Válogatott fejezetek a közlekedésgazdaságtanból

Személyközlekedés gazdasági jellemzői2

Választási modellek

Levelező tagozat 2017 ősz

Készítette: Prileszky István

http://www.sze.hu/~prile

Forrás: A Self Instructing Course in Mode Choice Modeling: Multinomial and Nested Logit Models Prepared For U.S. Department of Transportation Federal Transit Administration By Frank S. oppelman and Chandra Bhat with technical support from Vaneet Sethi, Sriram Subramanian, Vincent Bernardin and Jian Zhang January 31, 2006 Modified June
http://www.caee.utexas.edu/prof/bhat/COURSES/LM_Draft_060131Final-060630.pdf

Fogalmak

- Választási modellek célja: annak megjósolása, hogy egyén vagy csoport a lehetőségek halmazából melyik egy vagy több lehetőséget választ. (Discrete choice models)
- További cél annak vizsgálata, hogyan
  - befolyásolják a döntést az alternatívák[1] és a döntést hozó különböző jellemzői,
  - értékelik a döntéshozók vagy egyes csoportjaik az alternatívák különböző jellemzőit/tulajdonságait.
- Csoport viselkedésre két megközelítés:
  - közvetlenül modellezni a csoport viselkedését (aggregate approach)
  - A csoport döntése egyedi döntésekből alakul ki, ennek megfelelően azt kell modellezni, hogyan tükrözik az egyedi döntések a döntést hozó), és az alternatívák jellemzőit. (disaggregate approach). Az egyedi döntéseket ebben az esetben aggregálni kell.
  - A diszaggregált megközelítés az elterjedt

1: alternatíva eredetileg olyan helyzet, amelyben két lehetőség között lehet választani. A mai szóhasználatban általános értelemben választható lehetőséget jelent.

Döntési folyamat és elemei

- Döntési folyamat: a szóba jöhető alternatívák számbavétele - az egyes alternatívák értékelése – valamilyen döntési szabály alapján az egyik kiválasztása
- 4 elem: a döntést hozó, az alternatívák, az alternatívák jellemzői, döntési szabály
- Döntéshozó: egyes emberek másképpen értékelik az alternatívák jellemzőit, ebben szerepet játszanak pl.: jövedelem, lakóhely, életkor, foglalkozás stb. A modellezésnél ezt figyelembe kell venni.

Az alternatívák

- Rendelkezésre álló (létező) alternatívák (available choice set)
- Elérhető alternatívák (feasible choice set), adott személy számára reális lehetőség
- Figyelembe vett alternatívák (consideration choice set), egyes alternatívákat nem ismernek, vagy eleve elutasítanak

Az alternatívák jellemzői (attribútumok)

- A jellemzőknek vonatkozhatnak minden alternatívára, vagy csak azok egy részére
- Közlekedési módtól függ, pl. zsúfoltság, járatsűrűség nem létezik az egyéni közl.-ben
- Idő, kényelem,megbízhatóság, ár stb. Döntő szerepe van az időnek. Pl.
  - Teljes utazási idő
  - Járműben töltött idő
  - Járművön kívüli idő
  - Az utazás költsége
  - Átszállások száma (tömegközlekedésben)
  - Gyaloglási távolság
  - Időbeni érkezés megbízhatósága

A döntési szabály

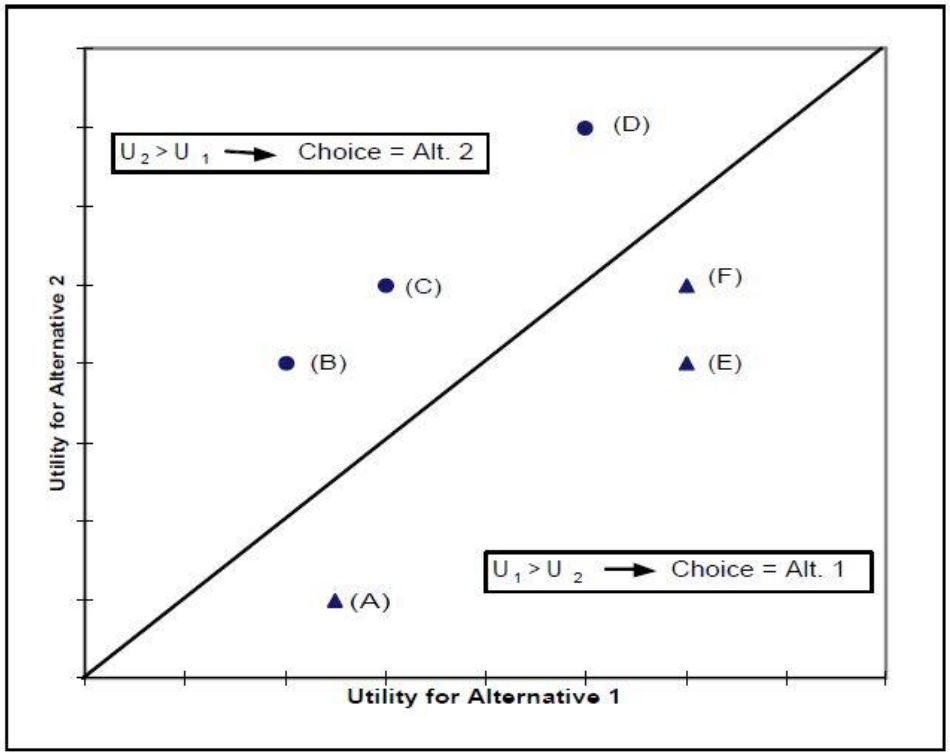
- Racionális döntést feltételezünk
- Racionális, ha konzisztens és tranzitív
  - Konzisztens. Ugyanolyan helyzetben ugyanaz a döntés születik
  - Tranzitív: ha A alternatívát választják B-vel szemben, és B-t C-vel szemben, akkor A-t kell választani C-vel szemben is
- Vannak esetek, amikor az emberi döntés nem racionális

