

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Csatolt termo-mechanikai kopási folyamatok vizsgálata *hp*-verziós végeelem-módszerrel

Ph.D. értekezés

KÉSZÍTETTE:

Pere Balázs

okleveles középiskolai fizika tanár

SÁLYI ISTVÁN GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA,
GÉPÉSZETI ALAPTUDOMÁNYOK TÉMATERÜLET,
SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA TÉMACSOPORT

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:

Dr. Páczelt István

az MTA rendes tagja

TÉMACSOPORT VEZETŐ:

Dr. Kozák Imre

az MTA rendes tagja

TÉMAVEZETŐ:

Dr. Páczelt István

az MTA rendes tagja

Miskolc, 2005

Tartalomjegyzék

Jelölések	4
Bevezetés	7
1. A mechanikai érintkezési feladat megoldása	9
1.1. Rövid áttekintés az érintkezési feladatokról	9
1.2. Célkitűzések	13
1.3. A rugalmasságtani feladat kitűzése	13
1.4. Az érintkezési feltételek	16
1.5. Az érintkezési feladat gyenge alakja	17
1.6. Végeselemes diszkretizálás	21
1.7. A végelem háló elkészítésének szempontjai	30
1.8. A csomópontok mozgatása	34
1.9. A végelem háló módosítása	37
1.10. Egy számpélda	41
1.11. Tudományos eredmények	50
2. A kopás	56
2.1. A kopási folyamat áttekintése, Archard kopási törvénye	56
2.2. Célkitűzések	58
2.3. Az érintkezési feladat és a kopás kapcsolata	58
2.4. A kopott felület alakjának módosítása	62
2.5. Egy számpélda	67
2.6. Tudományos eredmények	69
3. A hővezetés	73
3.1. Célkitűzések	73
3.2. A hővezetés egyenlete	74
3.3. A hővezetési feladat gyenge alakja	76
3.4. Végeselemes diszkretizálás	77
3.5. Hőmérséklet paraméterek átszámítása két végelem háló között	80
3.6. Tudományos eredmények	84

4. A csatolt termo-mechanikai feladat megoldása	85
4.1. Célkitűzések	85
4.2. A kezdetiérték feladat kitűzése	86
4.3. A csatolt termo-mechanikai feladat gyenge alakja	87
4.4. A csatolt feladat számításának algoritmusai	88
4.5. Egy számpélda	89
4.6. Tudományos eredmények	91
Eredmények hasznosítása, további kutatási feladatok	99
Összefoglalás	100
Summary	103
Témavezetői ajánlás	105
Publikációk az értekezés témájában	107
Irodalomjegyzék	109

Jelölések

A skalár mennyiségeket normál vastagságú dőlt betűkkel (pl. c , k , ρ), a vektormennyiségeket vastagon szedett dőlt, kis betűkkel (pl. $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$), a tenzor mennyiségeket vastagon szedett dőlt, nagy betűkkel jelöltük (pl. $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$). Szögletes zárójelbe tett vektorok és tenzorok

a koordinátaikból alkotott mátrixot jelképezik (pl. $[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$) A mátrixokat

vastagon szedett nagy, álló betűkkel jelöltük (pl. $\mathbf{K}$, $\mathbf{N}$), kivételt képeznek ez alól a kis görög betűkkel jelölt mátrixok, amelyeket vastagon szedett dőlt, kis betűkkel jelöltünk (pl. $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$). Az egy oszloppal rendelkező mátrixokat, azaz az oszlopvektorokat vastagon szedett álló, kis betű jelöli (pl. $\mathbf{q}$, $\mathbf{t}$). Két vektor vagy tenzor és vektor skaláris szorzásánál a vektorok közé pontot tettünk (pl. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$), két vektor vektoriális szorzatát az „ $\times$ ” jel jelöli (pl. $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$), két vektor diadikus vagy tenzoriális szorzatát a „ $\circ$ ” jel jelöli (pl. $\mathbf{u} \circ \nabla$), két tenzor kétszeres skaláris szorzatát a tenzorok közé tett két ponttal jelöltük (pl. $\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{A}$). Az alábbiakban felsoroljuk az értekezésben előforduló fontosabb jelöléseket.

$\mathbf{r}$	egy tetszőleges pont helyvektora
e	jobb felső index, a test sorszáma, értéke 1 (felső test) vagy 2 (alsó test)
$\mathbf{T}^e$	feszültségi tenzor az e -edik test egy pontjában
$\mathbf{A}^e$	alakváltozási tenzor az e -edik test egy pontjában
$\mathbf{k}^e$	az e -edik test egységnyi térfogatára ható térfogaton megoszló terhelés
ρ^e	az e -edik test sűrűsége
c^e	az e -edik test fajhője
$\mathbf{u}^e$	az e -edik test elmozdulásvektora
V^e	az e -edik test térfogata
A_u^e	az e -edik test azon felülete, ahol az elmozdulás adott
A_p^e	az e -edik test azon felülete, ahol a terhelés adott
A_c^e	az e -edik test azon felülete, ahol érintkezés létrejöhet
A_s^e	az e -edik test azon felülete, amelyen keresztül a környezetével hőt tud cserélni
C	a tényleges érintkezési felület
G	az A_c^e azon része, ahol érintkezés nem jön létre
∇	a nabla differenciál operátor

$\mathbf{n}^e$	az e -edik test felületének normálvektora
α^e	az e -edik test lineáris hőtágulási együtthatója
$\mathbf{D}^e$	az e -edik test anyagállandóinak negyedrendű tenzora
p_n	nyomáseloszlás az A_c^e felületen
d	hézagfüggvény az A_c^e felületen
c_n	büntető paraméter
E	Young féle rugalmassági modulus
ν	Poisson-tényező
$\mathbf{p}_0^e$	az e -edik test A_p^e felületén ható adott terhelés
$\mathbf{u}_0^e$	az e -edik test A_u^e felületén előírt elmozdulás
Ψ	forgástenzor
T^e	az e -edik testen a hőmérséklet mező
$\tau_p, \tau_{CB}, \tau_w, \tau_T$	hibahatárok
x, y, z	Descartes koordináták
r, φ, z	henger koordináták
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	egységvektorok a Descartes-féle koordináta rendszerben
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$	egységvektorok a henger koordináta rendszerben
$\mathbf{N}$	az alakfüggvények mátrixa
$\mathbf{u}^e$	az e -edik test elmozdulásvektor koordinátáinak oszlopvektora
$\mathbf{q}^e$	az e -edik test elmozdulás paramétereinek oszlopvektora
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	az e -edik test alakváltozási tenzorának koordinátáiból alkotott oszlopvektor
$\mathbf{I}$	másodrendű egységtenzor
$\mathbf{I}^{[4]}$	negyedrendű egységtenzor
$\boldsymbol{\sigma}^e$	az e -edik test feszültségtenzorának koordinátáiból alkotott oszlopvektor
$\mathbf{D}^e$	az e -edik test anyagállandóiból alkotott mátrix
$\boldsymbol{\varepsilon}_0^e$	a hőtágulás okozta alakváltozási tenzor koordinátáiból alkotott oszlopvektor
$\mathbf{K}^e$	az e -edik test merevségi mátrixa
$\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e$	a hőfeszültségekből származó terhelési vektor az e -edik testen
$\mathbf{f}_{p,\rho k}^e$	a külső erőkből származó terhelési vektor az e -edik testen
$\mathbf{f}_{\tau,\varphi z}^e$	csúsztató feszültségekből származó terhelési vektor az e -edik testen
$\mathbf{f}^e$	az e -edik test terhelési vektora
$\mathbf{T}_0$	transzformációs mátrix
$\mathbf{L}_t^e, \mathbf{L}_n^e$	az e -edik test érintkezési felületéhez tartozó alakfüggvények mátrixa
h^e	az érintkező felületek közötti kezdeti hézag
$\mathbf{h}^e$	a kezdeti hézaghoz tartozó paraméterek oszlopvektora
$\bar{\mathbf{C}}$	a kontakt-elemek merevségi mátrixa

$\mathbf{f}_h$	a kezdeti hézagból származó terhelési vektor
σ_n, τ_n	az érintkezési felületen ébredő normál- illetve csúsztatófeszültség
w	a lekopott anyag vastagsága
k_w	kopási tényező
v	az érintkező felületek relatív sebessége
Δt	időlépés nagysága
ξ, η	végeselem lokális koordinátái
$\mathbf{x}^e$	a e -edik test végeselem hálóját megadó paraméterek oszlopvektora
k^e	az e -edik test hővezetési tényezője
q_c^e, q_s^e	hőfluxusok az A_c^e és A_s^e felületeken
$\hat{\alpha}$	az érintkező testek közötti felületi hőátadási tényező
$\bar{\alpha}^e$	az e -edik test és a környezet közötti hőátadási tényező
Θ^e	virtuális hőmérséklet az e -edik testen
$\mathbf{t}^e$	hőmérséklet paraméterek oszlopvektora
$\boldsymbol{\vartheta}^e$	virtuális hőmérséklet paraméterek oszlopvektora
$\mathbf{M}^e$	az e -edik test hőkapacitás mátrixa
$\bar{\mathbf{K}}^e$	az e -edik test hővezetési mátrixa

Bevezetés

Érintkezési feladatokat már régóta meg tudunk oldani. A legismertebb a Hertz-féle érintkezési feladat. Egy rugalmas gömböt adott erővel egy rugalmas féltérbe nyomunk. Ennek a feladatnak nagy jelentősége van, hiszen azon néhány feladat körébe tartozik, amelyek analitikusan megoldhatók. A gépészetben előforduló feladatok zöme sajnos nem oldható meg analitikusan.

Az értekezésben a Hertz-feladatnál jóval bonyolultabb feladat megoldásával próbálkozunk meg. Együttesen próbáljuk kezelni az érintkezési feladatot, a kopást és a hővezetési feladatot. Hogy ezt meg tudjuk tenni, először külön-külön fel kell építenünk az egyes részfeladatok megoldási algoritmusát, majd az ezekből képzett csatolt feladat megoldására kell eljárást kidolgoznunk.

Az értekezés négy fejezetből áll. Az elsőben a mechanikai érintkezési feladattal foglalkozunk. A lineáris rugalmasságtan alapegyenleteiből (egyensúlyi egyenlet, kinematikai egyenlet, anyagegyenlet) és az érintkezési feltételekből indulunk ki. Mivel a feladatot végeselem-módszerrel szeretnénk megoldani, a gyenge alakban történő megfogalmazásra is szükség lesz. Elvégezzük a diszkretizálást, különös tekintettel arra, hogy p -verziós végeselem-módszert fogunk alkalmazni. Eljárást dolgozunk ki, amelynek segítségével az érintkezési feladat p -verziós végeselem-módszert alkalmazva kellő pontossággal megoldható. A fejezet végén egy számpéldát mutatunk be demonstrálva a kidolgozott algoritmus pontosságát. A számpélda megoldásához teljes egészében saját fejlesztésű, direkt e célra készült számítógépes programot használunk.

A második fejezetben a kopási folyamatot mutatjuk be. Archard kopási törvényéből kiindulva algoritmust dolgozunk ki a kopás számítására. A számításhoz felhasználjuk az érintkezési feladat megoldását. Kitérünk arra is, hogy a kopás, a végeselem háló változása révén miként befolyásolja a végeselem feladatot. Végül saját fejlesztésű számítógépes program segítségével bemutatjuk az algoritmus működését.

A harmadik fejezetben a hővezetési feladatot tárgyaljuk. A hővezetés egyenletéből kiindulva a feladatot a végeselem-módszerhez szükséges gyenge alakban is megfogalmazzuk. A térbeli feladatot végeselem-módszerrel, az időbeli feladatot véges differencia módszerrel oldjuk meg. Figyelembe vesszük azt is, hogy hőtani szempontból is érintkezési feladról van szó, azaz az érintkező testek az érintkezési felületükön keresztül hőt cserélhetnek egymással. Csatolt feladról lévén szó, figyelembe kell vennünk, hogy egy időlépésen belül a kopás miatt a végeselem háló megváltozhat, azaz az időlépés elején és végén két különböző végeselem háló áll a rendelkezésünkre. A hővezetési feladatot úgy kell megoldanunk, hogy egy időlépésen belül a végeselem felosztás is változni fog. A problémát

a hőmérséklet mező paramétereinek egyik hálóról a másikra történő átszámításával oldhatjuk meg, amely számítógépen történő gyors és pontos elvégzéséhez új egy algoritmust dolgoztunk ki.

A negyedik fejezetben csatolt termo-mechanikai feladatot mutatjuk be. Az operátor hasítás módszerével algoritmust dolgozunk ki a csatolt feladat megoldására. Az algoritmus működését egy számpéldán keresztül saját fejlesztésű számítógépes program segítségével mutatjuk be.

1. fejezet

A mechanikai érintkezési feladat megoldása

1.1. Rövid áttekintés az érintkezési feladatokról

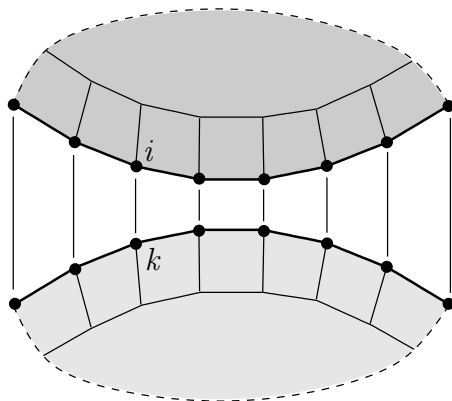
Az érintkezési feladatokat két nagy csoportba sorolhatjuk. Az egyik csoportot a egyoldalú érintkezési feladat alkotja. Ennél a feladattípusnál az érintkező felületeken fellépő normál feszültség csak a test belseje felé mutathat. Ha a feszültség nullára csökken, a felületek elválhatnak egymástól. Az érintkezési feladatok másik csoportját a kétoldalú érintkezési feladatok alkotják. Az ideális kétoldalú érintkezési feladatoknál nincsen semmi korlátozás a feszültség nagyságára és irányára. Nem ideális érintkezési feladat valósul meg például ragasztott felületeknél. Amíg a redukált feszültség értéke nem haladja meg a ragasztás által biztosított maximális „adhéziós feszültséget”, a kapcsolat kétoldalú marad.

Az egyoldalú érintkezési feladatok között megkülönböztetünk súrlódás nélküli érintkezési feladatot és súrlódásos érintkezési feladatot.

Az első érintkezési feladatot Hertz oldotta meg 1882-ben [1]. Hertz feltételezte, hogy az érintkezési tartomány mérete jóval kisebb mint az érintkező testek méretei. A érintkezési feladattal kapcsolatos újabb kutatások a XX. század 30-as éveiben kezdődtek el. Az érintkezéssel kapcsolatos variációs elvet Signorini 1959-ben publikálta [2]. Feltételezte, hogy terhelés hatására az érintkező felületek el is válhatnak egymástól. Ezt az elméletet Fichera fejlesztette tovább [3], aki a rugalmas, súrlódás nélküli érintkezési feladat megoldásának létezését és egyértelműségét is bizonyította.

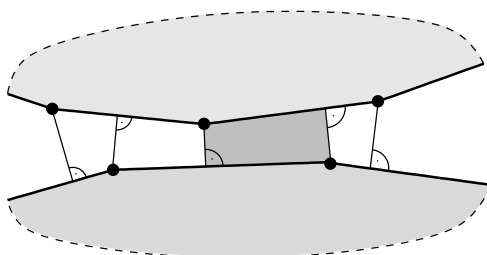
Végelem-módszert a 70-es években alkalmaztak először érintkezési feladatok megoldására [4]. Ezek az úgynevezett h -verziós végelem-módszeren alapuló számítások voltak. A h -verziós végelem-módszerben a közelítő függvények többnyire lineárisak, esetleg másod fokúak. A közelítő függvények együtthatóit a közelítendő mező csomóponti értékei adják. A módszer annál pontosabb, minél több az ismeretlenek száma, azaz összességében minél több az elemek száma. Hosszú ideig csak h -verziós módszereket használtak az érintkezési feladatok megoldására. Először kis alakváltozásokkal járó érintkezési feladatokat oldottak meg. Kis alakváltozások esetén a végelem hálók csomópontjai az érintkezési felületen elhanyagolhatóan kis mértékben mozdulnak el egymáshoz képest, ezért célszerű a

hálót úgy kialakítani, hogy a csomópontok fedésbe kerüljenek egymással. Így az 1.1. ábrán látható módon a csomópontok egymáshoz képesti helyzete alapján vizsgálhatók az érintkezési feltételek [5]. Előfordulhat, hogy valamilyen okból a végelemek hálón az érintkezési



1.1. ábra. Érintkezési feltételek a csomópontok között kerülnek ellenőrzésre.

felületen lévő csomópontok nem kerülnek fedésbe egymással (lásd 1.2 ábra). A csomópontok



1.2. ábra. Érintkezési feltételek ellenőrzése szegmensek segítségével.

szemközti oldalra történő merőleges vetítésével úgynevezett kontakt szegmenseket hozhatunk létre (lásd 1.2. ábra). A kontakt szegmensek segítségével közelíthetjük pl. az elmozdulásmezőt, amelyet itt lokális koordinátákkal adhatunk meg. A fenti módszert Simo dolgozta ki [6]. Nagy alakváltozások esetén a felületek tangenciális irányú relatív elmozdulásai nem elhanyagolhatóak, így az érintkező felületeken a csomópontok és velük szemben lévő élek sorrendje megváltozhat. Erre az esetre dolgozták ki az úgynevezett „csomópont-oldal közötti” eljárást [7], amelyet azóta is széles körben alkalmaznak.

Az értekezésben mi csak kis alakváltozásokat fogunk vizsgálni, a végelemek hálót pedig úgy osztjuk fel, hogy az érintkezési felületeken a csomópontok fedésbe kerüljenek egymással.

Az érintkezési feltételek vizsgálatára több módszer létezik. A különböző módszerek többnyire abban különböznek egymástól, hogy hogyan közelítik az érintkező felületeken a nyomáseloszlást. Mindegyik módszer arra az alapgondolatra épül, hogy az érintkező

felületek minden pontjában az érintkezési nyomás és az érintkező felületek távolságának szorzata nullával egyenlő. A teljesség igénye nélkül röviden összefoglaljuk a legfontosabb módszereket.

- A Lagrange multiplikátoros módszerben a Lagrange multiplikátor szerepét a nyomás tölti be [8, 9]. A nyomás értékét az elmozdulásmezőhöz hasonlóan alakfüggvényekkel közelítjük. A végső egyenletrendszerben az elmozdulásmező csomóponti értékei mellett megjelennek a csomóponti nyomásértékek is ismeretlenként.
- A büntetőparaméteres módszerben az érintkező felületek közé nagy merevségű rugókat helyezünk, ezzel akadályozzuk a testek egymásba hatolását [8, 9]. Teljesen megakadályozni nem tudjuk, hogy a testek egymásba hatoljanak. A számítást egy iterációs ciklus eredményeként kapjuk, a cikluson belül az aktuális érintkezési felületnek megfelelően el kell venni rugókat, vagy éppenséggel újakat kell hozzáadni a rendszerhez. Az általunk megoldandó feladat szempontjából fontos, hogy a felületre nemcsak diszkrét rugókat helyezhetünk, hanem folytonos eloszlású rugalmas közeget is. A büntetőparaméteres eljárás képezi az alapját a következő módszernek is.
- A kombinált módszerben [8, 9] (augmented Lagrangian) első lépésként megoldjuk az érintkezési feladatot büntetőparaméteres módszerrel. Második lépésben egy újabb iteráció keretén belül a nyomás eloszlás értékét pontosítjuk. Ezzel a módszerrel nagy mértékben javíthatjuk a büntetőparaméteres eljárásban kapott nyomás eloszlás értékét. A kombinált és büntetőparaméteres módszerrel később részletesen is foglalkozunk.

Az érintkezési feladatok p -verziós végeelem-módszerrel történő megoldása csak pár éves múltra tekint vissza. A p -verziós végeelem-módszerben az ismeretlen mezőket magasabb fokú polinomokkal közelítjük. A közelítő polinomok alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy a megoldandó egyenletrendszer jól kondicionált legyen, így kisebb numerikus hibát követünk el. A pontosság növelése érdekében az elemméret változatlanul hagyása mellett a közelítő polinomok fokszámát növeljük. A p -verziós végeelem-módszer egyik előnye az, hogy ugyanakkora szabadsági fokszám mellett az energianormában vett hiba jóval kisebb mint a h -verzió esetén, és a hiba a polinom fokszám növelésével exponenciálisan csökken [10].

A p -verziós végeelem-módszer érintkezési feladatokra történő alkalmazása azonban problémákat vet fel. A h -verzióban nagy pontosság eléréséhez kis méretű elemeket használunk, amelyek a csomópontok egymáshoz képesti közelsége miatt előnyösek az érintkezési tartomány szélének megkereséséhez. Az érintkezési tartomány szélének megállapítása során elkövetett hiba csökken az elemméret csökkentésével. A p -verzióban az elemméret csökkentése a túlságosan nagyra növekvő szabadsági fokszám miatt nem eléggé hatékony, ezért új módszereket kellett kidolgozni az érintkezési feladat megoldására.

Gabbert cikke [11] 1994-ben jelent meg, amelyben speciális pNh -elemeket javasolt a probléma feloldására. A vizsgált tartomány belsejében p -verziós elemeket használt, az érintkezési felületen lévő elemek érintkezési felület felőli oldalán azonban szakaszonként

lineáris függvényeket alkalmazott. Ezzel elérte, hogy az érintkezési felületen az elemek méretéhez képest sűrűn helyezkedtek el a csomópontok. Ez a módszer azonban az érintkezési feladat szempontjából h -verziósnak tekinthető, továbbá ezen elemeken belül a speciális, szakaszonként lineáris közelítő függvény miatt a deriváltakban szakadás lép fel.

Ha az érintkezési tartományon is p -verziós elemeket használunk, újabb problémával kell szembenéznünk. A kontakt-nyomás azon a felületrészen, ahol a testek nem érnek össze, azonosan nulla lesz. Ahol a testek összeérnek, ott a kontakt-nyomás nullától különböző. Az érintkezési tartomány határán a kontakt nyomásnak töréspontja van. A kontakt nyomás elvileg megegyezik az érintkezési felületen ébredő normál-feszültséggel, amely a Hooke-törvény alapján az elmozdulásmező deriváltjaiból számítható. Ennek az a következménye, hogy az elmozdulásmező, ami tulajdonképpen a feladat megoldása, az érintkezési tartomány határán nem lesz analitikus, ugyanis az érintkezési tartomány határán nem lehet Taylor-sorba fejteni. Szabó és Babuška osztályozása alapján [10] az érintkezési feladatok a C kategóriába tartoznak. A C kategória azt jelenti, hogy a megoldás véges számú pont kivételével a teljes tartományon analitikus, viszont a végeelem hálót nem lehet úgy megszerkeszteni, hogy a csomópontok a nem analitikus pontokra eszenek. Ennek oka az, hogy nem tudjuk előre, hol lesz az érintkezési tartomány határa. Ezt a problémát iterációs lépésekkel oldhatjuk meg. Először tetszőleges hálóval oldjuk meg a feladatot. Az így kapott megoldás nyilván pontatlan lesz amiatt, hogy egy nem analitikus függvény analitikussal közelítünk, viszont kapni fogunk egy viszonylag jó becslést az érintkezési tartomány határára. Az iteráció következő lépését többféleképpen oldották meg. Volpert [12] azt javasolta, hogy speciális, szinguláris függvényeket tartalmazó alakfüggvényeket használjunk. A szinguláris pont elhelyezkedését a végeelemen belül egy paraméter segítségével adhatjuk meg. Az iteráció során ezt a paramétert kell mindig módosítani a kívánt pontosság eléréséig. Nincs szükség a végeelem háló megváltoztatására, azonban a numerikus integrálás a speciális alakfüggvények miatt komplikálttá válik. Egy másik lehetséges módszer a Páczelt [13] által javasolt csomópont pozicionálás. Ebben a módszerben a nem analitikus ponthoz a végeelem hálón csomópontot helyezünk. Kezdetben nem tudjuk hol van ez a pont. Az első iterációs lépésben meg lehet becsülni bizonyos pontossággal a helyét, és a végeelem hálót úgy kell módosítani, hogy a nem analitikus ponthoz legközelebb eső (felületi) csomópontot a nem analitikus ponthoz toljuk. Ennek hatására a következő iterációs lépésben csökken a számítás során elkövetett hiba, azonban az elmozdított csomópont két oldalán lévő elemek eltorzulhatnak. Ez nem szerencsés, mert a pontosság romlásához vezet. A cikkben egy Gauss integrálási pontok vizsgálatán alapuló durva pozicionálást, és egy hibaindikátorokkal végzett finom csomópont pozicionálást alkalmaznak.

Az eddig tárgyalt módszerek mind azon a feltételezésen alapultak, hogy az érintkező felületek felületi érdekességét elhanyagolhatjuk. Erre a végeelemes tárgyalás miatt van szükség. A felületen lévő egyenetlenségek, barázdák leírásához nagyon sok és nagyon kicsi végeelemre lenne szükség, ami rendkívüli módon megnövelné a feladat szabadsági fokainak számát. A felületi érdekesség miatt a testek nem a teljes felületükön érintkeznek egymással, hanem annak körülbelül a harmad vagy negyed részén [15, 16]. Emiatt a felület érdekességi csúcsaira az átlagosnál jóval nagyobb terhelés jut. A nagyobb ter-

helés miatt a felületi rétegben ébredő feszültség túllépheti a rugalmassági határt. Az ekkor lejátszódó folyamatok (képlékeny alakváltozás, repedések) már csak nemlineáris elmélettel írhatók le. A számítások elvégzéséhez használt számítógépek kapacitása véges, ezért szükséges olyan modellt használnunk, amely szerint az érintkező felületeket leíró görbék „simák”. Az így elkövetett hibát a különböző, felületekre jellemző anyagállandók segítségével kompenzáljuk oly módon, hogy azok teljes felületre vett átlagával számolunk. Ilyen anyagállandók a súrlódási tényező, hőátadási tényező, kopási állandó, stb. Lehetséges azonban az érintkezési feladatok olyan tárgyalása is, ahol a felületek mikró tulajdonságát is figyelembe vesszük. Ilyen található Váradi és Néder cikkében [15, 16]. Az érintkező felületek egy kis darabját vizsgálták. Pontosabban leírták a felület geometriáját. Az általuk használt modellben az érdességi csúcsokat félgömbökkel, ellipszoidokkal és elliptikus paraboloidokkal helyettesítették, az érintkezési feladat megoldásához pedig felhasználták Hertz megoldását [17].

1.2. Célkitűzések

Az értekezés ezen fejezetében a mechanikai érintkezési feladatot szeretnénk megoldani p -verziós végelem-módszerrel. Az 1.1 pont alapján a következő célokat tűzzük ki:

1. Az érintkezési feladat p -verziós végelelemes megfogalmazása a kombinált módszer (és benne a büntetőparaméteres módszer) segítségével.
2. Új módszer keresése, amely segítségével az érintkezési tartomány határa tengelyszimmetrikus alakváltozás esetén nagy pontossággal meghatározható.
3. A csomópont pozicionálásból eredő végelem háló módosítás véghezvitele, ügyelve arra, hogy az érintkezési tartományon a test alakja nagy pontossággal legyen leírható.
4. Számítógépes program írása, amely segítségével az érintkezési feladatot numerikusan meg tudjuk oldani, és igazolni tudjuk a kidolgozott algoritmus helyes működését.

1.3. A rugalmasságtani feladat kitűzése

Az érintkezési feladat a következőt jelenti: a térben két szilárd test mechanikai kölcsönhatásban van egymással. Mi a kölcsönhatásnak csak a mechanikai jellegét vizsgáljuk, azaz nem vesszük figyelembe a testek elektromos és mágneses tulajdonságát, továbbá az egymásra gyakorolt gravitációs vonzóerőt sem. A feladat még így is túlságosan bonyolult lenne, ezért további megszorításokat kell tennünk, azaz egyszerűsíteniünk kell a mechanikai modellt úgy, hogy csak a számunkra érdekes tulajdonságai maradjanak meg.

a. Feltételezzük, hogy a testek csak kis mértékű alakváltozást szenvednek, a relatív nyúlások és szögtorzulások értéke jóval kisebb mint egy, azaz $\varepsilon \ll 1$ és $\gamma \ll 1$. *b.* Feltételezzük azt is, hogy a testekre ható terhelések hatására a testek alakváltozása a rugalmas

tartományon belül marad, a terhelés megszűnése után a testek visszanyerik eredeti alakjukat. Az a . és b . feltételezésekkel élve a testek alakváltozása és feszültségi állapota közötti összefüggést a lineárisan rugalmas testekre érvényes Hooke-törvény adja meg.

Olyan feladatokat vizsgálunk meg, ahol a két érintkező test egymáshoz képest el is mozdulhat. Ekkor további feltételezésekkel kell élnünk. Feltételezzük, hogy a két test között nincs harmadik test (kenőanyag, a testekről letöredezett darabok), a testek között a Coulomb-féle súrlódási törvény érvényes. A súrlódás hatására hő keletkezik, amely bizonyos veszteségek után (pl. sugárzás útján) a testekbe folyik. A testek hővezetését a Fourier-féle elmélettel írjuk le. A testekben a hőmérséklet változásának hatására feszültségek, úgynevezett hőfeszültségek keletkeznek. Ezek befolyásolják az érintkezési feladat megoldását. Súrlódás és hőfejlődés akkor jön létre, ha az érintkező felületek érdesek. Az érintkezési feladat geometriai leírásánál azonban nincs szükség a felületek érdességének figyelembevételére, ugyanis azt a súrlódás és a hőfejlődés számításánál a súrlódási tényező alkalmazásával megtesszük. Ebben az értekezésben kizárólag tengelyszimmetrikus feladatok megoldásával foglalkozunk, de az alapegyenletek érvényesek az általános esetre is.

Tekintsünk két testet. A testek helyezkedjenek el a V^1 és V^2 térbeli tartományokban. Mikor a testekről beszélünk, matematikai szempontból a V^1 és V^2 tartományokra gondolunk. A V^1 tartomány felületét A^1 -gyel, a V^2 tartomány felületét A^2 -vel jelöljük. A testek felületét három részre oszthatjuk fel (1.3. ábra). Jelölje A_p^e azt a felületrészt, ahol adott felületi terhelés hat a testekre, A_u^e azt a felületrészt, ahol adott az elmozdulás nagysága, és A_c^e azt a felületrészt, ahol a két test érintkezhet egymással. Az e felső index jelöli, hogy a két test közül melyikről van szó ($e = 1$ vagy $e = 2$). A testekre ható térfogaton megoszló terhelést jelölje $\rho^e \mathbf{k}^e$, ahol ρ^e a testek tömegsűrűsége, $\mathbf{k}^e$ pedig a térerősség. A feladat az, hogy meg kell határoznunk az elmozdulásmezőt, amelyet $\mathbf{u}^e$ -vel jelölünk. A megoldásnak ki kell elégítenie az alábbi három egyenletet. Az egyensúlyi egyenlet:

$$\mathbf{T}^e \cdot \nabla + \rho^e \mathbf{k}^e = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in V^e \quad (1.1)$$

ahol $\mathbf{T}^e$ a feszültségi tenzor, $\mathbf{r}$ pedig a testek egy pontjába mutató helyvektor. A fenti egyenlet csak akkor érvényes, ha a test nyugalmi állapotban van, azaz mindegyik pontjának gyorsulása nullával egyenlő. A kinematikai egyenlet:

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^e \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}^e) \quad \mathbf{r} \in V^e \quad (1.2)$$

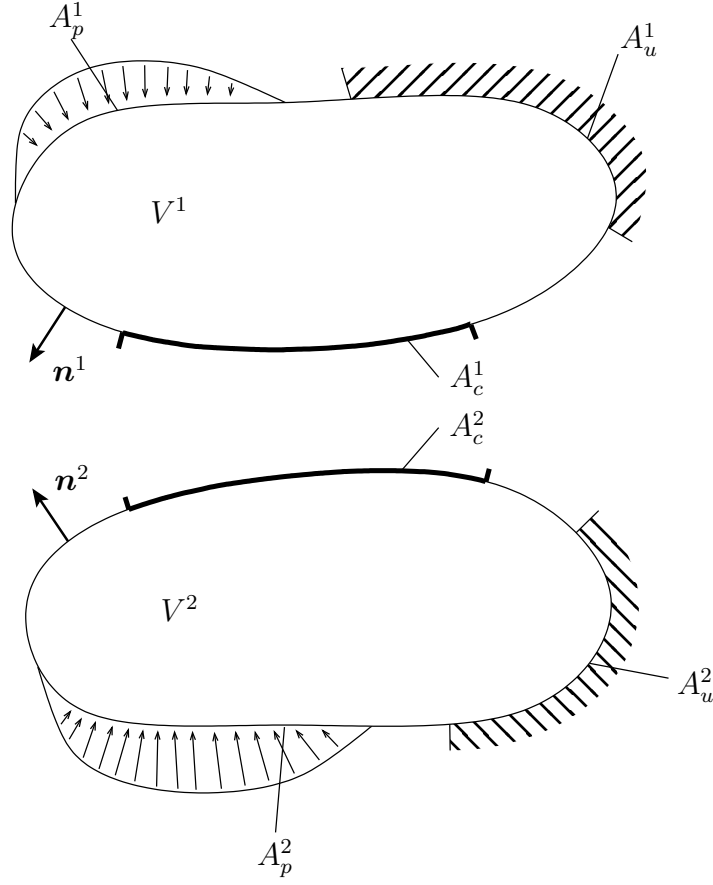
ahol $\mathbf{A}^e$ jelöli az alakváltozási tenzort. Az egyenlet kis alakváltozásokra érvényes. Végül az anyagegyenlet:

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{D}^e \cdot (\mathbf{A}^e - \mathbf{A}_0^e) \quad \mathbf{r} \in V^e \quad (1.3)$$

ahol $\mathbf{D}^e$ az anyagállandók negyedrendű tenzora, az $\mathbf{A}_0^e$ a testek hőtágulásából származó alakváltozási tenzor. $\mathbf{A}_0^e$ a hőmérséklet eloszlás függvénye:

$$\mathbf{A}_0^e = \alpha^e (T^e - T_0^e) \mathbf{I}$$

ahol α^e a lineáris hőtágulási együttható, T^e a testekben lévő hőmérsékletmező, T_0^e a kezdeti hőmérséklet, $\mathbf{I}$ pedig az egységtenzor. Feltételezzük, hogy a testeket alkotó anyag



1.3. ábra. Az érintkező testek felületeinek felosztása A_u^e , A_p^e és A_c^e tartományokra ($e = 1, 2$).

homogén és izotrop tulajdonságú, valamint hogy a testek alakváltozása a feszültségtől lineárisan függ. Ebben az esetben a $\mathbf{D}^e$ tenzor csak két anyagállandót tartalmaz, az E Young-modulust és a ν Poisson-tényezőt. Az elmozdulásmezőnek és a feszültségmezőnek a következő két peremfeltételt kell kielégítenie:

$$\mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e = \mathbf{p}_0^e \quad \mathbf{r} \in A_p^e \quad (1.4)$$

és

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_0^e \quad \mathbf{r} \in A_u^e \quad (1.5)$$

azaz az A_p^e felületen adott a terhelés, az A_u^e felületen pedig adott az elmozdulás. Az érintkezési feltételekkel később foglalkozunk. Az (1.1)-(1.3) alattiak egy parciális differenciálegyenlet rendszert jelölnek ki. A $\mathbf{T}^e$ feszültségi tenzor és az $\mathbf{A}^e$ alakváltozási tenzor kiküszöbölésével megkapnánk a Navier-egyenletet [17], és csak az elmozdulásmező lenne az ismeretlen. Mi azonban végeselem-módszert fogunk használni a feladat megoldásához, ezért nem lesz szükségünk a Navier-egyenlet felírására.

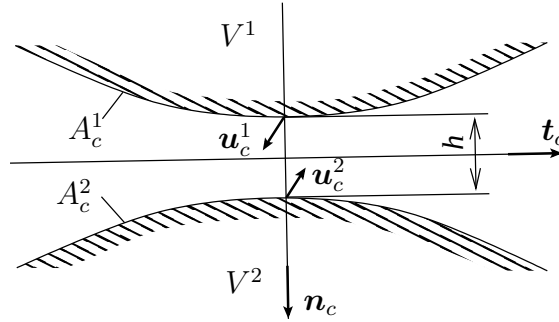
Az (1.1)-(1.3) integrál alakba történő felírásához a potenciális energia minimuma elvet használjuk fel. A testek potenciális energiáját a következő képlet definiálja:

$$\Pi = \sum_{e=1}^2 \left[\int_{(V^e)} \frac{1}{2} (\mathbf{A}^e - \mathbf{A}_0^e) \cdot \cdot \mathbf{D}^e \cdot \cdot (\mathbf{A}^e - \mathbf{A}_0^e) dV - \int_{(V^e)} \rho^e \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u}^e dV - \int_{(A_p^e)} \mathbf{p}_0^e \cdot \mathbf{u}^e dA \right] \quad (1.6)$$

A potenciális energia minimuma elv kimondja, hogy a megvalósuló elmozdulásmező esetén a (1.6) funkcionálnak minimuma van ($\Pi = \min$).

1.4. Az érintkezési feltételek

Eddig csak két egymástól független test rugalmasságtani feladatát vizsgáltuk. Most megnézzük mi történik, ha a két test egymással érintkezik. Azt a felületet, ahol a testek egymással érintkeznek, jelöljük A_c^e -vel ($e = 1, 2$) (lásd 1.4. ábra). A két érintkező



1.4. ábra. A testek egymással érintkező felületei.

felület között jelöljük ki egy alapsíkot. Az alapsíkon vegyünk fel egy a síkra merőleges $\mathbf{n}_c$ egységvektort. Jelölje $\mathbf{u}_c^1$ és $\mathbf{u}_c^2$ az $\mathbf{n}_c$ egyenese és A_c^1 illetve A_c^2 dőféspontjában lévő elmozdulásvektorokat. A két dőféspont távolsága lesz a felületek kezdeti hézaga az adott pontban, amelyet h -val jelölünk. Az $\mathbf{u}_c^1$ és $\mathbf{u}_c^2$ vetülete $\mathbf{n}_c$ -re $u_n^1 = \mathbf{u}_c^1 \cdot \mathbf{n}_c$ illetve $u_n^2 = \mathbf{u}_c^2 \cdot \mathbf{n}_c$ lesz. Alakváltozás után a testek közötti hézag a következő:

$$d = d(\mathbf{u}) = u_n^2 - u_n^1 + h \quad \mathbf{r} \in A_c \quad (1.7)$$

A d hézag függvénye az elmozdulásmezőnek. A valóságban soha nem történhet meg az, hogy a testek egymásba hatolnak. Ezt matematikailag azzal tudjuk megfogalmazni, hogy a $d(\mathbf{u})$ hézagfüggvény soha nem vehet fel negatív értékeket, azaz $d(\mathbf{u}) \geq 0$. Az érintkezési felületen a testek között egy felületen megoszló erő, az úgynevezett kontakt-nyomás hat. Ezt a testek feszültségi állapotainak ismeretében fel tudjuk írni:

$$p_n = -\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}_c = \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}_c \quad \mathbf{r} \in A_c \quad (1.8)$$

Használjuk fel azt a feltételezést, hogy csak kis alakváltozások következnek be. Ekkor az $\mathbf{n}^1 \simeq \mathbf{n}_c$ és $\mathbf{n}^2 \simeq -\mathbf{n}_c$ közelítéssel élhetünk:

$$p_n \simeq -\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 = -\mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \quad \mathbf{r} \in A_c \quad (1.9)$$

Feltételezzük, hogy a felületek között nem hat vonzóerő, a felületek nem ragadnak össze. Ez azt jelenti, hogy a kontakt-nyomás nem vehet fel negatív értéket, azaz $p_n \geq 0$. Előre nem tudjuk, hogy a testek mekkora felületen érintkeznek, de meg tudjuk becsülni, amelyik felületen jöhet létre érintkezés. Ezt a felületet jelöljük A_c^e -vel. Jelöljük azt a felületrészt C -vel, ahol az érintkezés ténylegesen létrejön, és G -vel azt a felületrészt, ahol a felületek nem érnek össze, közöttük hézag marad. Igaz az, hogy $A_c^e = C \cup G$ és $C \cap G = \emptyset$. A következő megállapításokat tudjuk tenni:

$$d = 0, \quad p_n \geq 0, \quad \mathbf{r} \in C$$

$$d \geq 0, \quad p_n = 0, \quad \mathbf{r} \in G$$

A p_n és d szorzata az A_c^e -n mindenütt nulla.

$$p_n d = 0 \quad \mathbf{r} \in A_c^e \quad (1.10)$$

A (1.10) összefüggés alapját fogja képezni az érintkezési feladat megoldására használt módszereknek.

1.5. Az érintkezési feladat gyenge alakja

Az érintkezési feladatot a potenciális energia minimuma elv segítségével szeretnénk megoldani, ezért a (1.10) érintkezési feltételt ennek megfelelően integrál alakban kell megfogalmaznunk. Kétfajta módszerrel is meg fogjuk oldani a problémát, de először egy harmadik módszert ismertetünk. Ez a Lagrange multiplikátoros módszer lesz. Azt a kinematikai peremfeltételt fogalmazzuk meg mellékfeltételként a minimumszámításban, hogy a tényleges érintkezési tartományon a d hézagfüggvény azonosan nulla, a hézagtartományban a nyomás azonosan nulla, így az 1.10 szerint

$$\mathcal{L}^{LA} = \mathcal{L}^{LA}(\mathbf{u}, p_n) := \Pi(\mathbf{u}) - \int_{(A_c)} p_n d(\mathbf{u}) dA = \min \quad p_n \geq 0 \quad (1.11)$$

(1.11)-ben p_n a Lagrange-multiplikátor, ami ebben az esetben éppen a kontakt-nyomást adja meg. Ezért a (1.11) egyenletben az $\mathbf{u}$ elmozdulásmező mellett a p_n kontakt-nyomás is ismeretlenként jelenik meg.

