_m^L \vec{G}_L \circ \vec{g}^m) \cdot dx^n \vec{g}_n \right) = \\ &= \sqrt{(dx^j (F^{-1})_{\cdot j}^I \vec{G}_I) \cdot (dx^m F_m^L \vec{G}_L)} = \sqrt{dx^j (F^{-1})_{\cdot j}^I G_{IL} F_m^L dx^m} = \\ &= \sqrt{ds e^j (F^{-1})_{\cdot j}^I G_{IL} F_m^L e^m ds} = ds \sqrt{e^j (F^{-1})_{\cdot j}^I G_{IL} F_m^L e^m}, \end{aligned}$$

ahol $d\vec{r} = ds \vec{e} = ds e^i \vec{g}_i$. Jól látszik, hogy a gyökjel alatt álló $(F^{-1})_{\cdot j}^I$ tenzor koordináta j második indexét az e^j , míg az I első indexét a G_{IL} metrikus tenzoron keresztül az F_m^L tenzor koordináta L indexe „szorozza”. Emiatt kell a (91) egyenlet jobb oldalán a gyök alatt a bal oldalon álló deformáció gradiens inverzét transzponálni. Vezessünk be egy új jelölést.

12. Definíció. A deformáció gradiens tenzor saját transzponáltjával vett

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$$

szorzatát *baloldali Cauchy-Green deformációs tenzornak* vagy *Finger-tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{b}}$ -vel jelöljük. Deformálatlan esetben $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{I}}$.

Az elnevezésben azért szerepel a baloldali jelző, mert bal oldalról szorzunk az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienssel (és jobbról a transzponáltjával). Érdemes figyelni a jelölésre, mert könnyű összetéveszteni a $\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzort a $\underline{\underline{B}}$ Piola-féle deformációs tenzorról. A $\underline{\underline{b}}$ a pillanatnyi konfigurációban értelmezett tenzor, ugyanis

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = (F_{\cdot j}^i \vec{g}_i \circ \vec{G}^j) \cdot (F_L^k \vec{G}^L \circ \vec{g}_k) = F_{\cdot j}^i G^{jL} F_L^k \vec{g}_i \circ \vec{g}_k = b^{ik} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k. \quad (92)$$

Osszuk el a (91) egyenlet mindkét oldalát a ds pillanatnyi hosszal.

$$\frac{dS}{ds} = \frac{1}{\lambda_s} = \sqrt{\vec{e} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \vec{e}} = \sqrt{\vec{e} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \vec{e}} \quad (93)$$

A (37) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{b}}^{-1} = (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T)^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}})^{-1} = \underline{\underline{v}}^{-2}, \quad (94)$$

vagy véve mindkét oldal inverzét

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{v}}^2. \quad (95)$$

Ez azt jelenti, hogy mivel a $\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor sajátértékei inverzei a $\underline{\underline{b}}^{-1}$ inverz tenzor sajátértékeinek, sajátvektorai pedig megegyeznek a $\underline{\underline{b}}^{-1}$ inverz tenzor sajátvektoraival, a $\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor sajátértékei és sajátvektorai megegyeznek a $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzor $\underline{\underline{v}}^2$ négyzetének λ_i^2 sajátértékeivel és $\vec{n}_i$ és $\vec{n}^i$ sajátvektoraival. Emiatt a sajátvektorok koordináta-rendszerében (bázisában) a $\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor a

$$\underline{\underline{b}} = \lambda_i^2 \vec{n}_i \circ \vec{n}^i \quad (96)$$

alakban írható. Mutasson a $d\vec{r}_i$ elemi vonalszakasz az i -edik sajátvektor irányába, azaz $d\vec{r}_i = ds \vec{n}_i$. Ekkor a (93) és (96) felhasználásával

$$\lambda_s^{-1} = \sqrt{\lambda_i^{-2} \vec{n}_i \cdot \vec{n}_i \circ \vec{n}^i \cdot \vec{n}_i} = \sqrt{\lambda_i^{-2}} = \lambda_i^{-1},$$

vagyis a λ_i az $\vec{n}_i$ irányban bekövetkező fajlagos nyúlást jelenti.

1.4.5. Euler-Almansi alakváltozási tenzor

A következő két fejezetben olyan pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok kerülnek bemutatásra, amelyek kevésbé szemléletesek, kevésbé tűnnek használhatónak, azonban a későbbiekben, amikor az alakváltozási energiáról és a feszültségi tenzorokról lesz szó, nélkülözhetetlenek bizonyulnak. Az első ilyen tenzor bevezetéséhez számoljuk ki a következőt: az alakváltozás során megváltozott ds hosszúságú és $\vec{e}$ irányú elemi vonalszakasz megváltozott ds hosszát emeljük négyzetre, és vonjuk ki belőle az eredeti elemi vonalszakasz hosszának négyzetét. Az eredményt osszuk el a megváltozott vonalszakasz hossz négyzetének kétszeresével. A (91) és (94) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dS^2}{ds^2} &= \frac{1}{2} \frac{ds^2 - ds^2 \vec{e} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \vec{e}}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{ds^2 \overbrace{\vec{e} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \vec{e}}^1 - ds^2 \vec{e} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \vec{e}}{ds^2} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{e} \cdot (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \left(\frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) \right) \cdot \vec{e}. \end{aligned}$$

Az utolsó tagban zárójelben álló tenzorra vezessünk be új jelölést.

13. Definíció. Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens vagy a $\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor segítségével számított

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) \quad (97)$$

tenzort *Euler-Almansi alakváltozási tenzornak* nevezzük. Deformáció mentes állapotban $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{0}}$, ahol $\underline{\underline{0}}$ a zérus tenzor. Az Euler-Almansi alakváltozási tenzorra szokásos még az

$$\underline{\underline{a}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) \quad (98)$$

jelölés is.

Az $\underline{\underline{e}}$ a pillanatnyi konfigurációban értelmezett mennyiség. Ennek belátásához használjuk fel a (92) összefüggést és az $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}})^{-1} = \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$ azonosságot. Ezek alapján a $\underline{\underline{b}}$ inverze a

$$\underline{\underline{b}}^{-1} = (b^{-1})_{ki} \vec{g}^k \circ \vec{g}^i = (F^{-1})_k^{\cdot L} G_{LJ} (F^{-1})_i^{\cdot J} \vec{g}^k \circ \vec{g}^i$$

képlettel számítható. Ezt könnyen beláthatjuk az alábbi rövid számítással.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} &= (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T) \cdot (\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = (F_{\cdot J}^i G^{JL} F_L^{\cdot k} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k) \cdot \left((F^{-1})_r^{\cdot S} G_{SQ} (F^{-1})_p^{\cdot Q} \vec{g}^r \circ \vec{g}^p \right) = \\ &= F_{\cdot J}^i G^{JL} F_L^{\cdot k} (F^{-1})_r^{\cdot S} G_{SQ} (F^{-1})_p^{\cdot Q} \vec{g}_i \circ \underbrace{\vec{g}_k \cdot \vec{g}^r}_{\delta_k^r} \circ \vec{g}^p = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F^i_{\cdot J} G^{JL} \underbrace{F^k_L (F^{-1})^S_k}_{\delta^S_L} G_{SQ} (F^{-1})^Q_{\cdot p} \vec{g}_i \circ \vec{g}^p = F^i_{\cdot J} \underbrace{G^{JL} G_{LQ}}_{\delta^J_Q} (F^{-1})^Q_{\cdot p} \vec{g}_i \circ \vec{g}^p = \\
&= \underbrace{F^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot p}}_{\delta^i_p} \vec{g}_i \circ \vec{g}^p = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i = \underline{\underline{I}}
\end{aligned}$$

A fentiek segítségével az $\underline{\underline{e}}$ Euler-Almansi alakváltozási tenzor az

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{e}} &= \frac{1}{2} \left(g_{ki} \vec{g}^k \circ \vec{g}^i - (F^{-1})^L_k G_{LJ} (F^{-1})^J_i \vec{g}^k \circ \vec{g}^i \right) = \frac{1}{2} \left(g_{ki} - (F^{-1})^L_k G_{LJ} (F^{-1})^J_i \right) \vec{g}^k \circ \vec{g}^i = \\
&= \frac{1}{2} (g_{ki} - (b^{-1})_{ki}) \vec{g}^k \circ \vec{g}^i = e_{ki} \vec{g}^k \circ \vec{g}^i
\end{aligned}$$

alakban írható, ahol $\underline{\underline{I}} = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i = g_{ik} \vec{g}^i \circ \vec{g}^k$. Annak kiderítéséhez, hogy mik az $\underline{\underline{e}}$ Euler-Almansi alakváltozási tenzor sajátértékei és sajátvektorai, írjuk fel az $\underline{\underline{e}}$ -t a $\underline{\underline{b}}^{-1}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor sajátvektoraiból álló bázisban (lásd a (96) képlet).

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\vec{n}_i \circ \vec{n}^i - \lambda_i^{-2} \vec{n}_i \circ \vec{n}^i) = \left(\frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-2}) \right) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i,$$

ahol $\underline{\underline{I}} = \vec{n}_i \circ \vec{n}^i$. Látható, hogy az $\underline{\underline{e}}$ Euler-Almansi alakváltozási tenzor diagonális az $\vec{n}_i \circ \vec{n}^i$ bázisban, ebből következik, hogy sajátvektorai megegyeznek a $\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor inverzének a sajátvektoraival, így a baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor sajátvektoraival is, sajátértékei pedig az $\frac{1}{2} (1 - \lambda_i^2)$ értékek lesznek ($i = 1, 2, 3$).

1.4.6. További pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok

A további pillanatnyi konfigurációban értelmezett tenzorok jelentősége kisebb, de érdemes megemlíteni őket.

14. Definíció. A $\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{b}}^{-1} \tag{99}$$

inverzét *Cauchy-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{c}}$ -vel jelöljük.

A $\underline{\underline{c}}$ tenzor a bázisok és koordináták feltüntetésével a

$$\underline{\underline{c}} = (b^{-1})_{ij} \vec{g}^i \circ \vec{g}^j = c_{ij} \vec{g}^i \circ \vec{g}^j \tag{100}$$

alakban írható. Ennek belátásához szorozzuk össze a $\underline{\underline{b}}$ és $\underline{\underline{c}}$ tenzorokat felhasználva a (92) és (100) alakokat.

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{c}} &= (b^{ij} \vec{g}_i \circ \vec{g}_j) \cdot (c_{kl} \vec{g}^k \circ \vec{g}^l) = b^{ij} c_{kl} \vec{g}_i \circ \underbrace{\vec{g}_j \cdot \vec{g}^k}_{\delta_j^k} \circ \vec{g}^l = \\
&= b^{ij} c_{jl} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l = b^{ij} (b^{-1})_{jl} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l = \delta_i^l \vec{g}_i \circ \vec{g}^l = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i = \underline{\underline{I}}
\end{aligned}$$

Ha a $\underline{\underline{b}}$ baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor a sajátvektorok bázisában a (96) összefüggéssel írható, akkor a (99) miatt

$$\underline{\underline{c}} = \lambda_i^{-2} \vec{n}_i \circ \vec{n}^i,$$

vagyis a $\underline{\underline{c}}$ sajátértékei megegyeznek a $\underline{\underline{b}}$ sajátértékeinek inverzeivel.

A $\underline{\underline{c}}$ Cauchy-féle deformációs tenzor tulajdonképpen a deformálatlan test (kezdeti konfiguráció) pillanatnyi konfigurációba áttranszformált metrikus tenzora, vagyis a segítségével tudjuk megmondani a pillanatnyi konfigurációban lévő vonalelem kezdeti konfigurációban mérhető hosszát.

15. Definíció. A $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzor felhasználásával kapott

$$\underline{\underline{h}} = \ln \underline{\underline{v}}$$

tenzort pillanatnyi konfigurációban értelmezett *Hencky-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, és $\underline{\underline{h}}$ -val jelöljük.

A tenzor logaritmusának kiszámításához az 1.4.3. fejezetben leírtakhoz hasonlóan a tenzort a sajátvektorai bázisába transzformáljuk, és a logaritmus függvényt a főatlóban lévő elemekre alkalmazzuk.

$$\underline{\underline{h}} = \ln(\lambda_i) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i$$

Innen rögtön látszik az is, hogy a $\underline{\underline{h}}$ Hencky-féle alakváltozási tenzor sajátvektorai megegyeznek a $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzor sajátvektoraival.

16. Definíció. Az $\vec{n}_i \circ \vec{n}^i$ bázisban diagonális

$$\underline{\underline{e}}^{(n)} = f(\lambda_i) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i$$

tenzort *általános Euler-féle alakváltozási tenzornak* nevezzük, ha az $f(\lambda)$ függvény monoton növekvő, és igaz rá az $f(1) = 0$ és $\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 1$ feltétel.