Haszon maximalizálás

- A haszon maximalizálás elve két tételen nyugszik
  - Az alternatívák jellemzői kifejezhetők azok hasznosságát tükröző skaláris mennyiségekkel
  - A döntéshozó képes optimalizálni az alternatívák különböző jellegű tulajdonságai között, pl. képes összevetni az egyes alternatívák „utazási idő” és „utazási költség” adatait, és ezek alapján kiválasztani a számára nagyobb hasznosságot jelentő alternatívát (trade-off)

Determinisztikus és valószínűségi modellek

Determinisztikus: azt feltételezi, hogy a döntéshozó az alternatívákat rangsorolja a hasznosság szerint, és biztos, hogy mindig a legnagyobb hasznosságút választja (A,B,C,D,E,F döntéshozók)



A választást csak az alternatívák hasznosságának sorrendje befolyásolja, a hasznosságban meglévő különbségek mértéke nem játszik szerepet.

Példa

Közlekedési mód	Utazási idő (T) óra	Költség (C) Ft
Személygépkocsi	0,5	800
Személygépkocsi többen (car pooling)	0,75	400
Busz	1,0	300

$$U(T,C,Y) = -T - 0{,}1C/Y$$

Y = havi jövedelem (ezer Ft)

Az attribútum kifejezését rétegenként külön hasznossági függvény alkalmazásával is meg lehet oldani pl.

$$U(T,C,120) = -T - a_1C$$

$$U(T,C,300) = -T - a_2C$$

Determinisztikus választási modellek

- Hasznosság maximalizálása „utility maximization”
- Nagyságrend nem számít, csak a sorrend

Közlekedési mód	Y = 120 000	Y = 300 000
Személygépkocsi	-1,17	-0,77
Személygépkocsi többen (car pooling)	-1,08	-0,88
Busz	-1,05	-1,13

H_{szg} = -0,5 – 0,1x800/120 = -1,17

Az alacsonyabb jövedelmű car pooling-ot, a magasabb jövedelmű személygépkocsit választ

- Az együtthatók nem fejezik ki a preferenciák erősségét, csak a sorrendjüket
- Számos hasznossági függvényt lehet felállítani, amelyek mind alkalmasak a preferenciák sorrendjének a megállapítására

A busz utazási ideje 0,75 órára csökken

Közlekedési mód	Y = 120 000	Y = 300 000
Személygépkocsi	-1,17	-0,77
Személygépkocsi többen (car pooling)	-1,08	-0,80
Busz	-0,88	-0,88

Az alacsonyabb jövedelmű buszt választ, a magasabb jövedelmű marad a személygépkocsinál

Az aggregált választás becslése

- Az attribútum változó szerint csoportokat képezünk

C	szgk	car- pool	busz	
120	-1,17	-1,08	-0,88	busz
150	-1,03	-1,02	-1,10	car-pool
180	-0,94	-0,97	-1,08	szgk
210	-0,88	-0,94	-1,07	szgk
240	-0,83	-0,92	-1,06	szgk
270	-0,80	-0,90	-1,06	szgk
300	-0,77	-0,88	-0,80	szgk

- 1000 fő jövedelem szerinti megoszlása

jövedelem	%	fő	választás
120	10	100	busz
150	15	150	car-pool
180	25	250	szgk
210	20	200	szgk
240	10	100	szgk
270	15	150	szgk
300	5	50	szgk