A büntetőparaméteres módszerben már csak az elmozdulásmező az ismeretlen. A módszert a következő funkcionállal írhatjuk le:

$$\mathcal{L}^{PE} = \mathcal{L}^{PE}(\mathbf{u}) := \Pi(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \int_{(C)} c_n (d^-(\mathbf{u}))^2 dA = \min \quad (1.12)$$

(1.12)-ban c_n jelöli a büntető paramétert, $d^-(\mathbf{u})$ pedig a hézagfüggvény negatív értékeit. A c_n büntetőparamétert úgy is felfoghatjuk, mint a két test közé helyezett képzeletbeli rugó rugómerevségét. Azokra a helyekre, ahol a testek egymásba hatolnának, egy speciális rugalmas közeget helyezünk, amely csökkenti a testek egymásba hatolását. A speciális rugalmas közeget Winkler típusú közegnek is nevezik. Ez a közeg nem egy pontban kapcsolódik a testekhez, hanem egy felület (vonal) mentén megoszolva. A továbbiakban a Winkler típusú rugalmas közeget röviden rugónak fogjuk nevezni. Az egymásba hatolás ezzel a módszerrel nem akadályozható meg, mert a rugóknak legalább egy kicsit össze kell nyomódnuk ahhoz, hogy erőt fejtsenek ki. Viszont ha a c_n értékének nagy számot választunk, a d hézagfüggvény csak kicsi abszolút értékű negatív értéket vesz fel. Így az érintkezési feladatot elvileg tetszőleges pontossággal meg tudjuk oldani. A gyakorlatban azonban ez sajnos nincs így. Ha c_n értéke túl nagy, a numerikus megoldás során kiadódó lineáris algebrai egyenletrendszer együttható mátrixának kondíciószáma nagy lesz, ami miatt az egyenletrendszert nem tudjuk kellő pontossággal megoldani. A tapasztalatok szerint $c_n = 100E$ és $c_n = 1000E$ közötti értékek már jó megoldást adnak. Azt nem tudjuk előre, hogy a d hézagfüggvény hol fog negatív értékeket felvenni, ezért iterációt kell alkalmaznunk. A numerikus megoldás során Gauss-Lobatto integrálást használunk, ezért az érintkezési feltételeket csak az integrálási pontokban vizsgáljuk meg. A megoldás szempontjából a folytonos eloszlású rugó diszkrét, az integrálási pontokhoz kapcsolódó rugókként fog viselkedni. Először mindegyik integrálási pontban $c_n \neq 0$ értéket veszünk. A rugalmasságtani feladat megoldása után a negatív d értékű helyekre rugókat rakunk, azaz c_n értéke nem lesz nulla. Ahol a hézagfüggvény pozitív, ott c_n -t nullának vesszük. Újra kiszámoljuk a feladatot az ily módon módosított Winkler rugóval, és megint megvizsgáljuk a d hézagfüggvényt. Ezt egészen addig ismételjük, amíg a tényleges érintkezési felület már csak egy bizonyos hibahatáron belül változik meg. Ekkor a feladatot megoldottnak tekintjük. A kontakt-nyomást a

$$p_n = -c_n d^-(\mathbf{u}) \quad (1.13)$$

képlet adja meg. Innen is látszik, hogy ha c_n értéke nagy, d^- értéke kicsi. $c_n \rightarrow \infty$ esetén $d^- \rightarrow 0$ lenne.

A harmadik módszer az első kettő keveréke lesz. Lehetne kombinált módszernek is nevezni. A szakirodalomban „augmented Lagrangian” néven ismert. A módszer alapját a következő funkcionál képezi:

$$\mathcal{L}^{AU} = \mathcal{L}^{AU}(\mathbf{u}) := \Pi(\mathbf{u}) - \int_{(C)} p_n d(\mathbf{u}) dA + \frac{1}{2} \int_{(C)} c_n (d(\mathbf{u}))^2 dA = \min \quad (1.14)$$

Egy funkcionálnak akkor van minimuma, ha a variációja nulla. A variációt, azaz a kis megváltozást δ betűvel jelöljük. Képezzük az (1.14) $\mathbf{u}$ szerinti variációját:

$$\delta \mathcal{L}^{AU} := \delta \Pi(\mathbf{u}) - \int_{(C)} (p_n - c_n d) \delta d dA = 0 \quad (1.15)$$

A $\Pi(\mathbf{u})$ potenciális energia variációját az (1.6) egyenletből kiindulva tudjuk kiszámolni:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = \sum_{e=1}^2 \left[\int_{(V^e)} \delta\mathbf{A}^e \cdot \cdot \mathbf{D}^e \cdot \cdot \mathbf{A}^e dV - \int_{(V^e)} \delta\mathbf{A}^e \cdot \cdot \mathbf{D}^e \cdot \cdot \mathbf{A}_0^e dV - \right. \\ \left. - \int_{(V^e)} \rho^e \mathbf{k}^e \cdot \delta\mathbf{u}^e dV - \int_{(A_p^e)} \mathbf{p}_0^e \cdot \delta\mathbf{u}^e dA \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Felhasználva a (1.2) kinematikai egyenletet, és azt a matematikai tételt, miszerint minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor összegére, a következőt kapjuk:

$$\delta\mathbf{A}^e = \frac{1}{2} (\delta\mathbf{u}^e \circ \nabla + \nabla \circ \delta\mathbf{u}^e) = \delta\mathbf{u}^e \circ \nabla - \underbrace{\frac{1}{2} (\delta\mathbf{u}^e \circ \nabla - \nabla \circ \delta\mathbf{u}^e)}_{\delta\mathbf{\Psi}^e} \quad (1.17)$$

Egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor kétszeres skaláris szorzata mindig nullát ad eredményül. A kontinuummechanikából tudjuk [21], hogy a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor szimmetrikus, a $\mathbf{\Psi}$ forgástenzor és annak $\delta\mathbf{\Psi}$ variációja pedig ferdén szimmetrikus. Felhasználva még a (1.3) anyagegyenletet, (1.16) a következő alakban írható:

$$\delta\Pi = \sum_{e=1}^2 \left[\int_{(V^e)} (\delta\mathbf{u}^e \circ \nabla) \cdot \cdot \mathbf{T}^e dV - \int_{(V^e)} \rho^e \mathbf{k}^e \cdot \delta\mathbf{u}^e dV - \int_{(A_p^e)} \mathbf{p}_0^e \cdot \delta\mathbf{u}^e dA \right] \quad (1.18)$$

Szorzat deriválási szabálya alapján $(\delta\mathbf{u}^e \circ \nabla) \cdot \cdot \mathbf{T}^e = (\delta\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{T}^e) \cdot \nabla - \delta\mathbf{u}^e \cdot (\mathbf{T}^e \cdot \nabla)$. Helyettesítsük ezt a (1.18)-be, és alkalmazzuk a

$$\int_{(V^e)} (\delta\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{T}^e) \cdot \nabla dV = \int_{(A_p^e)} \delta\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n} dA + \int_{(A_c^e)} \delta\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n} dA$$

Gauss-tételt, amelyben kihasználtuk, hogy $\delta\mathbf{u}^e = 0$ ha $\mathbf{r} \in A_u^e$, azaz $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_0^e$. Összevonások után kapjuk, hogy

$$\delta\Pi = \sum_{e=1}^2 \left[- \int_{(V^e)} (\mathbf{T}^e \cdot \nabla + \rho^e \mathbf{k}^e) \cdot \delta\mathbf{u}^e dV + \int_{(A_p^e)} (\mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e - \mathbf{p}_0^e) \cdot \delta\mathbf{u}^e dA + \int_{(A_c^e)} (\mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e) \cdot \delta\mathbf{u}^e dA \right] \quad (1.19)$$

Helyettesítsük vissza (1.19)-et az (1.15) egyenletbe. Vegyük figyelembe, hogy $\delta\mathbf{u}^e = \delta u_n^e \mathbf{n}_c + \delta u_t^e \mathbf{t}_c$, ahol $\mathbf{t}_c$ az érintkező felületek érintő egységvektora, δu_n^e és δu_t^e pedig az

elmozdulásvektor variációjának $\mathbf{n}_c$ illetve $\mathbf{t}_c$ irányokba eső koordinátája.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}^{AU} := & \sum_{e=1}^2 \left[- \int_{(V^e)} (\mathbf{T}^e \cdot \nabla + \rho^e \mathbf{k}^e) \cdot \delta \mathbf{u}^e dV + \int_{(A_p^e)} (\mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e - \mathbf{p}_0^e) \cdot \delta \mathbf{u}^e dA + \right. \\ & \left. + \int_{(A_c^e)} \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e \delta u_t^e dA \right] + \int_{(C)} (\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + (p_n - c_n d)) \delta u_n^1 dA + \\ & + \int_{(C)} (\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 + (p_n - c_n d)) \delta u_n^2 dA = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

A $\delta \mathbf{u}^e$ értéke a V^e térfogaton és az A_p^e felületen nullától különböző. Az első két integrál értéke csak akkor lehet nulla, ha

$$\mathbf{T}^e \cdot \nabla + \rho^e \mathbf{k}^e = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in V^e$$

és

$$\mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e - \mathbf{p}_0^e = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in A_p^e.$$

Visszakaptuk az (1.1) egyensúlyi egyenletet és a (1.4) peremfeltételt. Ebből látszik, hogy ugyan az az elmozdulásmező biztosítja (1.14) minimumát, mint amelyik kielégíti az (1.1)-(1.3) egyenleteket és a (1.4)-(1.5) peremfeltételeket. Az utolsó két integrálnál figyelembe vettük, hogy az $\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1$ és $\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2$ értékei nullák a G tartományon, ezért elég a C felületen elvégezni az integrálást. Feltételezzük, hogy úgynevezett súrlódás nélküli érintkezési feladatot oldunk meg, ezért a $\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e = \tau_{tn}^e$ csúsztatófeszültség nulla az érintkezési felületen. A súrlódás nélküli érintkezési feladat azt jelenti, hogy a felületek letapadását és megcsúszását (stick-slip) [22] nem vesszük figyelembe. A felületeken a normál-feszültséget a következő képletekkel számolhatjuk:

$$\sigma_n^1 = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 = -(p_n - c_n d)$$

$$\sigma_n^2 = -\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = -(p_n - c_n d)$$

azaz

$$\sigma_n^1 = \sigma_n^2 = -(p_n - c_n d) \quad (1.21)$$

A feladatot iterációs lépésekkel oldjuk meg. Kezdetben, azaz a nulladik lépésben a p_n kontakt-nyomás mindenütt legyen nulla: $p_n^{(0)} = 0$. A felső zárójeles index jelöli az iterációs lépések sorszámát. A k -adik lépésben a $(k-1)$ -edik lépésben kiszámított $p_n^{(k-1)}$ kontakt-nyomást állandónak véve számítjuk ki az érintkezési feladatot úgy, mintha büntetőparaméteres módszert alkalmaznánk.

$$\delta\mathcal{L}^{AU} := \delta\Pi(\mathbf{u}^{(k)}) - \int_{C^{(k)}} (p_n^{(k-1)} - c_n d^-(\mathbf{u}^{(k)})) \delta(u_n^{2(k)} - u_n^{1(k)}) dA = 0$$

A k -edik lépéshez tartozó kontakt-nyomást a következő képlettel számíthatjuk:

$$p_n^{(k)} = \langle p_n^{(k-1)} - c_n d(\mathbf{u}^{(k)}) \rangle \quad (1.22)$$

A $\langle \rangle$ zárójel jelentését a

$$\langle p_n \rangle = \frac{1}{2}(p_n + |p_n|)$$

képlet definiálja. A k -edik lépésben a $(k-1)$ -edik lépéshez tartozó $p^{(k-1)}$ nyomás olyan, mintha külső terhelésként viselkedne. A módszer lépésről lépésre egyre pontosabban közelíti a kontakt-nyomást. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a nyomás értékét egy előre adott τ_p hibahatáron belül meg nem kapjuk.

$$\frac{\int_{(C)} |p_n^{(k)} - p_n^{(k-1)}| dA}{\int_{(C)} |p_n^{(k)}| dA} \leq \tau_p \quad (1.23)$$

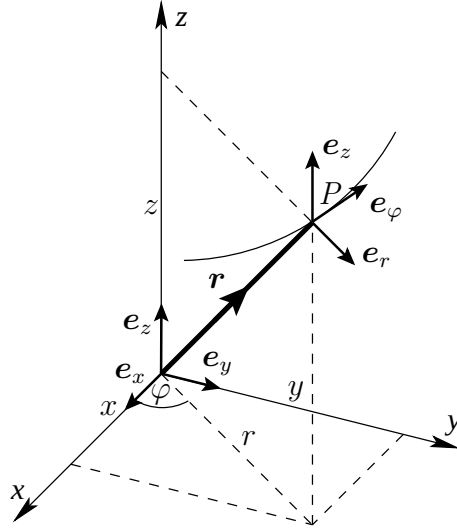
A kombinált módszer előnye a büntetőparaméteres módszerrel szemben az, hogy nem túl nagy c_n büntetőparaméter választása esetén is pár iterációs lépés után a kontakt-nyomást nagy pontossággal adja meg. Így el tudjuk kerülni a lineáris algebrai egyenletrendszer együtttható mátrixának rosszul kondicionáltságát.

1.6. Végeselemes diszkretizálás

Az érintkezési feladat numerikus megoldásához végeselem-módszert fogunk használni. A végeselem-módszeren belül többfajta megközelítés létezik, úgy mint h -verziós, p -verziós vagy hp -verziós végeselem-módszer. Ebben a dolgozatban a hp -verziót alkalmazzuk. Arra hogy ez mit jelent a későbbiekben még visszatérünk. A megoldandó feladatot még azal specializáljuk, hogy a testek alakját tengelyszimmetrikusnak feltételezzük, és hasonlóan a megfogások és terhelések is tengelyszimmetrikusan lesznek megadva. Ezzel azt érjük el, hogy egy három dimenziós test matematikai leírásához elegendő lesz két változót használnunk. A tengelyszimmetriának megfelelően minden mennyiséget hengerkoordinátákkal fogunk megadni (lásd 1.5. ábra). Egy tetszőleges P pont helykoordinátáját például így adhatjuk meg:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$$

Az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ illetve $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ jelentik a Descartes- illetve hengerkoordinátarendszer tengelyei irányába mutató bázisvektorokat, az x , y és z illetve r , φ és z pedig a Descartes- illetve hengerkoordinátarendszerben adott koordinátákat. A tengelyszimmetria azt jelenti, hogy egyik fizikai mennyiség sem függhet a φ koordinátától. Az (1.14) funkcionálban az $\mathbf{u}$ elmozdulásmező is csak az r és z függvénye lehet, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(r, z)$.



1.5. ábra. Egységvektorok és koordináták a Descartes és a hengerkoordináta-rendszerben.

A végeelem-módszerben a testeket felosztjuk valamilyen matematikailag könnyen leírható geometriai alakzatokra, és az ezeken definiált úgynevezett alakfüggvények segítségével végezzük a közelítést. A tengelyszimmetria miatt elég az r és z tengelyek által kijelölt félsíkot vizsgálunk. Az alakfüggvények száma és definiáló képletei függenek az alkalmazott végelem-módszertől (h -, vagy p -verzió). Az elmozdulásmezőt így közelítjük a V^1 és V^2 testeken:

$$\mathbf{u}^e \Rightarrow \mathbf{u}^e(r, z) = \mathbf{N}^e(r, z)\mathbf{q}^e \quad (1.24)$$

Az e továbbra is a testek sorszámát jelenti ($e = 1, 2$). Ugyanez mátrixokkal felírva:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} q_r^1 \\ q_\varphi^1 \\ q_z^1 \\ q_r^2 \\ q_\varphi^2 \\ q_z^2 \\ \vdots \\ q_r^n \\ q_\varphi^n \\ q_z^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^e} \quad (1.25)$$

N_j -vel ($j = 1, 2, \dots, n$) az egyes alakfüggvényeket jelöljük, q_r^j , q_φ^j és q_z^j -vel ($j = 1, 2, \dots, n$) pedig az alakfüggvényekhez rendelhető csomóponti értékeket, vagy paramétereket. Ezek a paraméterek határozzák meg az elmozdulásmezőt. Az n az alakfüggvények száma.

Az u_φ elmozdulás koordináta a torzióval, azaz a z tengely körüli elcsavarodással kapcsolatos. A (1.14) funkcionálban szerepel az $\mathbf{A}^e$ alakváltozási tenzor is. Az $\mathbf{A}^e$ henger koordinátarendszerben a következő alakú:

$$[\mathbf{A}^e]_{r\varphi z} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi} & \frac{1}{2}\gamma_{rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi r} & \varepsilon_\varphi & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zr} & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}^e \quad (1.26)$$

Egy kicsit csoportosítsuk át a (1.26)-ben lévő mennyiségeket.

$$\mathbf{A}^e \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\varphi} \\ \gamma_{\varphi z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\partial}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}^e}^e \quad (1.27)$$

A (1.27) képletben már sikerült az $\mathbf{u}^e$ elmozdulásvektor $\mathbf{u}^e$ oszlopvektorát formálisan kiemelni az $\mathbf{A}^e$ -ből származó $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ -ből. Írjuk be $\mathbf{u}^e$ helyére a (1.24)-t, és végezzük el a $\boldsymbol{\partial}$ differenciál operátor mátrix által kijelölt deriválásokat. A továbbiakban tengelyszimmetrikus alakváltozásokat fogunk feltételezni, azaz a φ változásától a mennyiségek függetlenek lesznek.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\varphi} \\ \gamma_{\varphi z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & 0 & \dots & \frac{N_n}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} - \frac{N_1}{r} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} - \frac{N_2}{r} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial r} - \frac{N_n}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^e}^e \underbrace{\begin{bmatrix} q_r^1 \\ q_\varphi^1 \\ q_z^1 \\ q_r^2 \\ q_\varphi^2 \\ q_z^2 \\ \vdots \\ q_r^n \\ q_\varphi^n \\ q_z^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}^e}^e \quad (1.28)$$

A (1.28)-ben sikerült elérnünk, hogy a (1.25) mintájára a paraméterek $\mathbf{q}^e$ vektorát kell megszorozni egy alakfüggvényektől függő $\mathbf{B}^e$ mátrixszal.

Feltételeztük, hogy lineárisan rugalmas, homogén izotrop tulajdonságú anyagokat vizsgálunk. Ezekre érvényes a Hooke-törvény:

$$\mathbf{T}^e = \frac{E^e}{1 + \nu^e} \left[\mathbf{A}^e + \frac{\nu^e}{1 - 2\nu^e} A_I^e \mathbf{I} \right] - \frac{\alpha^e E^e}{1 - 2\nu^e} (T^e - T_0^e) \mathbf{I} \quad (1.29)$$

ahol E^e a Young féle rugalmassági modulus, ν^e a Poisson tényező, az A_I^e az $\mathbf{A}^e$ tenzor első skalárinvariánsa ($A_I^e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z$), T_0^e a kezdeti hőmérséklet, T^e a pillanatnyi hőmérséklet, az $\mathbf{I}$ pedig az egységtenzor.

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A (1.29) tulajdonképpen a (1.3) anyagegyenlet speciális alakja. Emeljük ki (1.29) jobb oldalából a $\mathbf{D}^e$ anyagállandók tenzorát:

$$\mathbf{T}^e = \underbrace{\left[\frac{E^e}{1 + \nu^e} \left(\mathbf{I}^{[4]} + \frac{\nu^e}{1 - 2\nu^e} \mathbf{I} \circ \mathbf{I} \right) \right]}_{\mathbf{D}^e} \cdot \cdot [\mathbf{A}^e - \underbrace{\alpha(T^e - T_0^e)\mathbf{I}}_{\mathbf{A}_0^e}] \quad (1.30)$$

Az $\mathbf{I}^{[4]}$ a negyedrendű egységtenzort jelöli, melyet a

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{[4]} = & \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z + \\ & + \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_x + \\ & + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

képlet definiál. A $\mathbf{T}$ feszültségtenzort hengerkoordináta rendszerben így írhatjuk fel:

$$[\mathbf{T}^e]_{r\varphi z} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi r} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}^e$$

A (1.30) Hooke-törvény mátrix alakban a következő lesz:

$$\mathbf{T}^e \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \\ \tau_{r\varphi} \\ \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^e} = \frac{E^e}{1 + \nu^e} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^e} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\varphi} \\ \gamma_{\varphi z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} - \underbrace{\alpha(T^e - T_0^e)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0^e} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0^e} \right\} \quad (1.31)$$

A (1.25)-ban az $\mathbf{u}^e$ vektort oszlopmátrix alakban írtuk fel. Tegyük így a (1.6)-ban szereplő $\mathbf{p}_0^e$ és $\mathbf{k}^e$ vektorokkal is.

$$[\mathbf{p}_0^e] = \begin{bmatrix} p_{0r} \\ p_{0\varphi} \\ p_{0z} \end{bmatrix}^e \quad [\mathbf{k}^e] = \begin{bmatrix} k_r \\ k_\varphi \\ k_z \end{bmatrix}^e \quad (1.32)$$

A vektorok koordinátái továbbra is az r és z hengerkoordináták függvényei. A (1.25), (1.28), (1.31) és (1.32) mátrixegyenletek segítségével a (1.6) potenciális energiát a következő formában írhatjuk fel:

$$\Pi(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2) = \sum_{e=1}^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}_{p,\rho k}^e \right) \quad (1.33)$$

ahol

$$\mathbf{K}^e = \int_{(V^e)} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dV \quad (1.34)$$

a merevségi mátrixot,

$$\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e = \int_{(V^e)} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_0^e dV \quad (1.35)$$

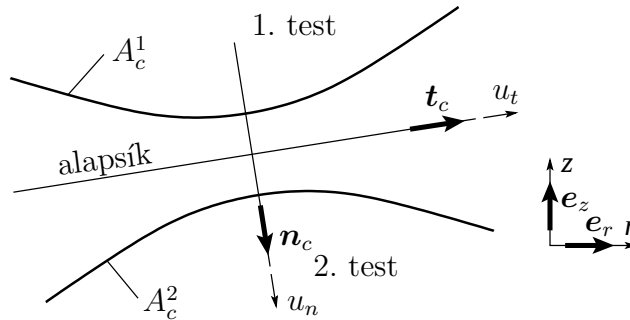
a hőfeszültségekből származó terelési vektort és

$$\mathbf{f}_{p,\rho k}^e = \int_{(V^e)} \rho^e \mathbf{N}^{eT} \mathbf{k}^e dV + \int_{(A_p^e)} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}_0 dA \quad (1.36)$$

a külső erőkből származó terhelési vektort jelöli. Az (1.35) és az (1.36) terhelési vektorok összegét jelöljük $\mathbf{f}^e$ -vel.

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e + \mathbf{f}_{p,\rho k}^e \quad (1.37)$$

Most vizsgáljuk meg, hogy lehetne az érintkezési feltételeket a (1.33)-hoz hasonló mátrixos alakban megfogalmazni. Mint már említettük, a két érintkező felület közé egy folytonos eloszlású rugalmas közeget helyezünk, amely a felületekre merőlegesen fejt ki erőt, ezzel megakadályozza a testek egymásba hatolását. A rugóerő arányos a testek közötti $d = u_n^2 - u_n^1 + h$ távolsággal. Az u_n^1 és u_n^2 az $\mathbf{n}_c$ és $\mathbf{t}_c$ vektorokkal adott lokális koor-



1.6. ábra. Az érintkező felületek a globális $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ és a lokális $(\mathbf{t}_c, \mathbf{n}_c)$ koordinátarendszerben.

dinátarendszerbeli, felületekre merőleges elmozdulást jelenti (lásd 1.6. ábra). Mivel (1.24)-ben $\mathbf{u}(r, z)$ koordinátái az r és z irányú elmozdulást jelentik, át kell őket transzformálni a

lokális tn koordinátarendszerbe. Jelölje felülvonás a lokális koordinátarendszerben adott értékeket:

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e, \quad \bar{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} u_t \\ u_n \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e \bar{\mathbf{q}}^e \quad (1.38)$$

Az rz és tn koordinátarendszerekben felírt elmozdulásvektorok közötti kapcsolatot az

$$\bar{\mathbf{u}}^e = \mathbf{T}_0 \mathbf{u}^e \quad \mathbf{r} \in A_c \quad (1.39)$$

képlet adja, amelyben

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

a transzformációs mátrix. A φ szög az rz és a tn koordináta tengelyek által bezárt szöget jelenti. A (1.38)-ban csoportosíthatjuk a $\mathbf{q}^e$ és $\bar{\mathbf{q}}^e$ -ben lévő paramétereket aszerint, hogy melyek tartoznak az érintkezési felülethez, és melyek nem.

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_I^e & \mathbf{N}_c^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^e \\ \mathbf{q}_c^e \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^e = \mathbf{N}^e \bar{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_I^e & \mathbf{N}_c^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^e \\ \bar{\mathbf{q}}_c^e \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

A (1.40) és (1.41)-ben $\mathbf{N}_c^e$ jelöli azokat az alakfüggvényeket, amelyek az érintkezési felületen lévő elemekhez tartoznak, és az érintkezési felületen nullától különböző értékeket vesznek fel, $\mathbf{N}_I^e$ pedig azokat, amelyek az érintkezési felületen nulla értéket vesznek fel, vagy nem az érintkezési felületen lévő elemekhez tartoznak. Mivel a (1.39) transzformációt csak az érintkezési felületen lévő elmozdulásvektorokra alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy a paraméterek $\mathbf{q}_I^e$ mátrixa a transzformáció után változatlan marad. Elegendő a $\mathbf{q}_c^e$ és $\bar{\mathbf{q}}_c^e$ -vel foglalkoznunk. Helyettesítsük be (1.40) és (1.41)-et az (1.39) transzformációs képletbe, de csak a $\mathbf{q}_c^e$ és $\bar{\mathbf{q}}_c^e$ -t tartalmazó tagokat írjuk le:

$$\mathbf{N}_c^e \bar{\mathbf{q}}_c^e = \mathbf{T}_0 \mathbf{N}_c^e \mathbf{q}_c^e \quad (1.42)$$

(1.42)-ben a $\mathbf{q}_c^e$ -t tekintjük ismeretlennek, kiszámításához a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzuk:

$$B := \sum_{e=1}^2 \left[\int_{(A_c^e)} (\mathbf{N}_c^e \bar{\mathbf{q}}_c^e - \mathbf{T}_0 \mathbf{N}_c^e \mathbf{q}_c^e)^2 dA \right] = \min \quad (1.43)$$

Az (1.43) minimumának feltétele az, hogy az (1.43)-nak a $\mathbf{q}_c^e$ -ben levő paraméterek szerinti deriváltja nulla kell hogy legyen. Ezt szimbolikusan így is írhatjuk:

$$\frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}_c^e} = \mathbf{0} \quad e = 1, 2 \quad (1.44)$$

A deriválás elvégzése és $\mathbf{q}_c^e$ bal oldalra rendezése után a következőt kapjuk:

$$\mathbf{q}_c^e = \underbrace{\left[\int_{(A_c^e)} \mathbf{N}_c^{eT} \mathbf{N}_c^e dA \right]^{-1} \cdot \int_{(A_c^e)} \mathbf{N}_c^{eT} \mathbf{T}_0 \mathbf{N}_c^e dA \cdot \bar{\mathbf{q}}_c^e}_{\mathbf{T}^e} \quad (1.45)$$

Kihasználtuk, hogy a $\mathbf{T}_0$ transzformációs mátrix ortogonális mátrix, azaz $\mathbf{T}_0^{-1} = \mathbf{T}_0^T$. Az (1.45)-nek megfelelően transzformáljuk át az (1.33)-ban szereplő mátrixokat és vektorokat:

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{eT} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^e & \mathbf{K}_{Ic}^e \\ \mathbf{K}_{cI}^e & \mathbf{K}_{cc}^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^e} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^e & \bar{\mathbf{K}}_{Ic}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{cI}^e & \bar{\mathbf{K}}_{cc}^e \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

$$\bar{\mathbf{f}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{eT} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_I^e \\ \mathbf{f}_c^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^e} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_I^e \\ \bar{\mathbf{f}}_c^e \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

A (1.46) és (1.47)-ban az alsó c index jelöli azokat az almátrixokat, amelyekben lévő mennyiségek kapcsolatosak az érintkezési tartománnyal, $\mathbf{I}$ jelöli az egységmátrixot, $\mathbf{0}$ pedig azt a mátrixot, amelynek minden eleme nulla. Az (1.40) és (1.41)-ben lévő $\mathbf{N}_c^e$ mátrix az érintkezési tartományon nem nulla értékű alakfüggvényeket jelöli. Bontsuk fel $\mathbf{N}_c^e$ -t két részre. Jelölje $\mathbf{L}_t^e$ az érintkezési felületen az érintő irányú elmozdulásokhoz tartozó alakfüggvényeket, $\mathbf{L}_n^e$ pedig az érintkezési tartományra merőleges elmozdulásokhoz tartozó alakfüggvényeket. $\mathbf{N}_c^e$ formálisan így írható:

$$\mathbf{N}_c^e = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_t^e \\ \mathbf{L}_n^e \end{bmatrix}$$

Mivel az érintkezési tartományon az $\mathbf{N}_I^e$ értékei nullát vesznek fel, az itt fellépő $\mathbf{u}_n$ elmozdulásvektor koordináták az

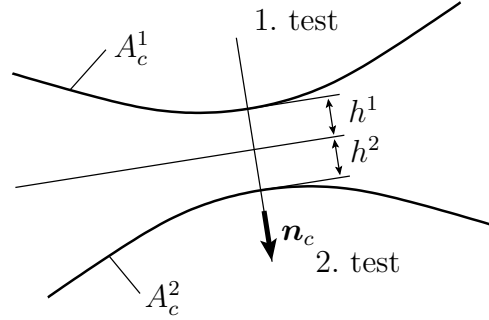
$$\mathbf{u}_n^e = \mathbf{L}_n^e \bar{\mathbf{q}}_c^e \quad (1.48)$$

képlettel számíthatók. Az (1.7) hézagfüggvényben szerepel még a h kezdeti hézag is. Szeretnénk ezt is felírni az (1.48)-hoz hasonló formában, azaz az alakfüggvények és paraméterek mátrixának szorzataként. A h kezdeti hézag a t koordináta folytonos függvénye. A

$$h^e = \mathbf{L}_n^e \mathbf{h}^e \quad (1.49)$$

egyenletből a paraméterek $\mathbf{h}^e$ mátrixa ismeretlen, elemeit a legkisebb négyzetek módszerével határozzuk meg:

$$D := \sum_{e=1}^2 \int_{(A_c^e)} (h^e - \mathbf{L}_n^e \mathbf{h}^e)^2 dt = \min \quad (1.50)$$



1.7. ábra. A testek közötti hézagot két részre bontjuk: az alapsík és a felső test közötti részre, és az alapsík és alsó test közötti részre.

Az (1.50) minimumának feltétele az, hogy a $\mathbf{h}^e$ elemei szerinti deriváltak mind nullát adjanak, szimbolikusan:

$$\frac{\partial D}{\partial \mathbf{h}^e} = \mathbf{0} \quad e = 1, 2 \quad (1.51)$$

Az (1.51) egy lineáris algebrai egyenletrendszert fog eredményezni, amelyből a $\mathbf{h}^e$ paraméterek meghatározhatók:

$$\mathbf{h}^e = \left(\int_{(A_c^e)} \mathbf{L}_n^{eT} \mathbf{L}_n^e dt \right)^{-1} \cdot \int_{(A_c^e)} h^e \mathbf{L}_n^{eT} dt \quad e = 1, 2 \quad (1.52)$$

A $\mathbf{h}^e$ ismeretében a kezdeti hézagot a következő alakban írhatjuk:

$$h = h^1 + h^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_n^1 & \mathbf{L}_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

A testek közötti hézag, amelyet az (1.7) képlettel definiáltunk, mátrixokkal megfogalmazva a következő lesz:

$$d = \mathbf{L}_n^2 \bar{\mathbf{q}}_c^2 - \mathbf{L}_n^1 \bar{\mathbf{q}}_c^1 + \mathbf{L}_n^1 \mathbf{h}^1 + \mathbf{L}_n^2 \mathbf{h}^2 \quad (1.54)$$

Az (1.54)-ben szereplő $\bar{\mathbf{q}}_c^e$ csak az érintkezési tartományra vonatkozó paramétereket tartalmazza, azonban az lenne inkább szerencsés, ha (1.54)-ben megjelenne az összes paramétert tartalmazó $\bar{\mathbf{q}}^e$ vektor, és ezzel összhangban egy $\bar{\mathbf{q}}^e$ méretű $\mathbf{h}^e$ vektor. Ezt egy megfelelő méretű, csupa nullákból álló $\mathbf{0}$ vektor segítségével érhetjük el:

$$\begin{aligned} d &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_n^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{L}}^2} \bar{\mathbf{q}}^2 - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_n^1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{L}}^1} \bar{\mathbf{q}}^1 + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_n^1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{L}}^1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{h}}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}_n^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{L}}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{h}}^2} = \\ &= \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{L}}_n^1 & \tilde{\mathbf{L}}_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^1 \\ \bar{\mathbf{q}}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_n^1 & \tilde{\mathbf{L}}_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^1 \\ \tilde{\mathbf{h}}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Az (1.14)-ban lévő büntető paraméteres tagot (1.55) segítségével így írhatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{(C)} c_n(d)^2 dA = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{1T} & \bar{\mathbf{q}}^{2T} \end{bmatrix} \left\{ \int_{(C)} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{L}}^{1T} \\ \tilde{\mathbf{L}}^{2T} \end{bmatrix} c_n \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{L}}^1 & \tilde{\mathbf{L}}^2 \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{q}}^1 \\ \bar{\mathbf{q}}^2 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + 2 \int_{(C)} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{L}}^{1T} \\ \tilde{\mathbf{L}}^{2T} \end{bmatrix} c_n \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{L}}^1 & \tilde{\mathbf{L}}^2 \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{h}}^1 \\ \tilde{\mathbf{h}}^2 \end{bmatrix} \right\} + konstans \end{aligned} \quad (1.56)$$

Az egyszerűbb írásmód érdekében definiálhatjuk a kontakt-elemek (Winkler típusú közeg) merevségi mátrixát:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \int_{(C)} \tilde{\mathbf{L}}^{1T} c_n \tilde{\mathbf{L}}^1 dA & - \int_{(C)} \tilde{\mathbf{L}}^{1T} c_n \tilde{\mathbf{L}}^2 dA \\ - \int_{(C)} \tilde{\mathbf{L}}^{2T} c_n \tilde{\mathbf{L}}^1 dA & \int_{(C)} \tilde{\mathbf{L}}^{2T} c_n \tilde{\mathbf{L}}^2 dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^{11} & -\bar{\mathbf{C}}^{12} \\ -\bar{\mathbf{C}}^{21} & \bar{\mathbf{C}}^{22} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

és a kezdeti hézagból származó terhelési vektort:

$$\bar{\mathbf{f}}_h = \begin{bmatrix} - \int_{(C)} \tilde{\mathbf{L}}^{1T} c_n \tilde{\mathbf{L}}^1 dA \tilde{\mathbf{h}}^1 - \int_{(C)} \tilde{\mathbf{L}}^{1T} c_n \tilde{\mathbf{L}}^2 dA \tilde{\mathbf{h}}^2 \\ \int_{(C)} \tilde{\mathbf{L}}^{2T} c_n \tilde{\mathbf{L}}^1 dA \tilde{\mathbf{h}}^1 + \int_{(C)} \tilde{\mathbf{L}}^{2T} c_n \tilde{\mathbf{L}}^2 dA \tilde{\mathbf{h}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{f}}_h^1 \\ \bar{\mathbf{f}}_h^2 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Hasonlóan kaphatjuk meg az érintkezési nyomásból származó terhelési vektor, ha az (1.14)-ban a p_n nyomást tartalmazó tagot alakítjuk át:

$$\int_{(C)} d p_n dA = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{1T} & \bar{\mathbf{q}}^{2T} \end{bmatrix} \int_{(C)} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{L}}^{1T} \\ \tilde{\mathbf{L}}^{2T} \end{bmatrix} p_n dA + konst. = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{1T} & \bar{\mathbf{q}}^{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{f}}_p^1 \\ \bar{\mathbf{f}}_p^2 \end{bmatrix} + konst. \quad (1.59)$$

Végül az (1.14) funkcionál diszkretizált alakját a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{AU} = \mathcal{L}^{AU}(\bar{\mathbf{q}}^1, \bar{\mathbf{q}}^1) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^{1T} & \bar{\mathbf{q}}^{2T} \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^1 \\ \bar{\mathbf{q}}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^1 \\ \bar{\mathbf{f}}^2 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^{11} & -\bar{\mathbf{C}}^{12} \\ -\bar{\mathbf{C}}^{21} & \bar{\mathbf{C}}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^1 \\ \bar{\mathbf{q}}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{f}}_h^1 \\ \bar{\mathbf{f}}_h^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{f}}_p^1 \\ \bar{\mathbf{f}}_p^2 \end{bmatrix} \right\} + konstans = \min. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Az (1.60) funkcionálnak akkor van minimuma, ha a $\bar{\mathbf{q}}^1$ és $\bar{\mathbf{q}}^1$ összes paramétere szerinti deriváltjai nullát adnak eredményül:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{AU}}{\partial \bar{\mathbf{q}}^e} = \mathbf{0} \quad e = 1, 2 \quad (1.61)$$

A deriválások elvégzése után a következő algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^1 + \bar{\mathbf{C}}^{11} & -\bar{\mathbf{C}}^{12} \\ -\bar{\mathbf{C}}^{21} & \bar{\mathbf{K}}^2 + \bar{\mathbf{C}}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^1 \\ \bar{\mathbf{q}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^1 \\ \bar{\mathbf{f}}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{f}}_h^1 \\ \bar{\mathbf{f}}_h^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{f}}_p^1 \\ \bar{\mathbf{f}}_p^2 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Az elmozdulásmező $\bar{\mathbf{q}}^e$ paramétereinek meghatározása az 1.5 fejezetben leírtaknak megfelelően történik. A $\bar{\mathbf{C}}^{ij}$ és $\bar{\mathbf{f}}_h^e$ ($i, j, e = 1, 2$) kiszámításakor az integrálások közelítéséhez a Gauss-Lobatto kvadraturát használjuk. Azokban az integrálási pontokban, ahol a tesztek közötti hézag az előző iterációs lépésben kisebb volt mint nulla, a c_n büntető paraméter értéket nullától különbözőnek vesszük ($c_n \approx 100E - 1000E$). Ahol viszont a hézag nagyobb mint nulla, c_n helyére nullát írunk. A módosítások levégzése után újra megoldjuk (1.62)-et. Az így kapott $\bar{\mathbf{q}}^e$ vektor már egy kicsit jobb közelítést ad az $\mathbf{u}^e$ elmozdulás vektorra. Az iterációt addig folytatjuk, amíg az egyes integrálási pontokban a c_n értékében változások következnek be. Ha a c_n értékében nem következik be változás az előző iterációs lépéshez képest, akkor az (1.22) képlettel frissítjük az $\bar{\mathbf{f}}_p^e$ értékét és kezdjük előről az iterációs ciklust. Az algoritmus az (1.23) feltétel teljesülése esetén ér véget.

1.7. A végelem háló elkészítésének szempontjai

Az 1.6 pontban a diszkretizálást általánosítva végeztük el nem törődve az alakfüggvények pontos alakjával, és a végelem felosztással. Először vizsgáljuk meg az alakfüggvények néhány, az érintkezési feladat megoldásának szempontjából fontos tulajdonságát.

A végelem közelítéshez a Szabó és Babuška által kidolgozott hierarchikus alakfüggvényeket használjuk [10]. A hierarchikus szó itt azt jelenti, hogy az n -edik fokú közelítésben felhasználjuk az összes $(n-1)$ -edik fokú közelítésben használt alakfüggvényt, plusz az n -edik fokhoz tartozó új alakfüggvényeket. Az alakfüggvényeket a Legendre polinomokból származtatjuk. A $\Phi_i(\xi)$ függvényt a következő képpen definiáljuk:

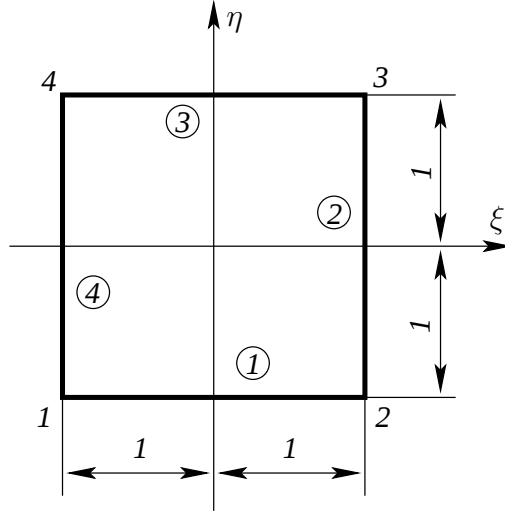
$$\Phi_i(\xi) := \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{i-1}(t) dt \quad i = 2, 3, \dots$$

vagy

$$\Phi_i(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2i-1)}} (P_i(\xi) - P_{i-2}(\xi)) \quad i = 2, 3, \dots$$

ahol $P_i(\xi)$ az i -edik Legendre polinomot jelenti. A $\Phi_i(\xi)$ függvény további tulajdonságaival Szabó és Babuška könyve foglalkozik [10].

A számításokhoz két dimenziós, négyszög végelemeket fogunk használni. Az alakfüggvényeket három csoportba sorolhatjuk. Az elsőbe a csomópontokkal kapcsolatos alakfüggvények tartoznak. Az ezekhez tartozó paraméterek a közelítendő mező csomópontokban vett értékével egyenlőek. A második csoportba az oldalakkal kapcsolatos alakfüggvények tartoznak, a harmadikba pedig azok az alakfüggvények, amelyek a végelem peremén nulla értéket vesznek fel. Az utóbbi két csoportba tartozó alakfüggvények paraméterei



1.8. ábra. Egy végeelem a lokális koordináta-rendszerben. Az oldalak sorszáma a bekarikázva látható.

nem hordoznak konkrét fizikai jelentést, így önmagukban nem árulnak el semmit a közelített mezőről. Az alakfüggvényeket a $\xi\eta$ koordináta rendszerben adott két egységnyi élhosszúságú, $\xi = -1$, $\xi = 1$, $\eta = -1$ és $\eta = 1$ egyenesekkel határolt négyzeten definiáljuk. Az első csoportba tartozó alakfüggvények a következők lesznek:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (1.63)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (1.64)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (1.65)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (1.66)$$

Ezek egyben az első fokú közelítéshez tartozó polinomokat is jelentik. Az alsó indexek a csomópont sorszámát jelentik. A p -edik fokú közelítéshez $4(p - 1)$ darab oldalakkal kapcsolatos alakfüggvény tartozik, amelyeket a következő képletekkel definiálunk:

$$N_i^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\Phi_i(\xi) \quad i = 2, \dots, p \quad (1.67)$$

$$N_i^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)\Phi_i(\eta) \quad i = 2, \dots, p \quad (1.68)$$

$$N_i^{(3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)\Phi_i(\xi) \quad i = 2, \dots, p \quad (1.69)$$

$$N_i^{(4)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)\Phi_i(\eta) \quad i = 2, \dots, p \quad (1.70)$$

Az alsó index a polinom fokszámát jelenti, a felső index pedig az oldal sorszáma (lásd 1.8. ábra). A harmadik csoporthoz tartozó alakfüggvények csak negyed- vagy annál magasabb fokú közelítés esetén jelennek meg. Ezekből $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ darab van, $p \geq 4$ esetén. A definíciójuk a következő:

$$N_1^{(0)}(\xi, \eta) = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta) \quad p = 4 \quad (1.71)$$

$$N_2^{(0)}(\xi, \eta) = \Phi_3(\xi)\Phi_2(\eta) \quad p = 5 \quad (1.72)$$

$$N_3^{(0)}(\xi, \eta) = \Phi_2(\xi)\Phi_3(\eta) \quad p = 5 \quad (1.73)$$

$$N_4^{(0)}(\xi, \eta) = \Phi_4(\xi)\Phi_2(\eta) \quad p = 6 \quad (1.74)$$

stb.