Legyen $f(\lambda) = \frac{1}{n}(\lambda^n - 1)$, ahol a $n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, vagyis egy tetszőleges egész szám. Ekkor az általános Lagrange-féle alakváltozási tenzor az

$$\underline{\underline{e}}^{(n)} = \frac{1}{n}(\lambda_i^n - 1) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i \quad (101)$$

alakban írható. Az ezzel a függvénnyel kapott alakváltozási tenzorokat különböző n értékekre a 2. táblázat mutatja.

n	Jele	Sajátvektorok bázisában	Tenzoros alakban	Elnevezés
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-2	$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{a}} =$	$\underline{\underline{e}}^{(-2)} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2}) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1})$	Euler-Almansi
-1		$\underline{\underline{e}}^{(-1)} = (1 - \lambda_i^{-1}) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{v}}^{-1}$	Swainger-féle
0	$\underline{\underline{h}} =$	$\underline{\underline{e}}^{(0)} = \ln(\lambda_i) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\ln(\underline{\underline{v}})$	Hencky-féle
1		$\underline{\underline{e}}^{(1)} = (\lambda_i - 1) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\underline{\underline{v}} - \underline{\underline{I}}$	
2		$\underline{\underline{e}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i =$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T - \underline{\underline{I}})$	
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2. táblázat. Euler-féle alakváltozási tenzorok.

Látható, hogy mindegyik Euler-féle alakváltozási tenzor a pillanatnyi konfigurációban értelmezett (erre utal az „Euler-féle” jelző), és mindegyik Euler-féle alakváltozásnak ugyan azok az $\vec{n}_i$ vektorok a sajátvektoraik. Az 1.4.3. fejezetben leírtakhoz hasonlóan a Hencky-féle alakváltozási tenzor látszólag kilóg a sorból, de rá is érvényes a (101) összefüggés (bizonyítás az 1.4.3. fejezetben), azaz

$$\ln(\lambda_I) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1).$$

Megjegyzés: Az 1.4.3. fejezetben látottaknak megfelelően ha $\lambda_I - 1 \ll 1$, akkor minden n értékre közelítőleg az

$$\frac{1}{n}(\lambda_I^n - 1) \approx \lambda_I - 1$$

kifejezést kapjuk. Ezek után mondhatjuk, hogy kis alakváltozások (ha $\varepsilon_i \approx \lambda_i - 1 \ll 1$) és kis elmozdulások (ha $\vec{n}_i \approx \vec{N}_I$, vagyis $\underline{\underline{R}} \approx \underline{\underline{I}}$) esetében bármelyik Euler-féle alakváltozási tenzor közelítőleg megegyezik a kis alakváltozások elméletéből ismert $\underline{\underline{\varepsilon}}$ infinitezimális alakváltozási tenzorral

$$\underline{\underline{e}}^{(n)} \approx \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

A (101) összefüggést a $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzor (58) alakjának felhasználásával egy kicsit tömörebben is felírhatjuk. Ha

$$\underline{\underline{v}} = \lambda_i \vec{n}_i \circ \vec{n}^i,$$

akkor

$$\underline{\underline{v}}^2 = \lambda_i \lambda_j \underbrace{\vec{n}_i \circ \vec{n}_j}_{\delta_j^i} \circ \vec{n}^j = \lambda_i^2 \vec{n}_i \circ \vec{n}^i,$$

ezt továbbgondolva pedig következik, hogy

$$\underline{\underline{v}}^n = \lambda_i^n \vec{n}_i \circ \vec{n}^i.$$

Helyettesítsük be ezt az eredményt a (101) képletbe.

$$\underline{\underline{e}}^{(n)} = \frac{1}{n} (\lambda_i^n - 1) \vec{n}_i \circ \vec{n}^i = \frac{1}{n} (\underline{\underline{v}}^n - \underline{\underline{I}}), \quad (102)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\vec{n}_i \circ \vec{n}^i = \underline{\underline{I}}$.

* * *

A 3. táblázatban röviden összefoglaljuk a leggyakrabban használt deformációs és alakváltozási tenzorokat. Az első oszlopban a megfelelő tenzor jelölése látható, a másodikban a kiszámítási módja, az utolsóban pedig az elnevezése. Érdekes külön figyelmet fordítani a harmadik oszlopban található felírásra. Itt indexes jelöléssel láthatók a tenzorok koordinátái és bázisai. Ezeket a deformáció gradiens első sorban felírt alakjából kiindulva kaphatjuk meg. Egyes tenzoroknál a koordináták alsó indexesek, a bázisok felső indexesek, másoknál pedig fordítva, a koordináták felső indexesek, a bázisok pedig alsó indexesek. Az előbbieket *kovariáns tenzoroknak*, az utóbbiakat pedig *kontravariáns tenzoroknak* fogjuk nevezni. Az egyes tenzorokban a koordináták és bázisok indexeinek helyzetét a metrikus tenzorral meg tudjuk változtatni, például az

Jelölés	kiszámítás		elnevezés
$\underline{\underline{F}} =$	$\frac{\partial x^I}{\partial X^J} (\delta^i_l + x^k \Gamma^i_{kl}) \vec{g}_i \circ \vec{G}^J =$	$F^i_{.J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$	deformáció gradiens
$\underline{\underline{F}}^{-1} =$	$= \frac{\partial X^L}{\partial x^j} (\delta^I_L + X^K \Gamma^I_{KL}) \vec{G}_I \circ \vec{g}^j =$	$(F^{-1})^I_{.j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j$	deformáció gradiens inverze
$\underline{\underline{R}} =$		$R^i_{.J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J$	forogató tenzor
$\underline{\underline{U}} =$		$U^K_{.L} \vec{G}_K \circ \vec{G}^L$	jobboldali nyújtó tenzor
$\underline{\underline{C}} =$	$F^i_{.J} g_{ik} F^k_{.L} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L =$	$C_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L$	jobboldali Cauchy-Green
$\underline{\underline{B}} =$	$(C^{-1})^{IL} \vec{G}_I \circ \vec{G}_L = (F^{-1})^I_{.j} g^{jk} (F^{-1})^L_{.k} \vec{G}_I \circ \vec{G}_L$	$B^{IL} \vec{G}_I \circ \vec{G}_L$	Piola
$\underline{\underline{E}} =$	$\frac{1}{2} (F^i_{.J} g_{ik} F^k_{.L} - G_{JL}) \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = \frac{1}{2} (C_{JL} - G_{JL}) \vec{G}^J \circ \vec{G}^L =$	$E_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L$	Green-Lagrange
$\underline{\underline{v}} =$		$v^k_{.l} \vec{g}_k \circ \vec{g}^l$	baloldali nyújtó tenzor
$\underline{\underline{b}} =$	$F^i_{.J} G^{JL} F^k_{.L} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k =$	$b^{ik} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k$	baloldali Cauchy-Green
$\underline{\underline{c}} =$	$(b^{-1})_{il} \vec{g}^i \circ \vec{g}^l = (F^{-1})^I_{.j} G_{JK} (F^{-1})^K_{.l} \vec{g}^i \circ \vec{g}^l =$	$c_{il} \vec{g}^i \circ \vec{g}^l$	Cauchy
$\underline{\underline{e}} =$	$\frac{1}{2} (g_{ki} - (F^{-1})^L_{.k} G_{LJ} (F^{-1})^J_{.i}) \vec{g}^k \circ \vec{g}^i = \frac{1}{2} (g_{ki} - c_{ki}) \vec{g}^k \circ \vec{g}^i =$	$e_{ki} \vec{g}^k \circ \vec{g}^i$	Euler-Almansi

3. táblázat. Alakváltozási és deformációs tenzorok

$$E_{JL} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = E^K_{.L} G_{KJ} \vec{G}^J \circ \vec{G}^L = E^K_{.L} \vec{G}_K \circ \vec{G}^L = E^{KM} G_{ML} \vec{G}_K \circ \vec{G}^L = E^{KM} \vec{G}_K \circ \vec{G}_M$$

vagy

$$b^{ik} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k = b_j^k g^{ji} \vec{g}_i \circ \vec{g}_k = b_j^k \vec{g}^j \circ \vec{g}_k = b_{jl} g^{lk} \vec{g}^j \circ \vec{g}_k = b_{jl} \vec{g}^j \circ \vec{g}^l$$

módon, de mint a következő fejezetben látni fogjuk, ez nem változtat semmit a kovariáns vagy kontravariáns mivoltjukon. Azt is mondhatjuk, hogy a deformáció gradiensből történő származtatás természetes módon mutatja meg egy tenzorról, hogy kovariáns vagy kontravariáns tenzorként viselkedik-e.

1.4.7. Alakváltozási tenzorok előretelése, visszahúzása

Az előző fejezetekben bemutattuk a kezdeti és pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási és deformációs tenzorokat. Most megnézzük, hogy milyen kapcsolat található az egyes kezdeti és pillanatnyi konfigurációban értelmezett tenzorok között. Ha jól megnézzük az $\underline{\underline{E}}$ Green-Lagrange alakváltozási tenzor és az $\underline{\underline{e}}$ Euler-Almansi alakváltozási tenzor (86) és (97) alakját, könnyen rájöhethetünk a kettő közötti kapcsolatra. Szorozzuk meg az $\underline{\underline{E}}$ Green-Lagrange alakváltozási tenzort balról a deformáció gradiens inverzének transzponáltjával, jobbról pedig a deformáció gradiens inverzével.

$$\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \right] \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = \underline{\underline{e}} \quad (103)$$

Ezt a műveletet „előretolásnak” (push forward) is szokás nevezni. Az elnevezés azt jelenti, hogy a kezdeti konfigurációban lévő Green-Langrange alakváltozási tenzort átranzformáljuk (előretoljuk) a pillanatnyi konfigurációba. Az előretolás műveletét a ϕ betűvel fogjuk jelölni, például

$$\phi(\underline{E}) = \underline{e}.$$

Definiálhatjuk az inverz műveletet is, amit „visszahúzásnak” (pull back) nevezünk. Szorozzuk meg az $\underline{e}$ Euler-Almansi alakváltozási tenzort balról a deformáció gradiens transzponáltjával, jobbról pedig a deformáció gradiensevel.

$$\underline{F}^T \cdot \underline{e} \cdot \underline{F} = \underline{F}^T \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^{-1}) \right] \cdot \underline{F} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I}) = \underline{E} \quad (104)$$

Az elnevezés azt jelenti, hogy a pillanatnyi konfigurációban lévő Euler-Almansi alakváltozási tenzort átranzformáljuk (visszahúzzuk) a kezdeti konfigurációba. A visszahúzás műveletét a ϕ inverzével, azaz ϕ^{-1} -zel jelöljük.

$$\phi^{-1}(\underline{e}) = \underline{E} \quad (105)$$

Az 1.4.1. fejezetben azt mondtuk, hogy a $\underline{C}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor a deformált test (pillanatnyi konfiguráció) kezdeti konfigurációba átranzformált metrikus tenzora. A pillanatnyi konfigurációban a deformált test metrikus tenzora az egységtenzor, ebből következik hogy az egységtenzort visszahúzza a kezdeti konfigurációba meg kell kapnunk a $\underline{C}$ jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzort.

$$\phi^{-1}(\underline{I}) = \underline{F}^T \cdot \underline{I} \cdot \underline{F} = \underline{F}^T \cdot \underline{F} = \underline{C}, \quad (106)$$

és fordítva

$$\phi(\underline{C}) = \underline{F}^{-T} \cdot \underline{C} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{I}. \quad (107)$$

Ha egy kezdeti konfigurációban értelmezett tenzort megszorozunk az inverzével, az egységtenzort kapjuk meg. Ha a tenzort és az inverzét előretoljuk majd összeszorozzuk, ugyanúgy az egységtenzort kell megkapnunk, hiszen a tenzor és az inverze egy leképezést és annak inverzét (pl. egy deformációt, és az eredeti alakra történő visszaállást) valószínűleg meg, és ha mindkettőt ugyan olyan módon transzformáljuk át egy másik konfigurációba, akkor meg kell őrizniük azt a tulajdonságukat, hogy egymás inverzei, hiszen ugyan azt a fizikai folyamatot írják le. Nézzük meg ezt a $\underline{C}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor példáján.

$$\underline{C} \cdot \underline{C}^{-1} = \underline{C} \cdot \underline{B} = \underline{I},$$

$\Downarrow$

$$\phi(\underline{C}) \cdot \phi(\underline{B}) = \underline{I} \cdot \phi(\underline{B}) = \phi(\underline{B}) = \underline{I}, \quad (108)$$

ahol felhasználtuk a $\underline{B}$ Piola-féle deformációs tenzor (87) és (107) összefüggéseit. A $\phi(\bullet)$ előretolás művelet (103) összefüggés szerinti felírásából az következik, hogy

$$\phi(\underline{B}) = \underline{F}^{-T} \cdot \underline{B} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{F}^{-T} \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^{-1} \neq \underline{I},$$

vagyis ellentmondásra jutottunk. Mivel a (107) és (108) egyenlőségek fizikailag megalapozottak, vagyis igaznak fogadhatók el, az ellentmondást csak azzal tudjuk feloldani, hogy a $\underline{B}$ Piola-féle deformációs tenzorra máshogy értelmezzük az előretolás műveletet. A (108) egyenletet jobban megvizsgálva könnyen megtalálhatjuk az előretolás művelet Piola-féle deformációs tenzorra értelmezett alakját.

$$\phi(\underline{B}) = \underline{?} \cdot \underline{B} \cdot \underline{?} = \underbrace{\underline{?}}_{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}^{-T} \cdot \underbrace{\underline{?}}_{\underline{F}^T} = \underline{I},$$

vagyis

$$\phi(\underline{B}) = \underline{F} \cdot \underline{B} \cdot \underline{F}^T = \underline{I},$$

valamint ennek az inverze

$$\phi^{-1}(\underline{I}) = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{I} \cdot \underline{F}^{-T} = \underline{C}^{-1} = \underline{B}.$$

Vajon mi lehet az oka annak, hogy a $\underline{C}$ és $\underline{B}$ tenzorokra máshogy kell értelmezni az előretolás és visszahúzás műveletét? Ha megnézzük a 3. összefoglaló táblázatot, azt láthatjuk, hogy az $\underline{E}$ és $\underline{C}$ tenzorok kovariánsok, míg a $\underline{B}$ kontravariáns. Ebből arra a következtetésre is juthatunk, hogy a kovariáns és kontravariáns tenzorokra máshogy kell értelmezni az előretolás és a visszahúzás műveleteket. Megelőlegezve a későbbi fejezetekben felírt további példákat kimondható a

17. Definíció. Tenzorok kezdeti konfigurációból a pillanatnyi konfigurációba történő átranzformálása az úgynevezett előretolás művelettel végezhető el, melyet $\phi(\bullet)$ -vel fogunk jelölni. Kovariáns tenzorokra az előretolást a

$$\phi(\bullet) = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\bullet}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$$

összefüggés, kontravariáns tenzorokra pedig a

$$\phi(\bullet) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\bullet}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$$

összefüggés valósítja meg.