Busz: 100 car-pool 150 szgk 750

Megjegyzés: a hasznosságok átlagos értékével számolva hamis eredmény adódna

- A determinisztikus megközelítés három fő hibalehetősége
  - A döntéshozó nem rendelkezik tökéletes információkkal az alternatívákról.
  - A modell felállításakor nem rendelkezünk teljes információval az alternatívákról, nem teljes körűek a figyelembe vett attribútumok, illetve nem értjük jól a döntéshozó döntési mechanizmusát.
  - Nem ismerjük eléggé a döntéshozó attribútumait
- Ha ezekkel a bizonytalanságokkal is számolni akarunk, akkor valószínűségi modellt kell használni

Valószínűségi modellek

- Az alternatívák hasznosságának a különbségétől függ a választás
- Az eredmény az egyes alternatívák választásának a valószínűsége
- A bizonytalanság abból ered, hogy az egyes alternatíváknak különböző hasznosságot tulajdonít a döntéshozó és a modellalkotó
- Ezt a különbséget úgy fejezzük ki, hogy az alternatívák hasznosságát két részre osztjuk,
  - az egyik rész az, ami megfigyelhető, ezt determinisztikus résznek hívják,
  - a másik rész az a különbség, ami a megfigyelt és a döntéshozó által valóságban érzékelt hasznosság között van, ennek nagysága , ismeretlen, ez a véletlen (random) rész.

A hasznosság determinisztikus része

- Az alternatívákra jellemző és a döntéshozó karakterére jellemző változókat tartalmaz
- Három részre osztható
  - Az alternatívákat jellemző változók
  - A döntéshozó karakterét jellemző változók
  - Az alternatívák és a döntéshozó karaktere közötti kölcsönhatást kifejező változók (pl. utazási költség kevésbé fontos magas jövedelműeknél, ezt kifejezheti a utazási ktsg/jövedelem változó. Az ilyen típusú változót ki is lehet hagyni a modellből, ekkor az utazók karakterek szerinti csoportjaira (pl. alacsony jövedelem-magas jövedelem) külön-külön kell hasznossági függvényt felállítani.

Hasznossági függvény példa

$$V(X_i) = \gamma_1 \times X_{i1} + \gamma_2 \times X_{i2} + \cdots + \gamma_k \times X_{iK}$$

$V(X_i)$ = az i alternatíva hasznossága
X_{i1}= az i alternatíva k-adik jellemzőjének (attribútumának) értéke
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ = együtthatók

$$V(X_{DA}) = \gamma_1 \times TT_{DA} + \gamma_2 \times TC_{DA}$$
$$V(X_{SR}) = \gamma_1 \times TT_{SR} + \gamma_2 \times TC_{SR}$$
$$V(X_{TR}) = \gamma_1 \times TT_{TR} + \gamma_2 \times TC_{TR} + \gamma_3 \times FREQ_{TR}$$

TT_{DA}= teljes utazási idő autóval egyedül
TC_{DA}= teljes utazási költség autóval egyedül
TT_{SR}= teljes utazási idő car sharing
TC_{SR}= teljes utazási költség car sharing
TT_{TR}= teljes utazási idő tömegközlekedés
TC_{TR}= teljes utazási költség tömegközlekedés
$FREQ_{TR}$=járatszám/óra a tömegközlekedésben

γ_k azonos minden alternatívánál. Különbséget is tehetünk a modell átalakításával. Pl. Az utazási idő tömegközlekedésen megterhelőbb, mint az autózásnál

$$V(X_{DA}) = \gamma_{11} \times TT_{DA} + \gamma_{12} \times 0 + \gamma_2 \times TC_{DA}$$
$$V(X_{SR}) = \gamma_{11} \times TT_{SR} + \gamma_{12} \times 0 + \gamma_2 \times TC_{SR}$$
$$V(X_{TR}) = \gamma_{11} \times 0 + \gamma_{12} \times TT_{TR} + \gamma_2 \times TC_{TR} + \gamma_3 \times FREQ_{TR}$$

Nem magyarázható preferenciák BIAS

- Egyes alternatívákhoz kapcsolódó preferencia/diszpreferencia nem magyarázható sem az alternatívák, sem a döntéshozók attribútumaival
- Kibővítjük a hasznossági függvényt egy új taggal (bias)

$$Bias_i = \beta_{i0} \times ASC_i$$

β_{i0} = az i alternatíva többlet hasznossága

ASC_i = 1 az i alternatíva esetében, a többi alternatívánál 0

A döntéshozó karakterét kifejező változók

Gyakran használt változók

- Income of the traveler's household,
- Sex of traveler,
- Age of traveler,
- Number of automobiles in traveler's ousehold,
- Number of workers in the traveler's household
- Number of adults in the traveler's household.