Az N alsó indexe az alakfüggvény sorszáma jelenti. Az $N_n^{(0)}(\xi, \eta)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) alakfüggvény definíciójában a Φ_m ($m = 2, 3, 4, \dots$) függvények indexeinek összege mindig a polinom fokszámát adja meg, így negyed fokú alakfüggvényekből egy van, ötöd fokúból kettő, hatod fokúból három, és így tovább. Az (1.63)-(1.74) alakfüggvények egyéb jellemzőit a [10] részletesen tartalmazza. Számunkra az a fontos tulajdonság érdekes, hogy végeselemenként folytonosak és folytonosan deriválhatók ezek az alakfüggvények. Ez azt jelenti, hogy egy végeselemen belül az alakfüggvények Taylor-sorba fejthetők, azaz analitikus függvények. Az 1.4 pontban az érintkezési feltételeknél említettük, hogy az érintkezési tartomány azon részén, ahol hézag van (G), a nyomás értéke nulla. Ahol a testek összeérnek (C), ott a nyomás nullától különböző. Azt tudjuk biztosan, hogy a C és G tartományok határán a nyomás eloszlás folytonos:

$$\sigma_n^- = \sigma_n^+ \quad (1.75)$$

ahol a felső indexbe írt $+$ és $-$ jelek a jobb és baloldali határértéket jelentik. Az érintkezési nyomásnak a C és G határatól egy infinitezimális távolságra a C irányában már különbözni kell nullától, hogy megakadályozza a testek egymásba hatolását, azaz a nyomás megváltozik. Ez a következőt jelenti:

$$\left(\frac{\partial \sigma_n}{\partial t}\right)^- \neq \left(\frac{\partial \sigma_n}{\partial t}\right)^+ \quad (1.76)$$

Tegyük fel, hogy az érintkező felületek közül az e sorszámú test érintkezési felületének normálisa z irányú, azaz az n z irányú, a t pedig r irányú. Ekkor az érintkezési nyomást a

$$\sigma_z^e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \frac{\partial u_r^e}{\partial r} + \nu \frac{u_r^e}{r} + (1-\nu) \frac{\partial u_z^e}{\partial z} \right) \quad (1.77)$$

képlet írja le, ahol $e = 1$ vagy 2 . Az (1.76) szerint a

$$\left(\frac{\partial^2 u_r^e}{\partial r^2}\right)^- \neq \left(\frac{\partial^2 u_r^e}{\partial r^2}\right)^+$$

$$\left(\frac{\partial u_r^e}{\partial r}\right)^- \neq \left(\frac{\partial u_r^e}{\partial r}\right)^+$$

vagy

$$\left(\frac{\partial^2 u_z^e}{\partial r \partial z}\right)^- \neq \left(\frac{\partial^2 u_z^e}{\partial r \partial z}\right)^+$$

feltételek közül legalább az egyik teljesül. Mivel ekkor a C és G tartományok határán az $\mathbf{u}$ Taylor sorfejtését nem tudjuk egyértelműen elvégezni, azt mondjuk hogy az $\mathbf{u}$ elmozdulásfüggvény a C és G határán nem analitikus. A fenti gondolatmenet alapján egy nem analitikus függvényt próbálunk közelíteni egy analitikus függvénnyel. Ez pontatlanságot okoz a számításban. Magasabb fokú közelítés esetén a nem analitikus pont, azaz a C és G tartományos határának környezetében a megoldás erősen oszcillálni kezd [13]. Szabó és Babuška a feladatokat három kategóriába sorolta [10]:

- A. Az $\mathbf{u}_{EX}$ egzakt megoldás analitikus a teljes tartományon. Ha a tartományt felosztjuk végelemekre, akkor az egzakt megoldás külön-külön analitikus a végelemek által kijelölt tartományokon is.
- B. Az $\mathbf{u}_{EX}$ egzakt megoldás analitikus a teljes tartományon, kivéve véges számú pontot (három dimenzió esetén véges számú vonalat). A végelemek háló úgy kerül felosztásra, hogy azok a pontok ahol a $\mathbf{u}_{EX}$ egzakt megoldás nem analitikus csomópontok lesznek (három dimenzió esetén azok a vonalak ahol a megoldás nem analitikus, elemhatárok lesznek).
- C. A hálót nem lehet úgy kialakítani, hogy a nem analitikus pontok csomópontokra essenek (nem analitikus vonalak elemhatárra essenek) vagy azok a helyek, ahol hirtelen változások következnek be $\mathbf{u}_{EX}$ deriváltjaiban, végelemek határán legyenek.

Az érintkezési feladat a C kategóriába tartozik, hiszen a feladat megoldása előtt nincsen semmi információnk a C és G tartományok pontos elhelyezkedéséről, így a nem analitikus pontok helyéről sem. Másrészt a nyomásban, ami (1.77) alapján az elmozdulásfüggvény koordinátáinak deriváltjait tartalmazza, hirtelen változások lépnek fel a C és G tartományok határán. A feladatot iteratív módszerrel tudjuk megoldani. Először megoldjuk a feladatot egy tetszőleges végelemek hálójával. Az így kapott megoldás egy durva becslést fog adni a C és G tartományok, azaz az érintkezés és hézag határára. A végelemek felosztást ennek figyelembevételével újra el kell készíteni úgy, hogy a C és G tartományok határára csomópontnak kell esni, és a módosított hálón újra el kell végezni a számítást. Ezt addig kell ismételni, amíg a C és G tartományok határának változása egy bizonyos, előre definiált τ_{CB} hibahatár alá nem csökken. Legyen $\mathbf{r}_{CB}^{(i)}$ az i -edik iterációs lépésben a C és G tartományok határához mutató helyvektor. Ekkor a

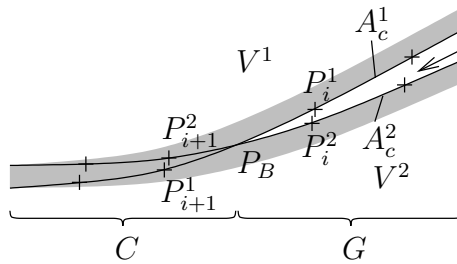
$$\tau_{CB} \leq \frac{|\mathbf{r}_{CB}^{(i-1)} - \mathbf{r}_{CB}^{(i)}|}{|\mathbf{r}_{CB}^{(i-1)}|} \quad (1.78)$$

teljesülése esetén az iterációs ciklus leáll.

1.8. A csomópontok mozgatása

A p -verziós végelem-módszerben használhatunk nagyobb méretű végelemeket, mint a h -verzióban szokásos. Nagyobb méretű elemekből kevesebb fér el ugyanakkora területen vagy térfogaton, azonban egy elemhez jóval több ismeretlen elmozdulásmező paraméter is tartozik. Így ugyanakkora szabadsági fokszám, vagy másként ugyanannyi ismeretlen paraméter mellett a p -verzióban nagyobb elemméret használható, ráadásul még a konvergencia sebessége is növekedni fog [10]. Az érintkezési feladatnál azonban nem használhatunk mindenhol tetszőleges méretű elemeket. Ennek oka az érintkezési tartomány határát kereső algoritmusban keresendő. Páczelt, Szabó és Szabó cikkében [13, 23] a problémát csomópont pozicionáló technikával oldották meg. Az érintkezési tartomány határának megkeresése két lépésben, egy durva és egy finom pozicionálási lépésben történik. A durva keresés során egy adott irányban haladva ellenőrzik, hogy az A_c^e érintkezési felületen lévő integrációs pontok az érintkezés vagy a hézag tartományba esnek. Ha megvan az első integrációs pont, amely a C érintkezési tartományhoz tartozik, akkor megbecsülhető, hogy hol lesz az új érintkezési és hézag tartomány határa. A finom keresés során indikátor függvényeket használnak. Ezek többféleképpen lehetnek, az elmozdulásmező és a nyomás eloszlás deriváltjait tartalmazzák, vagy az egyik indikátor éppen maga a Π potenciális energia. A durva keresés során kapott C és G tartományok határa körül lévő néhány, a szomszédos integrálási pontoknál közelebbi pontba helyeznek egy csomópontot, és újra kiszámítják az érintkezési feladatot, majd az indikátor értékét. Ahol az indikátorok értéke minimális, ott lesz a C és G tartományok határa.

Az általunk kidolgozott algoritmus csak egy lépést tartalmaz, ami a fent említett durva pozicionáláshoz hasonlít. A végelem hálót azonban úgy osztjuk fel, hogy az érintkezési tartomány határa mellett kis méretű végelemek legyenek. A kis méretű elemeken az integrálási pontok sűrűbben helyezkednek el, ezzel növelik a számítás pontosságát. Első lépésben megoldjuk az érintkezési feladatot egy tetszőleges végelem felosztáson. Ha megrajzoljuk a testek számítás után kapott deformált alakját, akkor a 1.9 ábrához hasonló képet kapunk. Azt a részt nagyítottuk ki, ahol az érintkezés (C) és hézag (G) tartományok



1.9. ábra. Az érintkező felületek számítás során kapott deformált alakja az érintkezési tartomány határának környezetében.

találkoznak. Az A_c^e tartomány egyik szélétől kezdve a nyíllal jelzett irányban ellenőrizzük, hogy az integrálási pontokban hézag van-e vagy érintkezés. Jelölje P_i^1 és P_i^2 azokat az

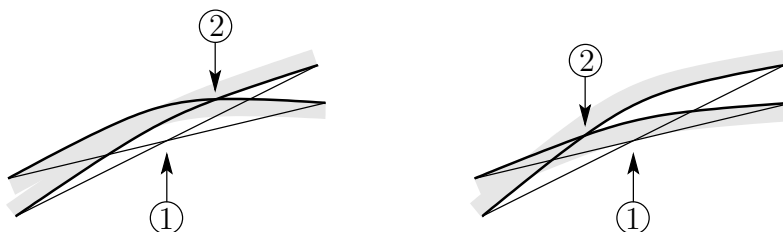
integrálási pontokat, ahol még éppen hézag van, P_{i+1}^1 és P_{i+1}^2 pedig azokat, ahol már a testek érintkeznek, sőt a számítási modellből adódóan kis mértékben egymásba hatolnak. A feladat a P_B határpont megkeresése. A P_i^1 és P_{i+1}^1 illetve P_i^2 és P_{i+1}^2 pontok közötti kontúr jó közelítéssel egyenesnek vehető. Az egyenesek egyenletei a következők lesznek:

$$\begin{aligned}(r_{P_{i+1}^1} - r)(z_{P_i^1} - z_{P_{i+1}^1}) + (z_{P_{i+1}^1} - z)(r_{P_{i+1}^1} - r_{P_i^1}) &= 0 \\ (r_{P_{i+1}^2} - r)(z_{P_i^2} - z_{P_{i+1}^2}) + (z_{P_{i+1}^2} - z)(r_{P_{i+1}^2} - r_{P_i^2}) &= 0\end{aligned}\tag{1.79}$$

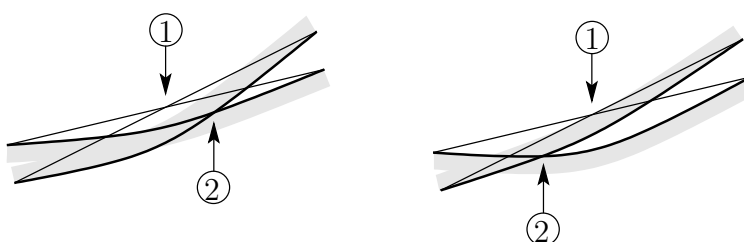
ahol $r_{P_i^1}$, $r_{P_{i+1}^1}$, $z_{P_i^1}$, $z_{P_{i+1}^1}$, $r_{P_i^2}$, $r_{P_{i+1}^2}$, $z_{P_i^2}$ és $z_{P_{i+1}^2}$ a deformált alak integrálási pontjainak koordinátái. Az (1.79) egyenletrendszer megoldása a P_B pont koordinátái lesznek. Jelöljük ezeket a koordinátákat r_B és z_B -vel. Az új végeselem háló szempontjából elegendő csak az r_B koordinátákat meghatározni, a z_B koordináta az érintkező felületek alakjából már kiadódik. Az (1.79) megoldása után kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}r = r_B &= \frac{r_{P_{i+1}^1}(z_{P_i^1} - z_{P_{i+1}^1})(r_{P_{i+1}^2} - r_{P_i^2}) - r_{P_{i+1}^2}(z_{P_i^2} - z_{P_{i+1}^2})(r_{P_{i+1}^1} - r_{P_i^1})}{(z_{P_i^1} - z_{P_{i+1}^1})(r_{P_{i+1}^2} - r_{P_i^2}) - (z_{P_i^2} - z_{P_{i+1}^2})(r_{P_{i+1}^1} - r_{P_i^1})} + \\ &+ \frac{(r_{P_{i+1}^1} - r_{P_i^1})(r_{P_{i+1}^2} - r_{P_i^2})(z_{P_{i+1}^1} - z_{P_{i+1}^2})}{(z_{P_i^1} - z_{P_{i+1}^1})(r_{P_{i+1}^2} - r_{P_i^2}) - (z_{P_i^2} - z_{P_{i+1}^2})(r_{P_{i+1}^1} - r_{P_i^1})}\end{aligned}\tag{1.80}$$

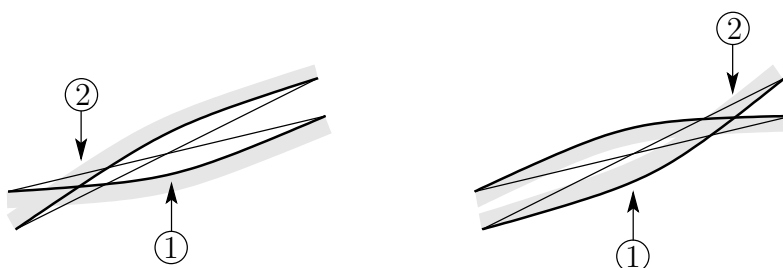
A P_B pont $r = r_B$ koordinátáját a deformált alakon határoztuk meg. A deformáció megszűnése után a P_B pont r koordinátája megváltozik, és más-más értéket vesz fel az alsó és a felső testen. A végeselem háló egy-egy csomópontját az alakváltozás mentes testek P_B pontjaiba kell helyezni, hogy alakváltozás után egymással fedésbe kerüljenek. A számítások során Lobatto integrálási kvadraturát fogunk használni. Lobatto integrálás esetén az integrálási tartomány határára is esnek integrálási pontok. A számításba egy kis pontatlanságot vittünk, amikor azt mondtuk, hogy a két integrálási pont közötti görbét egyenessel közelítjük. Ezért meg kell vizsgálnunk, milyen következménye lesz ennek a közelítésnek. Alapvetően négy esetet különböztetünk meg annak függvényében, hogy az érintkező felületek alakja alulról konvex vagy konkáv. Tekintsük az érintkezési tartomány jobb oldali határát. Az 1.10. ábrán azt az esetet láthatjuk, amikor mindkét felület metszetének alakja felülről konvex. Ha a felső test érintkező felületének kisebb a görbülete, azaz „laposabb”, akkor a felület egyenes szakaszokkal történő közelítésénél az érintkezési tartomány határa balra tolódik el. Ez látható a bal oldalon. Az 1.10.-1.12. ábrákon a 2 szám jelöli az érintkezési tartomány határát, ha polinomokkal közelítünk, és az 1 szám jelöli az érintkezési tartomány határát egyenes szakaszokkal történő közelítés esetén. Az 1.10. ábra jobb oldalán azt az esetet láthatjuk, amikor a felső test görbülete nagyobb. Itt egyenes szakaszokkal történő közelítés esetén az érintkezési tartomány határa jobbra tolódik el. Alulról konvex felület esetén a helyzet pont fordított. Az 1.11. ábrán látható, hogy ha a felső test görbülete nagyobb, akkor egyenes szakaszokkal történő közelítés esetén az érintkezési tartomány határa balra tolódik el, ha az alsó test felülete rendelkezik nagyobb görbülettel, akkor az érintkezési tartomány határa jobbra tolódik el. A harmadik



1.10. ábra. A felületek metszetének alakja mindkét testnél felülről konvex.



1.11. ábra. A felületek metszetének alakja mindkét testnél felülről konkáv.



1.12. ábra. A felületek metszetének alakja az egyik testnél alulról, a másiknál felülről konvex.

és a negyedik eset az 1.12. ábrán látható. Az ábra bal oldalán az alsó test érintkező felülete alulról konvex, a felső test érintkező felülete felülről konvex. Ennek hatására, ha egyenes szakaszokkal helyettesítjük a felület metszetét, az érintkezési tartomány határa egyértelműen jobbra tolódik el. A fordított helyzet, azaz amikor az alsó test alulról konkáv, a felső test pedig felülről konkáv, a jobb oldalon látható. Itt egyenes szakaszokkal történő közelítésnél az érintkezési tartomány határa egyértelműen balra tolódik el. Az általunk megoldani kívánt feladatban az 1.11. ábra bal oldali részén látható eset áll fenn, a felső test felületének metszete terheletlen esetben egy alulról konvex körív, az alsó test felületének metszete pedig egy egyenes. Ha végigszámoljuk az érintkezési feladatot, és kirajzoljuk a testek deformált alakját, az érintkezési tartomány határa az 1.11. ábra bal oldali részének 2-essel jelölt pontjában lesz látható. Azonban ha az (1.80) képlettel

számítjuk ki az érintkezési tartomány határát, a fentieknek megfelelően a kapott érték kisebb lesz, vagyis balra fog eltolódni. Hogy ezt az eltérést korrigáljuk, toljuk el P_B -t a jobbra, a G tartomány irányába. Ha a felületek görbülete nagyon kicsi, nagyon kis eltolás is elegendő lehet. A fentiek figyelembevételével a csomópont helyének r koordinátája az alsó és a felső testen

$$r_B^e = r_B - u_r^e(r_B, z_B) + \beta \Delta r^e \quad e = 1, 2 \quad (1.81)$$

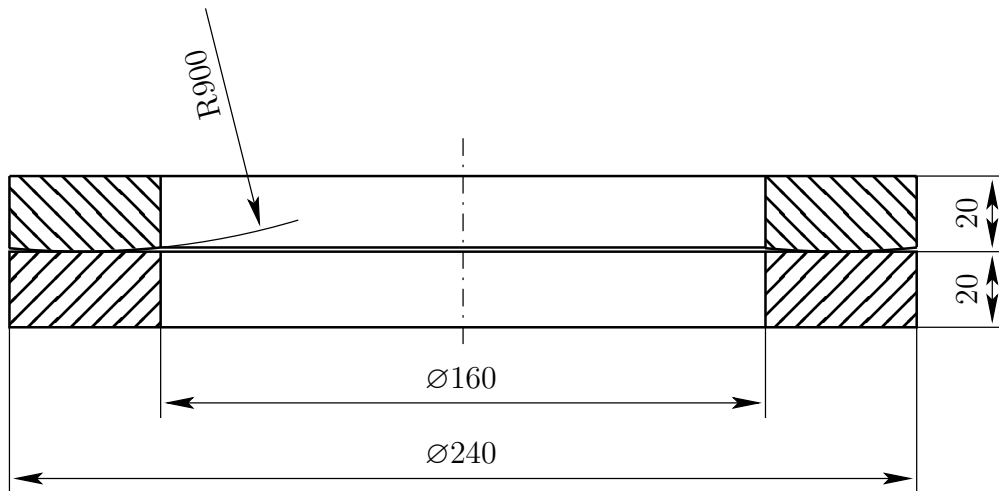
lesz a C tartomány jobb oldalán, és

$$r_B^e = r_B - u_r^e(r_B, z_B) - \beta \Delta r^e \quad e = 1, 2 \quad (1.82)$$

lesz a C tartomány bal oldalán, ahol u_r az elmozdulás függvény r koordinátája, Δr^e az érintkezési tartomány határán két integrálási pont távolsága, és β egy valós szám, amelyre igaz, hogy $0 \leq \beta \leq 1$. A z_B és z_B^e ($e = 1, 2$) koordinátákat meg tudjuk határozni, ha figyelembe vesszük, hogy a test A_c^e felületén elhelyezkedő pontról van szó, és az r_B illetve r_B^e koordinátákat ismerjük.

1.9. A végelem háló módosítása

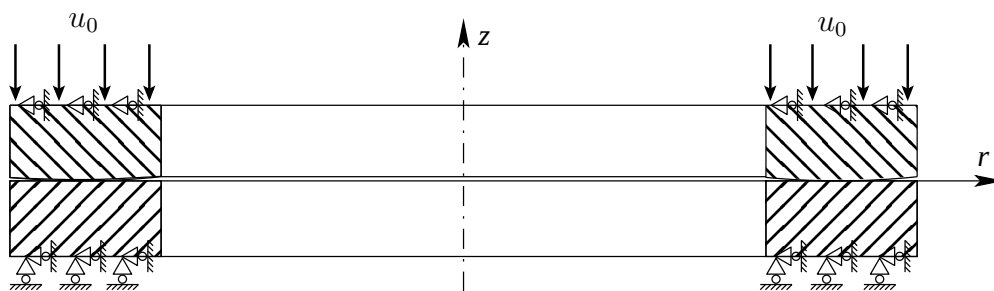
Az előző pontokban tárgyaltak alapján már meg tudunk oldani érintkezési feladatokat p -verziós végelem-módszerrel. Az 1.6 pontban az egyenleteket tengelyszimmetrikus feladatra írtuk fel. Nézzünk most egy konkrét példát tengelyszimmetrikus érintkezési feladatra. Két gyűrű alakú testet két tökéletesen merev síkkal a homlokfelületükön összenyo-



1.13. ábra. A vizsgált testek geometriai méretei.

munk. A merev síkok közül az egyik rögzített, a másik a síkra merőlegesen elmozdulhat. A gyűrűk egymás felé néző homlokfelületei közül az egyik legyen sík, a másik enyhén ívelt

(lásd 1.13. ábra). A merev síkok és a testek között a súrlódási együttható legyen végtelen nagy. Ezzel megakadályozzuk az egyik gyűrű síkkal érintkező homloklületén lévő pontjainak r , φ és z irányú elmozdulását, és a másik gyűrű síkkal érintkező homloklületén lévő pontjainak r és φ irányú elmozdulását. A z irányban elmozdulni képes merev síkot u_0 értékkel elmozdítjuk a gyűrűk irányába (lásd 1.14. ábra). Ez egy kinematikai terhelést

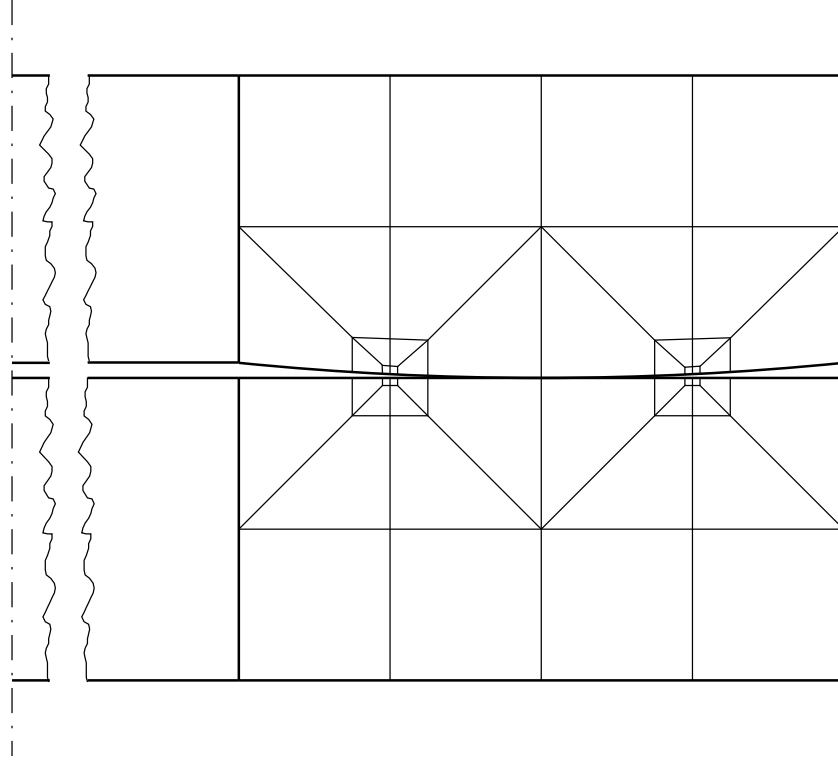


1.14. ábra. A testek megfogásánál alkalmazott peremfeltételek.

jelent a gyűrűk számára.

A tengelyszimmetria miatt a három dimenziós test leírására kétdimenziós modellt használunk. Ez azt jelenti, hogy a tengelyszimmetrikus végelemek meridián metszete egyértelműen meghatározza a végelem hálót. Az előző, 1.7 pontban megállapítottuk, hogy a végelem hálón az érintkezési és hézag tartomány határait csomópontnak kell esni, és e pont mellé kis méretű végelemeket kell helyezni. Az 1.13. ábrán a felső test ívelt homloklülete miatt kettő (G) hézag tartomány keletkezik, amelyeket a (C) érintkezési tartomány választ el egymástól. Az egyes tartományokat körívek fogják elválasztani egymástól. Ezek a körívek a meridián metszeten pontnak látszódnak. A két pont helyére kell a végelem hálón csomópontot helyezni. A végelem háló megkonstruálására sok lehetőség kínálkozik, mi az 1.15. ábrán látható megoldást választottuk. Az érintkezési tartomány határán lévő elemek mérete 0,1 mm, a mellettük lévő elemek mérete pedig 1 mm körüli. A választásunkkal feltételeztük azt is, hogy az érintkezési tartomány határai 3-4 mm-nél jobban nem közelítik meg egymást, és 2-3 mm-nél jobban nem közelítik meg a gyűrű széleit. Ha az említett pontok mégis túl közel kerülnének egymáshoz, akkor a számítást más felosztású hálóval kell folytatni.

A végelem háló elkészítésekor és módosításakor újabb problémák adódnak. A végelemes közelítéshez izoparametrikus elemeket használunk, ami azt jelenti, hogy az elmozdulásmezőt és a gyűrű geometriáját azonos alakfüggvényekkel írjuk le. A geometria leírása a meridián metszet alakjának segítségével történik. Az alsó gyűrűnél a metszet alakja egyenesekből áll, ezért itt elegendő az első fokú (1.63)-(1.66) alakfüggvényeket használni, a többi alakfüggvény együtthatója nulla lesz. Az elsőfokú alakfüggvények együtthatói a csomópontok koordinátaival egyenlőek, a csomópontok koordinátái pedig könnyedén leolvashatók az 1.13. és 1.15. ábrákról. A probléma a felső gyűrűvel van, ott is az alsó felület metszetének ívelt alakjával. Itt már egy görbét kell illeszteni a végelem hálóra,



1.15. ábra. A testek végelemek felosztása.

alkalmazva az (1.67)-(1.70) alakfüggvényeket is. Ezek az elemek oldalával kapcsolatos alakfüggvények, paramétereik nem egyeznek meg a közelített mező vagy geometria jellemző értékeivel, sőt nincs semmilyen fizikai tartalmuk. A geometria közelítését a legkisebb négyzetek módszerével végezhetjük el. Legyen $f(r)$ a felület metszetének alsó, ívelt részét leíró függvény. $f(r)$ az 1.14. ábrán látható rz koordinátarendszerben adott. A végelemek hálóján elemenként tudjuk $f(r)$ -t közelíteni p -ed fokú polinomokkal. Az e -edik elemen az $f(r)$ -t közelítő függvényt $z^e(\xi)$ -vel jelöljük, ahol $\xi = \xi(r)$ a globális rz koordináta rendszerből a lokális $\xi\eta$ koordináta rendszerbe átvivő transzformációt adja meg.

$$\begin{aligned}
 z^e(\xi) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta = -1) z_i^e + \sum_{j=2}^p \sum_{l=1}^4 N_j^{(l)}(\xi, \eta = -1) z_{4j-4+l}^e = \\
 &= \sum_{p=1}^N N^q(\xi, \eta = -1) z_q^e
 \end{aligned} \tag{1.83}$$

Az N_i és $N_j^{(l)}$ az (1.63)-(1.66) és (1.67)-(1.70) alakfüggvényeket jelöli, z_q^e pedig a geometriát leíró paramétereket. Az z_q^e az e sorszámú végelemek q sorszámú alakfüggvényének a paramétere. Az egyszerűbb jelölés kedvéért az N_i és $N_j^{(l)}$ függvényeket összevonva, N^q -vel jelöltük. Az e az ívelt kontúrszakasz mellett elhelyezkedő elem sorszámát jelenti. Az (1.83)

képletben a z_q^e paraméterek ismeretlenek, értékük a következő integrál minimalizálásával határozható meg:

$$G := \sum_{e=1}^n \int_{(\Gamma)} [z^e(\xi^e) - f(r(\xi^e, \eta = -1))]^2 \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi = \min \quad (1.84)$$

Γ -val jelöltük a kontúrnak azt a szakaszát, ahol a közelítést végezzük. G akkor lesz minimális, ha az z_q^e szerinti deriváltjai eltűnnek:

$$\frac{\partial G}{\partial z_q^e} = 0 \quad (1.85)$$

(1.85) a következő lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet:

$$\sum_{e=1}^n \sum_{r=1}^N \int_{(\Gamma)} N^q N^r \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi z_r^e = \sum_{e=1}^n \int_{(\Gamma)} f(\xi^e) N^q \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi \quad (1.86)$$

ahol n az ívelt kontúron elhelyezkedő elemek száma, amely az 1.15. ábra alapján 12. Biztosítani kell, hogy a kontúrt közelítő függvények folytonosak legyenek az egész Γ tartományon, azaz teljesülnie kell az $z_2^e = z_1^{e+1}$ feltételnek minden Γ -n lévő elem egymáshoz illeszkedő csomópontjában. Az (1.86) egyenletrendszert megoldva megkapjuk a felső gyűrű geometriáját leíró z_q^e paramétereket.

Meg kell még említenünk azt a problémát is, amikor a kontúr alakját nem egy $f(r)$ függvény írja le, hanem egy

$$\tilde{z}^{e*}(\xi) = \sum_{s=1}^N N^s(\xi, \eta = -1) \tilde{z}_s^{e*} \quad (1.87)$$

polinom, ahol $\tilde{z}_s^{e*}$ egy másik végelem felosztáshoz tartozó paramétereket jelöli, e^* pedig a másik végelem felosztáson az elemek sorszámát. Helyettesítsük be (1.87)-et az (1.86) egyenletrendszerbe:

$$\sum_{e=1}^n \sum_{r=1}^N \int_{(\Gamma)} N^q(\xi) N^r(\xi) \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi z_r^e = \sum_{e=1}^n \sum_{s=1}^N \int_{(\Gamma)} \tilde{z}_s^{e*} N^s(\xi) N^q(\xi) \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi \quad (1.88)$$

A gondot az jelenti, hogy a végelem háló e -edik elemének egy adott integrálási pontjába az e^* sorszámú elem $\tilde{\xi}$ integrálási pontja fog esni, de sem az e^* -ot, sem $\tilde{\xi}$ -t nem ismerjük. A ξ ismeretében meg tudjuk határozni az e -edik elem ξ integrálási pontjának r^e koordinátáját:

$$r^e(\xi) = \sum_{p=1}^N N^q(\xi, \eta = -1) r_q^e = \sum_{p=1}^N N^q(\tilde{\xi}, \eta = -1) r_q^{e*} \quad (1.89)$$

A feladat tehát az, hogy meg kell határozni az A_c felület r^e koordinátájú pontjához tartozó e^* elemszámot és ξ integrálási pontot az (1.89) segítségével. A feladat negyed fokú közelítésnél magasabb fokszám esetén analitikusan nem megoldható, mert ötöd, vagy annál magasabb fokú algebrai egyenlet gyökeit kellene megkeresni. Viszont alkalmazhatunk közelítő módszereket. ξ meghatározásához a Newton-Raphson közelítő módszert fogjuk használni [24]. Tetszőleges e^* elemet választva az i -edik iteráció után $\tilde{\xi}$ értékére a következőt kapjuk:

$$\tilde{\xi}_{i+1} = \tilde{\xi}_i - \frac{\sum_{p=1}^N N^q(\tilde{\xi}_i, \eta = -1) r_q^{e^*} - r^e(\xi)}{\sum_{p=1}^N \frac{\partial N^q}{\partial \xi}(\tilde{\xi}_i, \eta = -1) r_q^{e^*}} \quad (1.90)$$

Az iterációt addig folytatjuk, amíg a $\tilde{\xi}_{i+1} - \tilde{\xi}_i$ különbség egy bizonyos hibahatár alá nem csökken. Ha $\tilde{\xi}$ értéke -1 és 1 közé esik, akkor a keresett elem az e^* -edik elem lesz. Ha $\tilde{\xi}$ értéke -1 -nél kisebb, akkor az e^* sorszámú elemtől balra fog esni a keresett elem. A (1.89) számítást újra el kell végezni a $e^* - 1$ elemre, és meg kell vizsgálni az így kapott $\tilde{\xi}$ értéket. Ezt addig kell ismételni, amíg $\tilde{\xi}$ értéke -1 és 1 közé nem esik. Ha $\tilde{\xi}$ értéke 1 -nél nagyobb, akkor hasonlóan kell eljárni, csak az e^* -től jobbra lévő $e^* + 1$ elemre kell elvégezni a számítást. Az e^* és $\tilde{\xi}$ ismeretében a (1.88) segítségével meg tudjuk határozni a z_r^e paramétereket. A fenti eljárás nyilvánvalóan a felső testre vonatkozik, hiszen feltettük, hogy az alsó test homlokfelülete sík. Azonban a következő fejezetben egy olyan problémát vizsgálunk meg, amelyben az alsó test A_c felülete megváltozik, nem lesz sík. A fenti algoritmust $\eta = +1$ érték mellett alkalmazhatjuk az alsó testre is.

1.10. Egy számpélda

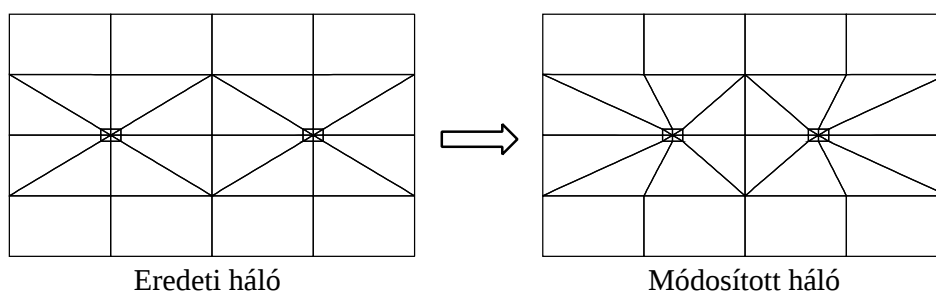
A számításhoz a következő anyagállandókat használtuk fel. Rugalmassági modulus: $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, Poisson-tényező: $\nu = 0,3$, büntető paraméter: $c_n = 100E$, a hőmérséklet értékét a teljes V^1 és V^2 tartományon nullának vettük, ezért a lineáris hőtágulási együttható értékére nincs szükség. A kinematikai peremfeltétel értéke $u_0 = 0,01$ mm, azaz a $z = 20$ mm egyenletű síkon lévő anyagi pontok elmozdulásvektora $\mathbf{u}_0 = (-0,01 \mathbf{e}_z)$ mm (lásd 1.14. ábra). A végeselemes közelítéshez maximum 8-ad fokú polinomokat használtunk. Tapasztalatunk alapján a számítás pontossága erősen függ az integrálási pontok, esetünkben a Lobatto pontok számától. Az teljesen egyértelmű, hogy túl kevés integrálási pont alkalmazásakor az eredmény pontatlan, alulintegrált lesz. Érdekes viszont az, hogy ha a kelleténél több integrálási pontot használunk, az eredmény pontossága szintén romlani fog, pedig azt várnánk, hogy „pontosabb” integrálás esetén javulni fog. Ez azal magyarázható, hogy egy 8-ad fokú polinomot 9 pontjának megadása egyértelműen meghatároz, több vagy kevesebb pont megadása bizonytalanságot visz a polinom meghatározásába. A végeselem feladat megoldásánál is tulajdonképpen erről van szó. Mi 9 pontos Lobatto integrálást alkalmaztunk a feladat megoldása során.

Az érintkezési feladat a nemlineáris feladatok közé tartozik, ezért a megoldásához iterációs lépésekre van szükség, amelyek mennyiségét különböző hibahatárokkal kontrollálhatjuk. Az (1.23) képletben definiált τ_p -vel az nyomáspontosítások (a (1.22)-ben leírt iteráció) számát szabályozhatjuk, értékét 0,01-nek vettük. Kiszámoltuk a feladatot tisztán büntetőparaméteres módszerrel ($p_n = 0$) is. Az (1.78)-ban definiált τ_{CB} -vel az érintkezési tartomány határának pontosságát szabályozhatjuk, értékét 10^{-3} -ra választottuk. Ezzel összefüggésben az (1.81) és (1.82) képletekben $\beta = 0,01$ -et írtunk elő.

A számítás elvégzéséhez C programnyelven írtunk tesztprogramot. Az algoritmus speciális volta miatt a kereskedelembe kapható végeelem szoftverek alkalmatlanok az előző pontokban felvázolt algoritmus végrehajtására. Fontos még megemlítenünk az (1.62) algebrai egyenletrendszer megoldására használt módszert. Az egyenletrendszer nagysága miatt nem célszerű a teljes merevségi mátrixot eltárolni. A lefoglalt memória nagysága igazából nem jelentene problémát, hiszen a szabadsági fokok száma 3204, így dupla pontos¹ számábrázolás esetén $3204^2 \cdot 8 = 82\,124\,928$ Byte ≈ 80 MByte memóriára van szükség. Ez bőven rendelkezésre állt, azonban a merevségi mátrixban nagy százalékban nullák állnak, esetünkben az elemek 94%-a nulla. Ha ezeket a nullákat figyelembe vennénk, azaz szorzásokat és összeadásokat végeznénk velük, jelentősen megnőne a számítási idő. Két lehetőség kínálkozik a memória- és egyben időtakarékos számításra. Az egyik az úgynevezett frontális egyenletrendszer megoldó technika [25, 26]. Ez egy direkt megoldó módszer, a Gauss elimináción alapul. Felhasználva a végeelem hálón az elemek kapcsolódásából adódó információkat, már az egyenletrendszer felírása közben elkezdjük eliminálni azokat az egyenleteket, amelyekhez újabb együtthatók a továbbiakban nem kerülnek. A módszer csak a lokális merevségi mátrixokat használja, így nem számol feleslegesen a nullákkal. Hátrányt jelent viszont az, hogy számolás közben nem tudjuk kontrollálni a hibát, így kérdéses lehet, hogy a kapott eredmény mennyire pontos. A másik módszer az úgynevezett iteratív egyenlet megoldó használata. Iteratív egyenletrendszer megoldó módszerekből sokfajta létezik, mi a konjugált gradiens módszert használtuk [26]. A konjugált gradiens módszer jól használható szimmetrikus, pozitív definit együttható mátrixú egyenletrendszerek esetén. Az (1.62) egyenlet pont ilyen. A módszer konvergenciájának gyorsasága függ az együttható mátrix sajátértékeinek tulajdonságaitól. Ezen könnyen javíthatunk, ha az egyenletrendszert áttranszformáljuk egy ekvivalens egyenletrendszerbe, miközben a transzformáció hatására változnak az együttható mátrix sajátértékei. Ezt az eljárást prekondicionálásnak nevezi a szakirodalom. Többfajta prekondicionáló eljárás létezik, mi a Jacobi prekondicionáló módszert választottuk [27]. A választás oka elsősorban az egyszerű programozhatóság volt, de azt sem hagytuk figyelmen kívül, hogy a konvergencia sebessége közel megegyezett más prekondicionálók által elért sebességgel. A konjugált gradiens módszerben elő kell állítanunk a merevségi mátrix és egy oszlopmátrix szorzatát. Ezt a szorzás műveletet az iterációk miatt sokszor kell ismételni. Az előzőekben említett memória és időtakarékosági okokból adódóan nem célszerű a merevségi mátrix nulla elemeit tárolni, ezért egy úgynevezett tömörített sor tárolás (compressed row storage) formátumot fogunk használni [28]. A speciális tárolási

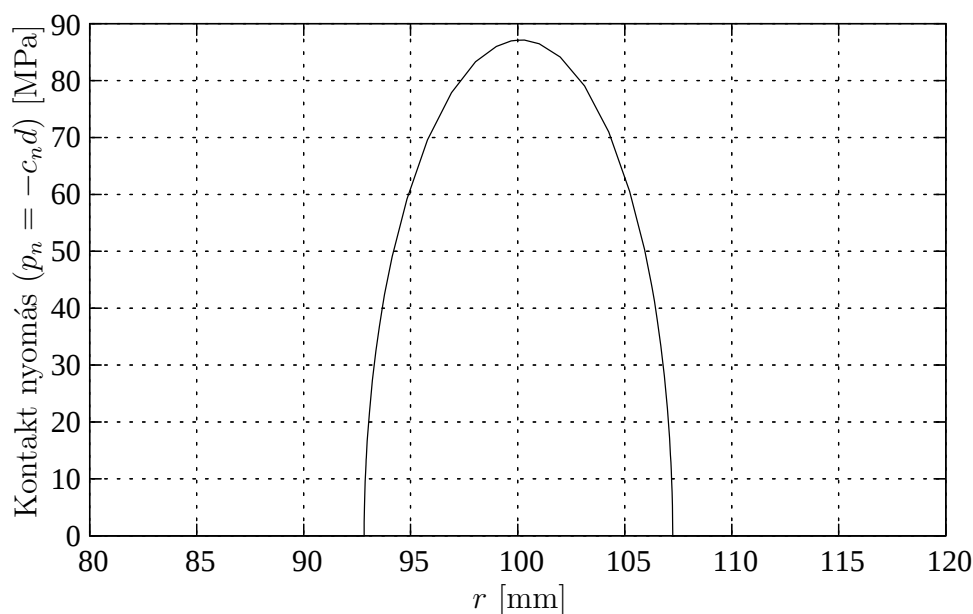
¹Egy dupla pontosságú, azaz *double* típusú lebegő pontos szám tárolásához 8 Byte memória szükséges.

struktúrának köszönhetően rendkívül gyors mátrix szorzó algoritmust tudunk alkalmazni. A számítást először büntető paraméteres módszerrel végeztük el. A büntető paraméteres módszert a kombinált módszer speciális eseteként foghatjuk fel. Legyen az (1.62)-ben az $\bar{\mathbf{f}}_p^1$ és $\bar{\mathbf{f}}_p^2$ azonosan nulla. Ebben az esetben az (1.62) egyszeri megoldásából kapott elmozdulás mező az érintkezési feladat büntető paraméteres megoldásának eredménye. A kapott eredmény függvényében a hálót módosítottuk, és újra megoldottuk (1.62)-et. Ezt az érintkezési tartomány határának kívánt pontossággal történő megközelítéséig ismételtük. A kezdeti és végső háló a 1.16. ábrán látható. A nyomás eloszlást a felületen a 1.17. ábra



1.16. ábra. A számítás során alkalmazott eredeti és módosított végelem háló.

mutatja. A 1.1 táblázatban feltüntettük az iterációk néhány jellemző értékét, úgy mint



1.17. ábra. A kontakt nyomás eloszlása az r tengely mentén.

az érintkezési tartomány aktuális határait, a testekre ható teljes erőt.