18. Definíció. Tenzorok pillanatnyi konfigurációból a kezdeti konfigurációba történő átranzformálása az úgynevezett visszahúzás művelettel végezhető el, melyet $\phi^{-1}(\bullet)$ -zel fogunk jelölni. Kovariáns tenzorokra a visszahúzást a

$$\phi^{-1}(\bullet) = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\bullet}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

összefüggés, kontravariáns tenzorokra pedig a

$$\phi^{-1}(\bullet) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\bullet}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$$

összefüggés valósítja meg.

Az előretolás és visszahúzás műveletét vektorok esetében a (13) vagy (18) összefüggések mintájára balról a deformáció gradienssel, vagy annak inverzével történő szorzással értelmezzük. Például:

$$\phi(d\vec{R}) = \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R} = d\vec{r}, \quad (109)$$

vagy

$$\phi^{-1}(d\vec{r}) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d\vec{r} = d\vec{R}, \quad (110)$$

ahol a $d\vec{R}$ és a $d\vec{r}$ kontravariáns vektorok. Indexes jelölést használva ez jobban látszik.

$$(F^i_{.J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J) \cdot (dX^K \vec{G}_K) = (F^i_{.K} dX^K) \vec{g}_i = dx^i \vec{g}_i,$$

valamint

$$((F^{-1})^I_{.j} \vec{G}_I \circ \vec{g}^j) \cdot (dx^k \vec{g}_k) = ((F^{-1})^I_{.j} dx^j) \vec{G}_I = dX^I \vec{G}_I.$$

Léteznek kovariáns vektorok is, ilyen például a kezdeti konfigurációban értelmezett $\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial X^I} \vec{G}^I$, vagy a pillanatnyi konfigurációban értelmezett $\nabla = \frac{\partial}{\partial x^i} \vec{g}^i$ nabla operátor. A nabla operátor előretolásának vagy visszahúzásának szabályát a deriválásra vonatkozó láncszabály alkalmazásával írhatjuk fel (az egyszerűség kedvéért feltételezve hogy egyenes vonalú koordinátarendszerről van szó):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \vec{g}^i = \frac{\partial}{\partial X^J} \frac{\partial X^J}{\partial x^i} \vec{g}^i = \frac{\partial}{\partial X^K} \frac{\partial X^J}{\partial x^i} \vec{g}^i \delta_J^K = \frac{\partial X^J}{\partial x^i} \vec{g}^i \circ \vec{G}_J \cdot \vec{G}^K \frac{\partial}{\partial X^K} = \left(\frac{\partial X^J}{\partial x^i} \vec{g}^i \circ \vec{G}_J \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial X^K} \vec{G}^K \right), \quad (111)$$

vagy röviden

$$\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \nabla_0 = \nabla. \quad (112)$$

Ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$\phi(\nabla_0) = \nabla. \quad (113)$$

Az inverz összefüggést megkaphatjuk a (111) számításához hasonlóan a láncszabály ∇_0 -ra való alkalmazásából, vagy egyszerűen a (112) egyenlet átalakításából.

$$\underline{\underline{F}}^T \cdot \nabla = \nabla_0,$$

vagy

$$\phi^{-1}(\nabla) = \nabla_0. \quad (114)$$

A (109), (110), (113) és (114) egyenlőségeket általánosítva kimondhatók a következő definíciók.

19. Definíció. Vektorok kezdeti konfigurációból a pillanatnyi konfigurációba történő átranzformálása az úgynevezett előretolás művelettel végezhető el, melyet $\phi(\bullet)$ -vel fogunk jelölni. Kovariáns vektorokra az előretolást a

$$\phi(\bullet) = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\bullet}}$$

összefüggés, kontravariáns vektorokra pedig a

$$\phi(\bullet) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\bullet}}$$

összefüggés valósítja meg.

20. Definíció. Vektorok pillanatnyi konfigurációból a kezdeti konfigurációba történő átranzformálása az úgynevezett visszahúzás művelettel végezhető el, melyet $\phi^{-1}(\bullet)$ -zel fogunk jelölni. Kovariáns vektorokra a visszahúzást a

$$\phi^{-1}(\bullet) = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\bullet}}$$

összefüggés, kontravariáns vektorokra pedig a

$$\phi^{-1}(\bullet) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\bullet}}$$

összefüggés valósítja meg.

Az előretolás és visszahúzás szabályait vektorokra a 4. táblázat, tenzorokra pedig az 5. táblázat szemlélteti. A 6. táblázat néhány nevezetes tenzor előretolására valamint visszahúzására mutat be példákat.

vektorok	előretolás $\phi(\vec{\bullet})$	visszahúzás $\phi^{-1}(\vec{\bullet})$
kovariáns	$\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \vec{\bullet}$	$\underline{\underline{F}}^T \cdot \vec{\bullet}$
kontravariáns	$\underline{\underline{F}} \cdot \vec{\bullet}$	$\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \vec{\bullet}$

4. táblázat. Vektorok előretolásának és visszahúzásának szabályai.

tenzorok	előretolás $\phi(\underline{\underline{\bullet}})$	visszahúzás $\phi^{-1}(\underline{\underline{\bullet}})$
kovariáns	$\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\bullet}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$	$\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\bullet}} \cdot \underline{\underline{F}}$
kontravariáns	$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\bullet}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$	$\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\bullet}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$

5. táblázat. Tenzorok előretolásának és visszahúzásának szabályai.

	kezdeti konf.	pillanatnyi konf.	pillanatnyi konf.	kezdeti konf.
kovariáns	$\underline{\underline{E}}$	$\phi(\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{e}}$	$\underline{\underline{e}}$	$\phi^{-1}(\underline{\underline{e}}) = \underline{\underline{E}}$
	$\underline{\underline{C}}$	$\phi(\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{c}}$	$\phi^{-1}(\underline{\underline{c}}) = \underline{\underline{I}}$
kontravariáns	$\underline{\underline{B}}$	$\phi(\underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{b}}$	$\phi^{-1}(\underline{\underline{b}}) = \underline{\underline{I}}$

6. táblázat. Néhány nevezetes tenzor előretolásának és visszahúzásának szabályai.

1.5. Alakváltozási tenzorok deviátoros felbontása

Amikor egy test nagy alakváltozásokat szenved, sok esetben megfigyelhető, hogy a test térfogata alig, vagy egyáltalán nem változik meg. Példaként lehet említeni a nyersgumit, aminek térfogata bármilyen alakváltozás során állandó marad, de sok gumi alapú anyag, lágy műanyagok vagy éppen állati vagy emberi szövetek térfogata a bekövetkezett alakváltozásokhoz mérve csak nagyon kis mértékben változik meg. Meg lehet még említeni fémek képlékeny alakváltozását is, ahol az alakváltozás mértékéhez képest csak csekély mértékű a térfogatváltozás. A későbbiekben, amikor majd anyagtörvényeket próbálunk megfogalmazni, a térfogatállandóságot vagy a csak nagyon kis mértékű térfogatváltozást külön figyelembe kell venni. Ennek kinematikai megalapozása történik ebben a fejezetben.

Induljunk ki az 1.2.3. fejezetben kapott eredményből, azaz abból, hogy egy elemi térfogat alakváltozás során bekövetkezett megváltozását a deformáció gradiens determinánsával tudjuk jellemezni. Ha a deformáció gradiens determinánsa egy, azaz $J = \det(\underline{\underline{F}}) = 1$, akkor nincs térfogatváltozás. A deformáció gradiens a 3. tétel alapján

felbontható egy ortogonális tenzor és egy szimmetrikus, pozitív definit tenzor szorzatára a (33) és (34) összefüggésekben látható módon. Mivel az ortogonális tenzor determinánsa mindig egy, ezért alkalmazva a tenzorok szorzatának determinánsára vonatkozó $\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{A}}) \det(\underline{\underline{B}})$ azonosságot a

$$\det(\underline{\underline{F}}) = \underbrace{\det(\underline{\underline{R}})}_1 \det(\underline{\underline{U}}) = \det(\underline{\underline{U}}) = J$$

és

$$\det(\underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{v}}) \underbrace{\det(\underline{\underline{R}})}_1 = \det(\underline{\underline{v}}) = J$$

egyenleteket kapjuk. Az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali és $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzorok már tisztán az alakváltozásokat írják le, és mivel a determinánsaik nem azonosan egyvel egyenlőek, ezért nyilván tartalmazzák a térfogat változást is. Szorozzuk meg és osszuk el az $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ tenzort is a Jacobi-determináns harmadik gyökével, és szorozzuk meg őket az egységtenzorral.

$$\underline{\underline{U}} = \frac{J^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{U}} = \frac{J^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underbrace{\left(J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}} \right)}_{\underline{\underline{J}}_U} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{U}} \right)}_{\underline{\underline{\tilde{U}}}} = \underline{\underline{J}}_U \cdot \underline{\underline{\tilde{U}}}$$

és

$$\underline{\underline{v}} = \frac{J^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{v}} = \frac{J^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{v}} = \underbrace{\left(J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}} \right)}_{\underline{\underline{J}}_v} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{J^{\frac{1}{3}}} \underline{\underline{v}} \right)}_{\underline{\underline{\tilde{v}}}} = \underline{\underline{J}}_v \cdot \underline{\underline{\tilde{v}}}.$$

Ezzel az $\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{v}}$ tenzorokat két tenzor szorzatára bontottuk. Könnyen belátható, hogy a $\underline{\underline{J}}_U$ és $\underline{\underline{J}}_v$ tenzorok determinánsa megegyezik a J Jacobi-determinánssal. Felhasználva a $\det(\alpha \underline{\underline{A}}) = \alpha^3 \det(\underline{\underline{A}})$ azonosságot a

$$\det(\underline{\underline{J}}_U) = \det\left(J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}}\right) = \underbrace{\left(J^{\frac{1}{3}}\right)^3}_J \underbrace{\det(\underline{\underline{I}})}_1 = J$$

és

$$\det(\underline{\underline{J}}_v) = \det\left(J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}}\right) = \underbrace{\left(J^{\frac{1}{3}}\right)^3}_J \underbrace{\det(\underline{\underline{I}})}_1 = J$$

eredményt kapjuk. A tenzorok szorzatának determinánsára vonatkozó azonosság alapján

$$\underbrace{\det(\underline{\underline{U}})}_J = \underbrace{\det(\underline{\underline{J}}_U)}_J \det(\underline{\underline{\tilde{U}}})$$

és

$$\underbrace{\det(\underline{\underline{v}})}_J = \underbrace{\det(\underline{\underline{J}}_v)}_J \det(\underline{\underline{\tilde{v}}}),$$

amiből következik a

$$\det(\underline{\underline{\tilde{U}}}) = 1$$

és

$$\det(\underline{\underline{\tilde{v}}}) = 1$$

egyenlőség, vagyis a $\underline{\underline{\tilde{U}}}$ és $\underline{\underline{\tilde{v}}}$ módosított nyújtó tenzorok nem tartalmazzák a térfogatváltozást, míg a $\underline{\underline{J}}_U$ és $\underline{\underline{J}}_v$ tenzorok a J Jacobi-determinánsán keresztül csak a térfogatváltozásról tartalmazzák információt. Ezzel az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali és $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzorokat felbontottuk tisztán térfogatváltozási és tisztán torzítási részekre, pontosabban ezen részeket leíró tenzorok *szorzatára*.