$$V(S_{DA}) = \beta_{DA,0} \times 1 + \beta_{DA,1} \times Inc_t + \beta_{DA,2} \times NCar_t$$
$$V(S_{SR}) = \beta_{SR,0} \times 1 + \beta_{SR,1} \times Inc_t + \beta_{SR,2} \times NCar_t$$
$$V(S_{TR}) = \beta_{TR,0} \times 1 + \beta_{TR,1} \times Inc_t + \beta_{TR,2} \times NCar_t$$

β_{i0} = a bias tényező az adott alternatívára vonatkozóan

Inc_t = az utazó háztartásának jövedelme

$NCar_t$ = autók száma az utazó háztartásában

β_{i1}, β_{i2} = az alternatívákhoz tartozó paraméter a jövedelemre és az autók számára vonatkozóan

Az alternatívák és a döntéshozó karaktere közötti kölcsönhatást kifejező változók

- Pl. Nők érzékenyebbek az utazási idő mértékére

$$V(X_{DA}, S_i) = \gamma_1 \times TT_{DA} + \gamma_2 \times TT_{DA} \times Fem + \gamma_3 \times TC_{DA} \quad 3.16$$

$$V(X_{SR}, S_i) = \gamma_1 \times TT_{SR} + \gamma_2 \times TT_{SR} \times Fem + \gamma_3 \times TC_{SR} \quad 3.17$$

$$V(X_{TR}, S_i) = \gamma_1 \times TT_{TR} + \gamma_2 \times TT_{TR} \times Fem + \gamma_3 \times TC_{TR} + \gamma_4 \times FREQ_{TR} \quad 3.18$$

Az utazási idő (TT_i) az utazási költség (TC_i) a két hasznosságot tükröző változó. Gamma1 (γ_1)vonatkozik mindenkire, gamma2 (γ_2) csak nőkre. A Fem dummy változó, férfiak esetében 0, nőknél 1.

Multinomiális logit modell

- A hasznosságot leíró függvények nem pontosan határozzák meg az alternatívák hasznosságát a döntéshozók szempontjából, az eltérések számos, egymástól független okra vezethetők vissza. A hibák eloszlása a centrális határeloszlási tétel értelmében normális eloszlásúnak feltételezhető. Normális eloszlásból kiindulva a multinomiális probit modellhez (MPM) jutunk, de ennek használata nehézkes. A normális eloszlás helyett Gumbel eloszlást használva alkották meg a multinomiális logit modellt (MLM). A modell azon a feltételezésen alapszik, hogy a hibák egyenlően és egymástól függetlenül oszlanak meg az alternatívák valamint a döntéshozók között. Ennek a modellnek a segítségével az egyes alternatívák választásának valószínűsége a hasznossági függvény determinisztikus része alapján számítható.
- Joseph Bergson 1944 alkotta meg a logit kifejezést

waned. But in 1973 McFadden, working as a consultant for a Californian public transportation project, first linked the multinomial logit to the theory of discrete choice from mathematical psychology. This provided a theoretical foundation of the logit model that is much more profound than any theory put forward for the use of the probit in bio-assay. It earned McFadden a Nobel prize in 2000.

McFadden, Daniel. "The mathematical theory of demand models." *Behavioral Travel Demand Models* (1976)

A normális és a Gumbel eloszlás

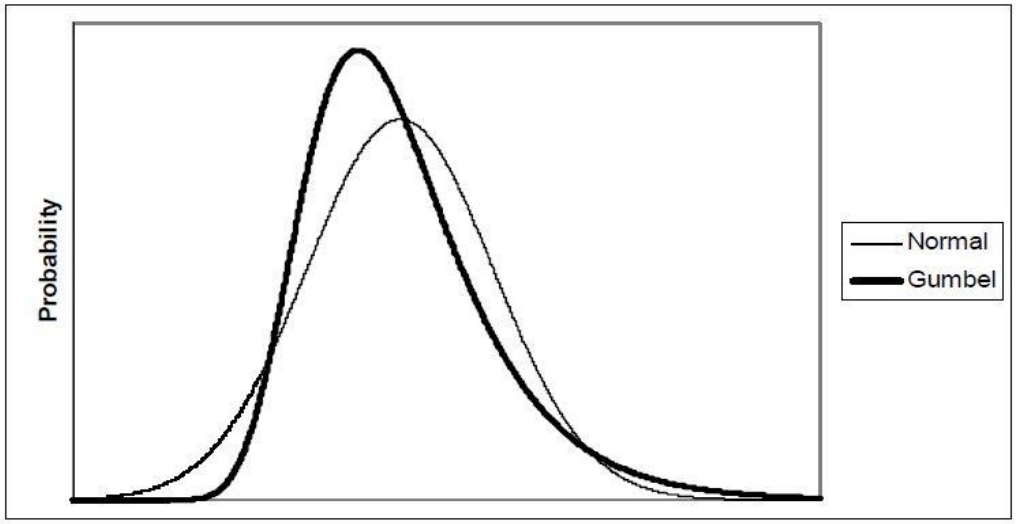


Figure 4.1 Probability Density Function for Gumbel and Norma
(same mean and variance)