1.1. táblázat.

iter.	R_b^f [mm]	R_b^a [mm]	R_j^f [mm]	R_j^a [mm]	F_p [N]	F_σ [N]	T_τ [N]
1	93.842900	93.842899	106.173077	106.173078	615148.40	617889.64	21986.90
2	92.842670	92.842668	107.173960	107.173961	618081.86	618935.46	5911.76
3	92.828890	92.828889	107.242852	107.242854	616521.06	617945.75	1416.88
4	92.828368	92.828367	107.243425	107.243426	616453.30	617935.27	1399.84
5	92.828036	92.828035	107.243782	107.243783	616451.02	617934.97	1400.06
6	92.828027	92.828026	107.243802	107.243804	616450.60	617934.91	1400.01

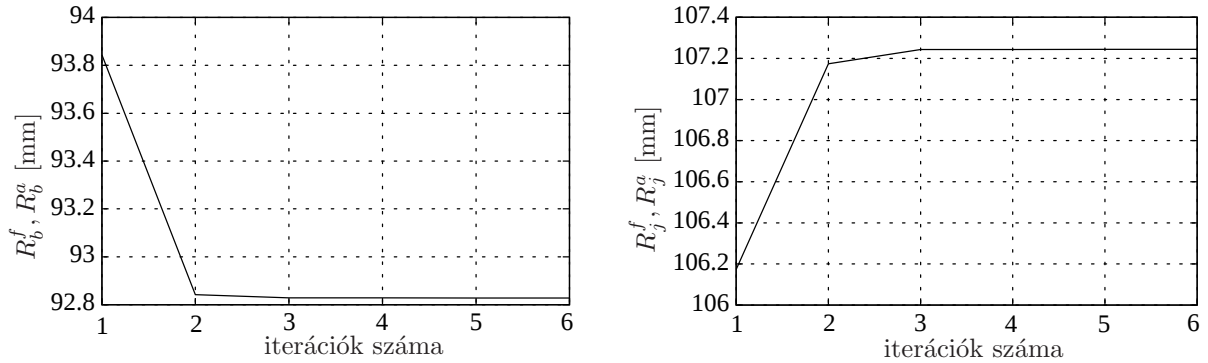
Megvizsgáltuk, hogy a peremfeltételek a $\sigma_n = -\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_c$ és $p_n = -c_n d$ képletekkel valamint a $\tau_n = \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_c$ képlettel és a súrlódásmentességből adódó $\tilde{\tau}_n = 0$ feltétellel kiszámolva mennyire különböznek egymástól. Az érintkezési felületen ébredő eredő erőt ezekből az

$$F_\sigma = \int_{A_c} \sigma_n dA \quad \text{és} \quad F_p = \int_{A_c} p_n dA \quad (1.91)$$

képletekkel kaphatjuk. Az A_c felületen fellépő nyíróerő a következő lesz:

$$T_\tau = \int_{A_c} \tau_n dA \quad (1.92)$$

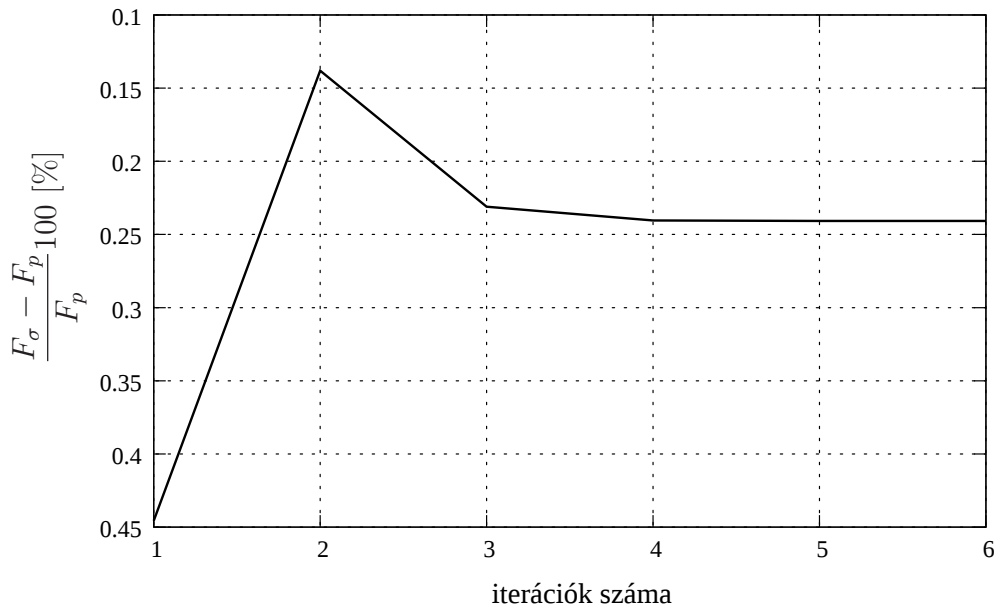
Az 1.1. táblázatban az R_b^f és R_b^a az érintkezési tartomány bal oldali határának r koordinátája a felső illetve az alsó testen, az R_j^f és R_j^a az érintkezési tartomány jobb oldali határának r koordinátája a felső illetve az alsó testen. Az 1.18. ábrán grafikonokkal szemléltettük az érintkezési tartomány határának helyzetét az iterációs lépések függvényében. A kapott eredményekből látszik, hogy a 4. iterációs lépés után már elértük



1.18. ábra. Az érintkezési tartomány határának változása az iterációk számának függvényében.

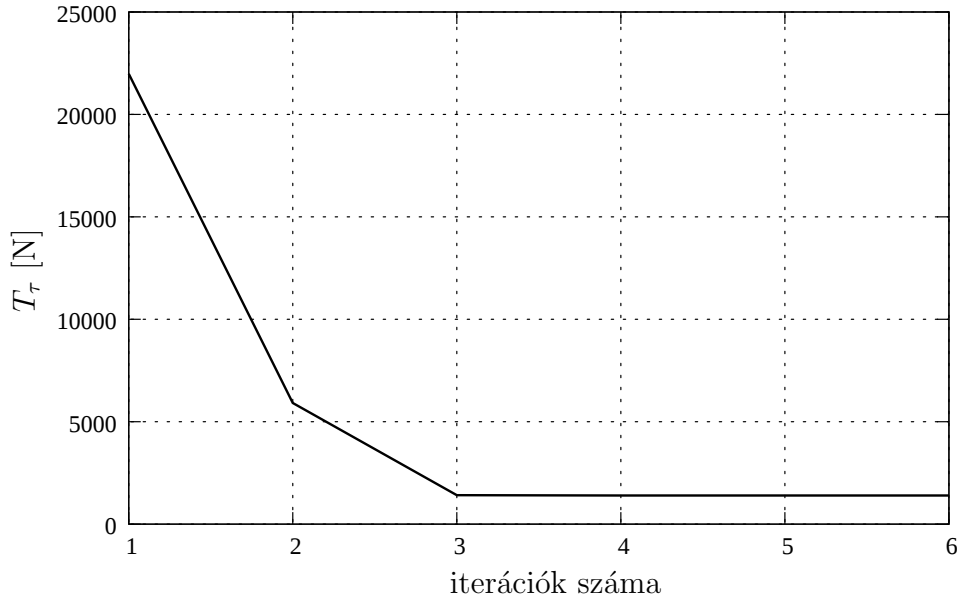
a kívánt pontosságot, azaz 0,001 mm hibával megkaptuk az érintkezési tartomány határát.

Még két iterációs lépést végrehajtottunk, amiből láthatjuk, hogy a kapott eredmények már alig változnak, sőt a 6. lépésnél már csak 10^{-5} nagyságrendű változások következnek be. Azonban nem mondhatjuk egyértelműen, hogy 10^{-5} mm pontossággal állapítottuk meg az érintkezési tartomány határát, mivel az algoritmusba eleve bizonyos pontatlanság lett beleépítve. Gondolhatunk itt például arra, hogy az (1.80) képletekben egyenesekkel közelítettük a felület ívelt kontúrját. Ha itt másod vagy magasabb fokú közelítést használtunk volna, pontosabb lenne az eredmény is. Azonban így is biztosak lehetünk benne, hogy az eredmény legfeljebb 0,025% hibát tartalmaz, hiszen a végeelem mérete 0,1 mm volt, így két Lobatto integrálási pont távolsága közelítőleg $l_{Lob} = 0,01$ mm, az A_c felület szélessége $l_c = 40$ mm, ebből a hiba pedig $\epsilon_c = \frac{l_{Lob}}{l_c} 100\% = \frac{0,01}{40} 100\% = 0,025\%$. Ez a műszaki gyakorlatban több mint elegendő. Ha az érintkező felületek görbülete kicsi, a pontosság akár nagyságrendekkel is javulhat. Az [13]-ban alkalmazott csomópont pozicionáló módszerrel közelítőleg 0,25% hibát sikerült elérni a szerzőknek. Az 1.1. táblázat 6. és 7. oszlopában a felületeket összeszorító erőt láthatjuk az (1.91) alapján σ_n -ből és p_n -ből kiszámolva. A negyedik iterációs lépés után a különbségük $F_\sigma^{(4)} - F_p^{(4)} = 1481,97$ N lett, ami $\epsilon_F = \frac{F_\sigma^{(4)} - F_p^{(4)}}{F_p^{(4)}} 100\% = \frac{1481,97}{616453,3} 100\% = 0,24\%$ -os hibát jelent (lásd 1.19. ábra). A nyíróerőnél nem tudunk relatív hibát számolni, de a $T_\tau^{(4)}$ értéke itt majdnem meg-



1.19. ábra. A kontakt algoritmus és az elmozdulás mező segítségével kapott F_p és F_σ összeszorító erők hibája.

egyezik $F_\sigma^{(4)} - F_p^{(4)}$ -vel (lásd 1.20. ábra). Ez a pontatlanság abból eredhet, hogy a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor koordinátáit az $\mathbf{u}$ elmozdulásvektor koordinátáiból deriválással állítjuk



1.20. ábra. A elmozdulás mező segítségével kapott T_τ nyíróerők nagysága.

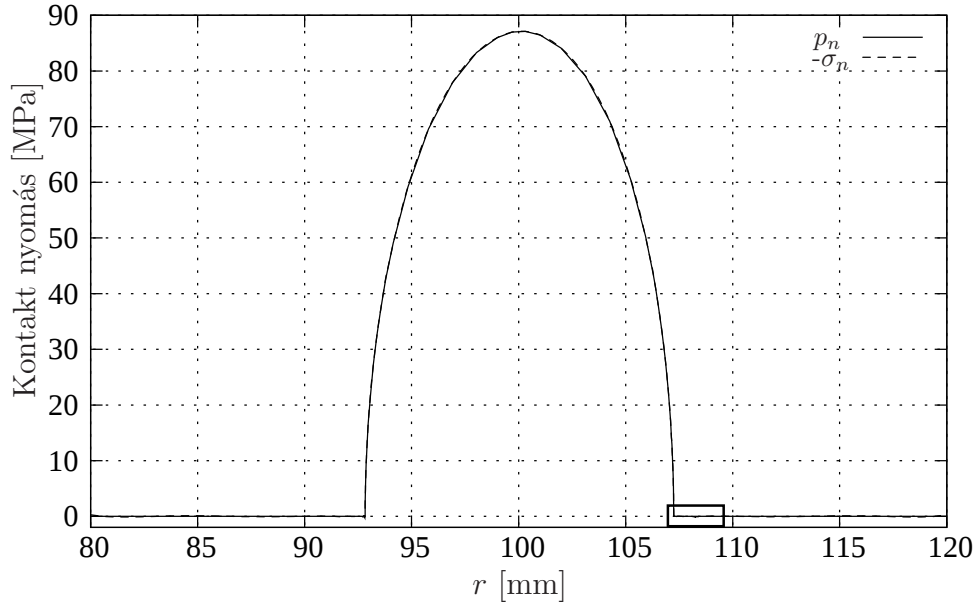
elő, ezért a közelítés fokszáma csökken. A p_n -ben szereplő d viszont közvetlenül az $\mathbf{u}$ koordinátáit tartalmazza. A p_n és σ_n nyomáseloszlásokat az 1.21. ábrán láthatjuk. A p_n nyomáseloszlás értékeit a számítás során az integrálási pontokban határoztuk meg, az 1.21. és 1.22. ábrákon ezeket az értékeket folytonos vonalakkal kötöttük össze. Az elmozdulásmezőből számított σ_n nyomáseloszlás ábrázolásánál egy végeselem $\eta = -1$ élét 10 egyenlő részre osztottuk, és az osztáspontokban felvett nyomásértékeket ábrázoltuk az 1.21. és 1.22. ábrákon szaggatott vonallal. Csak erős nagyítás után lehet felfedezni a két nyomás eloszlás közötti különbséget (lásd 1.22. ábra). A fent említett okból, és a nem analitikus pont közelsége miatt σ_n -ben kismértékű oszcilláció figyelhető meg. Az oszcilláció legnagyobb értéke a nyomófeszültség durván $\frac{\max|\sigma_n - p_n|}{p_{\max}} 100\% = \frac{0,25}{87} 100\% = 0,29\%$ -a.

Ez a 0,3%-ot sem éri el, ami igen szép eredménynek számít.

Az eredményeket egy kicsit tudjuk pontosítani, ha a kombinált módszert (augmented Lagrangian) használunk. Ezzel a módszerrel az érintkezési nyomás értékét tudjuk finomítani azzal, hogy a testek egymásba hatolását gyakorlatilag nullára csökkentjük. Ennek hatására azt várjuk, hogy a testeket összeszorító erő nőni fog, az érintkezési felület pedig csökken. A számítási eredmények az 1.2. táblázatban láthatók. A számítást az

1.2. táblázat.

$R_{b(au)}^f$ [mm]	$R_{b(au)}^a$ [mm]	$R_{j(au)}^f$ [mm]	$R_{j(au)}^a$ [mm]	$F_{p(au)}$ [N]	$F_{\sigma(au)}$ [N]	$T_{\tau(au)}$ [N]
92.836078	92.836077	107.236437	107.236438	616693.71	618170.54	1411.17



1.21. ábra. A p_n és σ_n nyomáseloszlások összehasonlítása.

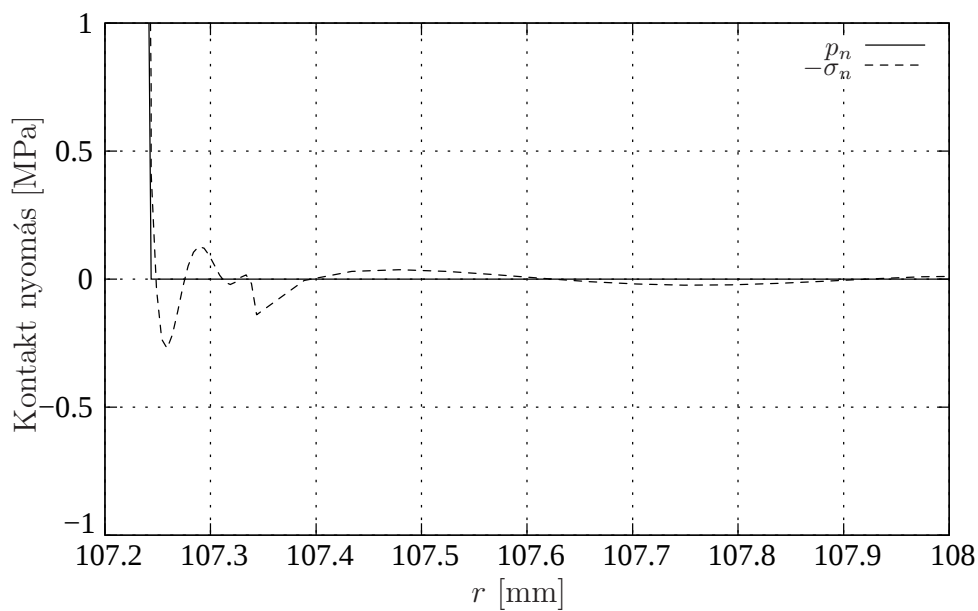
1.1. táblázatban lévő eredményekből kiindulva végeztük el. Számítsuk ki az 1.2. táblázatban lévő eredmények 1.1. táblázatban lévő, 6. iterációhoz tartozó eredményekhez képesti relatív hibáját! A relatív hiba számítása a $\epsilon_* = \frac{|* - *_{(au)}|}{*} 100\%$ képlettel történik, ahol $*$ az R_b^f , R_b^a , R_j^f , R_j^a , F_p , F_σ és T_τ mennyiségeket jelenti. Az 1.3. táblázat eredményei alapján láthatjuk, hogy lényegi változás nem történt, az érintkezési tartomány határának eltérése 0,01%-os hibahatáron belül mozog, az érintkezési nyomás változása pedig 0,04%-nál kisebb. A nyomás eloszlást az 1.23. ábrán láthatjuk. A kombinált módszer alkal-

1.3. táblázat.

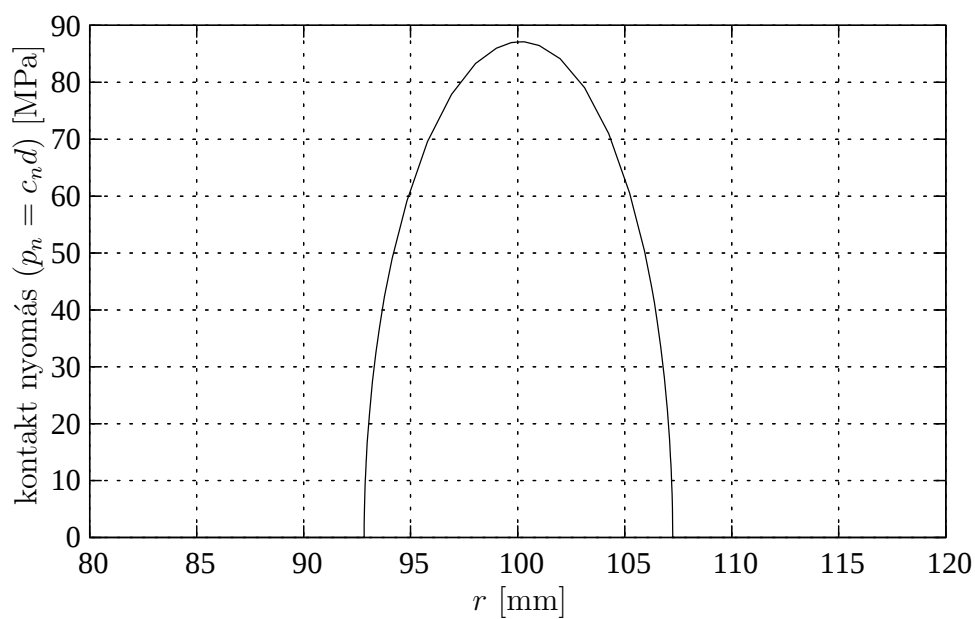
$\epsilon_{R_b^f} [\%]$	$\epsilon_{R_b^a} [\%]$	$\epsilon_{R_j^f} [\%]$	$\epsilon_{R_j^a} [\%]$	$\epsilon_{F_p} [\%]$	$\epsilon_{F_\sigma} [\%]$	$\epsilon_{T_\tau} [\%]$
0.008673	0.008673	0.006868	0.006868	0.039437	0.038132	0.797137

mazása esetén az érintkezési nyomás számításához több iterációs lépésre van szükség, emiatt a számítási idő jelentősen megnőhet. A fenti példa mutatja, hogy már a büntető paraméteres módszer is elegendően pontos eredményt szolgáltat, így ezt használva időt takaríthatunk meg.

Megvizsgáltuk, hogy a kapott eredmény pontosságát mennyire befolyásolja az alkalmazott közelítő polinomok fokszáma. Azt mondtuk, hogy a p -verziós végeelem-módszernél a polinom fokszám növelésével érünk el pontosabb eredményt. Az érintkezési feladatot megoldottuk 2, 3, 4, 5, 6, 7 és 8-ad fokú polinomokkal. A megoldás során figyeltük, hogy hogyan változik az érintkezési tartomány határa, és mennyire teljesülnek a perem-



1.22. ábra. Az 1.21. ábra bekeretezett részének nagyítása.



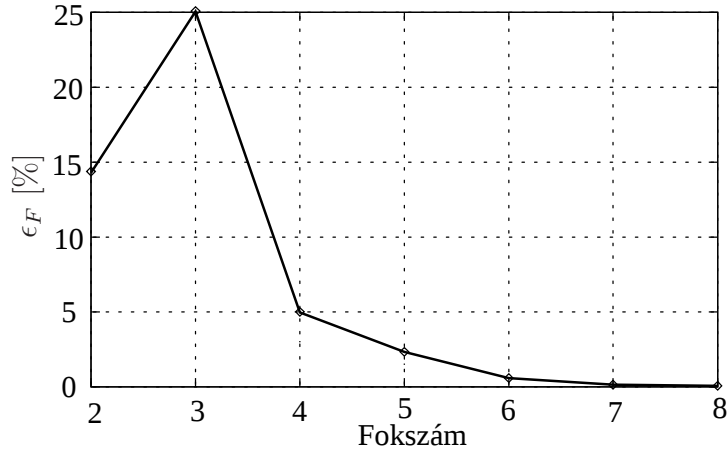
1.23. ábra. Az érintkezési nyomás eloszlása a kombinált technika alkalmazásával.

feltételek. Az eredményeket az 1.4. táblázat tartalmazza. A testeket összeszorító erőt az (1.91) összefüggések segítségével tudjuk meghatározni egyrészt a p_n érintkezési nyomásból, másrészt az elmozdulásmezőből az érintkezési felületen számított σ_n normálfeszültségből.

1.4. táblázat.

foksz.	R_b^f [mm]	R_b^a [mm]	R_j^f [mm]	R_j^a [mm]	ε_F [%]	T_τ [N]
2	93.938666	93.938666	105.125526	105.125527	14.56	198978.68
3	92.885361	92.885360	107.228868	107.228869	25.04	173889.85
4	92.820422	92.820421	107.250607	107.250608	5.08	63504.54
5	92.824969	92.824967	107.247368	107.247370	2.55	22758.47
6	92.826801	92.826799	107.245301	107.248154	0.90	5970.66
7	92.827662	92.827661	107.244266	107.247119	0.61	2995.51
8	92.828027	92.828026	107.243802	107.246656	0.24	1400.01

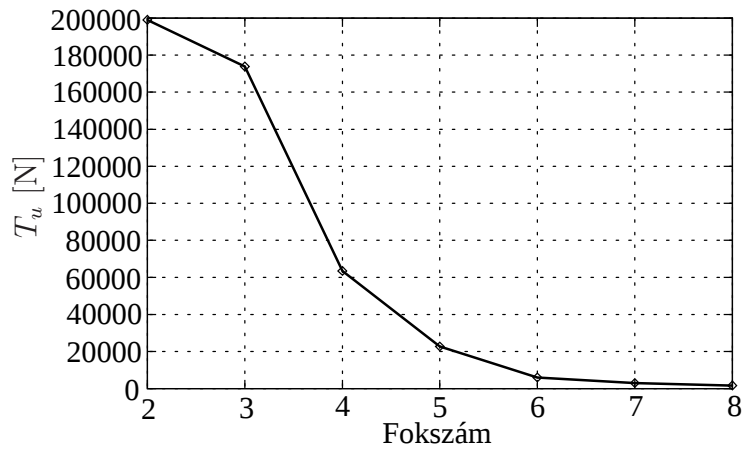
A két különböző módszerrel kapott erő különbsége információval szolgál a számítás pontosságáról. A $\varepsilon_F = \frac{F_\sigma - F_p}{F_p} 100\%$ relatív hibát az 1.24. ábrán is szemléltettük. Mivel



1.24. ábra. A kontakt algoritmus és az elmozdulásmező segítségével kapott F_p és F_σ összeszorító erők hibája.

súrlódás nélküli érintkezési feladatot vizsgálunk, az érintkezési felületen csúsztató feszültségek nem léphetnek fel. Az elmozdulásmezőből az (1.92) képlettel számított T_τ nyíróerőt az 1.25. ábrán szemléltettük. Az ábrákon jól látszik, hogy mind az ε_F relatív hiba, mind a T_τ nyíróerő a polinom fokszám növelésével gyorsan konvergál a nullához. Nyolcad fokúnál magasabb fokszámú polinomok alkalmazása számottevő javulást már nem okozna.

Az 1.26.-1.29. ábrákon az alsó testben fellépő feszültségeket szemléltetjük, sorrendben a σ_z , σ_r , σ_φ és τ_{rz} feszültségeket. Megfigyelhetjük, hogy a $z = -20$ mm egyenes mentén a test sarkainál a feszültségek szempontjából szinguláris pontok vannak. Ennek oka az peremfeltételekben keresendő. Az peremfeltételek az 1.14. ábrán láthatók. Módosítsuk ezt oly módon, hogy megengedjük a $z = -20$ mm és a $z = 20$ mm síkok mentén a testek



1.25. ábra. Az elmozdulás mező segítségével kapott T_τ nyíróerők nagysága.

pontjainak r irányú elmozdulását (lásd 1.30. ábra). Az 1.31-1.34 ábrák az így kapott feszültség eloszlásokat mutatják. Az érintkezési felületen kialakuló feszültségekre ennek a változtatásnak nincsen számottevő hatása.

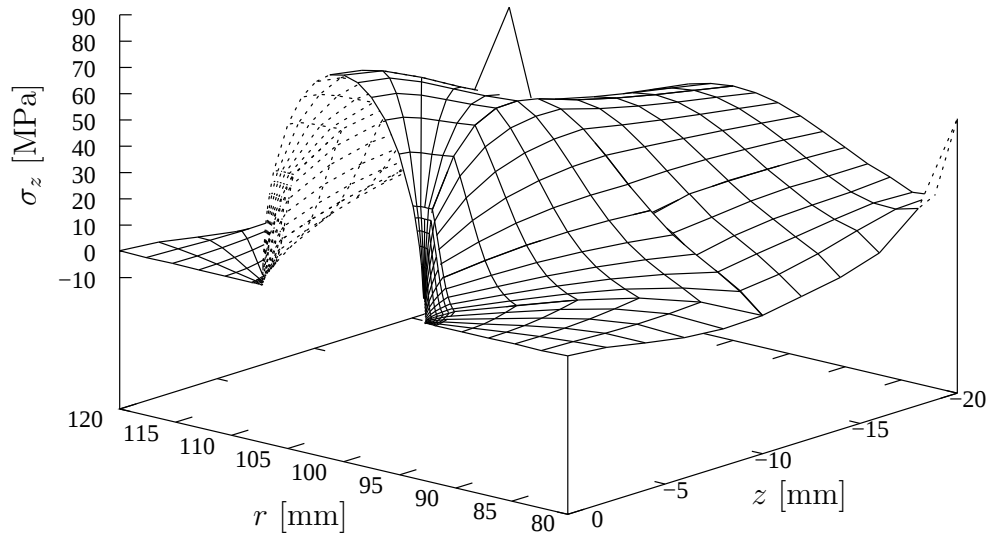
1.11. Tudományos eredmények

Az 1. fejezetben súrlódás nélküli érintkezési feladat megoldásával foglalkoztunk. Feltételeztük, hogy a vizsgált testek anyaga homogén és izotrop. A feladatot a kis alakváltozások elméletén belül oldottuk meg. A megoldáshoz p -verziós végeselem-módszert használtunk, az érintkezési feladat számításánál az úgynevezett kombinált módszer (augmented Lagrangian) került felhasználásra. A számításokat saját fejlesztésű számítógépes programmal végeztük. Az új tudományos eredményeket a következő pontokban foglaljuk össze:

1. Az érintkezési tartomány határának megkeresésére geometriai alapokon nyugvó új módszer került bevezetésre.

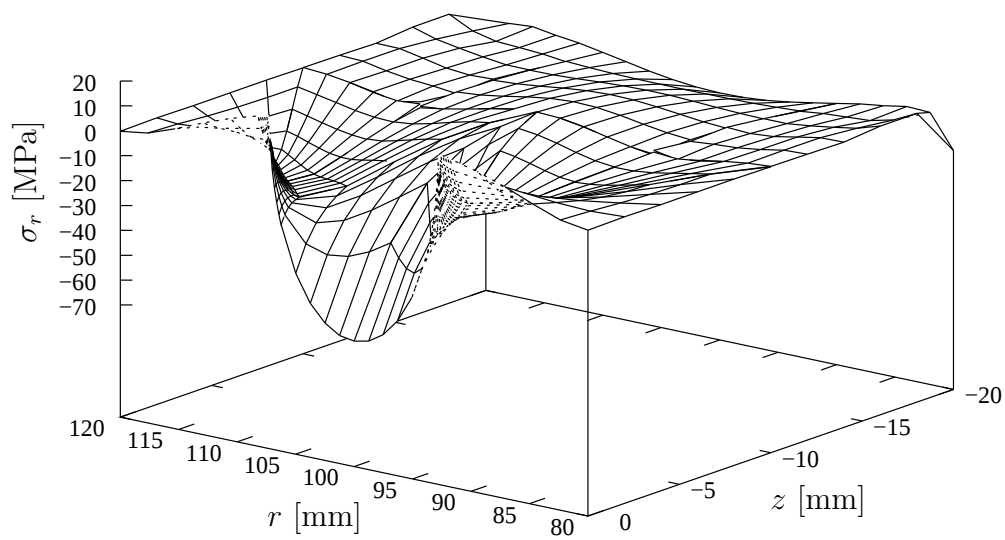
A választott variációs elvből következő megoldási módszer miatt a testek kis mértékben egymásba hatolnak. Ennek következményeként a testek kontúrjai az érintkezési tartomány határán metszik egymást, azaz a határpontok megkeresése egymástól függetlenül felírt magasabb fokú algebrai egyenlet közelítő megoldására vezethető vissza.

2. Az érintkezési tartomány szélére elhelyezett a határpontot kettősen átölelő kisméretű elemekkel az elvileg nem analitikus megoldáshoz tartozó közelítő megoldás igen kismértékű feszültségi oszcillációt eredményez $\{6\}$.

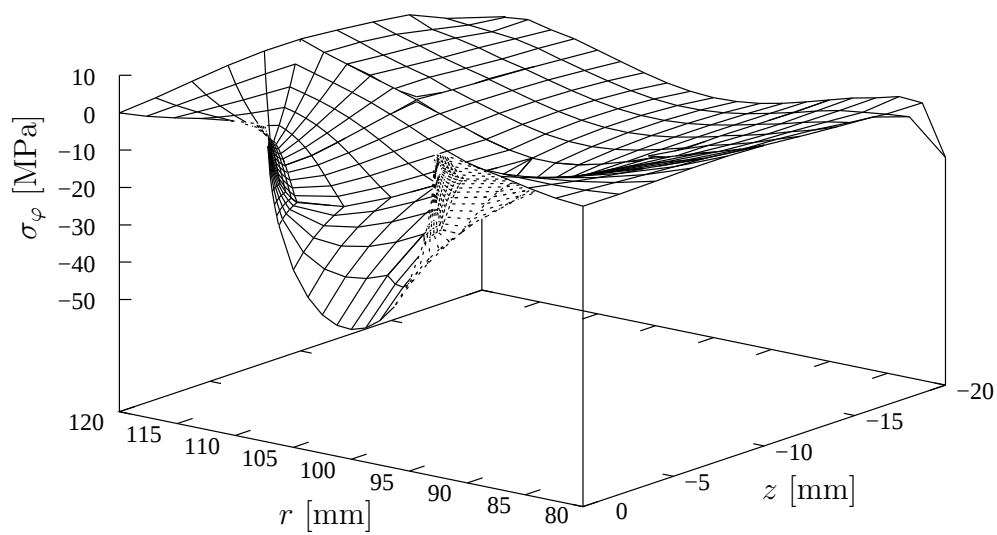


1.26. ábra. A σ_z normálfeszültség eloszlása az rz síkon.

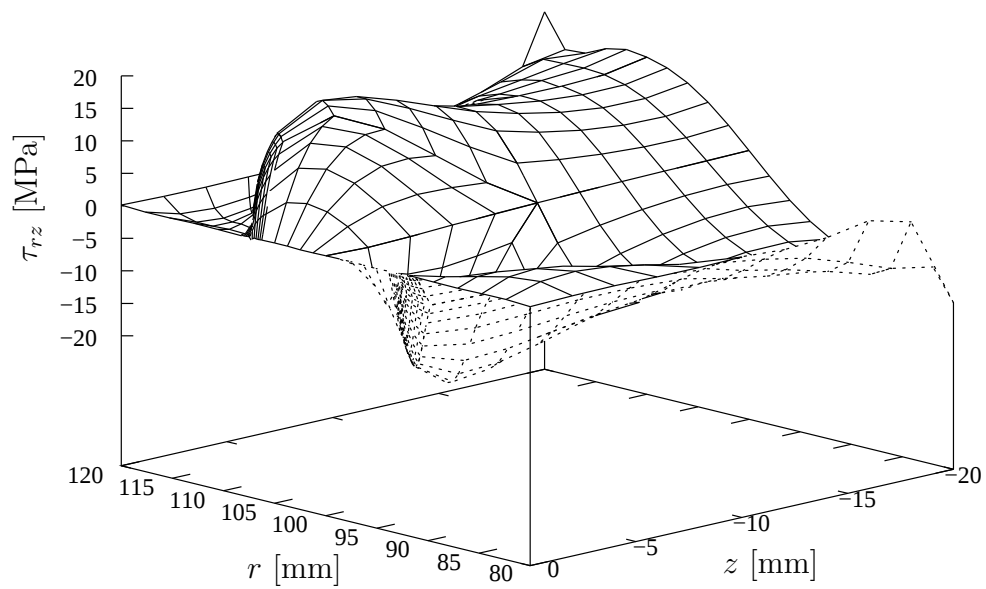
Az érintkezési tartomány határa az elmozdulásmező szempontjából egy nem analitikus pont. Az elmozdulás mezőt szakaszonként (elemenként) Legendre polinomokkal jellemzett analitikus függvényekkel közelítjük az elemek közötti C^0 osztályú folytonosságot megkövetelve. A tényleges érintkezési tartomány határára iterációval elhelyezett csomópontok biztosítják a deriváltak szakadását. Az iteráció során egyre közelebb kerülünk a tényleges határhoz a választott közelítés fokszámától függő mértékben. Az érintkezési tartomány szélére elhelyezett kisméretű elemek használatával az oszcilláció nagymértékben lecsökken.



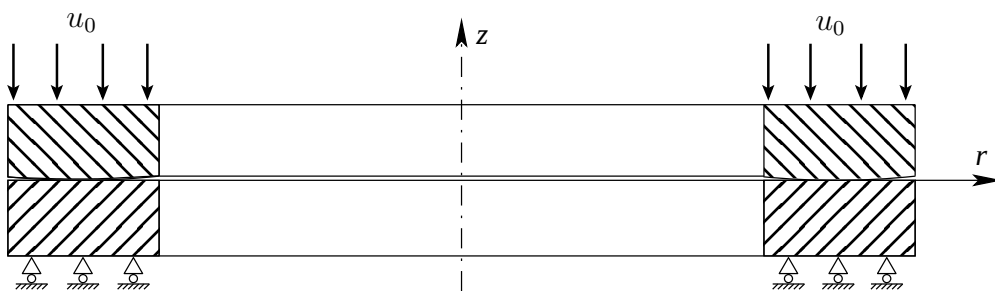
1.27. ábra. A σ_r normálfeszültség eloszlása az rz síkon.



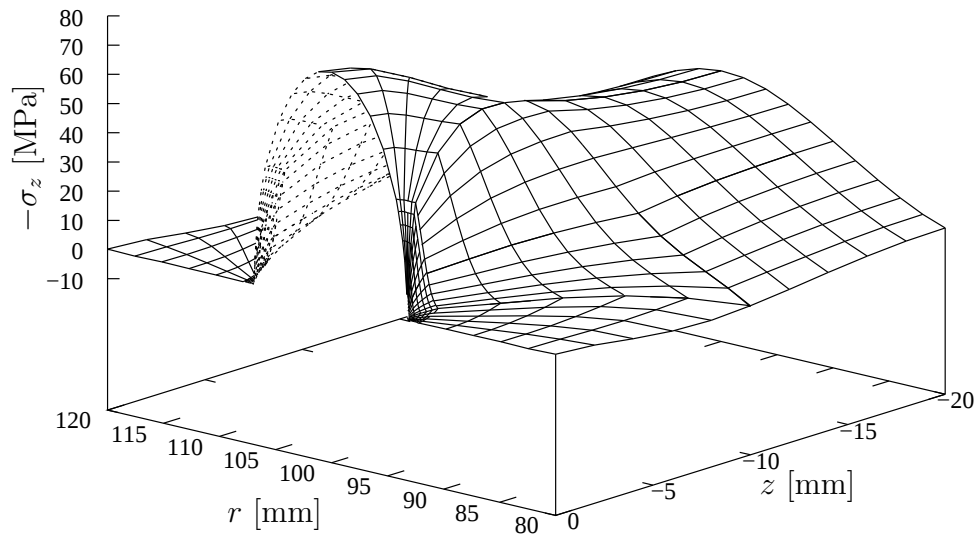
1.28. ábra. A σ_φ normálfeszültség eloszlása az rz síkon.



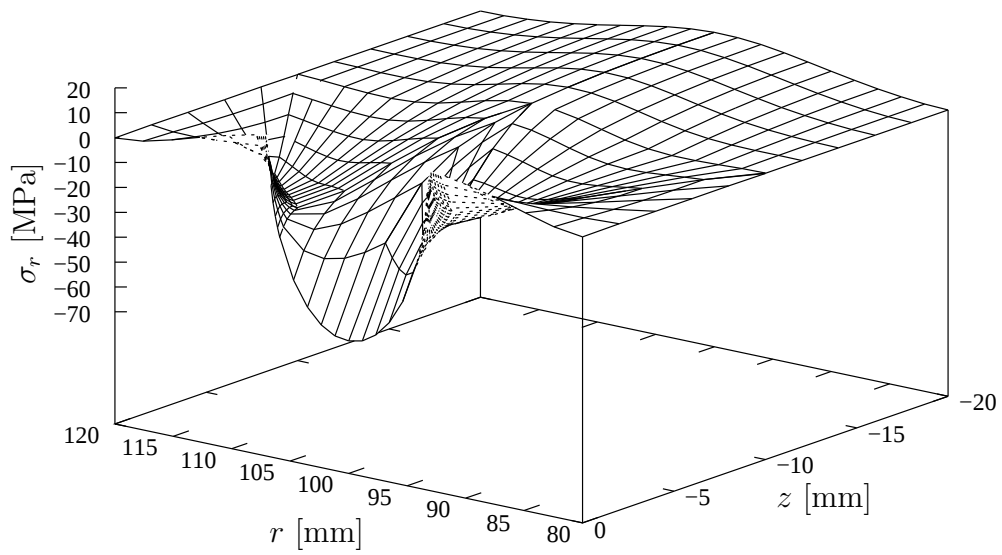
1.29. ábra. A τ_{rz} csúsztatófeszültség eloszlása az rz síkon.



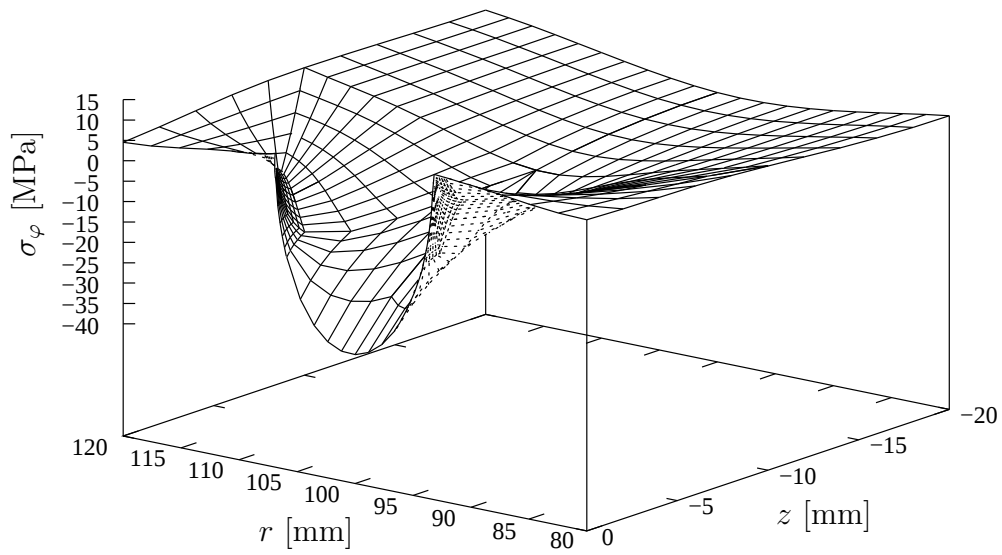
1.30. ábra. A módosított peremfeltételek.



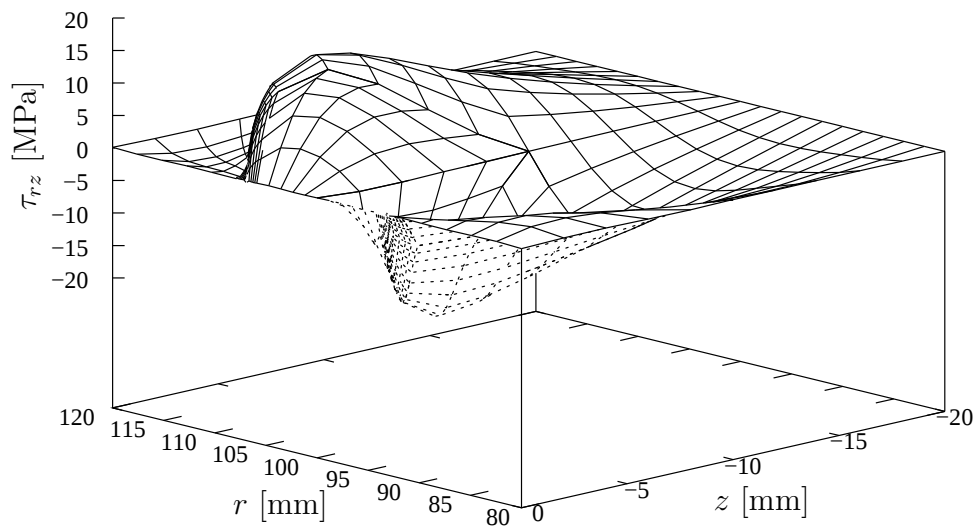
1.31. ábra. A σ_z normálfeszültség eloszlása az rz síkon.



1.32. ábra. A σ_r normálfeszültség eloszlása az rz síkon.



1.33. ábra. A σ_φ normálfeszültség eloszlása az rz síkon.



1.34. ábra. A τ_{rz} normálfeszültség eloszlása az rz síkon.

2. fejezet

A kopás

2.1. A kopási folyamat áttekintése, Archard kopási törvénye

Az előző fejezetben a testek súrlódás nélküli érintkezési feladatát oldottuk meg. Ebben a fejezetben az érintkező felületek kopását vizsgáljuk meg. A kopás jelenségét akkor figyelhetjük meg, amikor két test elcsúszik egymáson, például amikor ceruzával írunk a papírra. A ceruza hegye egyre kisebb és kisebb lesz. A kopás viszonylag lassú folyamat, egy betű leírása után még szinte semmi változást nem látunk a ceruza hegyén, egy teljes oldal leírása után azonban tapasztalhatjuk, hogy tompa lesz a ceruza hegye. Különböző autó- és gépalkatrészeknél, amelyeknél az érintkező felületek egymáshoz képest elmozdulnak, szintén megfigyelhető a kopás jelensége. A kopási folyamat gyorsaságát több tényező befolyásolhatja. Az elsőként legjobban szembetűnő az, hogy ha a felületeket kenjük olajjal vagy zsírral, vagy esetleg egyéb anyagokkal, a kopás mértéke jelentősen lecsökken. A kenés kopásra gyakorolt hatásával egy másik tudományterület, a tribológia foglalkozik. Ebben a disszertációban mi csak „száraz” felületek egymáson történő elcsúszását fogjuk vizsgálni.

A következő szempont, ami a kopás mértékét befolyásolhatja, az az érintkező felületek anyagminősége és geometriája. Az egymással érintkező alkatrészeket általában valamilyen szerszámgéppel munkálják meg, hogy az érintkező felületek minél jobban illeszkedjenek egymáshoz. A megmunkálás során azonban a megmunkáló szerszám alakjától és a szerszámgép rezgéseiből adódóan a felületbe apró egyenetlenségek kerülnek.

Négy fő kopási folyamatot különböztetünk meg, az adhezív, abrazív, korrozív és kifáradásos kopást. Mikor két felület elcsúszik egymáson, a nagy nyomás miatt a felületből kiálló csúcsok összehegedhetnek. További relatív elmozdulás hatására az összehegedt felületek elválhatnak vagy az összehegedés helyén, vagy az egyik csúcs egyszerűen letörik. Ennek hatására nem keletkeznek szabad részecskék a két felület között, csak anyag vándorol át az egyik felületről a másikra. Viszont mikor egy csúcs letörik a felületről, felületén kémiai elváltozások lépnek fel (pl. oxidáció). Ha a további relatív elmozdulás hatására újra hozzátapad a másik felülethez, a kémiai változás miatt a tapadás gyengébb lesz.