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{J}}_U \cdot \underline{\underline{\tilde{U}}} = \underline{\underline{\tilde{U}}} \cdot \underline{\underline{J}}_U$$

és

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{J}}_v \cdot \underline{\underline{\tilde{v}}} = \underline{\underline{\tilde{v}}} \cdot \underline{\underline{J}}_v.$$

A tisztán *torzításos részt* szokás *deviátoros résznek* is nevezni. A (84) és (95) összefüggések alapján előállítható a jobb- illetve baloldali Cauchy-Green deformációs tenzorok deviátoros felbontása is.

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{J}}_C \cdot \underline{\underline{\tilde{C}}} = \underline{\underline{\tilde{C}}} \cdot \underline{\underline{J}}_C$$

és

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{J}}_b \cdot \underline{\underline{\tilde{b}}} = \underline{\underline{\tilde{b}}} \cdot \underline{\underline{J}}_b,$$

ahol

$$\begin{aligned}\underline{\underline{J}}_C &= \underline{\underline{J}}_U \cdot \underline{\underline{J}}_U = J^{\frac{2}{3}} \underline{\underline{I}}, \\ \underline{\underline{\tilde{C}}} &= \underline{\underline{\tilde{U}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{U}}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{C}}, \\ \underline{\underline{J}}_b &= \underline{\underline{J}}_v \cdot \underline{\underline{J}}_v = J^{\frac{2}{3}} \underline{\underline{I}}\end{aligned}$$

és

$$\underline{\underline{\tilde{b}}} = \underline{\underline{\tilde{v}}} \cdot \underline{\underline{\tilde{v}}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{b}}.$$

A többi alakváltozási tenzornál a deviátoros felbontás az előzőeknél jóval bonyolultabban lenne megoldható, de tulajdonképpen nincs is rájuk szükség a továbbiakban, ezért itt sem foglalkozunk velük.

1.6. Merev test szerű elmozdulás és objektivitás

Képzeljünk el, hogy egy valóságos fizikai folyamatot (pl. egy szilárd test deformációját) szeretnénk matematikailag leírni. Ehhez szükség van egy „megfigyelőre”, aki figyelemmel kíséri hogy mi történik a testtel. Tegyük fel, hogy a megfigyelő mérni tudja

1. a test pontjainak relatív távolságait (pl. egy vonalzóval), és
2. az időt (pl. egy órával).

A megfigyelt deformálódó testből ragadjunk ki két különböző időpillanatban két pontot, az $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ és $\vec{r}_t^* = \vec{r}^*(t)$ pontokat. Az $\vec{r}_0$ és $\vec{r}_t^*$ nem feltétlenül ugyan azt az anyagi pontot jelentik. A két pont távolságát az $|\vec{r}_t^* - \vec{r}_0|$ különbség, a megfigyelési időintervallumot pedig a $t - t_0$ időtartam adja meg. Tegyük fel, hogy egy másik megfigyelő is jelen van, aki ugyan azt a folyamatot próbálja leírni. Neki is van egy ugyan olyan skálával rendelkező vonalzója és egy ugyan olyan sebességgel járó órája, mint az első megfigyelőnek, de az órák nem biztos hogy szinkronizálva vannak. A második megfigyelő is ugyan azt a két pontot figyeli ugyanazokban az időpillanatokban, mint az első. Amikor az első pont az első megfigyelő órája szerint a t_0 időpillanatban az $\vec{r}_0$ helyen van, a második megfigyelő azt tapasztalja, hogy az első pont a t_0^* időpillanatban az $\vec{r}_0^*$ helyen van. Amikor a második pont az első megfigyelő órája szerint a t időpillanatban az $\vec{r}_t^*$ helyen van, a második megfigyelő azt tapasztalja, hogy a második pont a t^* időpillanatban az $\vec{r}_t^{**}$ helyen van. (A második megfigyelő által mért mennyiségeket megkülönböztetve az első megfigyelő által mért mennyiségektől egy felső indexbe írt csillaggal látjuk el.) Ez azt jelenti, hogy a második megfigyelő szerint a két pont távolsága az $|\vec{r}_t^{**} - \vec{r}_0^*|$ különbség lesz, az időintervallum hosszára pedig a $t^* - t_0^*$ időtartam adódik. Mivel ugyan azt a fizikai folyamatot figyelik meg, ugyan azokat a mérőeszközöket használják, ugyan azokat a távolságokat és időintervallumokat kell mérniük, vagyis

$$|\vec{r}_t^* - \vec{r}_0| = |\vec{r}_t^{**} - \vec{r}_0^*| \quad (115)$$

és

$$t - t_0 = t^* - t_0^*.$$

Ha ellenőrizni szeretnénk, hogy valóban ugyan azok a mérési eredmények jöttek-e ki, a következőt kell tenniük. Feltételezve hogy mindketten derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszert használtak a vektorok leírására, el kell forgatni az egyik (pl. az első) koordináta-rendszert úgy, hogy a tengelyei párhuzamosak legyenek és egy irányba mutassanak a második megfigyelő koordináta-rendszerének tengelyeivel. Ezt matematikailag egy ortogonális transzformációt leíró $\underline{\underline{Q}}$ tenzor és egy eltolást leíró $\vec{c}$ vektor segítségével tehetjük meg. Ha feltételezzük, hogy a második megfigyelő mozog az elsőhöz képest, akkor az elfordulást leíró tenzor és az eltolást leíró vektor függvénye lesz az időnek, azaz $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}(t)$ és $\vec{c} = \vec{c}(t)$. Így a két megfigyelő közötti transzformációt az

$$\vec{r}^* = \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \vec{r} + \vec{c}(t)$$

vagy

$$\underline{\underline{r}}^*(t^*) = \underline{\underline{r}}^*(t + \alpha) = \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \underline{\underline{r}}(t) + \underline{\underline{c}}(t) \quad (116)$$

összefüggés adja meg, ahol α az órák által mutatott idő különbségét jelenti. A (116) transzformáció segítségével a (115) skalár mennyiségek egyenlősége helyett az

$$\underline{\underline{r}}^{**}(t + \alpha) - \underline{\underline{r}}^*(t_0 + \alpha) = \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \underline{\underline{r}}'(t) + \underline{\underline{c}}(t) - \underline{\underline{Q}}(t_0) \cdot \underline{\underline{r}}(t_0) - \underline{\underline{c}}(t_0) \quad (117)$$

vektorok egyenlősége írható.

Koordinátarendszerek csak a képzeletünkben léteznek. Amikor valóságos testek mozgását (deformációját) megpróbáljuk matematikai eszközökkel leírni, mindig valamilyen koordinátarendszert használunk, de mivel a koordinátarendszerek nem valóságos objektumok, tetszőleges irányítottsággal és helyen elképzelhetjük és felvehetjük őket. A koordinátarendszer megválasztása ezért nem szabad hogy befolyásolja a fizikai folyamatokat.

21. Definíció. Egy fizikai folyamatot leíró fizikai mennyiséget objektívnek fogunk nevezni, ha az koordinátarendszertől (megfigyelőtől) független.

Most vizsgáljuk meg, hogy az alakváltozásokat leíró deformációs- és alakváltozási tenzorok objektív mennyiségek-e, vagyis a megfigyelőtől függetlenül írják-e le az alakváltozást? Ennek megválaszolásához a (117) egyenletből indulunk ki. Tekintsünk két egymáshoz közel lévő két pontot. Az egyik pont helyvektora a pillanatnyi konfigurációban legyen $\underline{\underline{r}}$, a másiké $\underline{\underline{r}}' = \underline{\underline{r}} + d\underline{\underline{r}}$. A két pontot ugyan abban az időpillanatban vizsgáljuk, vagyis a (117) egyenletben $t_0 = t$. Feltételezzük, hogy a két pont leírásánál használt órák egyformán járnak, azaz $\alpha = 0$. Ezzel a (117) egyenlőség az

$$\underline{\underline{r}}'^*(t) - \underline{\underline{r}}^*(t) = \underline{\underline{Q}}(t) \cdot (\underline{\underline{r}}'(t) - \underline{\underline{r}}(t)) \quad (118)$$

alakra egyszerűsödik. Vezessük be a $d\underline{\underline{r}}^* = \underline{\underline{r}}'^*(t) - \underline{\underline{r}}^*(t)$ jelölést, amivel a (118) tovább egyszerűsíthető.

$$d\underline{\underline{r}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot d\underline{\underline{r}}, \quad (119)$$

vagyis az egyik pontból a másikba mutató, az egyik megfigyelő számára $d\underline{\underline{r}}$ vektor a másik megfigyelő számára $\underline{\underline{Q}} \cdot d\underline{\underline{r}}$ vektornak látszik. Azt is mondhatjuk, hogy a $d\underline{\underline{r}}$ vektor akkor független a megfigyelőtől, vagy másként *objektív*, ha teljesül rá a (119) összefüggés. Amennyiben a $d\underline{\underline{r}}$ vektort infinitezimálisnak, azaz végtelenül kicsinek választjuk, akkor $d\underline{\underline{r}}^*$ is infinitezimális lesz, vagyis egy adott ponthoz tudjuk őket rendelni. Ezzel a (119) összefüggés általánosítható tetszőleges vektormezőre is, vagyis azt mondhatjuk, hogy ha egy $\underline{\underline{w}}$ vektormező a

$$\underline{\underline{w}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{w}} \quad (120)$$

szerint transzformálódik akkor objektív.

Felhasználva a (13) és a (119) összefüggést azt kapjuk, hogy az egyik megfigyelő által a kezdeti konfigurációban látott $d\underline{\underline{R}}$ vektor a másik megfigyelő számára a pillanatnyi konfigurációban

$$d\underline{\underline{r}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{\underline{R}} \quad (121)$$

vektornak látszik. Ezt úgy is írhattuk volna, hogy

$$d\underline{\underline{r}}^* = d\underline{\underline{r}}^* \left(\underline{\underline{R}} \right) = \frac{d\underline{\underline{r}}^*}{d\underline{\underline{R}}} \cdot d\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}}^* \cdot d\underline{\underline{R}}, \quad (122)$$

ahol $\underline{\underline{F}}^* = \frac{d\underline{\underline{r}}^*}{d\underline{\underline{R}}}$ az első megfigyelő kezdeti konfigurációjából a második megfigyelő pillanatnyi konfigurációjába történő leképezés deformáció gradiens tenzora. Vagyis a (121) és a (122) egyenletek összevetése után kijelenthetjük, hogy az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens tenzor transzformációját az

$$\underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}} \quad (123)$$

összefüggés valósítja meg. Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens kétpont tenzor, vagyis két koordinátarendszer között teremt kapcsolatot. Az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens transzformációjánál csak az egyik koordinátarendszert transzformáljuk (a pillanatnyi konfigurációhoz tartozót), ezért az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens úgy transzformálódik, mint egy vektor. Ezt azt is jelenti, hogy az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiens kielégíti a (120) transzformációs szabályt, azaz objektív fizikai mennyiség.

Mivel a deformációs és alakváltozási tenzorok származtathatók az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradiensből, könnyen ellenőrizhetjük hogy objektív mennyiségek-e. Vegyük sorba az eddig említett tenzorokat. Legyen továbbra is két megfigyelő,

akik két különböző helyről vizsgálják ugyan azt a deformációt. Mindkét megfigyelő el tudja végezni a deformáció gradiens poláris felbontását a 3. tételnek megfelelően, vagyis

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{R}}^* \cdot \underline{\underline{U}}^*, \quad (124)$$

valamint

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{v}}^* \cdot \underline{\underline{R}}^*. \quad (125)$$

Vizsgáljuk meg először a (124) RU felbontást. Alkalmazva a (123) transzformációs szabályt az

$$\underline{\underline{R}}^* \cdot \underline{\underline{U}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

összefüggést kapjuk. Mindkét oldalon egy ortogonális tenzor és egy szimmetrikus tenzor szorzata áll⁸. Mivel az RU felbontás egyértelműen elvégezhető, igaznak kell lenni az

$$\underline{\underline{R}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad (126)$$

és

$$\underline{\underline{U}}^* = \underline{\underline{U}} \quad (127)$$

egyenlőségeknek is. Ezzel azt kaptuk, hogy az $\underline{\underline{R}}$ forgatás az $\underline{\underline{F}}$ deformáció gradienshez hasonlóan követi a (120) transzformációs szabályt, az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzor azonban *invariáns* marad, vagyis mindkét megfigyelő számára ugyan az fizikai mennyiség lesz. A jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzorból a (84) összefüggéssel számítható. A (127) transzformációs szabály (84) összefüggésbe történő helyettesítésével adódik a jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor transzformációs szabálya:

$$\underline{\underline{C}}^* = (\underline{\underline{U}}^*)^2 = \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{C}}. \quad (128)$$

A Piola-féle deformációs tenzor transzformációjának meghatározásához vegyük a (128) összefüggés inverzét.

$$\underline{\underline{B}}^* = (\underline{\underline{C}}^*)^{-1} = \underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{B}}.$$

Alkalmazzuk a (123) transzformációs szabályt az a (125) VR felbontásra is.

$$\underline{\underline{v}}^* \cdot \underline{\underline{R}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{R}}. \quad (129)$$

Mivel ugyan arról a deformáció gradiensről van szó mint az RU felbontás esetén, az $\underline{\underline{R}}$ és $\underline{\underline{R}}^*$ forgató tenzorok meg fognak egyezni a (124) képletekben szereplő megfelelő tenzorokkal, vagyis igaz lesz rájuk a (126) transzformációs szabály is. Ezt a transzformációs szabályt bele lehet csempészni a (129) képletbe egy alkalmasan választott egységtenzorral történő szorzás segítségével:

$$\underline{\underline{v}}^* \cdot \underline{\underline{R}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{R}}. \quad (130)$$

Mindkét oldalon egy szimmetrikus tenzor és egy ortogonális tenzor szorzata áll⁹. Mivel a VR felbontás egyértelműen elvégezhető, igaznak kell lenni az

$$\underline{\underline{R}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

és

$$\underline{\underline{v}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \quad (131)$$

egyenlőségeknek is. Ezzel megkaptuk a baloldali nyújtó tenzorra érvényes (131) transzformációs szabályt. A baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor az $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzorból a (95) összefüggéssel számítható. A (131) transzformációs szabály (95) összefüggésbe történő helyettesítésével adódik a baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor transzformációs szabálya:

$$\underline{\underline{b}}^* = (\underline{\underline{v}}^*)^2 = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}}_{\underline{\underline{v}}^2} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T. \quad (132)$$

⁸A $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$ szorzat is ortogonális transzformációt valósít meg, hiszen $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot (\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}})^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{I}}$.