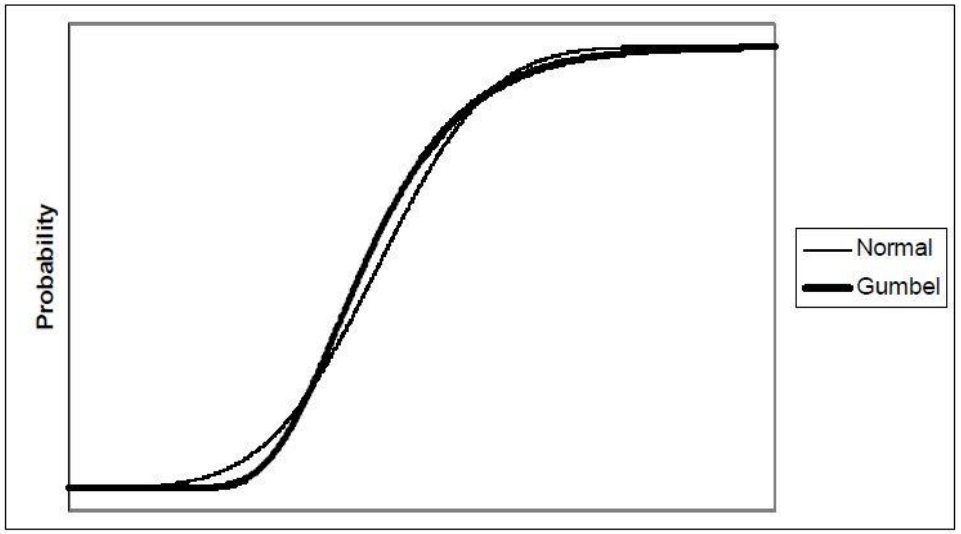


Figure 4.2 Cumulative Distribution Function for Gumbel and Normal Distribution with the Same Mean and Variance

Képlet

$$\Pr(i) = \frac{\exp(V_i)}{\sum_{j=1}^{J} \exp(V_j)} \qquad 4.5$$

where $\Pr(i)$ is the probability of the decision-maker choosing alternative i and

V_j is the systematic component of the utility of alternative j.