Többszöri oda-vissza vándorlás után a felülethez tapadás annyira meggyengülhet, hogy a részecske leválik a felületről, így egy szabad részecske keletkezik. Ezt a folyamatot adhezív kopásnak nevezzük. Közel egyforma nagyságú felületből kiálló csúcsokat feltételezve Archard [29] egy matematikai modellt állított fel az adhezív kopásra. Feltételezése szerint a kopás arányos a relatív elmozdulással és a testek közötti nyomással, és fordítva arányos a felület helyi keménységével. Az arányossági tényezőt kopási tényezőnek nevezzük, értékét különböző anyagokra kísérletekből határozhatjuk meg. A kopási tényező értéke 0 és 1 közé esik, nagysága függ a két felület közötti hézagot kitöltő anyagtól és a hőmérséklettől. Archard kopási törvénye a következő alakban írható:

$$\dot{w}_{adh} = \tilde{k}_{adh} \frac{vp_n}{H} \quad (2.1)$$

ahol $\tilde{k}_{adh}$ a adhezív kopási tényező, $v = |\dot{u}_t^2 - \dot{u}_t^1|$ a felületek egy érintkező pontpárjának relatív sebessége, p_n az érintkezési nyomás a vizsgált pontban, H a felület lokális keménysége, $\dot{w}_{adh}$ pedig a vizsgált pontban egységnyi idő alatt egységnyi felületen lekopott anyag vastagsága.

Az abrazív kopásnál két esetet különböztetünk meg. Az elsőnél a felületből kiálló keményebb csúcs végigkarcolja a szemközti felületet. A másodiknál a két felület között lévő harmadik test karcolja az egyik, vagy mindkét felületet. Az első eset vizsgálata egyszerű. A két felület közül gyakorlatilag csak a puhább kopik. Ha a keményebb felület elegendően sima, akkor az abrazív kopást el is hanyagolhatjuk. Bonyolultabb a helyzet, ha egy harmadik test kerül a felületek közé, ugyanis ez lehet olyan szennyeződés is, amit nem tudunk levezetni az érintkező felületek tulajdonságaiból. A harmadik test lehet egy, az adhezív kopás során levált, többszöri képlékeny alakváltozást követően felkeményedett részecske, lehet egy porszem, vagy akár a felületről levált és kémiaiilag átalakult (pl. oxidálódott) részecske is. Feltételezve, hogy a felületből kiálló csúcsok jó közelítéssel egyformák, és egyenletesen oszlanak el a felületen, a kopás mértékét az Archard kopási törvényhez hasonló formában tudjuk leírni:

$$\dot{w}_{ab} = \tilde{k}_{ab} \frac{vp_n}{H} \quad (2.2)$$

ahol $\tilde{k}_{ab}$ az abrazív kopási tényező, $\dot{w}_{ab}$ pedig az egységnyi idő alatt egységnyi felületen lekopott anyag vastagsága. Az $\tilde{k}_{ab}$ abrazív kopási tényezőt kísérletek segítségével határozhatjuk meg. Az (2.1) és (2.2) egyesítéséből kaphatjuk meg az adhezív és abrazív kopásra vonatkozó összefüggést:

$$\dot{w} = \tilde{k}_w \frac{vp_n}{H} = k_w vp_n \quad (2.3)$$

ahol $k_w = \frac{\tilde{k}_w}{H}$ -t kopási tényezőnek nevezzük.

Kísérletekkel bizonyították, hogy Archard kopási törvénye kis érintkezési nyomások esetén érvényes, nagy nyomások esetén azonban alulbecsüli a kopást [30]. Ezt javítani tudjuk, ha a kopási törvényt a következő képpen módosítjuk:

$$\dot{w} = k_w v^a (p_n)^b \quad (2.4)$$

ahol az a , b állandók értékét és a k_w kopási tényezőt kísérletekből határozhatjuk meg. Egy tengelyszimmetrikus egydimenziós feladat numerikus megoldása során láthatunk példákat az a és b változásának a kopási folyamatra gyakorolt hatására az [18]-ben.

A felületen oxidáció és egyéb kémiai szennyeződések hatására megváltozhatnak az anyag fizikai tulajdonságai (keménység, hőtágulás, rugalmassági modulus stb.), amelynek következtében a felület felső rétegei könnyen leválhatnak. Az ebből eredő kopás, amelyet korrozív kopásnak nevezünk, az adhezív és abrazív kopáshoz képes jóval lassabb folyamat, ezért rövidebb időintervallumú számításoknál elhanyagolhatjuk. Ha a felületet ciklikus terhelés éri, hajszálrepedések keletkezhetnek rajta. A repedések mellett anyag válhat le a felületről. Azt a folyamatot kifáradásos kopásnak nevezzük. A korrozív kopáshoz hasonlóan ez is időben egy hosszabb folyamat, az adhezív és abrazív kopáshoz képest elhanyagolhatjuk.

A számítások elvégzése során feltételezni fogjuk, hogy a lekopott anyag azonnal eltűnik a két érintkező felület közül. A valóságban azonban a kopás során levált részecskék még egy ideig a felületek között maradnak. Zmitrowicz monográfiájában megvizsgálta a levált részecskék mozgását, hatását a további kopásra [19].

A továbbiakban tárgyalandó feladathoz hasonlóval találkozhatunk a [20]-ben is.

2.2. Célkitűzések

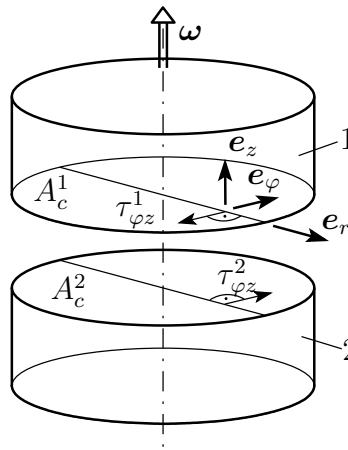
Az értekezés ezen fejezetében a kopási folyamatot szeretnénk modellezni számítógépes program segítségével. Ennek érdekében a következő célokat tűzhetjük ki magunk elé:

1. A kopási folyamat diszkrétizálása a numerikus számítások elvégzéséhez.
2. A kopásból származó végelem háló módosítást úgy kell elvégezni, hogy az összhangban legyen az előző fejezetben tárgyalt érintkezési feladattal.
3. Algoritmust kell kidolgozni a kopás számítására. Az algoritmusnak tartalmaznia kell az érintkezési feladat megoldását is, ugyanis az ott kapott nyomáseloszlás szükséges a kopás számításához.
4. Számítógépes programot kell készíteni, mellyel a kopási folyamatot modellezni tudjuk. A programnak tartalmaznia kell az előző fejezethez készített kódot is, mivel az érintkezési feladat eredményére is szükségünk lesz.

2.3. Az érintkezési feladat és a kopás kapcsolata

Az 1. fejezetben a súrlódás nélküli érintkezési feladatot oldottuk meg. Viszont ha kopásról beszélünk, nem tudjuk megkerülni a súrlódást. Ezért a feladatot úgy tűzzük ki, hogy az 1. fejezetben kapott eredmények továbbra is érvényesek maradjanak. Tekintsünk két gyűrű alakú testet (lásd 1.13. és 1.14. ábrák). Az alsó test alsó lapját rögzítsük φ irányban is, hogy ne tudjon elfordulni a z tengely körül, a felső test felső lapját pedig forgassuk meg

$\omega = \omega \mathbf{e}_z$ szögsebességgel a z tengely körül. A többi peremfeltétel maradjon ugyan az, mint amit az 1.9 szakaszban megadtunk. A súrlódás következtében az érintkező felületeken tangenciális erők ébrednek. Ezeket a tangenciális erőket a dinamikai peremfeltételek között vehetjük figyelembe. Az A_c^e felületen továbbra is hasson az (1.9)-el megadott $\sigma_z \approx \sigma_n = -p_n$ normál feszültség. Ezen kívül a súrlódás miatt hasson még az A_c^e felületen a $\boldsymbol{\tau} = \tau_{rz} \mathbf{e}_r + \tau_{\varphi z}^e \mathbf{e}_\varphi \approx \tau_{\varphi z}^e \mathbf{e}_\varphi = (-1)^e \mu p_n \mathbf{e}_\varphi$ csúsztató feszültség (lásd 2.1. ábra). Ennek



2.1. ábra. Az érintkező felületeken fellépő csúsztató feszültség.

következtében a véges-elemes diszkretizációnál meg fog jelenni egy újabb, az (1.36)-hoz hasonló, de a csúsztató feszültségből származó terhelési vektor:

$$\mathbf{f}_{\tau_{\varphi z}}^e = \int_{A_c^e} \mathbf{N}^{eT} \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^e \mu p_n \\ 0 \end{bmatrix} dA \quad (2.5)$$

Az (1.37)-ben megadott terhelési vektorok összege is módosulni fog:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e + \mathbf{f}_{p,\rho k}^e + \mathbf{f}_{\tau_{\varphi z}}^e \quad (2.6)$$

A testek pontjainak sebessége a következő vektorral adható meg: $\mathbf{v}^e = v_r^e \mathbf{e}_r + v_\varphi^e \mathbf{e}_\varphi + v_z^e \mathbf{e}_z$. Írjuk fel ezt részletesebben az egyes testekre. Az 1 számú (felső) test a z tengely körül ω szögsebességgel forog, miközben rugalmas alakváltozást szenved.

$$\mathbf{v}^1 = \dot{\mathbf{u}}^1 = \dot{u}_r^{1,el} \mathbf{e}_r + (\dot{u}_\varphi^{1,el} + r\omega) \mathbf{e}_\varphi + \dot{u}_z^{1,el} \mathbf{e}_z \quad (2.7)$$

ahol $\dot{u}_r^{1,el}$, $\dot{u}_\varphi^{1,el}$ és $\dot{u}_z^{1,el}$ a test pontjainak rugalmas alakváltozásból adódó sebessége az r , φ és z irányokban. Ugyan ez a 2 számú (alsó) testre a következő lesz:

$$\mathbf{v}^2 = \dot{\mathbf{u}}^2 = \dot{u}_r^{2,el} \mathbf{e}_r + \dot{u}_\varphi^{2,el} \mathbf{e}_\varphi + \dot{u}_z^{2,el} \mathbf{e}_z \quad (2.8)$$

A testek egymással érintkező C felületén értelmezhetjük a $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2$ relatív sebességvektort, pontosabban a felső test relatív sebességét az alsóhoz viszonyítva.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2 = (\dot{u}_r^{1,el} - \dot{u}_r^{2,el})\mathbf{e}_r + ((\dot{u}_\varphi^{1,el} + r\omega) - \dot{u}_\varphi^{2,el})\mathbf{e}_\varphi + (\dot{u}_z^{1,el} - \dot{u}_z^{2,el})\mathbf{e}_z \quad (2.9)$$

A számítás során feltételezzük, hogy a testekben nem lépnek fel rezgések, és a letapadás-megcsúszás (*stick-slip*) jelenség sem fog fellépni. Mivel a kopás egy viszonylag lassú folyamat, a kopás miatt bekövetkező alakváltozások szintén lassan mennek végbe, így az alakváltozások sebessége az egész testben közel nullával egyenlő: $\dot{u}_r^{e,el} \approx 0$, $\dot{u}_\varphi^{e,el} \approx 0$ és $\dot{u}_z^{e,el} \approx 0$. Ezt felhasználva a 2.9 képlet a következő alakra egyszerűsödik.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2 = r\omega\mathbf{e}_\varphi \quad (2.10)$$

A $\dot{u}_\varphi^1 - \dot{u}_\varphi^2 = r\omega$ relatív sebességet az egyszerűség kedvéért ezek után v -vel fogjuk jelölni.

Feltételezzük, hogy a testek kopni kezdenek az 2.1 szakaszban leírtaknak megfelelően. A kopási folyamat modellezéséhez Archard módosított kopási törvényét, a (2.4)-et fogjuk felhasználni. A kopás egy hosszabb idő alatt lejátszódó folyamat, amelyet numerikus módszerekkel szeretnénk modellezni. Osszuk fel a vizsgált $[t_0, t_1]$ időintervallumot egyforma nagyságú Δt időlépésekre. A kopás értékét lépésről lépésre fogjuk kiszámítani. Hogy ezt meg tudjuk tenni, meg kell határoznunk a Δt idő alatt bekövetkezett Δw kopást. Integráljuk (2.3)-at a $[t, t + \Delta t]$ intervallumon. Mivel nem ismerjük az érintkezési nyomás pontos időbeli alakulását, közelítő eljárást kell alkalmaznunk. Feltételezzük, hogy a Δt idő alatt bekövetkező változások a nyomásban és a relatív sebességben közel lineárisak. Ekkor a (2.3) alatt értelmezett $\dot{w}$ -t a következő módon közelíthetjük:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = k_w[v^{(t)}(1 - \beta) + \beta v^{(t+\Delta t)}]^a [p_n^{(t)}(1 - \beta) + \beta p_n^{(t+\Delta t)}]^b \quad (2.11)$$

ahol a felső indexekben szereplő (t) és $(t + \Delta t)$ az egymást követő időlépésekben vett értékeket jelölik, a β értéke pedig egy 0 és 1 közé eső valós szám. Ha ismertük a t időpillanatban a $w^{(t)}$ egységnyi felületről lekopott anyag mennyiségét, akkor a $t + \Delta t$ időpillanatban az egységnyi felületről lekopott anyagmennyiség a következő lesz:

$$w^{(t+\Delta t)} = w^{(t)} + \Delta t k_w [v^{(t)}(1 - \beta) + \beta v^{(t+\Delta t)}]^a [p_n^{(t)}(1 - \beta) + \beta p_n^{(t+\Delta t)}]^b \quad (2.12)$$

A kopás egy időben folytonos folyamat. Míg a testről a Δt idő alatt lekopik Δw mennyiségű anyag, a nyomás is folyamatosan változik. Az nyilvánvaló, hogy (2.12)-ből nem tudjuk egyszerre kiszámítani $w^{(t+\Delta t)}$ -t és $p^{(t+\Delta t)}$ -t, ezért iterációs lépéseket kell alkalmaznunk. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$v_j = v^{(t)}(1 - \beta) + v_j^{(t+\Delta t)}\beta \quad (2.13)$$

$$p_{n,j} = p_n^{(t)}(1 - \beta) + p_{n,j}^{(t+\Delta t)}\beta \quad (2.14)$$

Az alsó j index az iterációs lépések számára utal. Az j -edik iterációs lépésben a kopást a következő képlet adja meg:

$$w_j^{(t+\Delta t)} = w^{(t)} + \Delta t k_w v_j p_{n,j} \quad (2.15)$$

Egy időlépésen belül a következő iterációs ciklust kell végigszámolni. Megoldjuk az érintkezési feladatot a $w_{j-1}^{(t+\Delta t)}$ kopással módosított A_c^e felületen. Eredményül megkapjuk a $p_{n,j}^{(t+\Delta t)}$ nyomáseloszlást. A (2.14) segítségével meghatározzuk $p_{n,i}$ -t. (A v_j sebesség állandó.) Kiszámítjuk a (2.15) felhasználásával a $w_j^{(t+\Delta t)}$ kopás nagyságát. Ezt az iterációt addig ismételjük, amíg a

$$\frac{\int_{(A_c)} w_j^{(t+\Delta t)} dA - \int_{(A_c)} w_{j+1}^{(t+\Delta t)} dA}{\int_{(A_c)} w_j^{(t+\Delta t)} dA} \leq \tau_w \quad (2.16)$$

feltétel nem teljesül.

Az első iterációs lépésben $w_0^{(t+\Delta t)} = 0$, a $p_{n,0}^{(t+\Delta t)}$ értékét pedig az érintkezési feladat megoldása adja a $h^{(t)}$ kezdeti hézagnál. A kopási folyamat során a felső test ω szögsebességét állandónak vesszük. A $t = 0$ időpillanatban a kopás értéke nulla, azaz $w^{(0)} = 0$, $v^{(0)}$ adott, $p_n^{(0)}$ pedig az érintkezési feladat megoldásából határozható meg. A kopás mindegyik iterációs lépésben a kezdeti hézag módosítását igényli, azaz

$$h_{j+1}^{(t+\Delta t)} = h + w_j^{t+\Delta t} \quad (2.17)$$

Ily módon a (2.16) feltétel teljesülése után a kopott felülethez tartozó alakot, és így a módosított kezdeti hézagot is megkaptuk. A (2.16) feltétel teljesülésekor az iterációk száma legyen I . A módosított kezdeti hézag ekkor

$$h^{(t+\Delta t)} = h_I^{(t+\Delta t)} = h + w_I^{(t+\Delta t)} \quad (2.18)$$

összefüggéssel számítható. A fenti algoritmust a 2.2. ábra szemlélteti.

Eddig az érintkezési feladat kopásra gyakorolt hatását vizsgáltuk, most nézzük meg a kopás milyen hatással van az érintkezési feladatra. Ha az érintkező felületekről anyag távozik, nőni fog a testek közötti hézag. A d hézag függvényt az (1.7) képlettel definiáltuk. Ha szeretnénk figyelembe venni a kopást az érintkezési feladat megoldása során, módosítanunk kell a hézag függvényt oly módon, hogy hozzá kell adnunk a kopást. Jelölje w^e az e -edik test egységnyi felületéről levált anyag mennyiségét az A_c^e egy tetszőleges pontjában ($e = 1, 2$). Ekkor a hézagfüggvény a következő lesz:

$$d = d(\mathbf{u}) = u_n^2 - u_n^1 + h + w^1 + w^2 \quad (2.19)$$

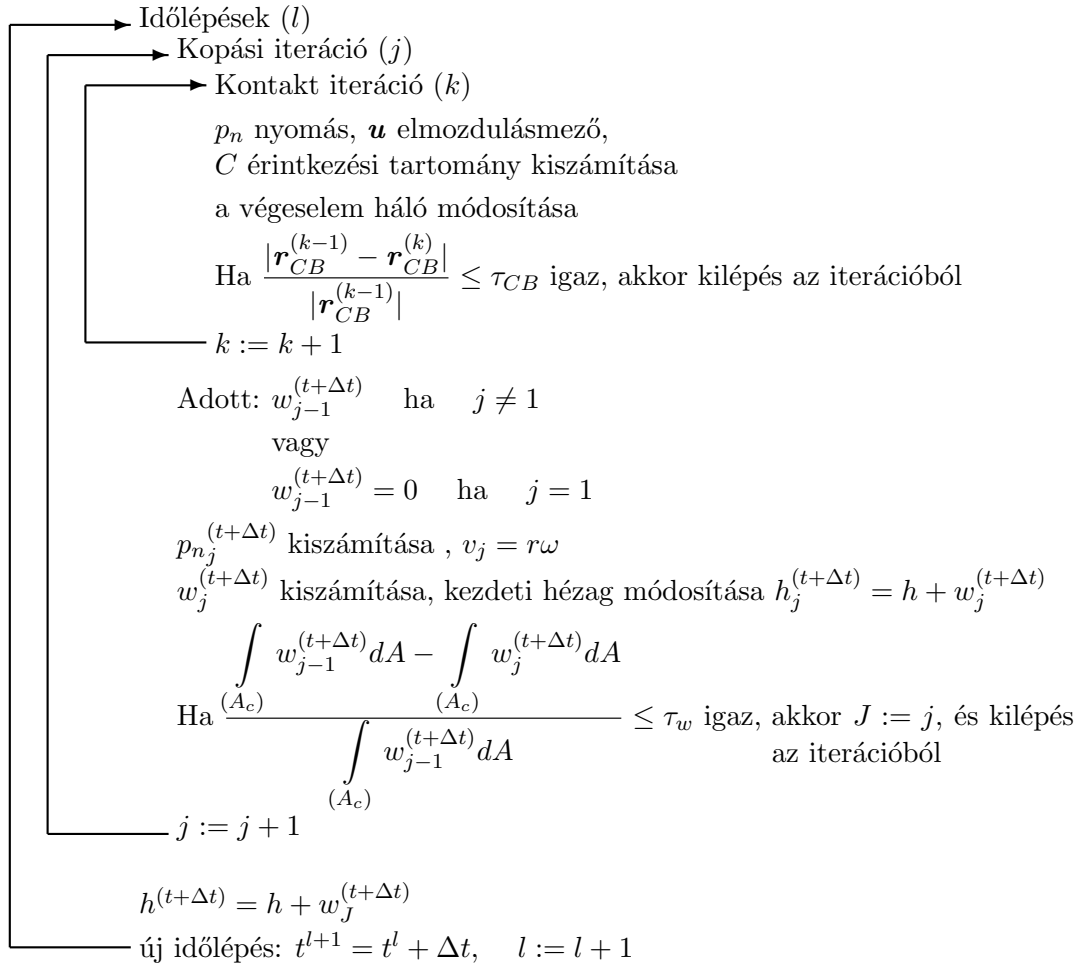
Az érintkezési feladat megoldása során w^e a h kezdeti hézaghoz hasonlóan konstansként viselkedik. Az (1.62) egyenletrendszer $\bar{\mathbf{f}}_h^e$ ($e = 1, 2$) tagja a kopás figyelembevétele miatt kis mértékben módosulni fog, ugyanis az (1.49) egyenlet bal oldalához hozzá kell adni a kopást:

$$h^e + w^e = \mathbf{L}_n^e \mathbf{h}_w^e \quad (2.20)$$

Az (1.50)-tól (1.62)-ig mindenhol a $\mathbf{h}^e$ helyébe $\mathbf{h}_w^e$ -t írva a kopással módosított érintkezési feladat megoldását kapjuk meg.

2.4. A kopott felület alakjának módosítása

A (2.4) képlettel megadtuk, hogy hogyan lehet kiszámítani az egységnyi idő alatt egységnyi felületről lekopott anyag mennyiségét. Ennek segítségével módosítanunk kell a végeelem hálót. A módosítás két lépésből fog állni. Először meg kell határoznunk az A_c^e felületek ($e = 1, 2$) új alakját, majd ennek ismeretében új végeelem felosztást kell létrehoznunk. Az új felosztásra azért van szükség, mert ennek hiányában az A_c^e felületen lévő kis méretű



2.2. ábra. A számítás algoritmus, ahol p_n az érintkezési nyomás, u az elmozdulás mező, C a tényleges érintkezési tartomány, $\mathbf{r}_{CB}^{(k)}$ az k -adik iterációs ciklusban az érintkezési tartomány határához mutató helyvektor, $w_j^{(t+\Delta t)}$, v_j és $p_{n_j}^{(t+\Delta t)}$ a j -edik iterációs ciklusban a $t + \Delta t$ időpillanathoz tartozó kopás, relatív sebesség és érintkezési nyomás értéke, h a testek közötti kezdeti hézag, $h^{(t+\Delta t)}$ a testek közötti hézag a $t + \Delta t$ időlépésben, τ_{CB} és τ_w pedig az egyes iterációs ciklusokból való kilépéshez megadott hibakorlátok.

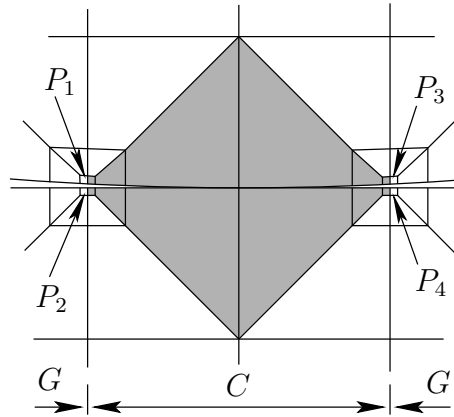
végeselemek néhány időlépés után „elfogynának”.

A kopás számításának kezdetén adott egy végeselem felosztás, és az A_c^e felület kontúrja. Jelölje a testek tetszőleges pontjába mutató helyvektort $\mathbf{r}^e$, az $\mathbf{r}^e$ rz koordinátarendszerben felírt koordinátáit pedig jelölje az r és z érték. A végeselem háló csomóponti koordinátáit és a csomópontokat összekötő élek paramétereit az $\mathbf{x}^e$ vektor tartalmazza. Az $\mathbf{x}^e$ vektor felépítése hasonló, mint az (1.25) képletben definiált $\mathbf{q}^e$ elmozdulás paramétereit tartalmazó vektoré.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} r^1 \\ z^1 \\ r^2 \\ z^2 \\ \vdots \\ r^n \\ z^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^e} \quad (2.21)$$

Az n az alakfüggvények és a paraméterek számát jelenti.

A kopást csak a C tényleges érintkezési felületen kell kiszámítani, mivel a p_n érintkezési nyomás az A_c^e többi részén (a G tartományon) nullával egyenlő. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az alsó és felső testen is csak néhány végeselemet kell módosítani. A 2.3. ábrán kinagyítottuk az A_c^e tartomány C részét, és szürke színnel megjelöltük a C tartományon elhelyezkedő elemeket, felületenként hat darabot. A kopás számítása előtt meg kell oldani



2.3. ábra. Az egyszerűen összefüggő C tényleges érintkezési tartományon elhelyezkedő végeselemek.

az érintkezési feladatot, aminek eredménye képpen a P_1 , P_2 , P_3 és P_4 jelű csomópontok a végeselem hálón pontosan az érintkezési tartomány szélére kerülnek, továbbá megkapjuk a p_n nyomáseloszlás értékeit az integrálási pontokban. Így majd a (2.3) képlet alkalmazásával a kopásértékeket is csak az integrálási pontokban tudjuk meghatározni, de

mint később látni fogjuk, pont erre lesz szükségünk. A (2.3)-ben szereplő v relatív sebességet a $v = \omega r$ képlettel számíthatjuk ki, ahol r helyére szintén az integrálási pontok r koordinátáját kell behelyettesíteni.

Jelölje $\tilde{\mathbf{r}}^e$ a kopás után megmaradt test pontjaiba mutató helyvektort. A kopás utáni kontúrt a C tartományon a következő egyenlettel számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}^1 &= \mathbf{r}^1 - w^1 \mathbf{n}_c & \mathbf{r}^1 &\in C \\ \tilde{\mathbf{r}}^2 &= \mathbf{r}^2 + w^2 \mathbf{n}_c & \mathbf{r}^2 &\in C\end{aligned}\quad (2.22)$$

Az $\mathbf{n}_c$ vektort felírhatjuk az $\mathbf{e}_r$ és $\mathbf{e}_z$ vektorok lineáris kombinációjaként (lásd 1.6. ábra).

$$\mathbf{n}_c = \underbrace{(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{e}_r)}_{\cos \varphi} \mathbf{e}_r + \underbrace{(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{e}_z)}_{\sin \varphi} \mathbf{e}_z \quad (2.23)$$

A φ szög az $\mathbf{e}_r$ és a $\mathbf{n}_c$ vektorok által bezárt szöget jelenti. A φ szög meghatározásához szükségünk van az $\mathbf{n}_c$ vektorra. Egyszerűbb azonban a $\mathbf{t}_c$ vektort meghatározni, az $\mathbf{n}_c$ ennek az óramutató járásával ellentétes irányban 90° -kal történő elforgatásából kapható meg. Képeznünk kell az $\mathbf{r}^e$ vektor C kontúr mentén vett deriváltját, így megkapjuk a kontúr érintő vektorát. Az 1.8. ábrából leolvasható, hogy a felső testen ($e = 1$) a kontúr alakját az (1.63), (1.64) és (1.67) alakfüggvények írják le $\eta = -1$ esetén. A kontúr alakját leíró $\mathbf{r}^1 \in C$ helyvektor csak a ξ koordinátától függ. A felső test kontúrjának $\mathbf{t}_c^1$ érintő egységvektorát az $\mathbf{r}^1$ helyvektor ξ szerinti deriváltjának normálásával kaphatjuk meg. Hasonló módszerrel határozhatjuk meg az alsó test kontúrjának $\mathbf{t}_c^2$ érintő vektorát is, csak ott az (1.65), (1.66) és (1.69) alakfüggvények játszanak szerepet, és $\eta = 1$ esetén kell ξ szerint deriválni.

$$\mathbf{t}_c^1 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}^1}{\partial \xi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}^1}{\partial \xi} \right|}, \quad \mathbf{t}_c^2 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial \xi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial \xi} \right|} \quad \mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2 \in C \quad (2.24)$$

A $\mathbf{t}_c$ vektor a $\mathbf{t}_c^1$ és $\mathbf{t}_c^2$ számtani közepeként adható meg:

$$\mathbf{t}_c = \frac{\mathbf{t}_c^1 + \mathbf{t}_c^2}{2} \quad (2.25)$$

Az (2.23)-ben szereplő $\cos \varphi$ és $\sin \varphi$ értékeit a 90° -os elforgatás miatt a következő összefüggések adják meg:

$$\cos \varphi = \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{e}_z \quad \sin \varphi = -\mathbf{t}_c \cdot \mathbf{e}_r \quad (2.26)$$

Az $\tilde{\mathbf{r}}^e$ helyvektor koordinátáit a (2.21)-hoz hasonlóan az alakfüggvények $\mathbf{N}^e$ mátrixa és a kopott alak geometriáját megadó $\tilde{\mathbf{x}}^e$ paraméterek vektora segítségével állíthatjuk elő:

$$\tilde{\mathbf{r}}^e = \mathbf{N}^e \tilde{\mathbf{x}}^e \quad (2.27)$$

A (2.22) egyenleteket (2.21), (2.27) és (2.22) segítségével mátrix alakban is felírhatjuk:

$$\mathbf{N}^e \tilde{\mathbf{x}}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{x}^e - \mathbf{w}^e \quad (2.28)$$

ahol

$$\mathbf{w}^e = \begin{bmatrix} w^e \cos \varphi \\ -w^e \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

A (2.28)-ban ismeretlenként szerepel a $\tilde{\mathbf{x}}^e$ vektor, amelyet a legkisebb négyzetek módszerével határozhatunk meg:

$$D^e := \int_{(C)} (\mathbf{N}^e \tilde{\mathbf{x}}^e - \mathbf{N}^e \mathbf{x}^e + \mathbf{w}^e)^2 dA = \min. \quad (2.30)$$

Az (2.30) integrálnak akkor lesz minimális az értéke, ha $\tilde{\mathbf{x}}^e$ vektorban lévő összes paraméter szerinti deriváltjai mind nullával lesznek egyenlőek. Szimbolikusan ezt így írhatjuk:

$$\frac{\partial D^e}{\partial \tilde{\mathbf{x}}^e} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

A deriválásokat elvégezve $\tilde{\mathbf{x}}^e$ -re egy lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk, amelyből $\tilde{\mathbf{x}}^e$ kifejezhető.

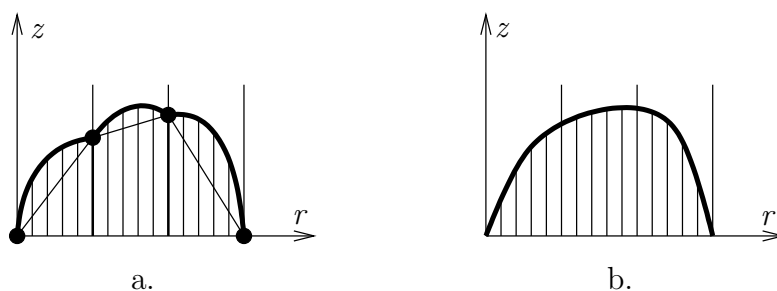
$$\underbrace{\int_{(C)} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dA}_{\mathbf{A}^e} \cdot \tilde{\mathbf{x}}^e = \underbrace{\int_{(C)} (\mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e \mathbf{x}^e - \mathbf{N}^{eT} \mathbf{w}^e) dA}_{\mathbf{b}^e} \quad (2.32)$$

A (2.32) integrálása során figyelembe kell venni, hogy a C integrálási tartomány határán a kopás értéke nulla, mivel ott az érintkezési nyomás is nulla értéket vesz fel. A numerikus integráláshoz a Gauss-Lobatto kvadraturát használjuk, amelynél az integrálási tartomány két széle (-1 és 1) is integrálási pont. A legkisebb négyzetek módszere közelítő módszer, ezért elvileg előfordulhat, hogy $\tilde{\mathbf{x}}^e$ kiszámítása után a C tartomány két határán a kopás nem lesz nulla. Mivel a G tartományon lévő szomszédos elemeknél már nem számoltunk kopást, a kontúr alakját leíró $\tilde{\mathbf{r}}^e$ polinomokból álló függvénynek a C és G határán szakadása lenne. Az alakfüggvényeket azonban szakadásokat nem tudnak leírni, ezért oszcillációk lépnének fel. Hasonlóan a C tartományon lévő két szomszédos végelem közös csomópontjában sem kaphatunk két különböző értéket a paraméterekre. Az így keletkező szakadások illetve oszcillációk elkerülése érdekében az $\tilde{\mathbf{x}}^e$ kiszámítása során elő kell írni, hogy a C tartomány szélén a testek ne kopjanak, továbbá biztosítani kell a C tartományon a kontúr folytonosságát. Ezt a következő egyenlet szemlélteti:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1^e & & & & & & & 0 \\ 0 & & \mathbf{A}_2^e & & & & & & \cdot \\ 0 & & & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \mathbf{A}_6^e & & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1^e \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_6^e \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} z(R_b^{a,f}) \\ \mathbf{b}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{b}_6^e \\ z(R_j^{a,f}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^e} \quad (2.33)$$

ahol $\mathbf{A}_1^e, \mathbf{A}_2^e \dots \mathbf{A}_6^e$ az e -edik test C tartományán lévő végelemekhez tartozó almátrixok az $\mathbf{A}^e$ mátrixban, az $\tilde{\mathbf{x}}_1^e, \tilde{\mathbf{x}}_2^e \dots \tilde{\mathbf{x}}_6^e$ az e -edik test C tartományán lévő végelemekhez tartozó alvektorok az $\tilde{\mathbf{x}}^e$ vektorban és $\mathbf{b}_1^e, \mathbf{b}_2^e \dots \mathbf{b}_6^e$ az e -edik test C tartományán lévő végelemekhez tartozó alvektorok a $\mathbf{b}^e$ vektorban. Az $\tilde{\mathbf{x}}^e$ vektorban úgy rendeztük el a paramétereket, hogy pont az első és az utolsó paraméter tartozzon a C tartomány két széléhez. Itt két esetet kell elkülönítenünk: 1. amikor a felső test paramétereit számoljuk, akkor az R_b^f és R_j^f helyeken vett értékeket kell a $\mathbf{b}^e$ vektorba írni, 2. amikor az alsó testet vizsgáljuk, akkor pedig az R_b^a és R_j^a helyeken vett értékeket kell a $\mathbf{b}^e$ vektorba írni. Ha az $\mathbf{A}^e$ mátrix első és utolsó sorát illetve oszlopát kinullázzuk és a főátlóban lévő helyekre egyet írunk, továbbá a $\mathbf{b}^e$ vektor első illetve utolsó eleméhez beírjuk a megfelelő R_b^a, R_b^f, R_j^a illetve R_j^f helyeken vett értékeket, akkor az $\tilde{\mathbf{x}}^e$ vektor első illetve utolsó eleme is biztosan az R_b^a, R_b^f, R_j^a illetve R_j^f helyeken vett értékek valamelyikét fogja felvenni, és nem fog megjelenni az egyenletrendszer többi egyenletében ismeretlenként. Azokon a helyeken, ahol két szomszédos végelem közös csomópontjának megfelelő paraméter helyezkedik el, az $\mathbf{A}_i^e$ almátrixok és $\mathbf{b}_i^e$ alvektorok ($i = 1, 2, \dots, 6$) egymásba lógnak, pontosabban a megfelelő elemeik összeadódnak. Így az egyenletrendszerben csak egyszer fog előfordulni a két paraméter.

Meg kell jegyeznünk, hogy a számítást másként is elvégezhetjük volna. Mivel a csomóponti paraméterek a csomópontok r és z koordinátáit jelentik, ezek meghatározásához nincs szükség a legkisebb négyzetek módszerére. A többi paraméter kiszámítása azonban már a legkisebb négyzetek módszerével történik. Mivel a csomópontok koordinátái ismertek, az alak közelítésénél egymástól független görbedarabokat kell meghatározni (lásd a 2.4. ábra). Így a (2.33) egyenletrendszer szétesik hat darab független egyenletrendszerre.



2.4. ábra. A felület alakjának meghatározása: a. a csomópontokban közvetlenül a geometriai adatokból, az oldallal kapcsolatos paraméterek értékei a legkisebb négyzetek módszerével, b. mindenhol a legkisebb négyzetek módszerével.

Ha ezt a módszert használnánk, a számítás egy kicsit egyszerűsödne, azonban a felületek alakjában töréspontok jelennének meg, mint ahogy azt a 2.4. a. ábra szemlélteti. A valóságban a kopásnál nem keletkeznek a felületen töréspontok, ezért ezzel a módszerrel pontatlanságot vinnénk be a számításba.

Az A_c^e felületen négy-négy kis méretű végelem helyezkedik el. Néhány időlépés után a kopás hatására jelentős mértékben változhat ezen végelemek alakja, akár „el

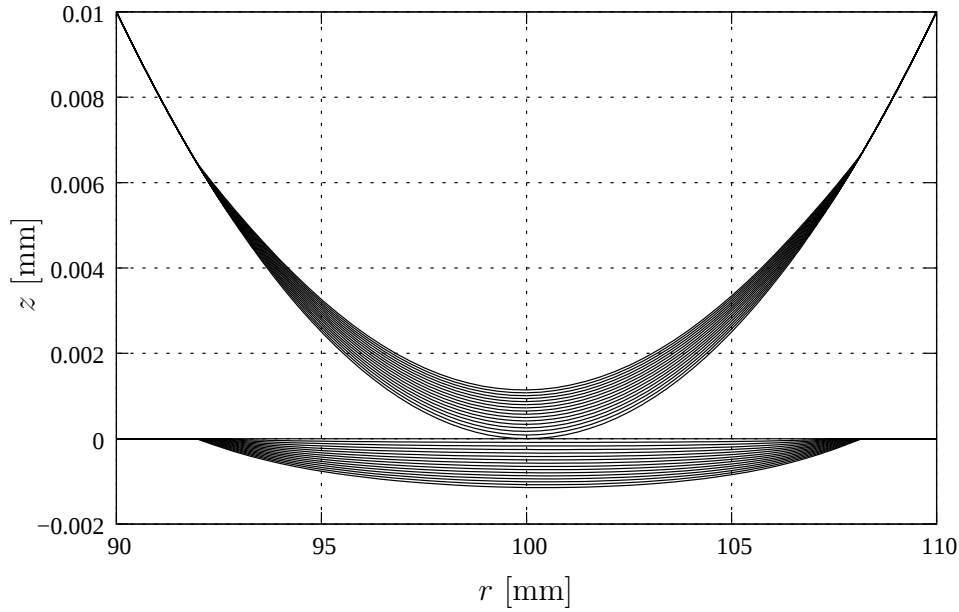
is fogyhatnak”. Hogy ezt megakadályozzuk, a végelemek hálójának a test belsejében lévő csomópontjait a kopásnak megfelelő mértékben arrébb helyezzük, így biztosíthatjuk a végelemek méretének közel változatlanságát.

2.5. Egy számpélda

A következőkben nézzünk egy számpéldát a kopás számítására. A vizsgált testek legyenek ugyan azok, amelyeken az 1. fejezetben az érintkezési feladatot oldottuk meg. A számításhoz az 1.9. pontban megadott méreteket, anyagállandókat és peremfeltételeket fogjuk ismét felhasználni, és a kopás figyelembevétele miatt új anyagállandókat és peremfeltételeket is bevezetünk. A testek elvileg különböző anyagból is készülhetnek, ezért a felső és alsó testek kopási tényezőjét 1 és 2 indexekkel fogjuk jelölni. A k_w kopási tényező értéke közelítőleg 10^{-2} és $10^{-8} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$ között változhat. Mi a számítás során

$k_w^1 = k_w^2 = 0,00002 \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$ értékű kopási tényezővel számoltunk. A (2.11) képletben a (2.3) integrálásához használt konstans értékét $\beta = 0,66$ -ra választottuk.

Az 1.9. pontban megadott peremfeltételek mellett még a következőket kell figyelembe vennünk. Az alsó testet φ irányban rögzítjük, a felsőt pedig $\omega = 5 \frac{1}{\text{s}}$ szögsebességgel megforgatjuk a z tengely körül. A feladat tengelyszimmetrikus, ezért elegendő csak az 1.14. ábrán látható peremfeltételeket előírunk. Az ω szögsebességet a kopás számítása során a (2.3) képletben vesszük figyelembe, ahol a testek érintkező felületeinek adott pontbeli relatív sebességét a $v = \omega r$ összefüggéssel számítjuk ki. Az érintkezési és kopási folyamat erős nemlinearitása miatt nem választhatunk akármekkora időlépéseket. Nagyobb időlépés választása esetén a p -verziós végelemek érzékenysége miatt az elmozdulásmezőben oszcillációk lépnek fel. A (2.15) képletben a kopás a Δt időlépés, a k_w kopási tényező, a v_i relatív sebesség és a $p_{n,i}$ érintkezési nyomás szorzatától függ. Az utóbbi három előre adott, vagy a számítás során kapott érték. Az időlépés nagyságát mi határozhatjuk meg. A tapasztalatunk alapján a fenti adatok mellett a $\Delta t \leq 0,0001\text{s}$ választása esetén még nem lépnek fel oszcillációk, ezért $\Delta t = 0,0001\text{s}$ időlépéssel fogunk számolni. A számítások elvégzésére továbbra is a saját fejlesztésű, C nyelven írt programot használjuk. Az általunk vizsgált időintervallum 0.16 s volt. A kopás számítása során a (2.15) képlettel leírt iterációt alkalmaztuk, amelynek a (2.16)-ben megadott hibahatárát $\tau_w = 10^{-6}$ -ra vettük. A 2.5. ábrán látható a kopott felületek alakja. Csak minden századik időlépéshez tartozó alakot rajzoltuk meg, és az ábrát a z tengely irányába megnyújtottuk, hogy jobban látható legyen a kopási folyamat. A 2.6. ábrán a 2.5. ábra két részletét nagyítottuk ki. Az alsó és a felső testen az érintkezési tartomány bal oldali határának vándorlását figyelhetjük meg, amint egyre nagyobb felületen következik be kopás. A 2.7. ábrán az érintkezési nyomásokat ábrázoltuk az r koordináta függvényében. Az ábrán most is csak minden századik időlépéshez tartozó nyomáseloszlás látható. A 2.8. ábrán kinagyítottuk a 2.7. ábra nyomáseloszlás függvényeit az érintkezési tartomány jobb oldali határának környezetében. Megfigyelhető, hogy a kopás hatására



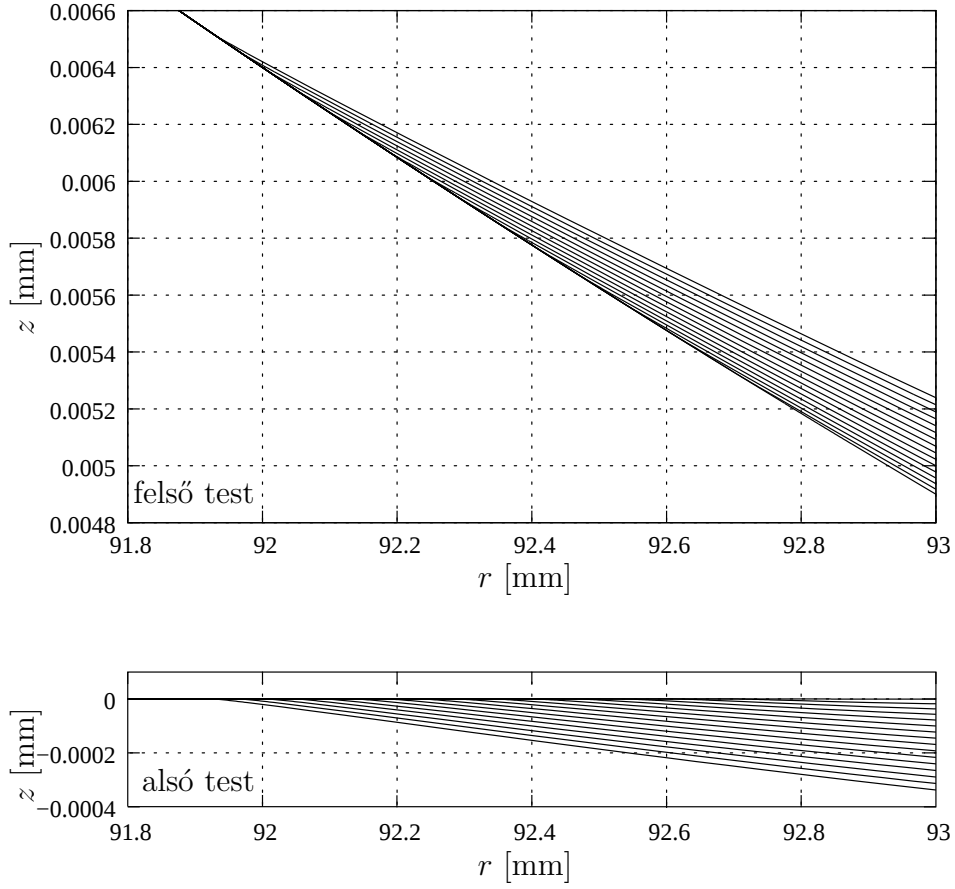
2.5. ábra. A lekopott testek alakja

csökken a maximális nyomás értéke, és a nyomás felfutása az érintkezési tartomány határán egyre meredekebb lesz. Ahogy haladunk előre az időben, egyre több anyag kopik le a testekről, így kevésbé növekszik az érintkező felületek nagysága. A 2.9. ábrán a peremfeltételek teljesülését vizsgáltuk meg. Egy koordináta rendszerben ábrázoltuk a testek közötti hézagból és a büntetőparaméterből kapható $p_n = -c_n d^-$, valamint az elmozdulásmező deriváltjaiból származó $\sigma_n = -\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_c$ felületi feszültséget. A két nagyításon jól látszik, hogy a két görbe alig tér el egymástól. Az eltérés oka főként az lehet, hogy a σ_n feszültséget a deriválás miatt alacsonyabb fokszámú polinomokkal írjuk le, másrészt az érintkezési tartomány határán a nem analitikus pont miatt oszcillációk lépnek fel az elmozdulásmezőben. Az eredményeket a 2.1 táblázatban foglaltuk össze. A táblázat első oszlopában a vizsgált időpont szerepel. A másodiktól az ötödik oszlopig az érintkezési tartomány határát tüntettük fel, sorrendben az érintkezési tartomány bal oldali határa a felső testen (R_b^f), az érintkezési tartomány bal oldali határa a alsó testen (R_b^a), az érintkezési tartomány jobb oldali határa a felső testen (R_j^f), az érintkezési tartomány jobb oldali határa a alsó testen (R_j^a). A hatodik és hetedik oszlopokba a p_n és σ_n feszültségekből számított, felületeket összenyomó erőt írtuk be.

$$F_p = \int_{A_c} p_n dA \text{ és } F_\sigma = \int_{A_c} \sigma_n dA \quad (2.34)$$

Egy időlépésen belül a két érték közötti különbség 1500N körülinek adódik, ami az

$$\varepsilon_F = \frac{F_p - F_\sigma}{F_p} 100\% \quad (2.35)$$



2.6. ábra. A kopott felületek alakja az érintkezési tartomány határának környezetében.