⁹A $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$ tenzor szimmetrikus, hiszen $(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T)^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}}^T \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$.

A $\underline{\underline{c}}$ Cauchy-féle deformációs tenzor transzformációjának meghatározásához vegyük a (132) összefüggés inverzét.

$$\underline{\underline{c}}^* = (\underline{\underline{b}}^*)^{-1} = \left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \right)^{-1} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T.$$

Az alakváltozási tenzorok transzformációs szabályait ezek után már könnyen megkapjuk, hiszen a kezdeti konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok származtathatók az $\underline{\underline{U}}$ jobboldali nyújtó tenzorból a (90) összefüggéssel, a pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok pedig származtathatók a $\underline{\underline{v}}$ baloldali nyújtó tenzorból a (102) összefüggéssel. A kezdeti konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok esetében egyszerű a dolgunk, az $\underline{\underline{U}}$ (127) invarianciájának megfelelően a (90) képletben $\underline{\underline{U}}$ helyére $\underline{\underline{U}}^*$ -ot kell írni, és így megkapjuk az alakváltozási tenzor áttanszformált alakját.

$$\left(\underline{\underline{E}}^{(n)} \right)^* = \frac{1}{n} \left((\underline{\underline{U}}^*)^n - \underline{\underline{I}} \right) = \frac{1}{n} (\underline{\underline{U}}^n - \underline{\underline{I}}) = \underline{\underline{E}}^{(n)},$$

vagyis

$$\left(\underline{\underline{E}}^{(n)} \right)^* = \underline{\underline{E}}^{(n)}.$$

Ebből az összefüggésből az látszik, hogy minden kezdeti konfigurációban definiált alakváltozási tenzor invariáns. A pillanatnyi konfigurációban értelmezett alakváltozási tenzorok transzformációs szabályának meghatározásához a (102) képletben $\underline{\underline{v}}$ helyére $\underline{\underline{v}}^*$ -ot kell írni, és alkalmazni kell a (131) transzformációs formulát.

$$\begin{aligned} \left(\underline{\underline{e}}^{(n)} \right)^* &= \frac{1}{n} \left((\underline{\underline{v}}^*)^n - \underline{\underline{I}} \right) = \frac{1}{n} \left(\left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \right)^n - \underline{\underline{I}} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{I}}} - \underline{\underline{I}} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}}^n \cdot \underline{\underline{Q}}^T - \underline{\underline{I}} \right) = \frac{1}{n} \left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}}^n \cdot \underline{\underline{Q}}^T - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \right) = \\ &= \underline{\underline{Q}} \cdot \left(\frac{1}{n} (\underline{\underline{v}}^n - \underline{\underline{I}}) \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{e}}^{(n)} \cdot \underline{\underline{Q}}^T, \end{aligned}$$

vagyis

$$\left(\underline{\underline{e}}^{(n)} \right)^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{e}}^{(n)} \cdot \underline{\underline{Q}}^T.$$

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a kezdeti konfigurációban értelmezett deformációs és alakváltozási tenzorok a (117) transzformációval szemben invariánsak, mivel csak a pillanatnyi konfiguráció vonatkoztatási rendszerét forgatjuk el, de mivel a (117) összefüggést kielégítik, egyben objektív mennyiségek is. A pillanatnyi konfigurációban értelmezett deformációs és alakváltozási tenzorok hasonló okok miatt szintén objektívek, de nem invariánsok. A pillanatnyi konfigurációban értelmezett objektív vektorok kielégítik a (120) transzformációs szabályt, a skalár mennyiségek pedig koordinátarendszertől függetlenek, ezért invariánsok. Az említett transzformációs szabályokat a 7. táblázat foglalja össze, továbbá néhány gyakran előforduló deformációs és alakváltozási tenzor transzformációs szabálya a 8. táblázatban tekinthető meg.

skalárok		invariáns
vektorok	kezdeti konfiguráció	invariáns
	pillanatnyi konfiguráció	$\underline{\underline{e}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{e}}$
tenzorok	kezdeti konfiguráció	invariáns
	két pont tenzorok	$\underline{\underline{e}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{e}}$ vagy $\underline{\underline{e}}^* = \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$
	pillanatnyi konfiguráció	$\underline{\underline{e}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$

7. táblázat. Objektív skalár, vektor és tenzormennyiségek transzformációs szabályai.

* * *

Eddig minden deformációs és alakváltozási tenzor objektívnek bizonyult, azonban később tapasztalni fogjuk, hogy léteznek olyan deformációkat leíró mennyiségek is, amelyek nem tesznek eleget az objektivitás követelményeinek.

Invariáns és objektív (kezdeti konfiguráció)	Nem invariáns, de objektív (pillanatnyi konfiguráció)
$\underline{\underline{U}}^* = \underline{\underline{U}}$	$\underline{\underline{v}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$
$\underline{\underline{C}}^* = \underline{\underline{C}}$	$\underline{\underline{b}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$
$\underline{\underline{B}}^* = \underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{c}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$
$\underline{\underline{E}}^* = \underline{\underline{E}}$	$\underline{\underline{e}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$
$\underline{\underline{H}}^* = \underline{\underline{H}}$	$\underline{\underline{h}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{h}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$
$\vdots$	$\vdots$

8. táblázat. Objektív és invariáns deformációs és alakváltozási tenzorok.

1.7. Időben változó alakváltozási mennyiségek

1.7.1. Idő szerinti deriválás

Az eddig vizsgált összes alakváltozási mennyiséget időben állandónak tekintettük. Ha az alakváltozás folyamatát nézzük, akkor ezek a mennyiségek (deformációs- és alakváltozási tenzorok) egy pillanatnyi állapotot írnak le. Az időbeli folyamat leírásához általában szükséges a megfelelő mennyiség idő szerinti deriváltja. Ebben a fejezetben azt próbáljuk kideríteni, hogy hogyan kell elvégezni különböző fizikai mennyiségek (skalárok, vektorok és tenzorok) idő szerinti deriválását.

Elsőként nézzük meg egy olyan $a = a(\vec{R}, t)$ skalár mennyiség idő szerinti deriváltját, amely a kezdeti konfigurációban lévő $\vec{R}$ helyvektor és a t idő függvénye.

$$\dot{a}(\vec{R}, t) = \frac{da(\vec{R}, t)}{dt} = \frac{\partial a(\vec{R}, t)}{\partial \vec{R}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{\vec{0}} + \frac{\partial a(\vec{R}, t)}{\partial t} \underbrace{\frac{dt}{dt}}_1 = \frac{\partial a(\vec{R}, t)}{\partial t}. \quad (133)$$

Itt kihasználtuk azt, hogy a kezdeti konfiguráció $\vec{R}$ helyvektora időben állandó. Láthatjuk, hogy az idő szerinti totális és parciális deriválás között nincs semmi különbség. Ha az $a = a(\vec{r}, t)$ skalár mennyiség a pillanatnyi konfigurációban lévő $\vec{r}$ helyvektor és a t idő függvénye, akkor

$$\dot{a}(\vec{r}, t) = \frac{da(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial a(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} + \frac{\partial a(\vec{r}, t)}{\partial t} \underbrace{\frac{dt}{dt}}_1 = \underbrace{\nabla a}_{\downarrow} \cdot \vec{v} + \frac{\partial a(\vec{r}, t)}{\partial t}.$$

Az utolsó tag átalakításához használjuk ki a skalár és vektor mennyiség szorzatának deriválására vonatkozó azonosságot, azaz hogy

$$\nabla \cdot \underbrace{\downarrow}_{(a\vec{v})} = \nabla \cdot \underbrace{\downarrow}_{a\vec{v}} + \nabla a \cdot \underbrace{\downarrow}_{\vec{v}} = \underbrace{\downarrow}_{a\vec{v}} \cdot \nabla + a \nabla \cdot \underbrace{\downarrow}_{\vec{v}}.$$

Így az $a(\vec{r}, t)$ idő szerinti deriváltjára az

$$\dot{a}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \underbrace{\downarrow}_{(a\vec{v})} - a \nabla \cdot \underbrace{\downarrow}_{\vec{v}} + \frac{\partial a(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (134)$$

összefüggés adódik. A (134) képlet szemléletes jelentését egy későbbi fejezetben részletesen ismertetjük.

Ha egy kezdeti konfigurációban értelmezett $\vec{A} = \vec{A}(\vec{R}, t)$ vektort szeretnénk az idő szerint deriválni, amely a kezdeti konfigurációban lévő $\vec{R}$ helyvektor és a t idő függvénye, akkor a (134) összefüggéshez hasonlóan kell eljárnunk.

$$\dot{\vec{A}}(\vec{R}, t) = \frac{d\vec{A}(\vec{R}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{A}(\vec{R}, t)}{\partial \vec{R}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{\vec{0}} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{R}, t)}{\partial t} \underbrace{\frac{dt}{dt}}_1 = \frac{\partial \vec{A}(\vec{R}, t)}{\partial t}.$$

A totális és parciális deriváltak között itt nincs különbség. A pillanatnyi konfigurációban értelmezett $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}, t)$ vektornál nem ez a helyzet, mert az $\vec{a}$ vektor függ az $\vec{r}$ helyvektortól is, ami maga is függ a t időtől.

$$\dot{\vec{a}}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{a}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} + \frac{\partial \vec{a}(\vec{r}, t)}{\partial t} \underbrace{\frac{dt}{dt}}_1 = \vec{a} \circ \nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{a}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Az utolsó tag átalakításához használjuk ki a két vektor diadikus szorzatának deriválására vonatkozó azonosságot, azaz hogy

$$\overline{\vec{a} \circ \vec{v}} \cdot \nabla = \vec{a} \circ \nabla \cdot \vec{v} + \vec{a} \circ \nabla \cdot \vec{v}.$$

Így az $\vec{a}(\vec{r}, t)$ idő szerinti deriváltjára az

$$\dot{\vec{a}}(\vec{r}, t) = \overline{\vec{a} \circ \vec{v}} \cdot \nabla - \vec{a} \circ \nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{a}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (135)$$

összefüggés adódik.