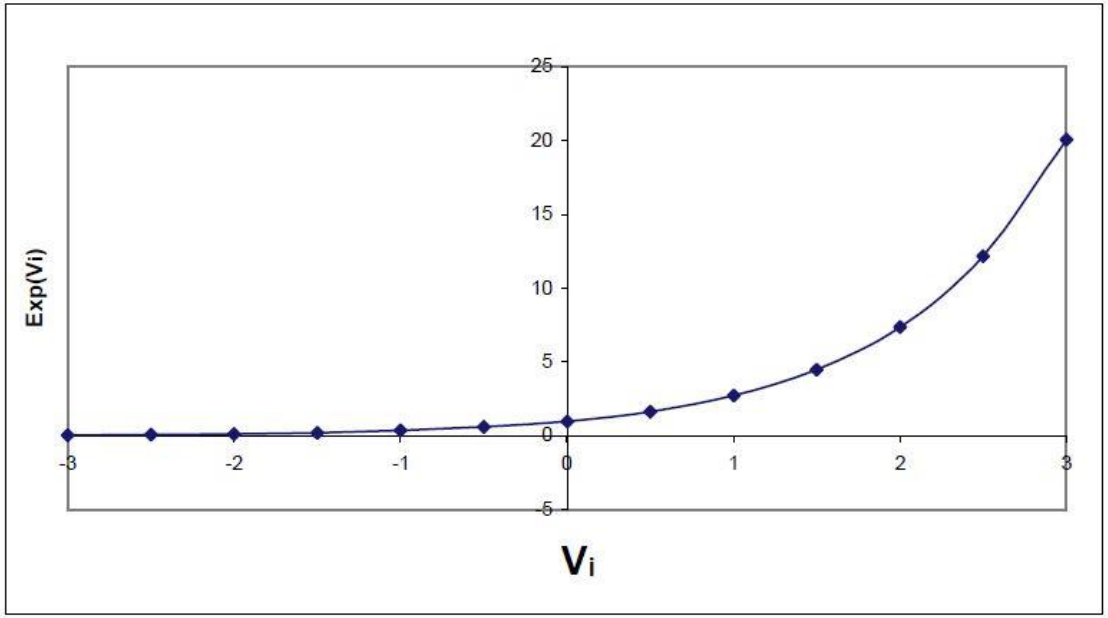


Figure 4.3 Relationship between V_i and $Exp(V_i)$

Képlet tagok feltüntetésével

$$\Pr(DA) = \frac{\exp(V_{DA})}{\exp(V_{DA}) + \exp(V_{SR}) + \exp(V_{TR})}$$

$$\Pr(SR) = \frac{\exp(V_{SR})}{\exp(V_{DA}) + \exp(V_{SR}) + \exp(V_{TR})}$$

$$\Pr(TR) = \frac{\exp(V_{TR})}{\exp(V_{DA}) + \exp(V_{SR}) + \exp(V_{TR})}$$

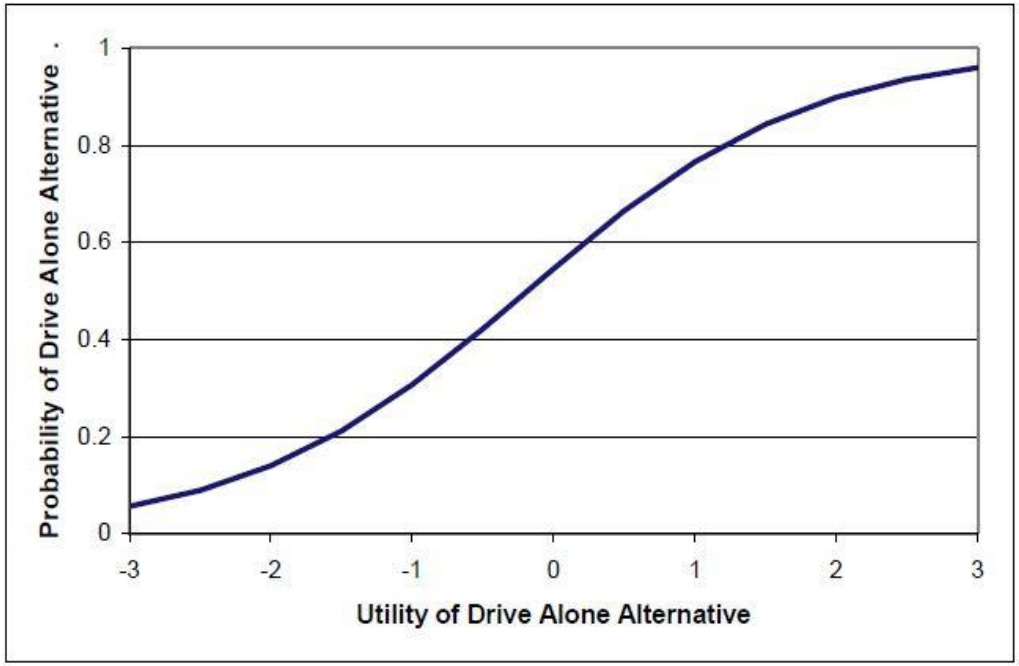
A logit modell tulajdonságai

1. Egy alternatíva választási valószínűsége az adott alternatíva hasznosságának függvényében S alakot mutat.
   - A hasznosság változása a legnagyobb hatást a akkor gyakorol, amikor a választás valószínűsége 50% körüli, vagyis egyenlő az összes többi alternatíva együttes választási valószínűségével.

Table 4-1 Probability Values for Drive Alone as a Function of Drive Alone Utility

(Shared Ride and Transit Utilities held constant)

Case	V_{DA}	V_{SR}	V_{TR}	Pr(DA)
1	-3.0	-1.5	-0.5	0.0566
2	-1.5	-1.5	-0.5	0.2119
3	0.0	-1.5	-0.5	0.5465
4	1.5	-1.5	-0.5	0.8438
5	3.0	-1.5	-0.5	0.9603



2. A választási valószínűségek az alternatívák hasznosságának különbségeitől függnek, és nem azok értékeinek nagyságrendjétől. Ha valamely értékkel megnöveljük minden alternatíva hasznosságát, a választás valószínűségei nem változnak.

Minden alternatíva hasznosságához hozzáadunk 1-et, a valószínűségek nem változnak.