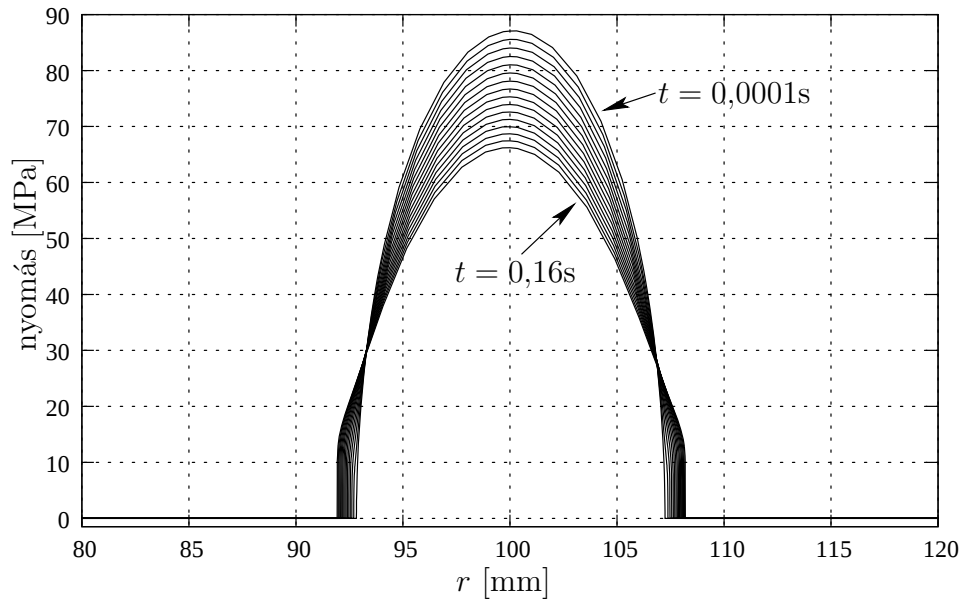
összefüggéssel számolva durván $\varepsilon_F = 0,3\%$ -os eltérésnek felel meg. Végül a nyolcadik oszlopban a felületek közti tangenciális erő látható.

$$T_\tau = \int_{A_c} \tau_n dA \quad (2.36)$$

ahol $\tau_n = \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_c$. Ennek értéke elvileg nulla kellene hogy legyen, mivel az érintkezési feladat megoldásánál a (2.10) alatti relatív sebesség miatt a τ_{rz} feszültséget elhanyagoljuk. Az eltérés nagyságrendileg egyezik az $F_p - F_\sigma$ hibával.

2.6. Tudományos eredmények

A 2. fejezetben a kopási folyamat modellezésével foglalkoztunk. A számítások elvégzéséhez továbbra is p -verziós végeselem-módszert alkalmaztunk. A számításokat teljes egészében saját fejlesztésű számítógépes programmal végeztük. Feltételeztük, hogy a kopás Ar-



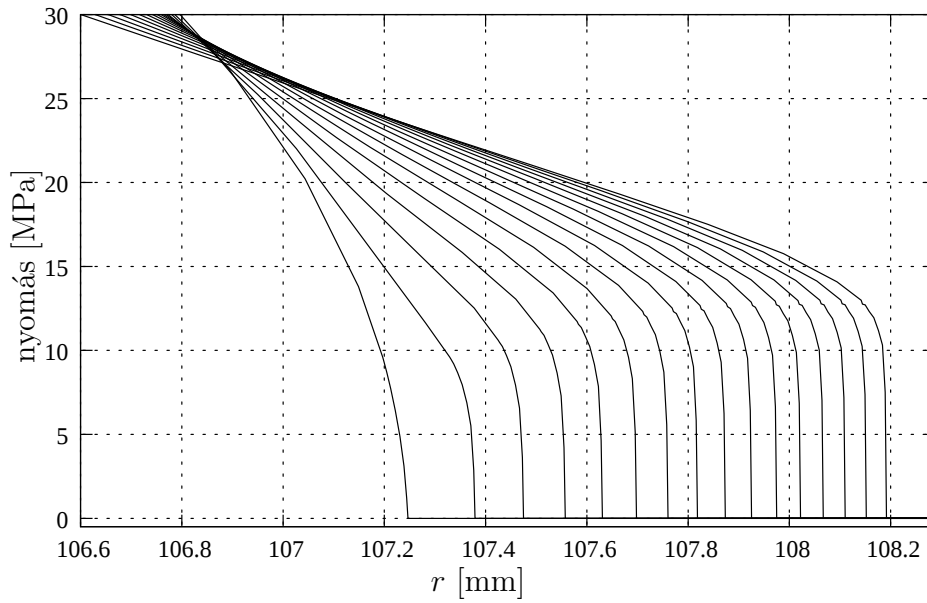
2.7. ábra. Az érintkezési nyomás eloszlása az r koordináta függvényében. Az ábrán csak minden századik időlépéshez tartozó nyomáseloszlást rajzoltuk meg.

chard kopási törvénye szerint megy végbe. Az új tudományos eredményeket a következő pontokban foglaljuk össze:

1. A testek között kialakuló kopás miatt az érintkező felületek alakja változik. Ennek leírására szolgáló Legendre polinomokat felhasználó sorbafejtés együtthatóit a legkisebb négyzetek módszerével határozzuk meg biztosítva a ténylegesen kialakuló érintkezési tartomány széli kopás eltűnését és ezzel a kopási alakot leíró függvény oszcilláció mentességét. A kopás a végeleemes háló módosítását okozza.

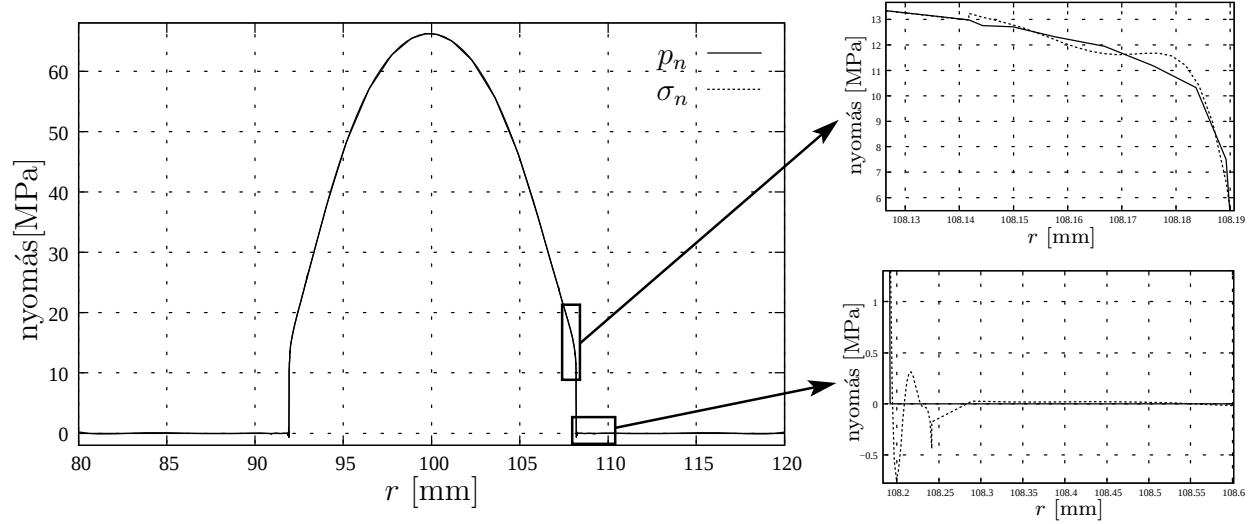
A végelelem hálót a kopásnak megfelelően módosítani kell. A kopásértékek az érintkezés-elvállás feltételének ellenőrzése céljából diszkrét pontokban, nevezetesen az érintkező elemek integrálási pontjaiban (Lobatto pontok) kerülnek kiszámításra. A testek geometriáját a Legendre polinomokat is felhasználó alakfüggvényeken keresztül írjuk le illetve közelítjük. A módosítást csak azon a peremszakaszon végezzük el, ahol a felületek ténylegesen összeérnek, azaz kopás történt.

2. Az időben nemlineárisan lejátszódó kopási folyamatot időlépésenként alkalmazott belső iterációval oldjuk meg a kopási különbségekre előírt korlát betartásával. Az időlépés maximális értéke numerikus kísérletek alapján nyer meghatározást {2}, {3}, {8}.



2.8. ábra. Az érintkezési nyomás eloszlása az érintkezési tartomány határának környezetében.

A kopási folyamat nemlinearitása miatt egy időlépésen belül iterációkat alkalmazunk a kopás számítására. Az iteráción belül megoldjuk az érintkezési feladatot, majd a nyomáseloszlás ismeretében kiszámítjuk a kopást. A kopott felülettel újra megoldjuk az érintkezési feladatot, és újra kiszámítjuk a kopást az eredeti felületen. Ezt addig ismételjük, amíg két egy mászt követő iterációs lépésben kapott kopás különbsége egy előre adott hibahatár alá nem csökken. Az időlépés nagyságát nem választhatjuk meg tetszőlegesen, túl nagy időlépések esetén oszcillációk léptek fel az érintkezési feladat megoldása során az elmozdulásmezőben.



2.9. ábra. A számítás során kapott p_n érintkezési nyomás és az elmozdulás mező deriváltjaiból kapott σ_n feszültség összehasonlítása.

2.1. táblázat.

t [s]	R_b^f [mm]	R_b^a [mm]	R_j^f [mm]	R_j^a [mm]	F_p [N]	F_σ [N]	T_τ [N]
0.01	92.825413	92.825412	107.246754	107.246755	616323.52	617829.88	1697.99
0.02	92.702867	92.702865	107.380044	107.380045	607018.12	608572.25	2302.88
0.03	92.613479	92.613478	107.475908	107.475909	597931.10	599512.00	2386.50
0.04	92.536440	92.536439	107.558031	107.558033	589026.54	590632.09	2124.90
0.05	92.467077	92.467076	107.631526	107.631527	580295.99	581913.34	2019.45
0.06	92.403378	92.403377	107.698701	107.698702	571730.73	573345.59	2000.92
0.07	92.344117	92.344116	107.760892	107.760893	563321.64	564921.07	2003.03
0.08	92.288486	92.288485	107.819180	107.819181	555059.68	556633.13	2003.31
0.09	92.235922	92.235921	107.873895	107.873896	546936.66	548476.20	1990.65
0.10	92.186069	92.186067	107.925869	107.925870	538945.93	540446.02	1972.92
0.11	92.138473	92.138471	107.975279	107.975280	531081.21	532538.46	1947.37
0.12	92.092950	92.092949	108.022394	108.022395	523338.71	524751.06	1911.37
0.13	92.049286	92.049284	108.067466	108.067467	515714.48	517081.01	1870.54
0.14	92.007402	92.007401	108.110687	108.110688	508205.50	509526.00	1825.96
0.15	91.966910	91.966909	108.152202	108.152203	500808.39	502083.75	1776.11
0.16	91.927909	91.927908	108.192181	108.192182	493521.31	494752.38	1726.88

3. fejezet

A hővezetés

Az érintkezési feladatot és a kopási folyamatot eddig sikeresen modelleztük a p -verziós végeselem-módszerrel. Az érintkezési feladat megoldása egy pillanatnyi állapotot jellemzett, a kopás számítása pedig egy hosszabb időbeli folyamatot. Eddig a kopás számításánál nagyvonalúan elhanyagoltuk a keletkezett hőt. Pedig ahol sűrűlódás van, ott hő is keletkezik. Strömberg [33] azt is kimutatta, hogy a kopás hatására is keletkezik hő az érintkező felületeken. A keletkezett hő miatt a vizsgált testek melegedni kezdenek. Ez a hőmérséklet változás a hőtágulás miatt akár jelentősen befolyásolhatja az érintkezési feladat megoldását, és ezen keresztül az egész kopási folyamatot.

Ebben a fejezetben a hővezetés számításának az érintkezési feladattal és kopási folyamattal kapcsolatban felmerülő problémáival foglalkozunk. A hővezetés egyenletének felírását és annak végeselemes diszkretizálását a szakirodalomból ismert módon végezzük el [35, 14]. A nehézség abból ered, hogy a végeselem háló módosítása után az új hálón a régi hálón kiszámolt, de az új hálóra még át nem helyezett hőmérséklet mezővel kell számolnunk. A probléma megoldása megtalálható az [31]-ben és a [32]-ben is.

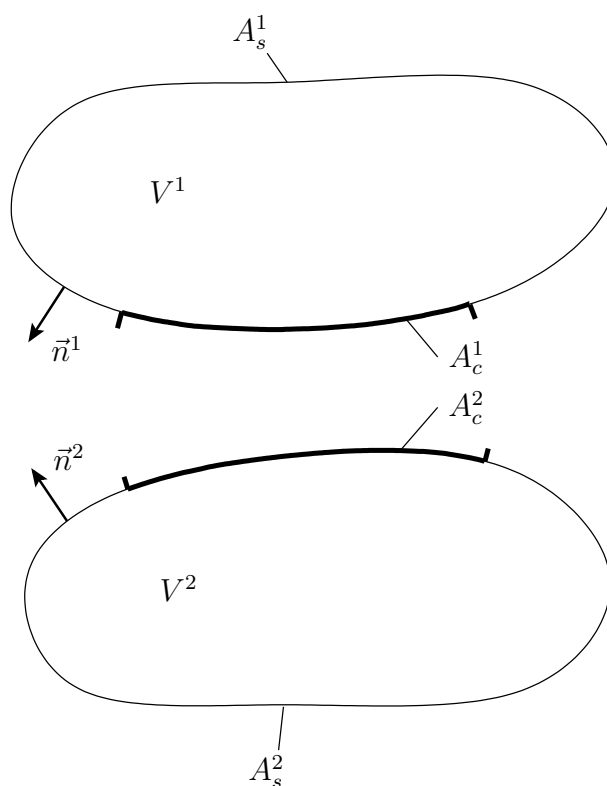
3.1. Célkitűzések

Az értekezés ezen fejezetében a hővezetési feladatot szeretnénk megoldani p -verziós végeselem-módszerrel. Az elvégzendő feladatot a következő célkitűzésekben foglalhatjuk össze.

1. A hővezetési egyenlet felírása, a peremfeltételek megfogalmazása.
2. A hővezetés egyenletének gyenge alakban történő megfogalmazása.
3. A végeselem diszkretizáció elvégzése.
4. Eljárás kidolgozása, amely segítségével a hőmérséklet paraméterek átszámíthatók egyik végeselem hálóról a másikra.
5. Számítógépes program készítése, amely segítségével a hőmérséklet paraméterek átszámítását el tudjuk végezni.

3.2. A hővezetés egyenlete

A továbbiakban is az 1. fejezetben szereplő gyűrű alakú testeket fogjuk vizsgálni, viszont a tárgyalásra kerülő egyenletek érvényesek tetszőleges alakú testekre is. Feltételezzük, hogy hővezetés szempontjából a vizsgált testek homogén és izotrop tulajdonságúak. Feltételezzük továbbá, hogy a vizsgált hőmérséklet tartományban a testek hővezetési tényezői, a felületi hőátadási tényezők, a testek fajhői és sűrűségei állandók. A vizsgált testek helyezkedjenek el a V_1 és V_2 térbeli tartományokban, amelyeket az A^1 és A^2 felületek határolnak (lásd 3.1. ábra). Osszuk a testek felületét két részre. Jelölje A_c^e ($e = 1, 2$) a



3.1. ábra. A vizsgált V^1 és V^2 térfogatú testek felületét két tartományra osztottuk fel. Az A_c^1 illetve A_c^2 felületeken a testek egymással érintkeznek, az A_s^1 illetve A_s^2 felületeken pedig a környezetükkel.

felület azon részét, amelyen a két test érintkezik egymással. Az érintkezés pillanatában nyilván $A_c^1 = A_c^2$. A sűrűdés hatására keletkezett hő az A_c^e felületen keresztül fog a testekbe folyni, és a két test ezen a felületen tud egymásnak hőt átadni. Feltételezzük, hogy a testek csak az érintkező felületeiken keresztül cserélnek hőt, az egyéb úton történő hőcserét (pl. sugárzás útján) elhanyagoljuk. Jelölje A_s^e ($e = 1, 2$) a felület azon részét, amelyen keresztül a testek a környezetükkel tudnak hőt cserélni. Igaz az, hogy $A_c^e \cup A_s^e = A^e$ és $A_c^e \cap A_s^e = \emptyset$. Egy tetszőleges időpillanatban a testekben kialakuló $T(\mathbf{r}, t)$

hőmérséklet eloszlást a hővezetés differenciálegyenletével tudjuk meghatározni:

$$\rho^e c^e \dot{T}^e(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot (k^e \nabla T^e(\mathbf{r}, t)) + Q^e \quad (3.1)$$

Ahol $\mathbf{r}$ a test egy pontjának a helyvektora, ρ^e az e -edik test sűrűsége, c^e az e -edik test fajhője, k^e az e -edik test hővezetési tényezője és Q^e pedig az e -edik testben keletkezett hő. A $T^e(\mathbf{r}, t)$ hőmérséklet mezőnek ki kell elégítenie a következő kezdeti feltételt:

$$T^e(\mathbf{r}, 0) = T_0^e(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in V^e \quad (3.2)$$

és peremfeltételeket:

$$q_c^e = -k^e \nabla T^e(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^e = q_{fr}^e(\mathbf{r}, t) + q_{ex}^e(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{r} \in A_c^e \quad (3.3)$$

$$q_s^e = -k^e \nabla T^e(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^e = q_{co}^e(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{r} \in A_s^e \quad (3.4)$$

ahol $T_0^e(\mathbf{r})$ a kezdeti hőmérséklet eloszlás a testekben, $\mathbf{n}^e$ a testek A^e felületéből kifelé mutató normális egységvektor, q_c^e az e -edik test A_c^e felületén lévő hőfluxus, q_s^e pedig az e -edik test A_s^e felületén lévő hőfluxus. A q_c^e hőfluxus két részből áll. Az első része a súrlódásból és kopásból keletkező hőt tartalmazza. Strömberg számítása alapján [33]:

$$q_{fr,w}^1(\mathbf{r}, t) = -c_D \beta [k_w^1 p_n(\mathbf{r}, t)^2 + \mu p_n(\mathbf{r}, t)] v(\mathbf{r}, t) \quad (3.5)$$

és

$$q_{fr,w}^2(\mathbf{r}, t) = -c_D (1 - \beta) [k_w^2 p_n(\mathbf{r}, t)^2 + \mu p_n(\mathbf{r}, t)] v(\mathbf{r}, t) \quad (3.6)$$

ahol μ a súrlódási tényező, k_w^e a kopási tényező, c_D kísérleti úton meghatározható konstans ($c_D \leq 1$). Megmondja, hogy a súrlódási teljesítménynek hány százaléka alakul hővé. A $\beta = \frac{\bar{\alpha}^1}{\bar{\alpha}^1 + \bar{\alpha}^2}$ meghatározza, hogy a keletkezett hő mekkora része folyik az egyik illetve a másik testbe ($0 \leq \beta \leq 1$) [34]. Az $\bar{\alpha}^1$ és $\bar{\alpha}^2$ a testek és a környezet közötti felületi hőátadási tényezőt jelentik. A (3.5)-ben és a (3.6)-ban $v(\mathbf{r}, t)$ és $p_n(\mathbf{r}, t)$ jelöli a testek relatív sebességét és az érintkezési nyomást a $\mathbf{r} \in A_c$ helyvektorú pontban és a t időpillanatban. A q_c^e hőfluxus második része abból származik, hogy a két test A_c^e felületi hőmérséklete ugyanabban a pontban különbözhet, vagyis a hőmérséklet mezőnek szakadása lehet az A_c^e -n. Az ebből eredő hőfluxus a következő lesz:

$$q_{ex}^e(\mathbf{r}, t) = \hat{\alpha} (T^e(\mathbf{r}, t) - T^{e*}(\mathbf{r}, t)) \quad (3.7)$$

ahol $\hat{\alpha}$ a testek közötti felületi hőátadási tényező, e és e^* pedig a testek sorszáma. Ha $e = 1$, akkor $e^* = 2$ és ha $e = 2$ akkor $e^* = 1$. A testek az A_s^e felületükön keresztül hőt adnak le a környezetüknek. Az ebből eredő hőfluxus az A_s^e felületeken a következő lesz:

$$q_{co}^e(\mathbf{r}, t) = \bar{\alpha}^e (T^e(\mathbf{r}, t) - T_\infty) \quad (3.8)$$

ahol $\bar{\alpha}^e$ a testek és a környezet közötti felületi hőátadási tényező, T_∞ pedig a külső környezet hőmérséklete. Az A_c^e és A_s^e felületek pontos elhelyezkedése és nagysága az érintkezési feladat megoldásával határozható meg.

3.3. A hővezetési feladat gyenge alakja

A (3.1) differenciálegyenletet, beleértve a (3.2)–(3.4) alatti kezdeti- és peremfeltételeket is, végeelem-módszerrel szeretnénk megoldani. Ehhez először is fel kell írunk a hővezetés egyenletének gyenge alakját, amelyet (3.1)–(3.4)-ből a Galerkin módszer alkalmazásával kaphatunk meg. Szorozzuk meg (3.1)-et egy $\Theta^e = \Theta^e(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{r} \in V^e$) függvénnyel, amelyet virtuális hőmérsékletnek fogunk nevezni, és amely ugyan azoknak a peremfeltételeknek tesz eleget, mint a $T^e(\mathbf{r}, t)$ tömorséklet mező. Integráljunk az így kapott egyenletet a $V^1 \cup V^2$ térfogaton:

$$\mathcal{T} := \sum_{e=1}^2 \int_{V^e} (\rho^e c^e \dot{T}^e - \nabla \cdot (k^e \nabla T^e) - Q^e) \Theta^e dV = 0 \quad (3.9)$$

Alakítsuk át a zárójelben lévő középső tagot:

$$[\nabla \cdot (k^e \nabla T^e)] \Theta^e = \nabla \cdot [(k^e \nabla T^e) \Theta^e] - k^e \nabla T^e \cdot \nabla \Theta^e \quad (3.10)$$

A (3.10) jobb oldalán álló első tagra alkalmazzuk a Gauss tételt:

$$\int_{V^e} \nabla \cdot [(k^e \nabla T^e) \Theta^e] dV = \int_{A^e} (k^e \nabla T^e) \cdot \mathbf{n}^e \Theta^e dA \quad (3.11)$$

Ezzel (3.9)-t a következő alakban írhatjuk:

$$\sum_{e=1}^2 \left[\int_{V^e} \rho^e c^e \dot{T}^e \Theta^e dV + \int_{A^e} q_n^e \Theta^e d\Gamma + \int_{V^e} k^e \nabla T^e \cdot \nabla \Theta^e dV - \int_{V^e} Q^e \Theta^e dV \right] = 0 \quad (3.12)$$

ahol $q_n^e = -k^e \nabla T^e \cdot \mathbf{n}^e$ a hőfluxus vektor A^e felületre merőleges összetevőjének nagysága, amely pozitív, ha a hő kifelé folyik a testből. Az A_c^e és A_s^e felületeken keresztülfolyó hőt a (3.3)–(3.4) peremfeltételekben írtuk elő. A belső hőforrások nincsenek a rendszerben, ezért $Q^e = 0$. Helyettesítsük ezeket be a (3.12)-be, és fejtsük ki az összegzést:

$$\begin{aligned} & \int_{V^1} \rho^1 c^1 \dot{T}^1 \Theta^1 dV + \int_{V^1} k^1 \nabla T^1 \cdot \nabla \Theta^1 dV + \int_{A_s^1} \bar{\alpha}^1 (T^1 - T_\infty) \Theta^1 dA - \int_{A_c^1} c_D \beta (k_w^1 (p_n)^2 + \mu p_n) v \Theta^1 dA + \\ & + \int_{A_c^1} \hat{\alpha} (T^1 - T^2) \Theta^1 dA + \int_{V^2} \rho^2 c^2 \dot{T}^2 \Theta^2 dV + \int_{V^2} k^2 (\nabla T^2 \cdot \nabla \Theta^2) dV + \\ & + \int_{A_s^2} \bar{\alpha}^2 (T^2 - T_\infty) \Theta^2 dA - \int_{A_c^2} c_D (1 - \beta) (k_w^2 (p_n)^2 + \mu p_n) v \Theta^2 dA + \int_{A_c^2} \hat{\alpha} (T^2 - T^1) \Theta^2 dA = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4. Végeselemes diszkretizálás

Az (3.1) egyenlet a (3.2)–(3.4) feltételek mellett tetszőleges alakú tartományokra nem tudjuk analitikus módszerekkel megoldani, ezért közelítő módszereket kell alkalmaznunk. A hőmérséklet mező függvénye az $\mathbf{r}$ helyvektornak és a t időnek. A hőmérséklet mező helytől való függésének meghatározásához végeselem-módszert fogunk használni. Az időtől való függés meghatározásához véges differencia módszert alkalmazunk. A matematikai leírás egyszerűsítésének kedvéért a továbbiakban hengerkoordinátákra térünk át. A hővezetési feladatot, hasonlóan a rugalmasságtani feladathoz kétdimenziós matematikai modellel írjuk le. Ez azt jelenti, hogy az alakfüggvények csak az r és a z koordinátáktól fognak függeni. A hőmérséklet mezőt a következő alakban közelítjük:

$$T^e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}^e(r, z)\mathbf{t}^e(t) \quad (3.14)$$

Részletesebben kiírva:

$$T^e(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} N_1(r, z) & N_2(r, z) & N_3(r, z) & \cdots & N_n(r, z) \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} T_{[1]}(t) \\ T_{[2]}(t) \\ T_{[3]}(t) \\ \vdots \\ T_{[n]}(t) \end{bmatrix}^e \quad (3.15)$$

Az N alakfüggvények csak a helykoordinátától függenek, a T paraméterek pedig függvényei az időnek. (3.14) és (3.15)-hez hasonlóan közelíthetjük a Θ^e virtuális hőmérsékletet is.

$$\Theta^e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}^e(r, z)\boldsymbol{\vartheta}^e(t) \quad (3.16)$$

Helyettesítsük be (3.13)-be (3.14)-t és (3.16)-t. Hengerkoordináta rendszerben az infinitesimális térfogatelemet $dV = r dr d\varphi dz$ alakban írhatjuk, ahol r a Jacobi determináns. Mivel az (3.13) integranduszai függetlenek φ -től, ezért a φ szerinti integrálást el tudjuk végezni.

$$\begin{aligned} 0 = & 2\pi \left[\int_{\tilde{V}^1} \rho^1 c^1 \boldsymbol{\vartheta}^{1T} \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^1 \mathbf{t}^1 r dr dz + \int_{\tilde{V}^1} k^1 \left(\boldsymbol{\vartheta}^{1T} \frac{\partial \mathbf{N}^{1T}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{N}^1}{\partial r} \mathbf{t}^1 + \boldsymbol{\vartheta}^{1T} \frac{\partial \mathbf{N}^{1T}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}^1}{\partial z} \mathbf{t}^1 \right) r dr dz + \right. \\ & \left. + \int_{\tilde{A}_s^1} \bar{\alpha}^1 \boldsymbol{\vartheta}^{1T} \mathbf{N}^{1T} (\mathbf{N}^1 \mathbf{t}^1 - T_\infty) r ds - \int_{\tilde{A}_c^1} c_D \beta (k_w^1(p_n)^2 + \mu p_n) v \boldsymbol{\vartheta}^{1T} \mathbf{N}^{1T} r ds + \int_{\tilde{A}_c^1} \hat{\alpha} \boldsymbol{\vartheta}^{1T} \mathbf{N}^{1T} (\mathbf{N}^1 \mathbf{t}^1 - \mathbf{N}^2 \mathbf{t}^2) r ds \right] + \\ & + 2\pi \left[\int_{\tilde{V}^2} \rho^2 c^2 \boldsymbol{\vartheta}^{2T} \mathbf{N}^{2T} \mathbf{N}^2 \mathbf{t}^2 r dr dz + \int_{\tilde{V}^2} k^2 \left(\boldsymbol{\vartheta}^{2T} \frac{\partial \mathbf{N}^{2T}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{N}^2}{\partial r} \mathbf{t}^2 + \boldsymbol{\vartheta}^{2T} \frac{\partial \mathbf{N}^{2T}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}^2}{\partial z} \mathbf{t}^2 \right) r dr dz + \right. \\ & \left. + \int_{\tilde{A}_s^2} \bar{\alpha}^2 \boldsymbol{\vartheta}^{2T} \mathbf{N}^{2T} (\mathbf{N}^2 \mathbf{t}^2 - T_\infty) r ds - \int_{\tilde{A}_c^2} c_D \beta (k_w^2(p_n)^2 + \mu p_n) v \boldsymbol{\vartheta}^{2T} \mathbf{N}^{2T} r ds + \int_{\tilde{A}_c^2} \hat{\alpha} \boldsymbol{\vartheta}^{2T} \mathbf{N}^{2T} (\mathbf{N}^2 \mathbf{t}^2 - \mathbf{N}^1 \mathbf{t}^1) r ds \right] \quad (3.17) \end{aligned}$$

Az integrálási tartományok jelölésénél a felülvonás arra utal, hogy a φ szerinti integrálás elvégzése után a $\bar{V}^e$ már felületi integrálást, az $\bar{A}_c^e$ és $\bar{A}_s^e$ pedig vonal menti integrálást jelent. Az infinitezimális ds hosszt a $ds = \sqrt{dr^2 + dz^2}$ képlettel számolhatjuk ki. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{(1)} &= \rho^1 c^1 \int \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^1 r dr dz & \mathbf{M}^{(2)} &= \rho^2 c^2 \int \mathbf{N}^{2T} \mathbf{N}^2 r dr dz \\
\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} &= k^1 \int_{\bar{V}^1} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^{1T}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{N}^1}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{N}^{1T}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}^1}{\partial z} \right) r dr dz & \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} &= k^2 \int_{\bar{V}^2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}^{2T}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{N}^2}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{N}^{2T}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}^2}{\partial z} \right) r dr dz \\
\tilde{\mathbf{C}}^{(1)} &= \bar{\alpha}^1 \int_{\bar{A}_s^1} \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^1 r ds & \tilde{\mathbf{C}}^{(2)} &= \bar{\alpha}^2 \int_{\bar{A}_s^2} \mathbf{N}^{2T} \mathbf{N}^2 r ds \\
\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(1)} &= \hat{\alpha} \int_{\bar{A}_c^1} \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^2 r ds & \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(2)} &= \hat{\alpha} \int_{\bar{A}_c^2} \mathbf{N}^{2T} \mathbf{N}^1 r ds \\
\tilde{\mathbf{f}}^{(1)} &= c_D \beta \int_{\bar{A}_c^1} (k_w^1(p_n)^2 + \mu p_n) v \mathbf{N}^{1T} r ds & \tilde{\mathbf{f}}^{(2)} &= c_D (1 - \beta) \int_{\bar{A}_c^2} (k_w^2(p_n)^2 + \mu p_n) v \mathbf{N}^{2T} r ds
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Az egyszerűség kedvéért a külső környezet hőmérséklete legyen $T_\infty = 0^\circ\text{C}$. Ez a feltevés az általánosságot nem korlátozza, mivel a hővezetés (3.1) egyenletében csak a hőmérséklet változások (deriváltak) szerepelnek, a hőmérséklet skála nullpontját mi szabhatjuk meg. Azokra a végelemekre, amelyeknek egy oldala sem esik az A_c^e felületre, a $\tilde{\mathbf{C}}^{(e)}$ és $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$ integrálok nullával lesznek egyenlőek. Hasonlóan nullát ad a $\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(e)}$ -t definiáló integrál, ha a végelem nem az A_s^e felületen helyezkedik el. Az (3.18)-ben definiált jelölésekkel az (3.17) egyszerűbb alakban írható:

$$\begin{aligned}
&\vartheta^1 \left(\mathbf{M}^{(1)} \dot{\mathbf{t}}^1 + \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} \mathbf{t}^1 + \tilde{\mathbf{C}}^{(1)} \mathbf{t}^1 + \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(1)} \mathbf{t}^1 - \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(1)} \mathbf{t}^2 - \tilde{\mathbf{f}}^{(1)} \right) + \\
&+ \vartheta^2 \left(\mathbf{M}^{(2)} \dot{\mathbf{t}}^2 + \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} \mathbf{t}^2 + \tilde{\mathbf{C}}^{(2)} \mathbf{t}^2 + \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(2)} \mathbf{t}^2 - \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(2)} \mathbf{t}^1 - \tilde{\mathbf{f}}^{(2)} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

A Θ^1 és Θ^2 virtuális hőmérsékletek függetlenek egymástól, hiszen különböző testekhez tartoznak, értékük pedig tetszőleges nagyságú lehet. Ezért a (3.19) egyenlet bal oldala csak úgy lehet nullával egyenlő, ha a zárójelekben szereplő kifejezések nullával egyenlőek.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{(1)} \dot{\mathbf{t}}^1 + \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} \mathbf{t}^1 + \tilde{\mathbf{C}}^{(1)} \mathbf{t}^1 + \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(1)} \mathbf{t}^1 - \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(1)} \mathbf{t}^2 - \tilde{\mathbf{f}}^{(1)} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{M}^{(2)} \dot{\mathbf{t}}^2 + \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} \mathbf{t}^2 + \tilde{\mathbf{C}}^{(2)} \mathbf{t}^2 + \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(2)} \mathbf{t}^2 - \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(2)} \mathbf{t}^1 - \tilde{\mathbf{f}}^{(2)} &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A két test az A_c^e felületen kölcsönhatásban van egymással, ezért az egyenletek nem lesznek függetlenek egymástól. A (3.20) egyenleteket összevonva kapjuk a következőt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{t}}^1 \\ \dot{\mathbf{t}}^2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{t}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{C}}^{(1)} + \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(1)} & -\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(1)} \\ -\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(2)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + \tilde{\mathbf{C}}^{(2)} + \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}^1 \\ \mathbf{t}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{f}}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}} = \mathbf{0} \tag{3.21}$$

A (3.21) egy elsőrendű közönséges differenciál egyenlet, közelítő megoldásához az úgynevezett ϑ -módszert fogjuk használni [14]. A diszkretizáció elvégzése után a hőmérséklet eloszlást időlépésenként tudjuk meghatározni.

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{t}^{\{n+1\}} - \mathbf{t}^{\{n\}}}{\Delta t} + \bar{\mathbf{K}}(\vartheta \mathbf{t}^{\{n+1\}} + (1 - \vartheta) \mathbf{t}^{\{n\}}) - (\vartheta \bar{\mathbf{f}}^{\{n+1\}} + (1 - \vartheta) \bar{\mathbf{f}}^{\{n\}}) = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

A (3.22) egyenletben a kapcsos zárójelben lévő felső index az időlépések sorszámát jelöli. A ϑ értékére egy 0 és 1 közötti számot kell választanunk. A ϑ választásától függően nem mindegy mekkorának választjuk az időlépéseket [14]. A $\vartheta = 0$ választás az úgynevezett explicit sémát eredményezi. Ennél az esetnél a Δt időlépésnek a következő feltételt kell kielégítenie ahhoz, hogy a megoldás numerikusan stabil legyen:

$$\Delta t < \frac{2}{\lambda_i} \quad (3.23)$$

ahol λ_i a

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{t} + \mathbf{K} \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

általánosított sajátérték feladat sajátértékeit jelenti. Mivel a (3.23) feltételnek bármely sajátértékre teljesülnie kell, elég csak a legnagyobb λ_1 sajátértéket megkeresni. A $\vartheta = 1$ választása esetén implicit sémáról beszélünk. Ennél a numerikus stabilitás nem függ az időlépés nagyságától. A $\vartheta = \frac{1}{2}$ esetet centrális vagy Crank-Nicolson sémának hívják. Ez szintén feltétel nélkül stabil, és míg az előző két séma első rendben pontos, addig az utóbbi másod rendben pontos módszer. Általános esetben elmondható, hogy a $0 \leq \vartheta < \frac{1}{2}$ választás esetén a séma a

$$\lambda_i \Delta t < \frac{2}{1 - 2\vartheta} \quad (3.25)$$

feltétel teljesülése esetén stabil, míg $\vartheta \geq \frac{1}{2}$ esetén feltétel nélkül stabil.

Rendezzük át az (3.22) egyenletet a következő alakra:

$$\underbrace{(\mathbf{M} + \Delta t \bar{\mathbf{K}} \vartheta)}_{\mathbf{K}} \underbrace{\mathbf{t}^{\{n+1\}}}_{\mathbf{t}} - \underbrace{((\mathbf{M} - \Delta t \bar{\mathbf{K}}(1 - \vartheta)) \mathbf{t}^{\{n\}} + \Delta t (\vartheta \bar{\mathbf{f}}^{\{n+1\}} + (1 - \vartheta) \bar{\mathbf{f}}^{\{n\}}))}_{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

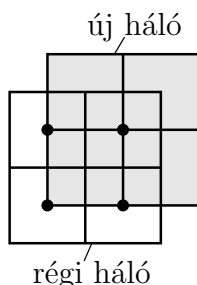
Az $\mathbf{f}$ vektor csak az n -edik időlépés hőmérséklet eloszlásának $\mathbf{t}^{\{n\}}$ paramétereit tartalmazza. Az $\mathbf{t}^{\{n\}}$ értékét ismertnek tételezzük fel, és ebből kiindulva határozzuk meg az $n + 1$ -edik időlépésben létrejövő hőmérséklet eloszlás $\mathbf{t}^{\{n+1\}}$ paramétereit. Így a (3.1) differenciál egyenlet megoldását visszavezettük a

$$\mathbf{K} \mathbf{t} = \mathbf{f} \quad (3.27)$$

lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására. Mielőtt azonban nekiállnánk megoldani a feladatot, egy újabb problémát kell megoldanunk.

3.5. Hőmérséklet paraméterek átszámítása két végelem háló között

Térjünk vissza egy kicsit az 1. és 2. fejezetben tárgyalt problémára. Két egymással érintkező, és egymáson elcsúszó (forgó) gyűrű alakú test kopási folyamatát vizsgáltuk meg. A kopás hatására az érintkező felületek nagysága időben változott. Az érintkezési feladat megoldása során a végelem háló egy csomópontjának mindig az érintkezési tartomány határára kellett esnie, hogy a megoldásban fellépő oszcillációkat elkerüljük. Ez azt jelentette, hogy minden egyes időlépésben más és más végelem háló szükséges a számítás pontos elvégzéséhez. Ezt a feladatot most a hővezetés számításával szeretnénk kibővíteni, azaz szeretnénk figyelembe venni a súrlódás során keletkezett hőt és a hőtágulás okozta változást az érintkezési feladat megoldásában. Az előző pontban láttuk, hogy a hővezetési feladat végeselemes megoldása a (3.27) lineáris egyenletrendszerre vezet. Az egyenletrendszer jobb oldalán álló $\mathbf{f}$ vektor tartalmazza a n -edik időlépésben kialakult hőmérséklet eloszlást, míg a bal oldalon az $n + 1$ -edik időlépéshez tartozó hőmérséklet eloszlás szerepel. A baj azzal van, hogy az fent említett okok miatt az n -edik és $n + 1$ -edik időlépés paramétereit nem ugyanazon a végelem hálón értelmezzük, az (3.26) egyenletnek viszont csak akkor van értelme, ha benne azonos hálón értelmezett paraméterek szerepelnek. A feladat tehát az, hogy a hőmérséklet mezőt át kell számítani egyik végelem hálóról a másikra (lásd 3.2. ábra). A probléma megoldására számos módszer áll rendelkezésre



3.2. ábra. A régi és az új végelem háló egy lehetséges egymáshoz viszonyított elhelyezkedése.

kezésre a szakirodalomban (főként képlékeny alakváltozások számításánál fordul elő hasonló probléma), viszont a megoldás általában a h -verziós végelem-módszeren alapszik. A végelem-módszerben a magasabb fokú approximációnak két megközelítése létezik. Az elsőben Lagrange polinomokkal írják le a közelítendő mezőt. A Lagrange polinomok úgy vannak megkonstruálva, hogy a háló egyes csomópontjaiban az értékük zérus, kivéve egyet, ahol értékük egy. Minden csomópont-hoz tartozik egy olyan polinom, amelynek értéke a kérdéses csomópontban egy. Így a polinomokhoz tartozó paraméterek mind a csomóponti értékeket adják meg. Lagrange polinomokat használva a hőmérséklet mezőt könnyen átszámíthatjuk az új végelem hálóra. Meg kell határoznunk az új csomópontok helyén a régi hálóval számított hőmérséklet értékeket. Ezek lesznek az új háló paramétereit,

vagy csomóponti értékei. Erre láthatunk példát az [36, 37, 38, 39]-ben.