Ha

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{A}(\vec{R}, t)$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \vec{a}(\vec{r}, t)$$

akkor

$$\begin{aligned} \dot{\vec{a}}(\vec{r}, t) &= \frac{d}{dt} (\underline{\underline{F}} \cdot \vec{A}(\vec{R}, t)) = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{A}(\vec{R}, t) + \underline{\underline{F}} \cdot \dot{\vec{A}}(\vec{R}, t) = \\ &= \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \vec{A}(\vec{R}, t) + \underline{\underline{F}} \cdot \dot{\vec{A}}(\vec{R}, t) = \\ &= \underbrace{\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}} \cdot \vec{A}(\vec{R}, t)}_{\vec{a}(\vec{r}, t)} + \underline{\underline{F}} \cdot \dot{\vec{A}}(\vec{R}, t) \end{aligned}$$

vagyis

$$\underline{\underline{F}} \cdot \dot{\vec{A}}(\vec{R}, t) = \dot{\vec{a}}(\vec{r}, t) - \underline{\underline{I}} \cdot \vec{a}(\vec{r}, t)$$

Tenzorok

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{A}}}(\vec{R}, t) &= \frac{d\underline{\underline{A}}(\vec{R}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t)}{\partial \vec{R}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{\vec{0}} + \frac{\partial \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t)}{\partial t} \underbrace{\frac{dt}{dt}}_1 = \frac{\partial \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t)}{\partial t} \\ \underline{\underline{a}}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial \underline{\underline{a}}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} + \frac{\partial \underline{\underline{a}}(\vec{r}, t)}{\partial t} \underbrace{\frac{dt}{dt}}_1 = \underline{\underline{a}} \circ \nabla \cdot \vec{v} + \frac{\partial \underline{\underline{a}}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Ha

$$\underline{\underline{a}}(\vec{r}, t) = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{A}}(\vec{R}, t) = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{a}}(\vec{r}, t) \cdot \underline{\underline{F}}$$

akkor

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{a}}}(\vec{r}, t) &= \frac{d}{dt} (\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = \\ &= \dot{\underline{\underline{F}}}^{-T} \cdot \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{A}}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t) \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}^{-1} = \\ &= \dot{\underline{\underline{F}}}^{-T} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{A}}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\underline{\dot{F}}^{-T} \cdot \underline{F}^T}_{-\underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{F}}^T} \cdot \underline{F}^{-T} \cdot \underbrace{\underline{A}(\vec{R}, t)}_{\underline{a}(\vec{r}, t)} \cdot \underline{F}^{-1} + \underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^{-1} + \underbrace{\underline{F}^{-T} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t)}_{\underline{a}(\vec{r}, t)} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underbrace{\underline{F} \cdot \underline{\dot{F}}^{-1}}_{-\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}} = \\
&= -\underbrace{\underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{F}}^T}_{\underline{l}^T} \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) + \underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^{-1} - \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underbrace{\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}}_{\underline{l}} = \\
&= -\underline{l}^T \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) + \underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^{-1} - \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{l}
\end{aligned}$$

vagyis

$$\underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{\dot{a}}(\vec{r}, t) + \underline{l}^T \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) + \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{l}$$

vagy

$$\underline{F}^{-T} \cdot \frac{d}{dt} (\underline{F}^T \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{F}) \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{\dot{a}}(\vec{r}, t) + \underline{l}^T \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) + \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{l}$$

ami

$$\begin{aligned}
&\underline{F}^{-T} \cdot \frac{d}{dt} (\underline{F}^T \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{F}) \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{\dot{a}}(\vec{r}, t) + \underline{l}^T \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) + \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{l} \\
&\phi \left(\frac{d}{dt} \phi^{-1} (\underline{a}(\vec{r}, t)) \right) = \underline{\dot{a}}(\vec{r}, t) + \underline{l}^T \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) + \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{l}
\end{aligned}$$

Ha

$$\begin{aligned}
\underline{a}(\vec{r}, t) &= \underline{F} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T \\
\underline{A}(\vec{R}, t) &= \underline{F}^{-1} \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{F}^{-T}
\end{aligned}$$

akkor

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{a}}(\vec{r}, t) &= \frac{d}{dt} (\underline{F} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T) = \\
&= \underline{\dot{F}} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T + \underline{F} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T + \underline{F} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t) \cdot \underline{\dot{F}}^T = \\
&= \underline{\dot{F}} \cdot \underbrace{\underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}}_{\underline{I}} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T + \underline{F} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T + \underline{F} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t) \cdot \underbrace{\underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{F}}^T}_{\underline{I}} = \\
&= \underbrace{\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}}_{\underline{l}} \cdot \underbrace{\underline{F} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t)}_{\underline{a}(\vec{r}, t)} \cdot \underline{F}^T + \underline{F} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T + \underbrace{\underline{F} \cdot \underline{A}(\vec{R}, t)}_{\underline{a}(\vec{r}, t)} \cdot \underbrace{\underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{F}}^T}_{\underline{l}^T} = \\
&= \underline{l} \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) + \underline{F} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T + \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{l}^T
\end{aligned}$$

vagyis

$$\underline{F} \cdot \underline{\dot{A}}(\vec{R}, t) \cdot \underline{F}^T = \underline{\dot{a}}(\vec{r}, t) + \underline{l} \cdot \underline{a}(\vec{r}, t) + \underline{a}(\vec{r}, t) \cdot \underline{l}^T$$

Objektivitás $t = t_0 + \Delta t$, $\vec{r}' = \vec{r}$, $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
\vec{r}^*(t + \Delta t) - \vec{r}^*(t) &= \underline{Q}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t + \Delta t) + \vec{c}(t + \Delta t) - \underline{Q}(t) \cdot \vec{r}(t) - \vec{c}(t) \\
&= \underline{Q}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t + \Delta t) - \underline{Q}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t) + \underbrace{\underline{Q}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t) - \underline{Q}(t) \cdot \vec{r}(t)}_{\vec{0}} + \\
&\quad + \vec{c}(t + \Delta t) - \vec{c}(t) \\
\frac{\vec{r}^*(t + \Delta t) - \vec{r}^*(t)}{\Delta t} &= \frac{\underline{Q}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t + \Delta t) - \underline{Q}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t)}{\Delta t} + \\
&\quad + \frac{\underline{Q}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t) - \underline{Q}(t) \cdot \vec{r}(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{c}(t + \Delta t) - \vec{c}(t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}^*(t + \Delta t) - \vec{r}^*(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{\underline{Q}}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t + \Delta t) - \underline{\underline{Q}}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t)}{\Delta t} + \\
&+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{\underline{Q}}(t + \Delta t) \cdot \vec{r}(t) - \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \vec{r}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{c}(t + \Delta t) - \vec{c}(t)}{\Delta t} \\
\dot{\vec{r}}^*(t) &= \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) + \dot{\underline{\underline{Q}}}(t) \cdot \vec{r}(t) + \dot{\vec{c}}(t) \\
\dot{\vec{r}}^* &= \underline{\underline{Q}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \vec{r} + \dot{\vec{c}} \\
\vec{v}^* &= \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{v} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \vec{r} + \dot{\vec{c}}
\end{aligned}$$

vagyis a sebességvektor általában nem objektív, mert nem elégíti ki a (120) összefüggést.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_1^* &= \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{v}_1 + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \vec{r}_1 + \dot{\vec{c}} \\ \vec{v}_2^* &= \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{v}_2 + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \vec{r}_2 + \dot{\vec{c}} \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = \underline{\underline{Q}} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Ha $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = d\vec{r}$ akkor $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = d\vec{v}$ és $\vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = d\vec{v}^*$

$$d\vec{v}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot d\vec{v} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{v}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{l}} \cdot d\vec{r} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot d\vec{r} = \left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{l}} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \right) \cdot d\vec{r}$$

Másrésről

$$d\vec{v}^* = d\dot{\vec{r}}^* = \frac{\partial \dot{\vec{r}}^*}{\partial \vec{r}^*} \cdot d\vec{r}^* = \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial \vec{r}^*} \cdot d\vec{r}^* = \underbrace{\vec{v}^* \circ \nabla^*}_{\underline{\underline{l}}^*} \cdot d\vec{r}^* = \underline{\underline{l}}^* \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot d\vec{r}}_{d\vec{r}^*}$$

Ebből következik, hogy

$$\underline{\underline{l}}^* \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot d\vec{r} = \left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{l}} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \right) \cdot d\vec{r}$$

Mivel $d\vec{r}$ tetszőleges

$$\begin{aligned} \underline{\underline{l}}^* \cdot \underline{\underline{Q}} &= \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{l}} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \\ \underline{\underline{l}}^* &= \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \end{aligned}$$

vagyis a sebesség gradiens nem objektív mennyiség.

1.7.2. Sebességmező

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{\chi}(\vec{R}, t) = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R}, t)}{\partial \vec{R}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{\vec{0}} + \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R}, t)}{\partial t} \underbrace{\frac{dt}{dt}}_1 = \frac{\partial \vec{\chi}(\vec{R}, t)}{\partial t} \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{\chi}(\vec{R}, t) = \vec{v}(\vec{R}, t) = \vec{v}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{r}(t)), t) = \vec{v}(\vec{r}, t) \\ \dot{\vec{r}} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \end{aligned}$$