$$\Pr(DA) = \frac{\exp(-0.5)}{\exp(-0.5) + \exp(-1.5) + \exp(-3.0)} = 0.690$$

$$\Pr(SR) = \frac{\exp(-1.5)}{\exp(-0.5) + \exp(-1.5) + \exp(-3.0)} = 0.254$$

$$\Pr(TR) = \frac{\exp(-3.0)}{\exp(-0.5) + \exp(-1.5) + \exp(-3.0)} = 0.057$$

$$\Pr(DA) = \frac{\exp(0.5)}{\exp(0.5) + \exp(-0.5) + \exp(-2.0)} = 0.690$$

$$\Pr(SR) = \frac{\exp(-0.5)}{\exp(0.5) + \exp(-0.5) + \exp(-2.0)} = 0.254$$

$$\Pr(TR) = \frac{\exp(-2.0)}{\exp(0.5) + \exp(-0.5) + \exp(-2.0)} = 0.057$$

A modell másik formája

$$\Pr(DA) = \frac{\exp(V_{DA})}{\exp(V_{DA}) + \exp(V_{SR}) + \exp(V_{TR})} \times \frac{\exp(-V_{DA})}{\exp(-V_{DA})}$$

$$= \frac{\exp(V_{DA}) \times \exp(-V_{DA})}{\left[\exp(V_{DA}) + \exp(V_{SR}) + \exp(V_{TR})\right] \times \exp(-V_{DA})}$$

$$= \frac{\exp(0)}{\exp(0) + \exp(V_{SR} - V_{DA}) + \exp(V_{TR} - V_{DA})}$$

$$\Pr(DA) = \frac{1}{1 + \exp(V_{SR} - V_{DA}) + \exp(V_{TR} - V_{DA})}$$

$$\Pr(i) = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i} \exp(V_j - V_i)} \qquad \forall i \in J$$

Az irreleváns alternatíváktól való függetlenség (Independence of Irrelevant Alternatives IIA)

Két alternatíva választási valószínűsége közötti arány független attól, hogy van-e más alternatíva, és azoknak menyi a hasznossága.

$$\Pr(Auto) = \frac{\exp(V_{Auto})}{\exp(V_{Auto}) + \exp(V_{Bus}) + \exp(V_{Rail})}$$

$$\Pr(Bus) = \frac{\exp(V_{Bus})}{\exp(V_{Auto}) + \exp(V_{Bus}) + \exp(V_{Rail})}$$

$$\Pr(Rail) = \frac{\exp(V_{Rail})}{\exp(V_{Auto}) + \exp(V_{Bus}) + \exp(V_{Rail})}$$

$$\frac{\Pr(Auto)}{\Pr(Bus)} = \frac{\exp(V_{Auto})}{\exp(V_{Bus})} = \exp(V_{Auto} - V_{Bus})$$

$$\frac{\Pr(Auto)}{\Pr(Rail)} = \frac{\exp(V_{Auto})}{\exp(V_{Rail})} = \exp(V_{Auto} - V_{Rail})$$

$$\frac{\Pr(Bus)}{\Pr(Rail)} = \frac{\exp(V_{Bus})}{\exp(V_{Rail})} = \exp(V_{Bus} - V_{Rail})$$

$$\frac{\Pr(i)}{\Pr(k)} = \frac{\exp(V_i)}{\exp(V_k)} = \exp(V_i - V_k)$$

- Ez a tulajdonság vitatható eredményekhez is vezethet. „Kék busz-piros busz paradoxon”
  - Két alternatíva van: autó, kék busz. Az autó választási valószínűsége 0,7, a buszé 0,3.
  - Egy új busz szolgáltató (piros busz) lép a piacra, amely pontosan ugyanazt a szolgáltatást nyújtja , mint a kék busz. Ugyanazok az indulási-érkezési időpontok ugyanaz a menetrend, ugyanolyan jármű, csak a külső színezés különbözik.
  - Logikus feltételezés szerint a busz utasok megoszlanak egyenlő arányban a két buszos alternatíva között, azaz az új helyzetben a választási valószínűségek a következők lesznek: autó=0,7, kék busz=0,15, piros busz=0,15.
  - Logit modell szerint nem ez adódik.

	személygk	kék busz
V	-1,17	-1,88
e^V	0,3103669	0,15259
P_i	0,6704012	0,329599

	személygk	kék busz	piros busz
V	-1,17	-1,88	-1,88
e^V	0,31036694	0,15259	0,1525901
P_i	0,50421311	0,247893	0,2478934

Nem a 32,8%-os busz arány feleződött, hanem a busz részesedése megnőtt 46,6%-ra.

A logit modell használatánál figyelembe kell venni ezt a tulajdonságát.

A piros busz ebben az esetben nem jelent valódi alternatívát, hiszen a tulajdonságai azonosak a kék buszéval.

Példa1

1. Csak konstans – az alternatívák minden tulajdonságát egy konstans fejezi ki, amely minden döntéshozó számára egyformán kifejezi az alternatívák értékét

Table 4-8 MNL Probabilities for Constants Only Model

Alternative	Utility		Exponent	Probability
	Expression	Value		
Drive Alone	0.0	0.0	1.0000	0.7314
Shared Ride	-1.60	-1.60	0.2019	0.1477
Transit	-1.80	-1.80	0.1653	0.1209
			1.3672	

2. Az alternatívák jellemzése 2 változóval, utazási idő és költség

parameter for time (in minutes) equal to -0.045 and for cost (in cents) equal to -0.004
Change in the alternative specific constants, to -1.865 for shared ride and -0.650 for transit, as the effect of excluding these time and cost variables is removed from the constants.