A másik megközelítésben, amelyet mi is használunk, a közelítő polinomokat Legendre polinomokból konstruáljuk meg, mint ahogy az a 1.7 pontban meg is tettük. Fontos kiemelni, hogy ezeknél a polinomoknál a paraméterek értékei nem egyeznek meg a közelített mező fizikai értékeivel. Mi négy csomópontú végeselemeket használunk, de a közelítés fokszámától függően négynél akár jóval több paraméter is tartozhat egy végeselemhez. A paramétereket három csoportba sorolhatjuk. Az első csoportban az (1.63)-(1.66) alakfüggvények helyezkednek el. Ezek kivételt képeznek, mert paramétereik megegyeznek a közelített mező csomóponti értékeivel. A második csoportban a (1.67)-(1.70) alakfüggvények állnak. Ezek a végeselemek oldaléleivel kapcsolatos függvények, paramétereiknek nincsen fizikai jelentése, és nem köthetők csomópontokhoz, vagy egyéb pontokhoz. A harmadik csoportban lévő elemeket az (1.71)-(1.74) képletek definiálják. Ezek a végeselem „belsejében” különböznek csak nullától, paramétereikhez szintén nem köthető semmilyen fizikai mennyiség. Ezek után belátható, hogy az első megközelítésben használt módszer itt nem működik. Megoldást jelenthet a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása, amelyben lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza a feladatot. Ezt a módszert sikeresen alkalmazták h -verziós végeselem-módszerrel megoldott problémák esetén, ahol biztosítani kellett a lokális vagy globális egyensúly fenn tartását [40], vagy olyan esetekben, ahol kisebb méretű végeselemekről kellett átszámítani egy mezőt durvább felosztású hálóra [41]. Az említett cikkekben leírtakhoz hasonlóan próbáljuk megoldani a problémát p -verzió esetére is.

A (3.26) egyenletben szereplő hőmérséklet paraméterek $\mathbf{t}^{\{n\}}$ és $\mathbf{t}^{\{n+1\}}$ vektorai a kopás számítása utáni módosított hálón lettek értelmezve, de nekünk az eredeti hálón adott hőmérséklet paraméterek vektora áll a rendelkezésünkre, amit $\tilde{\mathbf{t}}^{\{n\}}$ -nel fogunk jelölni. Jelölje $\tilde{T}^{\{n\}}$ az eredeti hálón adott hőmérséklet mezőt, $T^{\{n\}}$ pedig a módosított hálón adott hőmérséklet mezőt. A legkisebb négyzetek módszerével a következő alakban fogalmazhatjuk meg a hőmérséklet mező két háló közötti átképezésének feladatát:

$$\int_{(A)} \left[T^{\{n\}}(r, z) - \tilde{T}^{\{n\}}(r, z) \right]^2 dr dz = \min. \quad (3.28)$$

Az A felület a gyűrűk és az rz félsík metszetét jelenti. A tengelyszimmetria miatt a hőmérséklet mező csak az r és a z koordináták függvénye lesz, az (1.63)-(1.74) alakfüggvények változói viszont a ξ és η lokális koordináták. Hogy az integrálást el tudjuk végezni, át kell térnünk a lokális koordinátákra. Ez azt jelenti hogy az (3.28) képletben megjelenik a Jacobi-determináns is:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{t}^{\{n\}} - \mathbf{N}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \tilde{\mathbf{t}}^{\{n\}} \right]^2 \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right| d\xi d\eta = \min. \quad (3.29)$$

Az eredeti hálón a (ξ, η) koordinátájú pontoknak megfelelő pontokat $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ koordinátákkal jelöltük. Az integrálást Gauss kvadraturával végezzük el. Ehhez ismernünk kell a hőmérséklet mező értékeit a Gauss pontokban. A hővezetési feladatot az új végeselem hálón

számoljuk, az új végelem hálón lévő (ξ, η) koordinátájú Gauss pontok azonban nem esnek egybe az eredeti hálón lévő Gauss pontokkal.

Az $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ kiszámítása a következő módon történik. Először határozzuk meg az r és z globális koordinátákat. Ehhez szükségünk lesz a (2.21)-ben szereplő $\mathbf{x}$ vektorra, amely az eredeti háló geometriáját írja le, továbbá tudnunk kell, hogy melyik végelemen számolunk. Ezek az adatok rendelkezésre állnak. A (2.21) segítségével az r és z globális koordináták meghatározhatók. Ha ez megvan, akkor meg kell keresnünk az r és z koordinátájú pontot tartalmazó végelemet az eredeti hálón, és ki kell számolni a neki megfelelő $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ lokális koordinátákat. A kereséshez nincs semmi támpontunk, elvileg meg kellene vizsgálni az összes végelemet. Pontosabban addig kellene egymás után megvizsgálni a végelelemeket, amíg meg nem találunk a r és z koordinátájú pontot tartalmazó elemet. Erre [42]-ben láthatunk példát. Mivel magasabb fokszámú közelítés esetén egy végelemen belül sok integrálási pontban kell számolni, ennek a keresésnek a hatékonysága elég kicsi lenne.

A keresés felgyorsítására egy új, rekurzív algoritmus dolgoztunk ki. Először is létrehoztunk egy adatbázist, amely tartalmazza minden egyes végelem szomszédos végelemeinek sorszámát. Minden végelemhez négy sorszám tartozik, a négy oldalnak megfelelően. Ha egy végelem a test peremén helyezkedik el, akkor a perem felőli oldalhoz, amelynél nincsen az elemnek szomszédja, nullát rendelünk. Ha ez megvan, akkor készítünk egy listát az összes elemről, amelyben meg tudjuk jelölni a már egyszer megvizsgált elemeket.

Magasabb fokú közelítésről lévén szó, nem tudjuk kifejezni a $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ koordinátákat az r és z koordinátákkal, mivel ez egy magasabb fokú algebrai egyenlet megoldását követelné meg. A megoldást valamilyen közelítő módszer jelenti. Mi a Newton-Raphson módszert alkalmaztuk, amelyet a következő egyenletrendszer ír le:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(\tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^i)}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial r(\tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^i)}{\partial \tilde{\eta}} \\ \frac{\partial z(\tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^i)}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial z(\tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^i)}{\partial \tilde{\eta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\xi}^i \\ \Delta \tilde{\eta}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r(\tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^i) \\ z(\tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^i) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

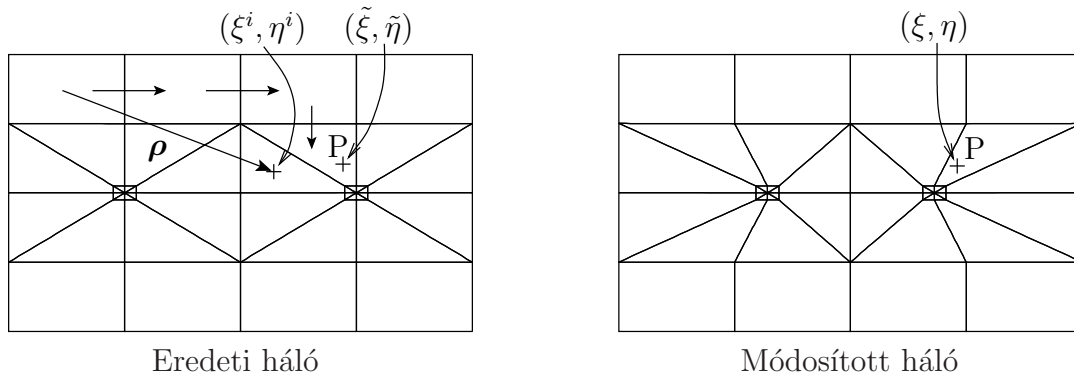
ahol i az iterációk számát jelenti. Az (3.30) egyenletrendszer megoldásai a $\Delta \tilde{\xi}^i$ és $\Delta \tilde{\eta}^i$ számok lesznek. Ezeket hozzá kell adni a $\tilde{\xi}^i$ és $\tilde{\eta}^i$ értékeihez, hogy megkapjuk a következő iteráció kiinduló értékeit:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^{i+1} &= \tilde{\xi}^i + \Delta \tilde{\xi}^i \\ \tilde{\eta}^{i+1} &= \tilde{\eta}^i + \Delta \tilde{\eta}^i \end{aligned} \quad (3.31)$$

Az iteráció akkor áll le, ha teljesül a $\Delta \tilde{\xi}^i \leq \tau_{NR}$ és $\Delta \tilde{\eta}^i \leq \tau_{NR}$ feltétel.

Az fent említett rekurzív algoritmus a következő képpen működik. Induljuk el egy tetszőleges elemről. Számoljuk ki a (3.30) Newton-Raphson módszerrel a $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ koordinátákat. Ha valamelyik koordináta kívül esik a $[-1; 1]$ intervallumon, az azt jelenti, hogy a keresett (r, z) koordinátájú pont nem ebben az elembe található. Ekkor az elemet megjelöljük, hogy már megvizsgáltuk egyszer. A következő megvizsgálandó elem az előző szomszédai közül fog kikerülni. Elsőként azt az elemet vizsgáljuk meg, amelynek irányába mutat az 1.8. ábrán látható koordináta rendszerben megrajzolt, (3.30) és (3.31)

összefüggésekkel megkapott $\tilde{\xi}^i$ és $\tilde{\eta}^i$ koordinátájú ρ vektor. Ha a vektor pont egy sarokponton menne keresztül, akkor a sarokpont melletti bármelyik elemet kiválaszthatjuk. A vektor által kiválasztott elemre, újra elvégezzük az vizsgálatot, feltéve, hogy még nem szerepel a már megvizsgált elemek listájában. Ezt egészen addig ismételjük, amíg meg nem találjuk azt az elemet, amelynél a $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ koordináták a $[-1; 1]$ intervallumba esnek. Ha az összes végelem vizsgálata után még mindig nem jutunk eredményre, akkor azt a $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ koordinátát kell végeredménynek elfogadnunk, amely a legkisebb mértékben esik a $[-1; 1]$ intervallumon kívül. Ez abban az esetben következhet be, ha a keresett pont éppen a test peremén helyezkedik el, és az approximáció hibája miatt kívül esik az új végelem háló kontúrján. Ezzel nagy hibát nem követünk el, viszont elkerülhetjük az algoritmus „zsákutcába” jutását. A fent vázolt módszert a 3.3. ábra szemlélteti. Ha sikerült az al-



3.3. ábra. A P pont globális koordinátái: (r, z) . A lokális koordináták az eredeti végelem hálón: $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, a módosított végelem hálón: (ξ, η) . Az eredeti hálón nyilak jelzik a keresés menetét, amennyiben a bal felső elemtől indulunk.

goritmus végigszámolni, eredményként megkapjuk a kopás előtti végelem hálón az r és z koordinátáknak megfelelő elem sorszámát, valamint a $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ lokális koordinátákat. Az algoritmus különösen gyors lehet abban az esetben, ha egy elemen belül sok ponthoz keressük meg a $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ lokális koordinátákat, ugyanis ha mindig az előzőekben megtalált végelemből vesszük az új keresés kiinduló elemének, az esetek nagy többségében gyakorlatilag egy lépésben megkapjuk a keresett elemet az eredeti hálón, és a hozzá tartozó lokális koordinátákat.

Most hogy már ismerjük a $\tilde{\xi}$ és $\tilde{\eta}$ lokális koordinátákat, és a hozzájuk tartozó végelemből, visszatérhetünk a (3.29) kiszámításához. A (3.29) értéke akkor lesz minimális, ha a $\mathbf{t}^{\{n\}}$ mátrixban lévő paraméterek szerinti első deriváltakai mind nullát adnak eredményül. Végezzük el a deriválásokat, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{A} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{N}(\xi, \eta) \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta, \quad (3.32)$$

és

$$\mathbf{b} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{N}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \tilde{\mathbf{t}}^{\{n\}} \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta \quad (3.33)$$

A következő lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk eredményül:

$$\mathbf{A} \mathbf{t}^{\{n\}} = \mathbf{b} \quad (3.34)$$

Az így kapott $\mathbf{t}^{\{n\}}$ paramétereket már behelyettesíthetjük a (3.26) egyenletbe, és kiszámíthatjuk a hővezetési feladatot.

Az ismertett módszer bármilyen skalár mező átszámítására alkalmas.

3.6. Tudományos eredmények

A 3. fejezetben a hővezetési feladat végeselemes megoldását ismertettük, és kitértünk az érintkezési feladatoknál fellépő problémákra. Az új tudományos eredményt a következő pontban fogalmazzuk meg:

1. A p -verziójú számításhoz rendelt, Legendre polinomokat felhasználó hőmérséklet mező közelítéséhez, a kopás miatt változó hálózathoz tartozóan egy eljárás került kifejlesztésre, a régi hálóról az új hálóra történő átszámítással járó megváltozott hőmérsékleti sorbafejtési paraméterek meghatározására a hibanégyzet minimum elve alapján. Az elv bármilyen skalár mező átszámítására alkalmazható a p -verziójú közelítés során $\{1\}$, $\{5\}$.

A hővezetési feladatot időlépésenként lehet megoldani. Figyelembe kell venni, hogy a kopás számításánál kopási iterációnként a végeselem háló módosul. A hővezetési feladat megoldásához ugyanakkor ugyanazon a végeselem hálón kell megadni a hőmérséklet mezőt. Emiatt a hőmérséklet mezőket azonos hálóra kell transzformálni, átszámítani. Az eljárás során, amikor a hálón egy pont globális koordinátáiból szeretnénk meghatározni a lokális koordinátákat és a pontot tartalmazó végeselemet, szintén csak a próbálkozásra hagyatkozhatunk. Az általunk kidolgozott algoritmus segítségével pár lépésben megtaláljuk a keresett végeselemet. Az algoritmus nagyon előnyös numerikus integrálás során.

4. fejezet

A csatolt termo-mechanikai feladat megoldása

Az első három fejezetben megvizsgáltuk, hogy hogyan oldható meg az érintkezési, kopási és hővezetési feladat p -verziós végelem-módszerrel. Ebben a fejezetben a csatolt termo-mechanikai kopási feladatot fogjuk megoldani, azaz egyszerre oldjuk meg az első három fejezetben külön-külön megoldott feladatokat. Egy egydimenziós csatolt termo-mechanikai kopási feladat megoldására láthatunk példát az [43] és az [44]-ben. Egy kétdimenziós, az általunk tárgyalthoz hasonló de a kopást figyelmen kívül hagyó feladat található a [45] cikkben. Az [46]-ben található csatolt feladat csak az érintkezési feladat megoldásának módszerében, valamint a hővezetési feladat megoldásának egyes részleteiben tér el az általunk tárgyalt feladattól.

4.1. Célkitűzések

Az értekezés ezen fejezetében a csatolt termo-mechanikai feladatot szeretnénk megoldani p -verziós végelem-módszerrel. Az elvégzendő feladatot a következő célkitűzésekben foglалhatjuk össze.

1. A csatolt termo-mechanikai feladat egyenletrendszerének felírása, a peremfeltételek megfogalmazása.
2. A csatolt termo-mechanikai feladat egyenletrendszerének gyenge alakban történő megfogalmazása.
3. Számítási algoritmus kidolgozása.
4. Számítógép program készítése, amely segítségével a csatolt termo-mechanikai feladat numerikusan megoldható.

4.2. A kezdetiérték feladat kitűzése

A megoldandó feladat kitűzésénél induljunk ki az általános esetből. Tekintsünk egy mozgó, lineárisan rugalmas testet, amelynek egy adott időpillanatban $T(\mathbf{r}, t)$ a hőmérséklet-eloszlása. A test sebessége, gyorsulása, alakváltozási állapota és feszültség állapota meghatározható az elmozdulás mező ismeretében, illetve a hőfeszültségek, hőtágulás és a hőfluxus pedig meghatározható a hőmérséklet mező ismeretében. Így két fizikai mennyiség, az $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ elmozdulás mező és a $T(\mathbf{r}, t)$ hőmérséklet mező segítségével minden számunkra szükséges mező meghatározható. Célszerű bevezetni a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességmezőt is mint új változót, ugyanis így a feladat egy elsőrendű differenciálegyenlet rendszer formájában fogalmazható meg.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} \\ \rho \dot{\mathbf{v}} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{u} \cdot \nabla \circ \nabla \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \nabla T + \rho \mathbf{k} \\ \rho c \dot{T} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + Q + T \frac{\alpha E}{1-2\alpha} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}\end{aligned}\tag{4.1}$$

ahol E a rugalmassági modulus, ν a Poisson tényező, α a lineáris hőtágulási együttható, ρ a test sűrűsége, c a test anyagának fajhője, és $\nabla \cdot \nabla = \Delta$ a Laplace operátor. Osszuk el a második egyenlet mindkét oldalát ρ -val és osszuk el a harmadik egyenlet mindkét oldalát ρc -vel. Az $\mathbf{u}$ elmozdulásmező és a $\mathbf{v}$ sebességmező koordinátáit valamint a T hőmérsékletmező értékét írjuk be egy oszlopvektorba:

$$\mathbf{z}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \\ T(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix}\tag{4.2}$$

A (4.2)-ben bevezetett jelöléssel a (4.1) egyenletrendszer a

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{z} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})\tag{4.3}$$

egyszerű alakban írható. Az $\hat{\mathbf{A}}$ operátor a (4.1) jobb oldalát jelképezi, amely csak a $\mathbf{z}$ függvénye.

Az általunk vizsgált feladat az általános esethez képest némi egyszerűsítést tartalmaz. Feltételezzük, hogy a vizsgált testek pontjainak a gyorsulása elhanyagolhatóan kicsi, azaz $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Hengerszimmetrikus testeket vizsgálunk, amelyekben minden fizikai mennyiség, így a $\mathbf{z}$ oszlopvektor koordinátái is tengelyszimmetriát mutatnak, azaz nem függenek a φ koordinátától. A test pontjai φ irányban állandó sebességgel mozognak. Feltételezzük, hogy r és z irányban a testek pontjainak sebessége elhanyagolhatóan kicsi, azaz $\dot{u}_r \approx \dot{u}_z \approx 0$. Így a (4.1) harmadik egyenletében lévő $\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}$ nulla lesz:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \dot{u}_r(r, z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\varphi(r, z)}{\partial \varphi} + \frac{\dot{u}_r(r, z)}{r} + \frac{\partial \dot{u}_z(r, z)}{\partial z} = 0\tag{4.4}$$

A csatolt termo-mechanika feladat megoldása során két testet vizsgálunk. Jelölje az e felső index az egyes testekre vonatkozó mennyiségeket ($e = 1, 2$). A (4.1) egyenletrendszer második egyenlete a fent említett egyszerűsítések után egyenértékű lesz az (1.1)-(1.3) egyenletekkel.

$$\frac{E^e}{1 + \nu^e} \left(\Delta \mathbf{u}^e + \frac{1}{1 - 2\nu^e} \mathbf{u}^e \cdot \nabla \circ \nabla \right) - \frac{\alpha^e E^e}{1 - 2\nu^e} \nabla T^e + \rho^e \mathbf{k}^e = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

A (4.5) egyenlethez tartozó peremfeltételek (1.4), (1.5) és (1.8) peremfeltételeknek megfelelően a következők lesznek:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e &= \mathbf{u}_0^e & \mathbf{r} &\in A_u^e \\ \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e &= \mathbf{p}_0^e & \mathbf{r} &\in A_p^e \\ -\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 &= \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = p_n & \mathbf{r} &\in A_c^e \end{aligned} \quad (4.6)$$

A súrlódás miatt $\tau_{\varphi z}^e = (-1)^e \mu p_n$ csúsztatófeszültség is keletkezik (lásd 2.1. ábra), azaz

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}^1 &= -\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 - p_n \mathbf{e}_z), & \tau_{\varphi z}^2 &= \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - p_n \mathbf{e}_z) \\ \mathbf{n}^1 &= -\mathbf{e}_z, & \mathbf{n}^2 &= \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

A (4.1) egyenletrendszer harmadik egyenletére a (4.4) figyelembevételével a következő adódik:

$$\rho^e c^e \dot{T}^e = \nabla \cdot (k^e \nabla T^e) + Q^e \quad (4.7)$$

A kezdeti feltétel a $t = 0$ időpillanatban adja meg a hőmérsékleteloszlást:

$$T = T_0 \quad \mathbf{r}^e \in V^e \quad (4.8)$$

A hőtani peremfeltételek a (3.3)-(3.4) szerint a következők lesznek:

$$\begin{aligned} -k^1 \nabla T^1 \cdot \mathbf{n}^1 &= -c_D \beta [k_w^1 (p_n)^2 + \mu p_n] v + \hat{\alpha} (T^1 - T^2) & \mathbf{r}^1 &\in A_c^1 \\ -k^2 \nabla T^2 \cdot \mathbf{n}^2 &= -c_D (1 - \beta) [k_w^2 (p_n)^2 + \mu p_n] v + \hat{\alpha} (T^2 - T^1) & \mathbf{r}^2 &\in A_c^2 \\ -k^e \nabla T^e \cdot \mathbf{n}^e &= \alpha (T^e - T_\infty) & \mathbf{r}^e &\in A_s^e \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3. A csatolt termo-mechanikai feladat gyenge alakja

A termo-mechanikai feladatot végeselem-módszerrel szeretnénk megoldani, ehhez azonban szükségünk lesz a feladat gyenge alakjára. Két gyenge alakot kell felírnunk. Az egyik a mechanikai rész lesz, a másik a termodinamikai rész. A mechanikai részből az $\mathbf{u}^e$ elmozdulásvektort tudjuk meghatározni, figyelembe véve a hőmérséklet mezővel történő csatolást is. Ez abban nyilvánul meg, hogy a hőtágulás miatt megnövekszik az érintkező

felületek nagysága, és növekedni fog az érintkezési nyomás is. Az (1.6) és az (1.10) egyenletek figyelembevételével a mechanikai rész gyenge alakja a következő formában írható:

$$G_M(\mathbf{u}^e, T^e, \boldsymbol{\varphi}^e) := \sum_{e=1}^2 \left[- \int_{(V^e)} (\mathbf{T}^e \cdot \nabla + \rho^e \mathbf{k}^e) \cdot \boldsymbol{\varphi}^e dV + \int_{(A_p^e)} (\mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e - \mathbf{p}_0^e) \cdot \boldsymbol{\varphi}^e dA \right] + \\ + \int_{(A_c)} p_n(\boldsymbol{\varphi}^2 - \boldsymbol{\varphi}^1) \cdot \mathbf{n}_c dA + \int_{(A_c)} \mu p_n(\boldsymbol{\varphi}^2 - \boldsymbol{\varphi}^1) \cdot \mathbf{m}_c dA = 0 \quad (4.10)$$

ahol $\boldsymbol{\varphi}^e$ a virtuális elmozdulásmezőt jelenti, az $\mathbf{m}_c = \mathbf{t}_c \times \mathbf{n}_c$ pedig az rz síkra merőleges egységvektort. A $\boldsymbol{\varphi}^e$ egy folytonos függvény, amelyre vonatkozó peremfeltételek meg-egyeznek az $\mathbf{u}^e$ -re vonatkozó a (4.6) peremfeltételekkel. A (4.10) utolsó tagjának jelentése az, hogy a φ irányú $\tau_{\varphi z}$ feszültség hatására a test a forgómozgásnál kissé csavarodik is. (Az (1.26) alattiak ezt tartalmazzák.)

A termodinamikai rész gyenge alakjából a hőmérséklet mezőt határozhatjuk meg. Figyelembe vesszük még, hogy a hőmérséklet növekedésével a hőtágulás miatt megváltozik az érintkező felületek nagysága, és ez befolyásolja a hővezetés egyenletének peremfeltételeit. A (3.13) egyenlet figyelembevételével a termodinamikai rész gyenge alakja a következő formában írható:

$$G_T(\mathbf{u}^e, T^e, \Theta^e) := \int_{V^1} \rho^1 c^1 \dot{T}^1 \Theta^1 dV + \int_{V^1} k^1 \nabla T^1 \cdot \nabla \Theta^1 dV + \int_{A_s^1} \alpha^e (T^1 - T_\infty) \Theta^1 dA - \\ - \int_{A_c^1} c_D \beta (k_w^1 (p_n)^2 + \mu p_n) v \Theta^1 dA + \int_{A_c^1} \hat{\alpha} (T^1 - T^2) \Theta^1 dA + \\ + \int_{V^2} \rho^2 c^2 \dot{T}^2 \Theta^2 dV + \int_{V^2} k^2 (\nabla T^2 \cdot \nabla \Theta^2) dV + \int_{A_s^2} \alpha^e (T^2 - T_\infty) \Theta^2 dA - \\ - \int_{A_c^2} c_D (1 - \beta) (k_w^2 (p_n)^2 + \mu p_n) v \Theta^2 dA + \int_{A_c^2} \hat{\alpha} (T^2 - T^1) \Theta^2 dA = 0. \quad (4.11)$$

ahol Θ^e a virtuális hőmérséklet mezőt jelenti.

4.4. A csatolt feladat számításának algoritmus

A csatolt termo-mechanikai feladat megoldását megkaphatjuk úgy, hogy a (4.10) és (4.11) egyenleteket numerikusan megoldjuk. Ha sok ismeretlenünk van az egyenletekben, ez a módszer nem igazán hatékony. Megoldást jelent a problémára, ha az egyes változókat, esetünkben az $\mathbf{u}^e$ elmozdulásmezőt és a T^e hőmérséklet mezőt az egyes időlépésekben külön-külön számoljuk ki. Ezt a módszert operátor hasításnak is nevezik. A módszer eredményeként az algoritmuson belül szétválasztjuk a csatolt mennyiségeket. Egy időlépés

számítása során az $\hat{\mathbf{A}}^e$ operátort tisztán mechanikai és termodinamikai operátorokra bontjuk.

$$\hat{\mathbf{A}}^e(\mathbf{z}^e) = \hat{\mathbf{A}}_M^e(\mathbf{z}^e) + \hat{\mathbf{A}}_T^e(\mathbf{z}^e) \quad (4.12)$$

Egy Δt időlépésen belül ez két részfeladat megoldását jelenti:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{z}^e = \hat{\mathbf{A}}_M^e(\mathbf{z}^e) \quad (4.13)$$

és

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{z}^e = \hat{\mathbf{A}}_T^e(\mathbf{z}^e) \quad (4.14)$$

A (4.13) egyenlet megoldása a (4.10) funkcionál segítségével az $\mathbf{u}^e$ elmozdulásmező meghatározását jelenti rögzített T^e hőmérséklet mellett: $G_M(\mathbf{u}^e, T^e = \text{állandó}, \varphi^e) = 0$. A (4.14) egyenlet megoldása pedig a (4.11) funkcionál felhasználásával történik, amelynek során az $\mathbf{u}^e$ elmozdulásmezőt tekintjük rögzítettnek: $G_T(\mathbf{u}^e = \text{állandó}, T^e, \Theta^e) = 0$. Ez tulajdonképpen az 1-2, illetve a 3 fejezetekben tárgyalt megoldásokat jelenti. Ezzel a csatolt termo-mechanikai feladat megoldását visszavezettük az algoritmus szintjén különálló mechanikai illetve termodinamikai feladatok megoldására. Egy időlépésen belül a következő lépéseket kell tennünk. Megoldjuk a mechanikai feladatot egy kiinduló hőmérséklet mezővel, amely az első időlépésben a (4.8) egyenlettel előírt kezdeti feltételben lett megadva, a többi időlépésben pedig az előző időlépés hőmérséklet mezejét használjuk. Kiszámítjuk a testek kopását a mechanikai feladat megoldása során kapott nyomás eloszlásból és érintkezési felület nagyságából. Ezt a két lépést addig ismételjük, míg a (2.16) feltétel nem teljesül. Ez egy iterációs ciklust jelent. Ezután számítjuk ki a hővezetési feladatot, ahol most az elmozdulás mezőt vesszük állandónak. Ezzel végrehajtottuk egy újabb, külső iterációs ciklus első lépését. A második lépésben újra meg kell oldanunk a mechanikai feladatot, de már az előző iterációs ciklusban kapott hőmérséklet mezővel. Kiszámítjuk a kopást is, és ellenőrizzük a (2.16) feltételt. A hőmérséklet mező számításánál az új nyomáseloszlással és érintkezési felülettel számolunk. Ezt a külső iterációt addig folytatjuk, míg a

$$\sum_{i=1}^2 \frac{||\mathbf{t}_{i+1}^e|| - ||\mathbf{t}_i^e||}{||\mathbf{t}_i^e||} \leq \tau_T \quad (4.15)$$

feltétel nem teljesül. A $||\dots||$ jelölés az oszlopvektor elemeinek négyzetösszegét jelenti. Ha a (4.15) feltétel teljesül, továbbléphetünk a következő időlépésre. Az algoritmust a 4.1. ábra szemlélteti.

4.5. Egy számpélda

Ebben a pontban egy számpéldán keresztül mutatjuk be a csatolt termo-mechanikai kopási feladat numerikus megoldását. Továbbra is az 1.13. ábrán látható testeket vizsgáljuk az 1.14. ábrán adott peremfeltételek mellett. Az alsó testet φ irányban is rögzítjük, a

felsőt állandó $\omega = 5 \frac{1}{s}$ szögsebességgel megforgatjuk. Az egyszerűség kedvéért a két test készüljön ugyan abból az anyagból. Legyen a rugalmassági modulus értéke $E^1 = E^2 = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, a Poisson tényező $\nu^1 = \nu^2 = 0,3$, a büntető paraméter értéke legyen $c_n = 100E$, a kopási tényező $k_w^1 = k_w^2 = 0,00002 \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$, a hővezetési tényező $k^1 = k^2 = 55 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$, a test és a környezet közötti hőátadási tényező $\alpha^1 = \alpha^2 = 44 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$, a két test közötti hőátadási tényező $\hat{\alpha} = 320 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$, a testek sűrűsége $\rho^1 = \rho^2 = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a testek fajhője $c^1 = c^2 = 460 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$. A (3.22) képletben az időlépés nagysága legyen $\Delta t = 0.0001$ s, a ϑ -módszer paramétere pedig legyen $\vartheta = 0,6$. A (3.5) és a (3.6) peremfeltételekben c_D értéke legyen 0,9, azaz a keletkezett hő 90%-a folyjon bele a testekbe, a többi pedig egyéb módon távozzon a rendszerből (pl. hőszugárzással). A kezdeti hőmérséklet mindkét testben legyen azonosan nulla, azaz $T_0^1 = T_0^2 = 0$. A számítás során maximum nyolcad fokú polinomokat alkalmazunk. A végeelem felosztást a mechanikai és a hővezetési feladat megoldásánál egyaránt az 1.15. ábra szerint végeztük el. A számítás elvégzéséhez saját fejlesztésű, C nyelven írt programot használtunk. A számítást 1600 időlépésre, azaz 0,16 s időtartamra végeztük el. A számítás egy 1,5 GHz-es Pentium 4-es számítógépen körülbelül két hetet vett igénybe. A hosszú futásidő oka a több egymásba ágyazott iterációs ciklusban keresendő.

A 4.2. ábrán minden századik időlépéshez tartozó nyomáseloszlás látható. A 2.7. ábrával összevetve láthatjuk, hogy a hőtágulás miatt az érintkezési nyomás lassabban csökken. A 4.1. táblázatban foglaltuk össze az érintkezési tartomány határának változását és a felületeket összeszorító erőket. A táblázat első oszlopában látható a számítás kezdete óta eltelt idő. A másodiktól az ötödik oszlopig az érintkezési tartomány határát tüntettük fel, sorrendben az érintkezési tartomány bal oldali határa a felső testen (R_b^f), az érintkezési tartomány bal oldali határa a alsó testen (R_b^a), az érintkezési tartomány jobb oldali határa a felső testen (R_j^f), az érintkezési tartomány jobb oldali határa a alsó testen (R_j^a). A hatodik és hetedik oszlopokba a p_n és σ_n feszültségekből a (2.34) alapján számított, felületeket összenyomó erőt írtuk be. Egy időlépésen belül a két érték közötti különbség 1500N körülnek adódik, ami a (2.35) összefüggéssel számolva durván $\varepsilon_F = 0,3\%$ -os eltérésnek felel meg. Ez közel egyezik a 2. fejezetben számított hővezetés nélküli feladat hibájával. Végül a nyolcadik oszlopban a (2.36) képlettel számított, felületek közti tangenciális erő látható. Ennek értéke elvileg nulla kellene hogy legyen, mivel az érintkezési feladat megoldásánál a relatív sebesség miatt a τ_{rz} feszültséget elhanyagoljuk. Az eltérés nagyságrendileg egyezik az $F_p - F_\sigma$ hibával.

A 4.3. ábrán látható az első időlépés után kialakult hőmérséklet eloszlás a testekben. A 4.4. ábrán a századik, a 4.5. ábrán az ezredik időlépéshez tartozó hőmérséklet eloszlás látható. Az első, századik és ezredik időlépéshez tartozó r illetve z irányú hőmérséklet gradiensek a 4.6-4.11. ábrákon láthatóak. Megvizsgáltuk, hogy az érintkezési felületeken a (3.3) hőtani peremfeltétel mennyire teljesül. A 4.12. ábrán egy koordináta-rendszerben ábrázoltuk az érintkezési nyomásból és szögsebességből számítható $\tilde{q}_c = q_{fr}^2(\mathbf{r}, t) + q_{cx}^2(\mathbf{r}, t)$

4.1. táblázat.

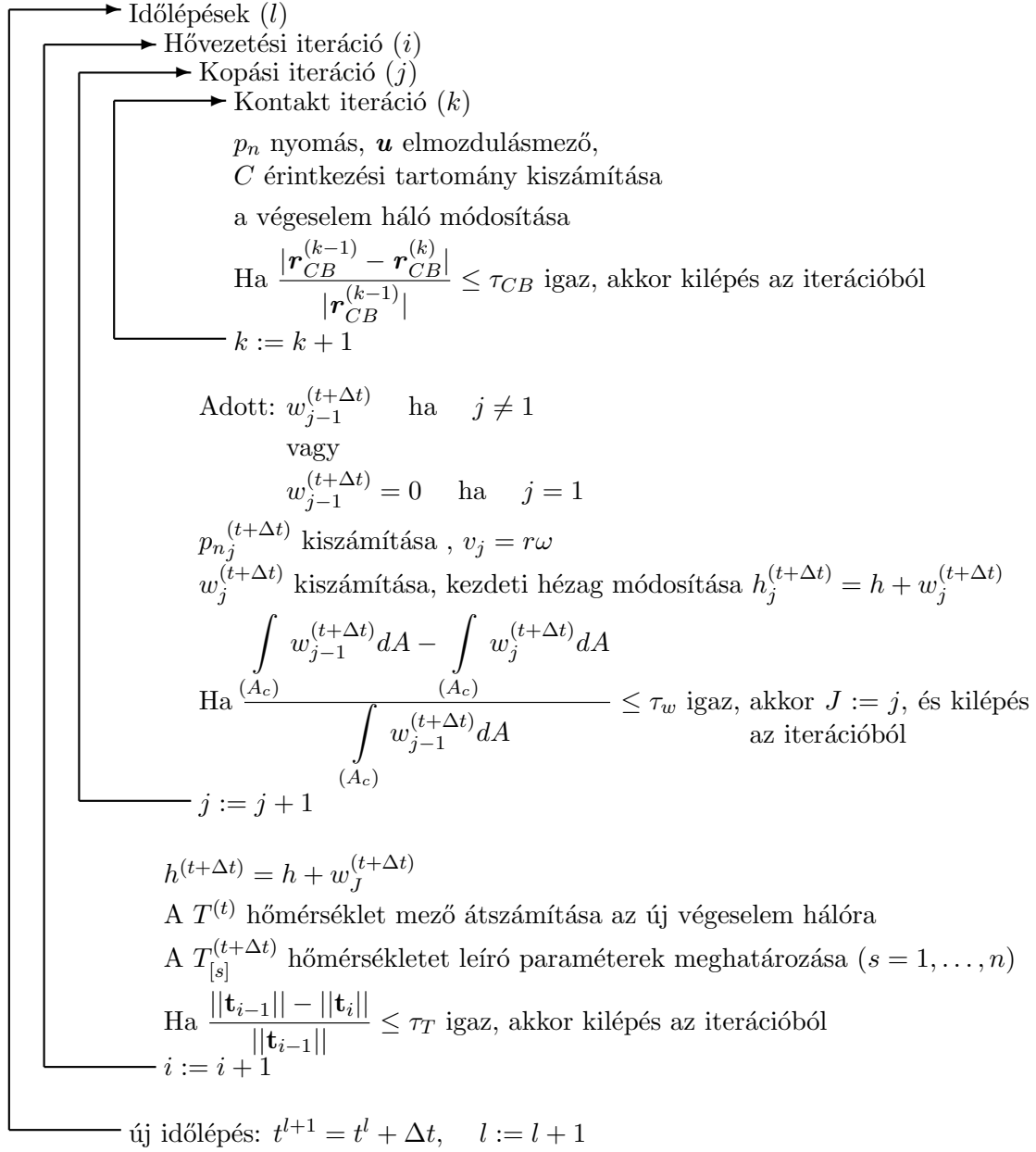
t [s]	R_b^f [mm]	R_b^a [mm]	R_j^f [mm]	R_j^a [mm]	F_p [N]	F_σ [N]	T_τ [N]
0.01	92.825415	92.825415	107.246749	107.246751	616171.82	617751.84	1717.97
0.02	92.689529	92.689532	107.393378	107.393383	608147.17	609676.92	2260.17
0.03	92.586816	92.586810	107.502572	107.502580	600940.28	601953.98	2396.82
0.04	92.496440	92.496442	107.598027	107.598032	593416.30	594982.57	2107.67
0.05	92.413739	92.413738	107.684860	107.684863	585983.90	587480.46	2063.32
0.06	92.336708	92.336706	107.765368	107.765366	578640.62	579780.45	1978.57
0.07	92.264112	92.264116	107.840890	107.840897	571743.34	573073.30	2052.72
0.08	92.195155	92.195155	107.912514	107.912512	564668.47	566224.66	2027.45
0.09	92.129256	92.129255	107.980557	107.980565	557756.91	559323.70	2000.53
0.1	92.066069	92.066066	108.045869	108.045872	551016.30	552068.80	2023.95
0.11	92.005137	92.005136	108.108609	108.108611	544845.05	545941.50	1934.81
0.12	91.946286	91.946279	108.169058	108.169062	537654.87	539809.40	1958.74
0.13	91.889290	91.889285	108.227467	108.227467	531473.04	533272.08	1860.37
0.14	91.834072	91.834066	108.284024	108.284020	525825.37	526787.40	1793.42
0.15	91.780241	91.780242	108.338864	108.338871	519916.89	520602.27	1733.08
0.16	91.727912	91.727912	108.392179	108.392184	513164.83	514934.70	1715.98

hőfluxus, és a T hőmérséklet mezőből deriválással kapható $\tilde{q}_c = -k^e \nabla T^e(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^e$ hőfluxus. A két görbe jó egyezése mutatja, hogy a feladat megoldása során a $p = 8$ fokú elemekkel való közelítéssel kapott eredmények a mérnöki gyakorlat igényét messzemenőleg kielégítik.

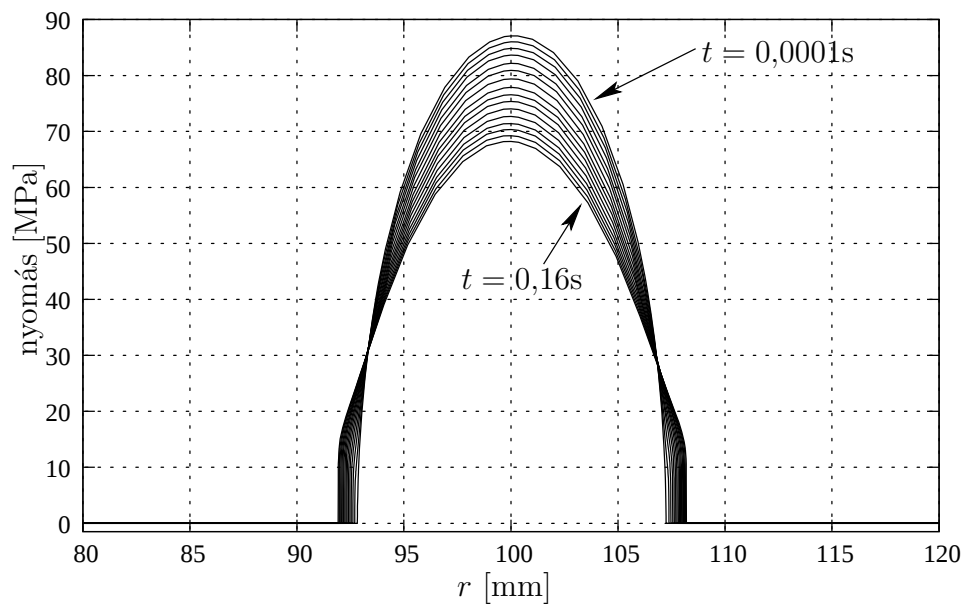
4.6. Tudományos eredmények

A 4. fejezetben a csatolt termo-mechanikai kopási folyamat kiszámítására ismertettünk egy algoritmust. Az új tudományos eredményt a következő pontban fogalmazzuk meg:

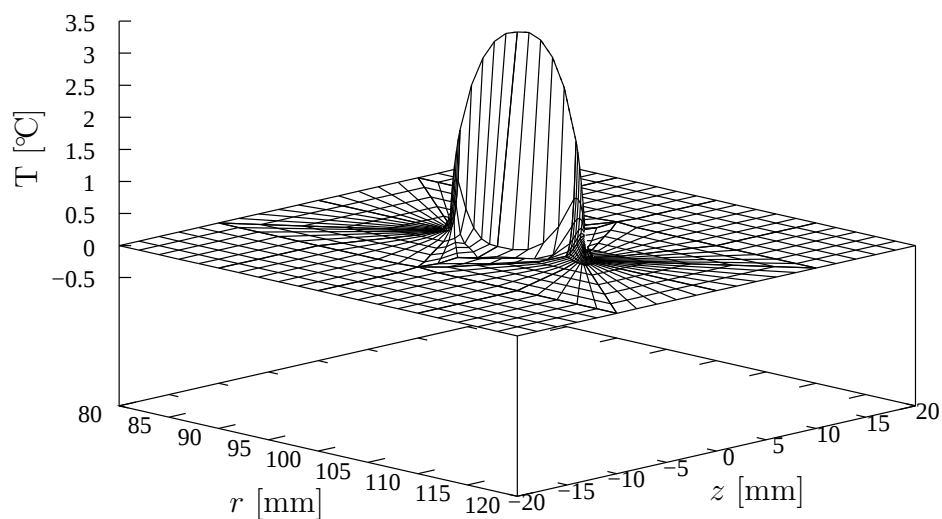
1. Az operátor hasítás módszerével algoritmus került kidolgozásra a csatolt kopási-hővezetési-érintkezési mechanikai feladat p -verziójú végelem-módszeres megoldására. A számítás összehangoltan kezeli az érintkezési feladat megoldását, a kopás számítását, és a hővezetési feladat megoldását. Iterációs ciklusok alkalmazásával biztosított egy időlépésen belül az elmozdulásmező és a hőmérséklet mező konvergenciája $\{3\}$, $\{4\}$, $\{7\}$.