1.7.3. Sebesség gradiens tenzor

$$\begin{aligned}
d\vec{v} &= \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} + \dots - \vec{v}(\vec{r}, t) \approx \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} = \\
&= \overset{\downarrow}{\vec{v}}(\vec{r}, t) \circ \nabla \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{l}} \cdot d\vec{r} \\
\underline{\underline{l}} &= \vec{v}(\vec{r}, t) \circ \nabla \\
\underline{\underline{l}} &= \vec{v} \circ \nabla \\
d\vec{v} &= \frac{d}{dt}(d\vec{r}) = \frac{d}{dt}(\underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}) = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot d\vec{R} + \underline{\underline{F}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{\vec{0}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot d\vec{R} \\
\underline{\underline{l}} \cdot d\vec{r} &= \underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R} \\
\underline{\underline{\dot{F}}} \cdot d\vec{R} &= \underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R} \\
&\Downarrow \\
\underline{\underline{\dot{F}}} &= \underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{F}} \\
&\Downarrow \\
\underline{\underline{l}} &= \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \\
\underline{\underline{l}} &= \frac{d}{dt} \left(F^i_{\cdot J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J \right) \cdot \left((F^{-1})^K_{\cdot l} \vec{G}_K \circ \vec{g}^l \right) = \\
&= \left(\dot{F}^i_{\cdot J} \vec{g}_i \circ \vec{G}^J \right) \cdot \left((F^{-1})^K_{\cdot l} \vec{G}_K \circ \vec{g}^l \right) + \left(F^i_{\cdot J} \dot{\vec{g}}_i \circ \vec{G}^J \right) \cdot \left((F^{-1})^K_{\cdot l} \vec{G}_K \circ \vec{g}^l \right) = \\
&= \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^K_{\cdot l} \underbrace{\vec{g}_i \circ \vec{G}^J \cdot \vec{G}_K \circ \vec{g}^l}_{\delta^K_J} + F^i_{\cdot J} (F^{-1})^K_{\cdot l} \underbrace{\dot{\vec{g}}_i \circ \vec{G}^J \cdot \vec{G}_K \circ \vec{g}^l}_{\delta^K_J} = \\
&= \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + \underbrace{F^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \dot{\vec{g}}_i \circ \vec{g}^l}_{\delta^i_l} = \\
&= \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + \dot{\vec{g}}_i \circ \vec{g}^i = \\
&= \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + \left(\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial t} \frac{dt}{dt} \right) \circ \vec{g}^i = \\
&= \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + \left(\Gamma^m_{ik} \vec{g}_m v^k + \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial t} \right) \circ \vec{g}^i = \\
&= \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + (\Gamma^i_{lk} v^k) \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial t} \circ \vec{g}^i = \\
&= \left(\dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} + \Gamma^i_{lk} v^k \right) \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial t} \circ \vec{g}^i = \\
&= \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lk} v^k \right) \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial t} \circ \vec{g}^i \\
\underline{\underline{l}} &= \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{d}{dt} (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}) \cdot (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}})^{-1} = \underline{\underline{\dot{R}}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} + \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\dot{U}}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{\dot{R}}} \cdot \underline{\underline{R}}^T + \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\dot{U}}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{R}}^T \\
\underline{\underline{l}} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{l}} + \underline{\underline{l}}^T \right) + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{l}} - \underline{\underline{l}}^T \right) = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{w}} \\
\underline{\underline{d}} &= \frac{1}{2} \left(\dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \vec{g}_i \circ \vec{g}^l + \dot{\vec{g}}_i \circ \vec{g}^i + (F^{-1})^J_{\cdot l} \dot{F}^i_{\cdot J} \vec{g}^l \circ \vec{g}_i + \underbrace{\vec{g}^i \circ \dot{\vec{g}}_i}_{\text{????-}\dot{\vec{g}}_i \circ \vec{g}^i \text{????}} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}_i \circ \bar{g}^l + \dot{g}_i \circ \bar{g}^i + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} \bar{g}^l \circ \bar{g}_i - \dot{g}^i \circ \bar{g}_i \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}_i \circ \bar{g}^l + \frac{d}{dt} (\bar{g}_i) \circ \bar{g}^i + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} \bar{g}^l \circ \bar{g}_i - \dot{g}^i \circ \bar{g}_i \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}_i \circ \bar{g}^l + \frac{d}{dt} (g_{ij} \bar{g}^j) \circ \bar{g}^i + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} \bar{g}^l \circ \bar{g}_i - \dot{g}^i \circ \bar{g}_i \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}_i \circ \bar{g}^l + \dot{g}_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i + g_{ij} \dot{\bar{g}}^j \circ \bar{g}^i + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} \bar{g}^l \circ \bar{g}_i - \dot{g}^i \circ \bar{g}_i \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}_i \circ \bar{g}^l + \dot{g}_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i + g_{ij} \dot{\bar{g}}^j \circ \bar{g}^i + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} \bar{g}^l \circ \bar{g}_i - \underbrace{g_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i}_{g_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}_i \circ \bar{g}^l + \dot{g}_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} \bar{g}^l \circ \bar{g}_i \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(g_{ki} \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}^k \circ \bar{g}^l + \dot{g}_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} g_{ik} \bar{g}^l \circ \bar{g}^k \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\delta^k_m g_{ki} \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}^m \circ \bar{g}^l + \dot{g}_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} g_{ik} \delta^k_m \bar{g}^l \circ \bar{g}^m \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left((F^{-1})^N_m F_N^k g_{ki} \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}^m \circ \bar{g}^l + \underbrace{\dot{g}_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i}_{\dot{g}_{ij} \bar{g}^j \circ \bar{g}^i} + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} g_{ik} F_N^k (F^{-1})^N_m \bar{g}^l \circ \bar{g}^m \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left((F^{-1})^N_m F_N^k g_{ki} \dot{F}^i_{\cdot J} (F^{-1})^J_{\cdot l} \bar{g}^m \circ \bar{g}^l + (F^{-1})^K_m F_K^i \dot{g}_{ij} F_L^j (F^{-1})^L_n \bar{g}^m \circ \bar{g}^n + (F^{-1})^J_l \dot{F}^i_{\cdot J} g_{ik} F_N^k (F^{-1})^N_m \bar{g}^l \circ \bar{g}^m \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left((F^{-1})^J_i F_J^k g_{kl} \dot{F}^l_{\cdot M} (F^{-1})^M_n \bar{g}^i \circ \bar{g}^n + (F^{-1})^J_i F_J^k \dot{g}_{kl} F^l_{\cdot M} (F^{-1})^M_n \bar{g}^i \circ \bar{g}^n + (F^{-1})^J_i \dot{F}^k_{\cdot J} g_{kl} F^l_{\cdot M} (F^{-1})^M_n \bar{g}^i \circ \bar{g}^n \right) = \\
&= (F^{-1})^J_i \left(\frac{1}{2} \left(F_J^k g_{kl} \dot{F}^l_{\cdot M} \bar{g}^i \circ \bar{g}^n + F_J^k \dot{g}_{kl} F^l_{\cdot M} \bar{g}^i \circ \bar{g}^n + \dot{F}^k_{\cdot J} g_{kl} F^l_{\cdot M} \bar{g}^i \circ \bar{g}^n \right) \right) (F^{-1})^M_n = \\
&= (F^{-1})^J_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (F_J^k g_{kl} F^l_{\cdot M}) \right) \bar{g}^i \circ \bar{g}^n \right) (F^{-1})^M_n = \\
&= \left((F^{-1})^J_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (F_J^k g_{kl} F^l_{\cdot M}) \right) (F^{-1})^M_n \right) \bar{g}^i \circ \bar{g}^n = d_{in} \bar{g}^i \circ \bar{g}^n \\
\underline{d} &= \frac{1}{2} (\underline{l} + \underline{l}^T) = \frac{1}{2} (\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} + \underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{F}}^T) = \frac{1}{2} (\underbrace{\underline{F}^{-T} \cdot \underline{F}^T}_{\underline{I}} \cdot \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} + \underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{F}}^T \cdot \underbrace{\underline{F} \cdot \underline{F}^{-1}}_{\underline{I}}) = \\
&= \frac{1}{2} \underline{F}^{-T} \cdot \underbrace{(\underline{F}^T \cdot \underline{\dot{F}} + \underline{\dot{F}}^T \cdot \underline{F})}_{\frac{d}{dt} (\underline{F}^T \cdot \underline{F})} \cdot \underline{F}^{-1} = \frac{1}{2} \underline{F}^{-T} \cdot \frac{d}{dt} (\underbrace{\underline{F}^T \cdot \underline{F}}_{\underline{C}}) \cdot \underline{F}^{-1} = \frac{1}{2} \underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{C}} \cdot \underline{F}^{-1} = \\
&= \frac{1}{2} \phi(\underline{\dot{C}}) = \frac{1}{2} \phi(\underline{\dot{C}} - \underbrace{\underline{I}}_0) = \phi \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{I}) \right) \right) = \phi(\underline{\dot{E}}) \\
\underline{d} &= \underline{F}^{-T} \cdot \underline{\dot{E}} \cdot \underline{F}^{-1} = \phi(\underline{\dot{E}}) = \phi \left(\frac{d}{dt} (\phi^{-1}(\underline{e})) \right) \\
\underline{d} &= \phi \left(\frac{d}{dt} (\phi^{-1}(\underline{e})) \right) = \underline{F}^{-T} \cdot \frac{d}{dt} (\underline{F}^T \cdot \underline{e} \cdot \underline{F}) \cdot \underline{F}^{-1} = \\
&= \left((F^{-1})^J_i \bar{g}^i \circ \vec{G}_J \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\left(F_K^l \vec{G}^K \circ \vec{g}_l \right) \cdot (e_{mn} \bar{g}^m \circ \bar{g}^n) \cdot \left(F_{\cdot Q}^p \bar{g}_p \circ \vec{G}^Q \right) \right) \cdot \left((F^{-1})^R_{\cdot s} \vec{G}_R \circ \bar{g}^s \right) = \\
&= \left((F^{-1})^J_i \bar{g}^i \circ \vec{G}_J \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(F_K^l e_{mn} F_{\cdot Q}^p \vec{G}^K \circ \underbrace{\vec{g}_l \cdot \bar{g}^m}_{\delta_l^m} \circ \underbrace{\bar{g}^n \cdot \vec{g}_p}_{\delta_p^n} \circ \vec{G}^Q \right) \cdot \left((F^{-1})^R_{\cdot s} \vec{G}_R \circ \bar{g}^s \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left((F^{-1})_i^{\cdot J} \vec{g}^i \circ \vec{G}_J \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(F_K^{\cdot l} e_{ln} F_Q^n \vec{G}^K \circ \vec{G}^Q \right) \cdot \left((F^{-1})_s^R \vec{G}_R \circ \vec{g}^s \right) = \\
&= \left((F^{-1})_i^{\cdot J} \vec{g}^i \circ \vec{G}_J \right) \cdot \left(\frac{d}{dt} (F_K^{\cdot l} e_{ln} F_Q^n) \vec{G}^K \circ \vec{G}^Q \right) \cdot \left((F^{-1})_s^R \vec{G}_R \circ \vec{g}^s \right) = \\
&= (F^{-1})_i^{\cdot J} \left(\frac{d}{dt} (F_K^{\cdot l} e_{ln} F_Q^n) \right) (F^{-1})_s^R \underbrace{\vec{g}^i \circ \vec{G}_J}_{\delta_J^K} \cdot \underbrace{\vec{G}^K \circ \vec{G}^Q}_{\delta_R^Q} \cdot \vec{G}_R \circ \vec{g}^s = \\
&= \underbrace{(F^{-1})_i^{\cdot J} \left(\frac{d}{dt} (F_J^{\cdot l} e_{ln} F_Q^n) \right) (F^{-1})_s^Q}_{d_{is}} \vec{g}^i \circ \vec{g}^s = d_{is} \vec{g}^i \circ \vec{g}^s \\
\underline{d} &= \frac{1}{2} \left(\underline{l} + \underline{l}^T \right) = \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \underline{\dot{U}} \cdot \underline{U}^{-1} \cdot \underline{R}^T + \underbrace{\underline{R} \cdot \underline{\dot{R}}^T}_{-\underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T} + \underline{R} \cdot \underbrace{\underline{U}^{-T} \cdot \underline{\dot{U}}^T}_{\underline{U}^{-1} \cdot \underline{\dot{U}}} \cdot \underline{R}^T \right) = \\
&= \underline{R} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\underline{\dot{U}} \cdot \underline{U}^{-1} + \underline{U}^{-1} \cdot \underline{\dot{U}} \right) \right) \cdot \underline{R}^T
\end{aligned}$$

mert

$$\underline{\dot{U}}^T = \underline{\dot{U}}$$

és

$$\underline{U}^{-T} = (\underline{U}^{-1})^T = \underline{U}^{-1}$$

illetve

$$\frac{d\underline{I}}{dt} = \frac{d}{dt} (\underline{R} \cdot \underline{R}^T) = \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \underline{\dot{R}}^T = \underline{0}$$

$\Downarrow$

$$\underline{R} \cdot \underline{\dot{R}}^T = -\underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T$$

$$\begin{aligned}
\underline{w} &= \frac{1}{2} \left(\underline{l} - \underline{l}^T \right) = \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \underline{\dot{U}} \cdot \underline{U}^{-1} \cdot \underline{R}^T - \underbrace{\underline{R} \cdot \underline{\dot{R}}^T}_{-\underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T} - \underline{R} \cdot \underbrace{\underline{U}^{-T} \cdot \underline{\dot{U}}^T}_{\underline{U}^{-1} \cdot \underline{\dot{U}}} \cdot \underline{R}^T \right) = \\
&= \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T + \frac{1}{2} \underline{R} \cdot \left(\underline{\dot{U}} \cdot \underline{U}^{-1} - \underline{U}^{-1} \cdot \underline{\dot{U}} \right) \cdot \underline{R}^T
\end{aligned}$$

Ha $\underline{U} = \underline{I}$, azaz csak merev test szerű elfordulás van, akkor $\underline{\dot{U}} = \underline{\dot{I}} = \underline{0}$ és $\underline{\dot{U}} \cdot \underline{U}^{-1} - \underline{U}^{-1} \cdot \underline{\dot{U}} = \underline{0}$. Ilyenkor $\underline{w} = \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T$ és $\underline{w} \cdot d\vec{r} = \vec{\omega} \times d\vec{r}$.

$$\underline{l} = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} = \frac{d}{dt} (\underline{v} \cdot \underline{R}) \cdot (\underline{v} \cdot \underline{R})^{-1} = \underline{\dot{v}} \cdot \underbrace{\underline{R} \cdot \underline{R}^{-1}}_{\underline{I}} \cdot \underline{v}^{-1} + \underline{v} \cdot \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{v}^{-1} = \underline{\dot{v}} \cdot \underline{v}^{-1} + \underline{v} \cdot \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{v}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\underline{d} &= \frac{1}{2} \left(\underline{l} + \underline{l}^T \right) = \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{v}} \cdot \underline{v}^{-1} + \underline{v} \cdot \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{v}^{-1} + \underbrace{\underline{v}^{-T} \cdot \underline{\dot{v}}^T}_{\underline{v}^{-1} \cdot \underline{\dot{v}}} + \underline{v}^{-T} \cdot \underbrace{\underline{R} \cdot \underline{\dot{R}}^T}_{-\underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T} \cdot \underline{v}^T \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{v}} \cdot \underline{v}^{-1} + \underline{v}^{-1} \cdot \underline{\dot{v}} + \underline{v} \cdot \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{v}^{-1} - \underline{v}^{-1} \cdot \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{v} \right) = ? \\
\underline{w} &= \frac{1}{2} \left(\underline{l} - \underline{l}^T \right) = \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{v}} \cdot \underline{v}^{-1} + \underline{v} \cdot \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{v}^{-1} - \underbrace{\underline{v}^{-T} \cdot \underline{\dot{v}}^T}_{\underline{v}^{-1} \cdot \underline{\dot{v}}} - \underline{v}^{-T} \cdot \underbrace{\underline{R} \cdot \underline{\dot{R}}^T}_{-\underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T} \cdot \underline{v}^T \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{v}} \cdot \underline{v}^{-1} - \underline{v}^{-1} \cdot \underline{\dot{v}} + \underline{v} \cdot \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{v}^{-1} + \underline{v}^{-1} \cdot \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{v} \right) = ?
\end{aligned}$$

$$\underline{l}^* = \frac{d}{dt} (\underline{F}^*) \cdot (\underline{F}^*)^{-1}$$

[illegible]