Mode	Travel Time	Travel Cost
Drive Alone	25 minutes	$1.75
Shared Ride	28 minutes	$0.75
TRansit	55 minutes	$1.25

Table 4-9 MNL Probabilities for Time and Cost Model

Alternative	Utility		Exponent	Probability
	Expression	Value		
Drive Alone	-0.045 × 25 -0.004 ×175	-1.825	0.1612	0.7314
Shared Ride	-1.865 -0.045 × 28 -0.004 × 75	-3.425	0.0325	0.1477
TRansit	-0.650 -0.045 × 55 -0.004 ×125	-3.625	0.0266	0.1209
			0.2204	

3. Az utazási idő felbontása járműben töltött és járművén kívüli időre, alkalmazott paraméter:-0.031 and -0.062.,

Mode	IVT	OVT	Travel Cost
Drive Alone	21 minutes	4 minutes	$1.75
Shared Ride	23 minutes	5 minutes	$0.75
Bus	25 minutes	30 minutes	$1.25

Table 4-10 MNL Probabilities for In and Out of Vehicle Time and Cost Model

Alternative	Utility		Exponent	Probability
	Expression	Value		
Drive Alone	-0.031×21 -0.062×4 -0.004×175	-1.599	0.202	0.773
Shared Ride	-1.90 -0.031×23 -0.062×5 -0.004 × 75	-3.223	0.040	0.152
TRansit	-0.80-0.031×25-0.062×30-0.004×125	-3.935	0.020	0.075
			0.261	

4. A döntéshozó attribútum bevezetése, jövedelem

Jövedelem 50 e, csak a transitot érinti, kifejezve, hogy nagyobb jövedelemnél kevésbé használnak tömegközlekedést, azaz annak a hasznossága csökken. A másik két alternatíva hasznosságát ez nem érint.

Table 4-11 MNL Probabilities for In and Out of Vehicle Time, Cost and Income Model

Alternative	Utility		Exponent	Probability
	Expression	Value		
Drive Alone	-0.031×21 -0.062×4 -0.004×175	-1.599	0.202	0.780
Shared Ride	-1.90 -0.031×23 -0.062×5 - 0.004×75	-3.223	0.040	0.154
TRansit	-0.50 -0.031×25 -0.062×30-0.004×125 -0.0087×50	-4.070	0.017	0.066
			0.259	

5. Bővítés az alternatívák és a döntéshozó karaktere közötti kölcsönhatást kifejező változóval.

Költséget osztjuk a jövedelemmel

Table 4-12 MNL Probabilities for In and Out of Vehicle Time, and Cost/Income Model

Alternative	Utility		Exponent	Probability
	Expression	Value		
Drive Alone	-0.031×21 -0.062×4 -0.153×(175/50)	-1.435	0.238	0.763
Shared Ride	-1.90 -0.031×23 -0.062×5 - 0.153× (75/50)	-3.153	0.043	0.137
TRansit	-0.45 -0.031×25 -0.062×30-0.153×(125/50)	-3.468	0.031	0.100
			0.312	

Példa2

Hasznossági függvény értékek

Jövedelem	szgk	car- pool	busz
120	-1,17	-1,08	-0,88
150	-1,03	-1,02	-1,10
180	-0,94	-0,97	-1,08
210	-0,88	-0,94	-1,07
240	-0,83	-0,92	-1,06
270	-0,80	-0,90	-1,06
300	-0,77	-1,08	-0,88

e^V			Választási valószínűség			
Szgk	Car-pool	Busz	Szgk	Car-pool	Busz	Össz.
0,31	0,34	0,42	0,29	0,32	0,39	1,00
0,36	0,36	0,33	0,34	0,34	0,32	1,00
0,39	0,38	0,34	0,35	0,34	0,31	1,00
0,42	0,39	0,34	0,36	0,34	0,30	1,00
0,44	0,40	0,35	0,37	0,34	0,29	1,00
0,45	0,41	0,35	0,37	0,34	0,29	1,00
0,46	0,34	0,42	0,38	0,28	0,34	1,00

$e^{-1,17} = 0,31$ $e^{-1,03} = 0,34$ $e^{-0,94} = 0,42$

0,31/0,31+0,34+0,42)=0,29

Választás eredményei			
Szgk	Car-pool	Busz	Össz.
29	32	39	100
51	51	48	150
88	85	77	250
72	68	60	200
37	34	29	100
56	51	43	150
19	14	17	50