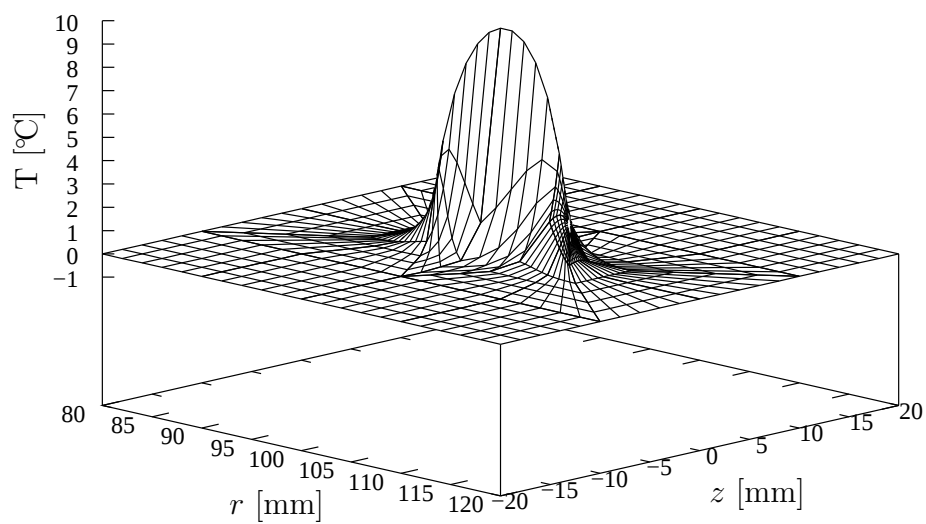
4.1. ábra. A számítás algoritmus, ahol p_n az érintkezési nyomás, $\mathbf{u}$ az elmozdulás mező, C a tényleges érintkezési tartomány, $\mathbf{r}_{CB}^{(i)}$ az i -edik iterációs ciklusban az érintkezési tartomány határához mutató helyvektor, $w_j^{(t+\Delta t)}$, v_j és $p_{n_j}^{(t+\Delta t)}$ a j -edik iterációs ciklusban a $t + \Delta t$ időpillanathoz tartozó kopás, relatív sebesség és érintkezési nyomás értéke, h a testek közötti kezdeti hézag, $h^{(t+\Delta t)}$ a testek közötti hézag a $t + \Delta t$ időlépésben, $T_{[s]}^{(t+\Delta t)}$ a $t + \Delta t$ időpillanathoz tartozó hőmérséklet mező paraméterek, $\mathbf{t}_i$ az i -edik iterációs lépésben a hőmérséklet paraméterek vektora, τ_{CB} , τ_w és τ_T pedig az egyes iterációs ciklusokból való kilépéshez megadott hibakorlátok.



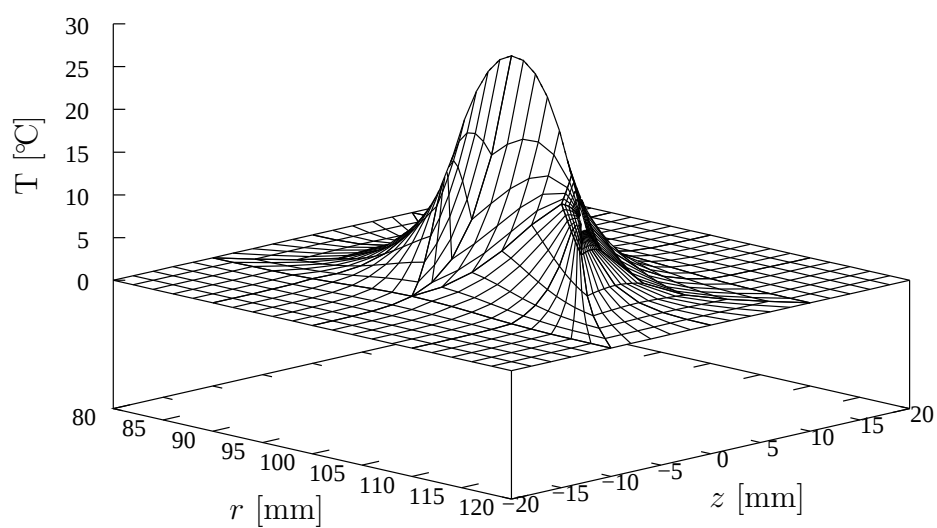
4.2. ábra. Az első, 100., 200., ..., 1600. időlépésekhez tartozó nyomáseloszlások az r koordináta tengely mentén.



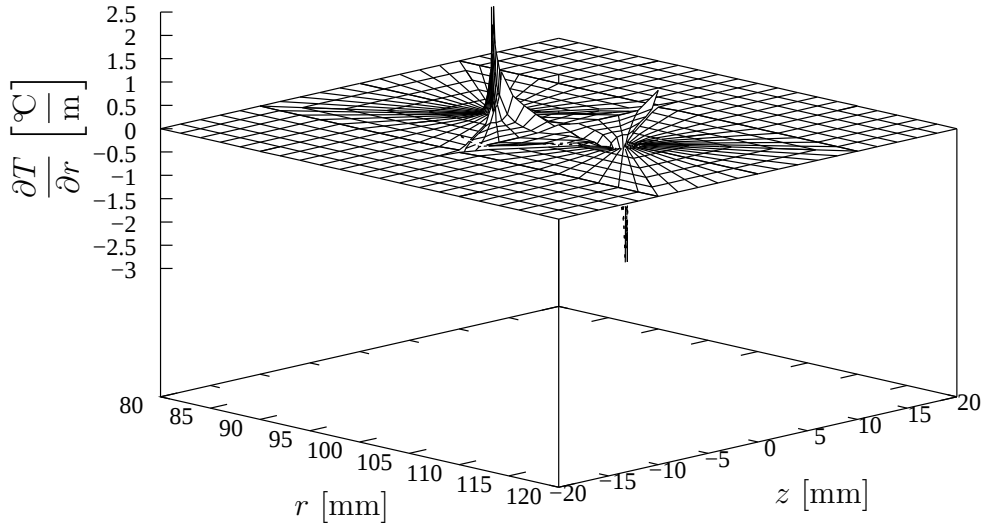
4.3. ábra. Az első időlépés után kialakult hőmérséklet eloszlás a testekben.



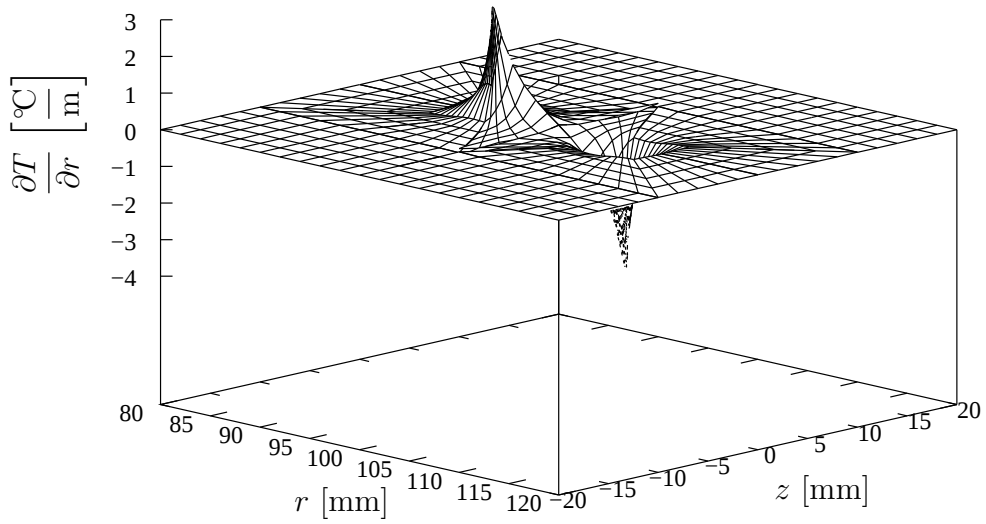
4.4. ábra. A századik időlépéshez tartozó hőmérséklet eloszlás a testekben.



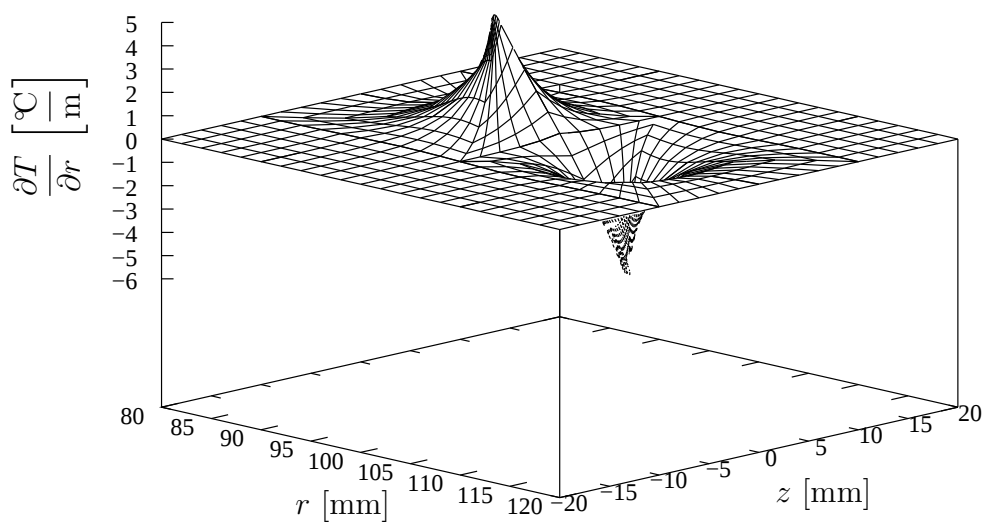
4.5. ábra. Az ezredik időlépéshez tartozó hőmérséklet eloszlás a testekben.



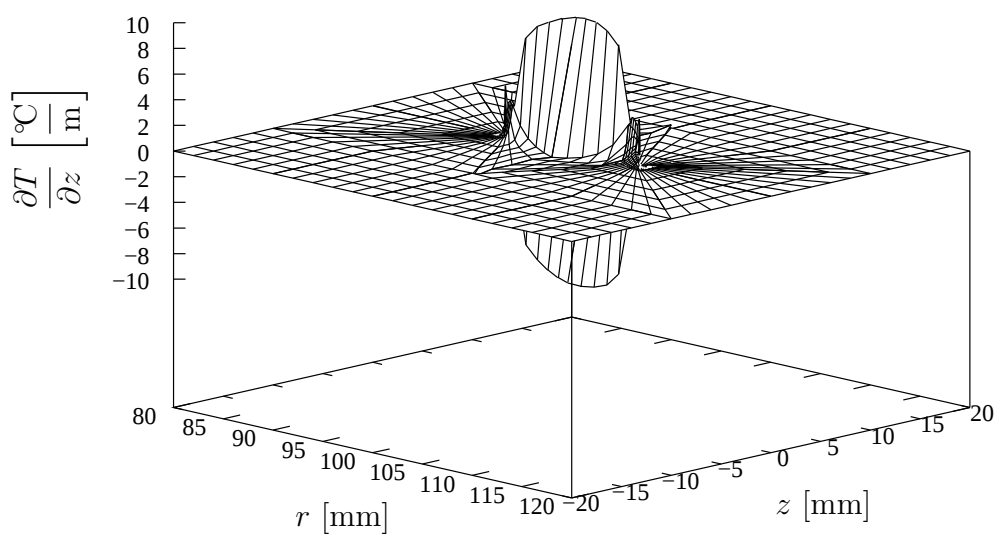
4.6. ábra. Az első időlépéshez tartozó r irányú hőmérséklet gradiens a testekben.



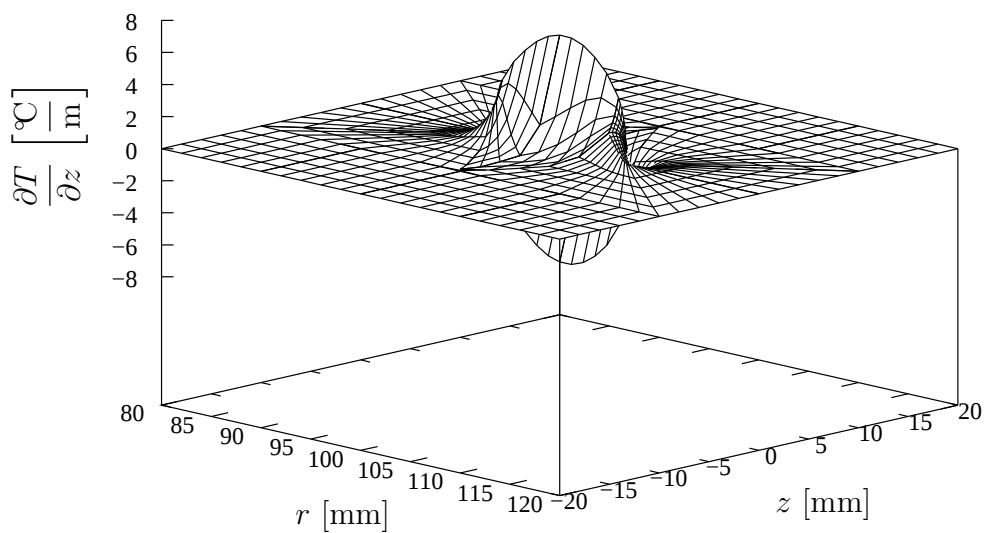
4.7. ábra. A századik időlépéshez tartozó r irányú hőmérséklet gradiens a testekben.



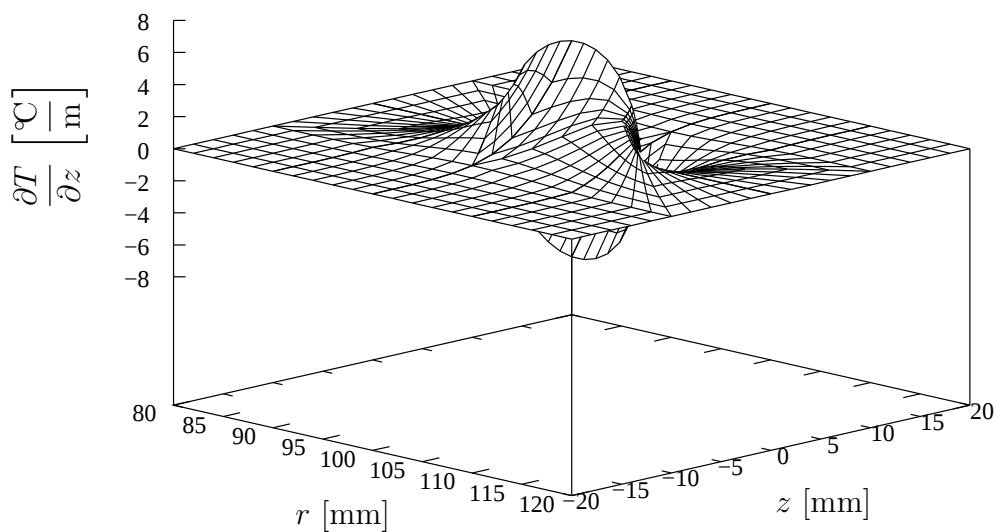
4.8. ábra. Az ezredik időlépéshez tartozó r irányú hőmérséklet gradiens a testekben.



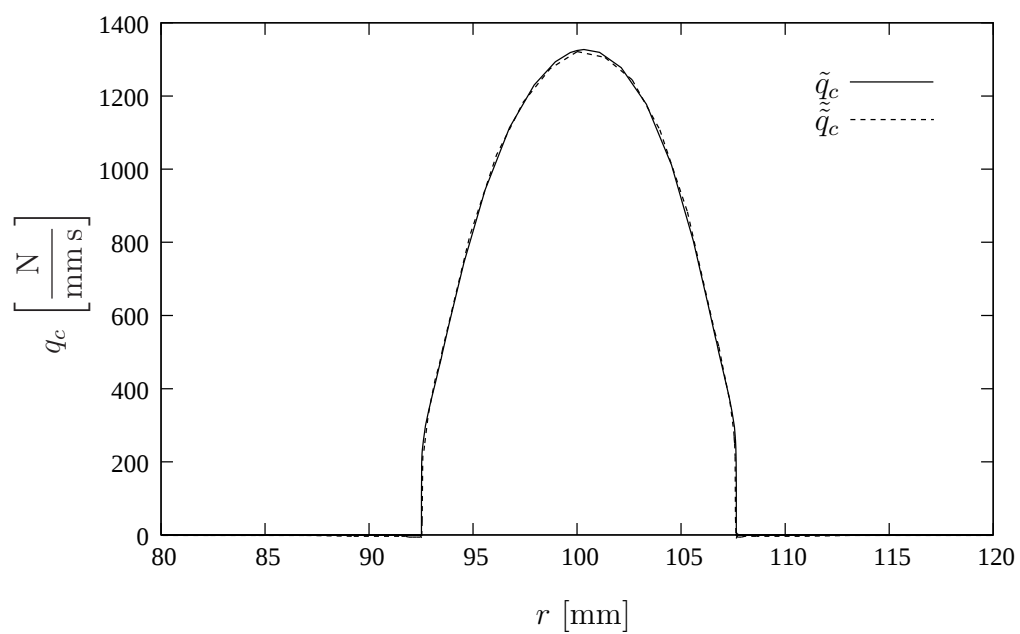
4.9. ábra. Az első időlépéshez tartozó z irányú hőmérséklet gradiens a testekben.



4.10. ábra. A századik időlépéshez tartozó z irányú hőmérséklet gradiens a testekben.



4.11. ábra. Az ezredik időlépéshez tartozó z irányú hőmérséklet gradiens a testekben.



4.12. ábra. Az érintkezési nyomás eloszlásából és a felső test szögsebességéből számított hőfluxus (folytonos vonal) és a hőmérséklet mező deriválásából kapható hőfluxus (szaggatott vonal) ábrázolása közös koordináta rendszerben.

Eredmények hasznosítása, további kutatási feladatok

A disszertáció p -verziójú végeselem-módszer felhasználásával forgástestek közötti kopási feladatok szimulációjára ad elméleti megközelítést és az elkészített számítógépi program segítségével numerikus tapasztalatokat. A gépészeti berendezések üzemeltetésénél jelentkező kopási, hőfejlődési folyamatok vizsgálata a gyakorlat számára nagy fontossággal bír. A számítógépes vizsgálatok előjelzést adhatnak a szerkezet tényleges viselkedésére. A dolgozatban tárgyalt módszer alkalmazhatóságának kibővítéséhez további vizsgálatok szükségesek. Eddig csak homogén, izotróp testeket vizsgáltunk, az anyagtörvény módosításával a módszer kiterjeszthető ortotróp anyagokra is. A kopás számításánál nem vettük figyelembe a két érintkező felület között mozgó, a kopás során keletkezett szemcséket. Ez a felületek közötti anyagréteg módosítja az érintkezési feladat és a hővezetési feladat megoldását. A feladat számítógépes megoldása hosszadalmas az egymásba ágyazott iterációs ciklusok miatt. Érdemes lenne megvizsgálni, hogy párhuzamos programozás alkalmazásával miként lehetne gyorsítani a feladat numerikus megoldását.

Összefoglalás

Az értekezésben egy érintkezési feladatot vizsgáltunk meg. A vizsgálat során figyelembe vettük a felületek egymáson történő elcsúszása során fellépő kopást és a keletkezett hőt, valamint a testek geometriájának a kopás és hőtágulás hatására bekövetkezett megváltozását. Először külön-külön számoltuk ki az érintkezési, kopási illetve hővezetési feladatokat, végül megoldottuk a csatolt termo-mechanikai kopási feladatot.

Az első érintkezési feladatot Hertz oldotta meg 1882-ben. Hertz feltételezte, hogy az érintkezési tartomány mérete jóval kisebb mint az érintkező testek méretei. Az érintkezési feladatokkal kapcsolatos újabb kutatások a XX. század 30-as éveiben kezdődtek el. Az érintkezési feladattal kapcsolatos variációs elvet Signorini 1959-ben publikálta. Feltételezte, hogy terhelés hatására az érintkező felületek el is távolodhatnak egymástól. Az elméletet Fichera fejlesztette tovább, aki a rugalmas, súrlódás nélküli érintkezési feladat megoldásának létezését és egyértelműségét is bizonyította. Végeselem-módszert a 70-es években alkalmaztak először érintkezési feladatok megoldására. Ezek az úgynevezett h -verziós végeselem-módszeren alapuló számítások voltak. A h -verziós végeselem-módszerben a közelítő függvények többnyire lineárisak, esetleg másod fokúak. A módszer annál pontosabb, minél több az ismeretlenek száma, azaz összességében minél több az elemek száma. Egy másik lehetséges megközelítés a p -verziós végeselem-módszer, azaz a közelítő polinomok fokszámának növelése változatlan elemszám mellett. A p -verziós végeselem-módszerben a közelítő polinomokat kedvező tulajdonságai miatt a Legendre polinomokból származtatjuk. Az ismeretlen mezőket és a testek geometriáját ugyanazokkal a közelítő polinomokkal írjuk le. Magasabb fokú közelítést használva a testek geometriája is pontosabban írható le, így elvileg az érintkezési feladatot is nagyobb pontossággal oldhatjuk meg.

Nehézséget jelent az érintkezési feladat megoldásánál az, hogy az érintkezési nyomás deriváltjában szakadás lép fel az érintkezési tartomány peremén. Az érintkezési nyomás az elmozdulásmezőből származtatható deriválások segítségével. Ez azt jelenti, hogy az elmozdulásmezőnek az érintkezési tartomány peremén nem analitikus pontjai vannak, amelyeket nem tudunk jól közelíteni analitikus függvényekkel.

Gabbert hNp végeselemeket használt az érintkezési feladat megoldásához. Ezek az elemek az érintkezési felületen szakaszonként lineáris függvényeket tartalmaztak, máshol viszont magasabb fokú polinomokat. Volpert speciális szinguláris függvényeket használt a számításhoz. Páczelt csomópont pozicionálás módszerével a végeselem háló csomópontjait az érintkezési tartomány pereméhez mozgatta. Így nem volt szükség speciális függvényekre, hiszen a csomópontok nem analitikus pontokként viselkednek. A csomópont pozicionálás

egy durva és egy finom közelítésből állt, melyet különféle hibaindikátorokkal kontrolláltak. A módszer hátránya az, hogy a végelem háló túlságosan torzulttá válhat, ami rontja az eredmények pontosságát. Az értekezésben egy új, geometriai alapokon nyugvó eljárást dolgoztam ki, amelynek segítségével p -verziós végelem-módszert használva az érintkezési feladat nagy pontossággal megoldható. A kopás miatti torzulások a testek időnkénti újragerendálását teszik szükségessé.

Ha az érintkező testek elcsúsznak egymáson hő keletkezik, és a felületek elkezdnek kopni. A kopás számításához a módosított Archard kopási törvényt használtuk. A kopás miatt a kisebb méretű végelemek egy idő után eltűnnek, ezért a végelem háló újragerendálására van szükség az egyes kopás számítások után.

A keletkezett hő miatt a testek felmelegednek, és kis mértékben kitágulnak. A hőtágulásnak hatása lehet az érintkezési feladatra. A kopás miatt minden időlépésben új, módosított végelem hálót használunk, a hővezetés számításánál viszont egyazon végelem háló van szükségünk két különböző időlépéshez tartozó hőmérséklet értékekre. A hőmérséklet mező átszámítása két különböző végelem háló között a p -verziós végelemeket használva nem egyszerű dolog. Hasonló problémák vetődnek fel képlékeny alakváltozások számításánál, viszont az irodalom csak h -verziós módszereket említ. Az értekezésben egy módszert dolgoztam ki, mellyel az átszámítás hatékonyan végezhető el.

A csatolt probléma számításánál az elmozdulás mező függ a hőmérséklet mezőtől és a hőmérséklet mező függ az elmozdulásmezőtől. Az ismeretlen mezők pontos kiszámításához több egymásba ágyazott iterációs ciklust használtunk.

Az új tudományos eredményeket röviden a következőkben foglalhatjuk össze:

1. Az érintkezési tartomány határának megkeresésére geometriai alapokon nyugvó új módszer került bevezetésre.
2. Az érintkezési tartomány szélére elhelyezett a határpontot kettősen átölelő kisméretű elemekkel az elvileg nem analitikus megoldáshoz tartozó közelítő megoldás igen kismértékű feszültségi oszcillációt eredményez.
3. A testek között kialakuló kopás miatt az érintkező felületek alakja változik. Ennek leírására szolgáló Legendre polinomokat felhasználó sorbafejtés együtthatóit a legkisebb négyzetek módszerével határozzuk meg biztosítva a ténylegesen kialakuló érintkezési tartomány széli kopás eltűnését és ezzel a kopási alakot leíró függvény oszcilláció mentességét. A kopás a végelelemes háló módosítását okozza.
4. Az időben nemlineárisan lejátszódó kopási folyamatot időlépésenként alkalmazott belső iterációval oldjuk meg a kopási különbségekre előírt korlát betartásával. Az időlépés maximális értéke numerikus kísérletek alapján nyer meghatározást.
5. A p -verziójú számításhoz rendelt, Legendre polinomokat felhasználó hőmérséklet mező közelítéséhez, a kopás miatt változó háléhoz tartozóan egy eljárás került kifejlesztésre, a régi hálóról az új hálóra történő átszámítással járó megváltozott hőmérsékleti sorbafejtési paraméterek meghatározására a hibanégyzet minimum elve

alapján. Az elv bármilyen skalár mező átszámítására alkalmazható a p -verziójú közelítés során.

6. Az operátor hasítás módszerével algoritmus került kidolgozásra a csatolt kopási-hővezetési-érintkezési mechanikai feladat p -verziójú végelem-módszeres megoldására. A számítás összehangoltan kezeli az érintkezési feladat megoldását, a kopás számítását, és a hővezetési feladat megoldását. Iterációs ciklusok alkalmazásával biztosított egy időlépésen belül az elmozdulásmező és a hőmérséklet mező konvergenciája.

Summary

A coupled thermo-mechanical contact problem has been investigated taking into account the effects of the generated heat and the geometrical modification due to friction-induced wear. The mechanical-, contact-, and heat conduction problems have been first solved separately and then in a coupled fashion.

An early analytical solution of the mechanical contact problem is credited to Hertz (1882), evoking the presumption that the size of the contact region is significantly smaller compared to the bodies in contact.

Numerical investigations of the mechanical contact problem were initiated in the 1930s, with the first variational principle published by Signorini in 1959. A cornerstone of Signorini's idea was that the contacting bodies, when they are pressed together, can separate from each other. The theory was further improved by Fichera, who proved the existence and uniqueness of the solution of the elastic contact problem without friction. Numerical calculations employing the finite element method (FEM) have first been applied for solving contact problems in the 1970s. These computations were mostly based on the so called h -version of the method, where the unknown fields are approximated using first-, or second-order polynomials and the number of elements are increased to attain higher accuracy. Another approach is to increase the degree of the approximation polynomials while keeping the number of elements constant leading to p -version FEM. In numerical methods, when higher-order polynomials are required, the Legendre polynomials are frequently the functions of choice due to their advantageous properties. An other unique characteristic of these methods, is that the geometry of the bodies under consideration is approximated by the same functions as the unknown fields. With the help of higher-order approximation functions an accurate numerical resolution of the contact problem can be obtained.

From the numerical point of view, a particular difficulty arising in contact problems is the discontinuity of the contact pressure derivatives along the boundary of the contact region. Since the pressure depends on the displacement field, which is approximated by higher-order polynomials the numerical solution can exhibit unphysical behavior in the vicinity of contact discontinuities, thus special treatment is required.

Gabbert suggested reverting to linear shapefunctions at discontinuities while keeping the higher-order approximation at smooth regions. An other technique due to Volpert is to apply singular functions, while Paczelt employed a node positioning technique without the need to employ special shape functions. In his work, the positioning process consists of two stages, a rough and a fine positioning and the desired accuracy is controlled by error

indicators. However, during node positioning, the finite elements can become distorted resulting the degradation of accuracy. In the present work, a geometrical method has been developed, employing p -version FEM and mesh grading near the contact discontinuity. To avoid the distortion of the elements remeshing has also been employed.

If contacting bodies are sliding on each other, the bodies experience wearing and heat is generated. The wear of the bodies can be described with the modified Archard's equation. Due to wearing the finite element grid is remeshed to avoid the vanishing of the small elements on the contact surface after a short time.

Due to the friction and the heat generated on the contact area, the bodies warm up resulting in the expansion of the contacting bodies, which is in turn influences the solution of the mechanical contact problem. Because of the wearing process the finite element meshes are regenerated in consecutive time steps, but during the heat conduction step the meshes remain the same. This gives rise to the problem of interpolation of the temperature field between different meshes. Several interpolation techniques have been suggested in the literature, however, employing only h -version FEM. In the present work such an algorithm has been developed for p -version.

Since the above thermo-mechanical contact problem exhibits a strong coupling between the temperature and displacement fields, an iterative predictor/corrector procedure has been followed.

The contributions of the present work can be summarized as follows:

1. A numerical procedure for the solution of the mechanical contact problem employing the p -version FEM has been developed applying a new geometrical method for node positioning.
2. The application of graded elements at the problematic contact boundary has been proven to be successful in significantly reducing spurious oscillations compared with non-graded meshes.
3. During solution the finite element mesh is regenerated to account for wearing effects. To further reduce the inaccuracy due to oscillations near the contact boundary, the method of least squares has been applied to determine the new shape of the contacting surfaces.
4. An iterative algorithm has been developed to solve the wearing problem. The size of the timesteps were determined by numerical experiments.
5. A method based on least squares has been developed for transferring the temperature field between different finite element meshes.
6. An iterative algorithm has been developed to numerically solve a coupled thermo-mechanical problem applying operator splitting and all of the above techniques. An advantage of the algorithm is the ability to enforce the convergence of the displacement and temperature fields.

Témavezetői ajánlás Pere Balázs: „Csatolt termo-mechanikai kopási folyamatok vizsgálata *hp*-verziós végeelem módszerrel” c. értekezéshez.

A műszaki gyakorlat, kutatás-fejlesztési feladatok mind gyakrabban vetnek fel olyan kérdéseket, hogyan lehetne az összetett mechanikai, hőtani, kopási folyamatokat szimulálni, hogyan lehetne előrejelzéseket adni a tervező, az üzemeltető mérnök számára. A mechanikai- hőtani-kopási feladatok csatolt mezők vizsgálatát követelik meg. Ily módon a mechanika fejlődésének egyik kitüntetett irányához tartozik az értekezés témája. Egyik feladat a helyes modell felépítése, másik a csatolt rendszerre vonatkozó kezdeti-peremérték feladat pontos megoldása, ill. a pontosság növeléséhez szükséges számítási elvek, algoritmusok kidolgozása.

Az értekezésben Pere Balázs, nagy szorgalommal és körültekintéssel, sok-sok munka ráfordításával végezte vizsgálatait.

Kutatásainak egyik iránya érintkezési feladatokkal nagy pontosságú megoldási algoritmusának kidolgozásával van kapcsolatban, míg másik része a csatolt rendszerre vonatkozó feladat megoldásával.

Vizsgálatait forgástestekre végezte el. A felállított modelleket az un. *p*- verziós végeelem-módszerrel oldotta meg.

Ismeretes, hogy a *p*-verziójú elemek használatakor a tényleges érintkezési határ megtalálása nem egyszerű, hisz, kezdetben, az elemkiosztás általában nem olyan, hogy az érintkezési tartományon lévő elemek valamelyik csomópontja a számítással megtalált érintkezési határral egybeessen. A határpontok pozicionálása, ill. a megoldás oszcillációjának nagymértékű csökkentéséhez kicsiny méretű elemek elhelyezése szükséges. A pozicionálási koordináták megtalálására új típusú, geometriai alapokon megfogalmazott eljárás nyert kidolgozást.

A testek közötti forgásból adódó relatív elcsúszás miatt kopás jön létre, amelynek sebessége, a gyakorlat által elfogadott, modifikált Archard törvény szerint változik. A kopás miatt változik a testek alakja, geometriája, ebből adódóan a végeelemek méretei is

megváltoznak, az érintkezési tartomány határa elmozdul. Külön algoritmusnak kell gondoskodnia a kopási folyamat időbeli lefutásának nyomonkövetéséről. Nagyon fontos a kopott felület (perem) folytonos függvénnyel jellemzett leírása, erre alapozva a végelemek leképezésének kézbentartása. Mindezen kérdéseket magas igényességgel oldotta meg a jelölt.

A kopásnál súrlódási disszipáció lép fel, amely a testek hőmérsékletének megváltozását okozza. A hőtani folyamatot a kopás miatt változó elemháló mellett kell végigkövetni. Ez egy általános kérdést vet fel, hogyan lehet a p -verziós végelemeknél az egyik hálón kapott skalármezőt átszámítani a kopás miatt megváltozotttra. Hibanégyszet minimum elv alapján egy szellemes, nagy hatékonyságú, gyors algoritmus került kifejlesztésre.

Végezetül a kidolgozott — operátor hasítás elvén működő — csatolt rendszerre vonatkozó algoritmus jóságát a bemutatott számpéldák kellően alátámasztják.

Pere Balázs kutatási eredményeiről rendszeresen beszámolt különböző hazai és nemzetközi fórumokon, eleget téve a Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola publikációs követelményeinek.

A disszertáció nagyon gondos munkát takar, szövegezése érthető, ábrái korrektek, jól olvashatók. Elvégzett számításai, azok bemutatása a kidolgozott elvek helyességét alátámasztják, bizonyítják.

Tézisei a PhD cím elnyeréséhez szükséges kívánalmakat messzemenően kielégítik.

Miskolc, 2005. 10. 05.

Prof. Páczelt István
akadémikus

Publikációk az értekezés témájában

Idegen nyelvű folyóiratban megjelent szakcikk:

- {1} **B. Pere**, I. Páczelt: *A mapping technique for a heat conduction problem on moving mesh using the hp-version of the finite element method*, Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. 3, no. 2 (2002), 169-191

Magyar nyelvű folyóiratban megjelent idegen nyelvű szakcikk:

- {2} **B. Pere**, I. Páczelt: *Modelling of wearing problem coupled with heat generation*, GÉP, L. évfolyam 5. szám, 1999, 27-30.

Teljes terjedelemben megjelent idegen nyelvű konferenciaelőadás:

- {3} I. Páczelt, **B. Pere**: Investigation of contact wearing problems with hp-version of the finite element method, Thermal Stresses '99, Proc. of the Third Internat. Congress on Thermal Stresses, Cracow, Poland, 1999, 81-84.
- {4} **B. Pere**: *Investigation of coupled thermo-mechanical problems with hp-version of the finite element method*, MicroCAD '2000 International Computer Science Conference, Section M: Applied Mechanical Engineering Sciences, Miskolc, February 23-24, 2000, 127-132.
- {5} **B. Pere**: *Modelling of the coupled thermo-mechanical contact problem using hp-version of the finite element method*, MicroCAD '2001 International Computer Science Conference, Section N1: Applied Mechanical Engineering Sciences, March 1-2, 2001.

Idegen nyelvű konferenciaelőadás absztrakt:

- {6} **B. Pere**, I. Páczelt: *Solution of coupled thermo-mechanical contact problem using the hp-version of the finite element method*, Book of abstracts, Numerical Methods and Computational Mechanics, July 15-19, 2002, University of Miskolc, Hungary, Miskolc, 212-214.

Magyar nyelvű konferenciaelőadás absztrakt:

- {7} **Pere B.**, Páczelt I.: *Hőfejlődéssel párosuló kopási folyamatok modellezése*, VIII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem, Miskolc, 1999.08.30-09.1., 114.
- {8} **Pere B.**, *Érintkezési feladat és kopási folyamat számítása hp-verziós végelelem módszerrel*, IX. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2003.08.27-08.29., 90.

Irodalomjegyzék

- [1] HERTZ, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journ. für reine und angew. Math (Crelle), **92** (1882), 156
- [2] SIGNORINI, A.: *Questioni di elasticità non linearizzata o semilinearizzata*, Rend. di Matem. e delle suo Appl., **18**, (1959), 17-31.
- [3] FICHERA, G.: *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Dignorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. Lincei, Ser. 8, **7**, (1964), 91-140
- [4] CHAN, S. K. AND TUBA, I. S.: *A finite element method for contact problems of solid bodies, Part I., Part II.*, International Journal of Mechanical Science, **13**, (1971), 615-625, 627-639
- [5] FRANCAVILLA, A. AND ZIENKIEWICZ, O. C.: *A note on numerical computation of elastic contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **9**, (1975), 913-924
- [6] SIMO, J. C. AND WRIGGERS, P. AND TAYLOR, R. L.: *A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **50**, (1993), 163-180
- [7] HUGHES, T. R. J. AND TAYLOR, R. L. AND KANOKNUKULCHAI, W. A.: *A finite element method for large displacement contact and impact problems*, In K. J. Bathe, editor, Formulations and Computational Algorithms in FE Analysis, MIT Press, Boston, (1977), 468-495
- [8] PÁCZELT I.: *A végeelem-módszer modellezési kérdései, hibaelemzés*, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, (1994)
- [9] WRIGGERS, P.: *Computational contact mechanics*, John Wiley & Sons, LTD, (2002)
- [10] SZABÓ, B. AND BABUŠKA, I.: *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [11] GABBERT, U. AND GRAEFF-WEINBERG, K.: *Eine ph-Elementformulierung für die Kontaktanalyse*, Z. angew. Math. Mech., **74**(4), (1994), 195-197.

- [12] VOLPERT, Y., SZABÓ, T., PÁCZELT, I. and SZABÓ, B.: *Application of the space enrichment method to problems of mechanical contact*, Finit. Elem. Anal. Desig., **24**, (1997), 157-170.
- [13] PÁCZELT, I., SZABÓ, B. AND SZABÓ, T.: *Solution of contact problem using the hp-version of the finite element method*, Int. J. of Comp. and Math., **38**, (1999), 49-69.
- [14] LEWIS, R. W., MORGAN, K., THOMAS, H. R. AND SEETHARAMU, K. N.: *The finite element method in heat transfer analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [15] VÁRADI, K. AND NÉDER, Z. AND FRIEDRICH, K. AND FLÖCK, J.: *Numerical and finite element contact temperature analysis of real composite-steel surface in sliding contact*, Tribology International, 11, **31**, (1998), 669-686
- [16] VÁRADI, K. AND NÉDER, Z. AND BERCSEY, T. AND STEINHILPER, W.: *Contact and Thermal Analysis of the Wear Process in Linear Bearings*, Tribology Transactions, **41**, (1998), 11-18
- [17] KOZÁK I., BÉDA GY.: *Rugalmas testek mechanikája*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1987)
- [18] B. PERE, I. PÁCZELT: *Modelling of wearing problem coupled with heat generation*, GÉP, L. évfolyam 5. szám, 1999, 27-30.
- [19] ZMITROWICZ A.: *Variational formulation of contact, friction and wear problems*, Gdańsk, (1999)
- [20] PERE B., *Érintkezési feladat és kopási folyamat számítása hp-verziós végelem módszerrel*, IX. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2003.08.27-08.29. 90.
- [21] KOZÁK I., BÉDA GY. ÉS VERHÁS J.: *Kontinuummechanika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1986)
- [22] FEENY, B., GURAN, A., HINRICHS, N. AND POPP, K.: *A historical review on dry friction and stick-slip phenomena*, Appl. Mech. Rev., 5, (**51**), (1998)
- [23] PÁCZELT, I. AND SZABÓ, T.: *Solution of contact optimization problems of cylindrical bodies using hp-FEM*, Int. J. Num. Meth. Engng, **53**, (2002), 123-146
- [24] BRONSTEJN, I. N. ÉS SZEMENGYAJEV, K. A.: *Matematikai zsebkönyv*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987
- [25] IRONS, B. M.: *A frontal solution program for finite element analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **2**, (1970), 177-202
- [26] BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New York, (1995)

- [27] BARRETT, R. AND BERRY, M. AND CHAN, T. F. AND DEMMEL, J. AND DONATO, J. AND DONGARRA, J. AND EIJKHOUT, V. AND POZO, R. AND ROMINE, C., AND VAN DER VORST, H.: *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia, <http://www.netlib.org/templates/Templates.html>, (1994)
- [28] GISBERT, S. ÉS TAKÓ G.: *Numerikus módszerek 1-2-3.*, Typotext, 1993
- [29] ARCHARD, J. F.: *Contact and rubbing of flat surfaces*, Journal of Applied Physics, **24**, (1953), 981-988
- [30] SARACIBAR, C. A.: *On the numerical modeling of frictional wear phenomena*, Computer methods in applied mechanics and engineering, **177**, (1999), 401-426
- [31] B. PERE: *Modelling of the coupled thermo-mechanical contact problem using hp-version of the finite element method*, MicroCAD '2001 International Computer Science Conference, Section N1: Applied Mechanical Engineering Sciences, March 1-2, 2001.
- [32] B. PERE, I. PÁCZELT: *A mapping technique for a heat conduction problem on moving mesh using the hp-version of the finite element method*, Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. **3**, no. 2 (2002), 169-191
- [33] STRÖMBERG, N.: *Finite element treatment of two-dimensional thermoelastic wear problems*, Computer methods in applied mechanics and engineering, **177**, (1999), 441-455
- [34] JOHANSSON, L.: *Model and numerical algorithm for sliding contact between two elastic half-planes with frictional heat generation and wear*, Wear, **160**, (1993), 77-93
- [35] CARSLAW, H. S. AND JAEGER, J. C.: *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, London, (1959)
- [36] ZHU, Y. Y., ZACHARIA, T. and CESCOTTO, S.: *Application of fully automatic remeshing to complex metal-forming analysis*, Comput. Struct., **62**(3), (1997), 417-427.
- [37] TRÄDEGÅRD, A., NILSSON, F. and ÖSTLUND, S.: *FEM-remeshing technique applied to crack growth problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **160**, (1998), 115-131.
- [38] BROKKEN, D., BREKELMANS, W. A. M. and BAAIJENS, F. P. T.: *Numerical modeling of the metal blanking process*, J. of Mater. Proc. Techn., **83**, (1998), 192-199.
- [39] BROKKEN, D., BREKELMANS, W. A. M. and BAAIJENS, F. P. T.: *Predicting the shape of blanked products: a finite element approach*, J. of Mater. Proc. Techn., **103**, (2000), 51-56.

- [40] HAMEL, V., ROELANDTA, J. M., GACELB, J. N. and SCHMITB, F.: *Finite element modeling of clinch forming with automatic remeshing*, Comput. Struct., **77**, (2000), 185-200.
- [41] LINDGREN, L.-E. and HÄGGBLAD, H.-Å.: *Automatic remeshing for three-dimensional finite element simulation of welding*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **147**, (1997), 401-409.
- [42] BROKKEN, D., BREKELMANS, W. A. M. and BAAIJENS, F. P. T.: *Numerical modeling of the metal blanking process*, J. of Mater. Proc. Techn., **83**, (1998), 192-199.
- [43] PERE B., PÁCZELT I.: *Hőfejlődéssel párosuló kopási folyamatok modellezése*, VIII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem, Miskolc, 1999.08.30-09.1., 114.
- [44] B. PERE: *Investigation of coupled thermo-mechanical problems with hp-version of the finite element method*, MicroCAD '2000 International Computer Science Conference, Section M: Applied Mechanical Engineering Sciences, Miskolc, February 23-24, 2000, 127-132.
- [45] B. PERE, I. PÁCZELT: *Solution of coupled thermo-mechanical contact problem using the hp-version of the finite element method*, Book of abstracts, Numerical Methods and Computational Mechanics, Hungary, Miskolc, 2002, 212-214.
- [46] PÁCZELT, I. AND PERE, B.: *Investigation of contact wearing problems with hp-version of the finite element method*, Thermal Stresses '99, Proc. of the Third Internat. Congress on Thermal Stresses, Cracow, Poland, 1999, 81-84.