1.8. Alakváltozási tenzorok idő szerinti objektív deriváltjai

$$\begin{aligned}
\phi(\underline{\underline{E}}) &= \underline{\underline{e}} \\
\phi(\dot{\underline{\underline{E}}}) &\stackrel{?}{=} \underline{\underline{e}} \\
\frac{d}{dt}\phi(\underline{\underline{E}}) &= \frac{d}{dt}\underline{\underline{e}} \\
\frac{d}{dt}(\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) &= \dot{\underline{\underline{e}}} \\
\underline{\underline{\dot{F}}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}}^{-1} &= \dot{\underline{\underline{e}}} \\
\underbrace{\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\dot{F}}}^{-T}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}}^{-1} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{I}}} &= \dot{\underline{\underline{e}}} \\
\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\dot{F}}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} &= \dot{\underline{\underline{e}}} \\
\frac{d}{dt}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}) &= \underline{\underline{0}} \\
\underline{\underline{\dot{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\dot{F}}}^{-T} &= \underline{\underline{0}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{F}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}^{-T} &= -\dot{\underline{\underline{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \\
\frac{d}{dt} (\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}) &= \underline{\underline{0}} \\
\dot{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}} &= \underline{\underline{0}} \\
\dot{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}} &= -\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}} \\
\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}^{-T}}_{-\dot{\underline{\underline{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underbrace{\dot{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}}_{-\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} &= \dot{\underline{\underline{E}}} \\
-\underbrace{\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}^T}_{\underline{\underline{l}}^T} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\phi(\underline{\underline{E}})} + \underbrace{\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\phi(\dot{\underline{\underline{E}}})} - \underbrace{\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\phi(\underline{\underline{E}})} \cdot \underbrace{\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{l}}} &= \dot{\underline{\underline{E}}} \\
-\underline{\underline{l}}^T \cdot \phi(\underline{\underline{E}}) + \phi(\dot{\underline{\underline{E}}}) - \phi(\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{l}} &= \dot{\underline{\underline{E}}} \\
\dot{\underline{\underline{E}}} &= \phi(\dot{\underline{\underline{E}}}) - \underline{\underline{l}}^T \cdot \phi(\underline{\underline{E}}) - \phi(\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{l}} \\
\dot{\underline{\underline{E}}} &= \underbrace{\phi(\dot{\underline{\underline{E}}})}_{\underline{\underline{d}}} - \underline{\underline{l}}^T \cdot \underbrace{\phi(\underline{\underline{E}})}_{\underline{\underline{e}}} - \underbrace{\phi(\underline{\underline{E}})}_{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{l}} \\
\dot{\underline{\underline{E}}} &= \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{l}}^T \cdot \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{l}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(\underline{\underline{e}}) &= \underline{\underline{E}} \\
\frac{d}{dt} \phi^{-1}(\underline{\underline{e}}) &= \frac{d}{dt} \underline{\underline{E}} \\
\frac{d}{dt} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{F}}) &= \dot{\underline{\underline{E}}} \\
\dot{\underline{\underline{F}}}^T \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}} &= \dot{\underline{\underline{E}}} \\
\underline{\underline{F}}^T \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}^T}_{\underline{\underline{l}}^T} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underbrace{\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{l}}} \cdot \underline{\underline{F}} &= \dot{\underline{\underline{E}}} \\
\underline{\underline{F}}^T \cdot (\underline{\underline{l}}^T \cdot \underline{\underline{e}} + \dot{\underline{\underline{e}}} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{l}}) \cdot \underline{\underline{F}} &= \dot{\underline{\underline{E}}} \\
\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}} &= \dot{\underline{\underline{E}}} \\
\dot{\underline{\underline{E}}} &= \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}} \\
\dot{\underline{\underline{E}}} &= \phi^{-1}(\underline{\underline{d}})
\end{aligned}$$

$$d\vec{v} = \underline{\underline{l}} \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{F}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d\vec{r}}_{d\vec{R}} = \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{R}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{b}} &= \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \\
\dot{\underline{\underline{b}}} &= \frac{d}{dt} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T) = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{F}} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}^T = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \left(\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right)^T = \underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + (\underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T)^T = \underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{b}} + (\underline{\underline{l}} \cdot \underline{\underline{b}})^T
\end{aligned}$$

2. Dinamika

2.1. Tömegmegmaradás

2.1.1. Tömeg

2.1.2. Tömeg-mérlegegyenlet

2.1.3. Integrálok idő szerinti deriváltja

2.2. Impulzus-tétel

2.2.1. Impulzus

2.2.2. Impulzus-tétel integrál alakja

2.2.3. Belső erők

2.2.4. Cauchy-féle feszültség tenzor

2.2.5. Impulzus-tétel differenciális alakja

2.3. Perdület-tétel

2.3.1. Perdület

2.3.2. Perdület-tétel integrál alakja

2.3.3. Perdület-tétel differenciális alakja

2.4. Energia-tétel, avagy a hőtán első főtétele

2.4.1. Energia

2.4.2. Energia-tétel integrál alakja

2.4.3. Celluláris (lokális) egyensúly, avagy az energia-tétel differenciális alakja

2.4.4. Belső energia

2.5. Entrópia-tétel, avagy a hőtán második főtétele

2.5.1. Reverzibilis, irreverzibilis folyamatok

2.5.2. Entrópia

2.5.3. Entrópia-tétel integrál alakja

2.5.4. Entrópia-tétel differenciális alakja

2.5.5. Clausius-Planck-egyenlőtlenség

2.6. Feszültség tenzorok

2.6.1. Kirchhoff-féle feszültség

2.6.2. I. Piola-Kirchhoff-féle feszültség

2.6.3. Impulzus-tétel a kezdeti konfigurációban

2.6.4. II. Piola-Kirchhoff-féle feszültség

2.6.5. Biot-féle feszültség

2.7. Helmholtz-féle szabadenergia

2.7.1. Clausius-Duhem-egyenlőtlenség

2.7.2. Belső paraméterek

2.7.3. A hővezetés egyenlete

2.7.4. A szabadenergia függvény általános szerkezete

3. Anyagszerkezeti viselkedés

3.1. Általános elvek????

- Történet függés
- Lokális hatás
- Egyidejűség
- Anyagi objektivitás

3.2. Egyszerű anyagmodellek

3.2.1. Tisztán rugalmas elem

3.2.2. Tisztán viszkózus elem

3.2.3. Tisztán képlékeny elem????

3.3. Összetett anyagmodellek

3.3.1. Kelvin-Voigt modell

3.3.2. Maxwell-modell

3.3.3. Vegyes modell

3.4. Anyagtörvények

3.4.1. Objektivitás

Megoldások

M 1. $\vec{r} = \vec{\chi}(\vec{R}) = (X^1 + \gamma X^2) \vec{g}_1 + X^2 \vec{g}_2 + X^3 \vec{g}_3$

Tárgymutató

alakváltozási főirány, 32
anyagi nyújtó tenzor, 20

baloldali Cauchy-Green deformációs tenzor, 35
baloldali nyújtó tenzor, 20
Biot-féle alakváltozási tenzor, 34

Cauchy-féle alakváltozási tenzor, 37

deformáció gradiens, 14
deviátoros felbontás, 42

előretolás (push forward), 40
Euler-Almansi alakváltozási tenzor, 36
Euler-féle alakváltozási tenzorok, 38

főnyúlás, 32
fajlagos nyúlás, 31
Finger-tenzor, 35
forgató tenzor, 20

Green-Lagrange alakváltozási tenzor, 32

helyi hatások elve, 13
Hencky-féle alakváltozási tenzor, 33, 37

jobboldali Cauchy-Green deformációs tenzor, 31
jobboldali nyújtó tenzor, 20

kétpont tenzor, 15, 20, 45
kezdeti konfiguráció, 8
kis alakváltozások, 34, 38
kis elmozdulások, 38
kofaktor, 18
kontravariáns tenzor, 39, 40
kovariáns tenzor, 39, 40

Lagrange-féle alakváltozási tenzorok, 33

Nanson-formula, 18
nyújtó vagy stretch tenzor, 20

objektívitás, 45

pillanatnyi konfiguráció, 8
Piola-féle deformációs tenzor, 33, 40
poláris felbontás, 20

RU felbontás, 20

Swainger-féle alakváltozási tenzor, 38

térbeli nyújtó tenzor, 20

visszaforgatott Euler-Almansi alakváltozási tenzor, 34
visszahúzás (pull back), 40
vonalelem arány, 31
VR felbontás, 21

Hivatkozások

- [1] Holzapfel, G. A.: *Nonlinear solid mechanics*, John Wiley & Sons, Chichester, 2000
- [2] Haupt, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer Verlag, Berlin, 2002

Függelék

A. Tenzoralgebra

A.1. Vektorok

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= x^i \vec{g}_i = r \vec{e}_r(\varphi) + z \vec{e}_z \\
 \dot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt} (x^i \vec{g}_i) = \dot{r} \vec{e}_r(\varphi) + r \frac{d}{dt} (\vec{e}_r(\varphi)) + \dot{z} \vec{e}_z = \\
 &= \dot{r} \vec{e}_r(\varphi) + r \underbrace{\frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{e}_r(\varphi))}_{\vec{e}_\varphi(\varphi)} \dot{\varphi} + \dot{z} \vec{e}_z = \\
 &= \dot{r} \vec{e}_r(\varphi) + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi(\varphi) + \dot{z} \vec{e}_z =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= x^i \vec{g}_i = r \cos(\varphi) \vec{e}_x + r \sin(\varphi) \vec{e}_y + z \vec{e}_z \\
 \dot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt} (x^i \vec{g}_i) = \dot{r} \cos(\varphi) \vec{e}_x - r \dot{\varphi} \sin(\varphi) \vec{e}_x + \dot{r} \sin(\varphi) \vec{e}_y + r \dot{\varphi} \cos(\varphi) \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z = \\
 &= \dot{r} \cos(\varphi) \vec{e}_x + \dot{r} \sin(\varphi) \vec{e}_y - r \dot{\varphi} \sin(\varphi) \vec{e}_x + r \dot{\varphi} \cos(\varphi) \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z = \\
 &= \underbrace{\dot{r}}_{\dot{x}^1} \underbrace{(\cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y)}_{\vec{g}_1} + \underbrace{\dot{\varphi}}_{\dot{x}^2} \underbrace{(-r \sin(\varphi) \vec{e}_x + r \cos(\varphi) \vec{e}_y)}_{\vec{g}_2} + \underbrace{\dot{z}}_{\dot{x}^3} \underbrace{\vec{e}_z}_{\vec{g}_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{I}} &= g_{ij} \vec{g}^i \circ \vec{g}^j \\
 g_{ij} &= \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \\
 g_{11} &= 1 & g_{12} &= 0 & g_{13} &= 0 \\
 g_{21} &= 0 & g_{22} &= r & g_{23} &= 0 \\
 g_{31} &= 0 & g_{32} &= 0 & g_{33} &= 1 \\
 &\Downarrow \\
 g^{11} &= 1 & g^{12} &= 0 & g^{13} &= 0 \\
 g^{21} &= 0 & g^{22} &= \frac{1}{r} & g^{23} &= 0 \\
 g^{31} &= 0 & g^{32} &= 0 & g^{33} &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \dot{x}^i g_{i1} = \dot{r} \\
 \dot{x}_2 &= \dot{x}^i g_{i2} = r \dot{\varphi} \\
 \dot{x}_3 &= \dot{x}^i g_{i3} = \dot{z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{g}^1 &= \vec{g}_i g^{i1} = (\cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y) \\
 \vec{g}^2 &= \vec{g}_i g^{i2} = (-\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y) \\
 \vec{g}^3 &= \vec{g}_i g^{i3} = \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{r}}_{\dot{x}_1} \underbrace{(\cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y)}_{\vec{g}^1} + \underbrace{r \dot{\varphi}}_{\dot{x}_2} \underbrace{(-\sin(\varphi) \vec{e}_x + \cos(\varphi) \vec{e}_y)}_{\vec{g}^2} + \underbrace{\dot{z}}_{\dot{x}_3} \underbrace{\vec{e}_z}_{\vec{g}^3}$$

A.2. Tenzorok

A.2.1. Tenzorok szorzatainak determinánsa

Legyen $\underline{\underline{A}} = \vec{a}_i \circ \vec{g}^i$ és $\underline{\underline{B}} = \vec{g}_i \circ \vec{b}^i$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = [(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3] [(\vec{g}^1 \times \vec{g}^2) \cdot \vec{g}^3] = \frac{1}{3!} [(\vec{a}_i \times \vec{a}_j) \cdot \vec{a}_k] [(\vec{g}^i \times \vec{g}^j) \cdot \vec{g}^k]$$

$$\det(\underline{\underline{B}}) = \det(\underline{\underline{B}}^T) = \left[(\vec{b}^1 \times \vec{b}^2) \cdot \vec{b}^3 \right] [(\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \cdot \vec{g}_3] = \frac{1}{3!} \left[(\vec{b}^i \times \vec{b}^j) \cdot \vec{b}^k \right] [(\vec{g}_i \times \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k]$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \vec{a}_i \circ \vec{b}^i \cdot \vec{g}_j \circ \vec{b}^j = \vec{a}_i \circ \delta_j^i \circ \vec{b}^j = \vec{a}_i \circ \vec{b}^i$$

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = [(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3] \left[(\vec{b}^1 \times \vec{b}^2) \cdot \vec{b}^3 \right] = \frac{1}{3!} [(\vec{a}_i \times \vec{a}_j) \cdot \vec{a}_k] \left[(\vec{b}^i \times \vec{b}^j) \cdot \vec{b}^k \right]$$

$$\underline{\underline{I}} = \delta_j^i \vec{g}_i \circ \vec{g}^j = \vec{g}_i \circ \vec{g}^i$$

$$\det(\underline{\underline{I}}) = [(\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \cdot \vec{g}_3] [(\vec{g}^1 \times \vec{g}^2) \cdot \vec{g}^3] = \frac{1}{3!} [(\vec{g}_i \times \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k] [(\vec{g}^i \times \vec{g}^j) \cdot \vec{g}^k] = 1$$

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) &= [(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3] [(\vec{g}^1 \times \vec{g}^2) \cdot \vec{g}^3] \left[(\vec{b}^1 \times \vec{b}^2) \cdot \vec{b}^3 \right] [(\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) \cdot \vec{g}_3] = \\ &= \frac{1}{3!} [(\vec{a}_i \times \vec{a}_j) \cdot \vec{a}_k] [(\vec{g}^i \times \vec{g}^j) \cdot \vec{g}^k] \frac{1}{3!} \left[(\vec{b}^i \times \vec{b}^j) \cdot \vec{b}^k \right] [(\vec{g}_i \times \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k] = \det(\underline{\underline{A}}) \det(\underline{\underline{B}}) \end{aligned}$$

A.3. Harmadrendű tenzorok

A.4. Negyedrendű tenzorok