

Algoritmusok és adatstruktúrák 14. előadás

Pusztai Pál
pusztai@sze.hu

Tartalom

- Minimális utak keresése gráfokban
 - Az összes kezdőpont-végpont viszonylatban
 - Egy adott kezdőpontból az összes többi pontba
- Kidolgozott feladatok
 - Mátrixmódszer (Floyd-Warshall)
 - Faépítés (Dijkstra)



Mátrixmódszer

- **Feladat:** Határozzuk meg egy gráf összes viszonylatában a minimális utakat!



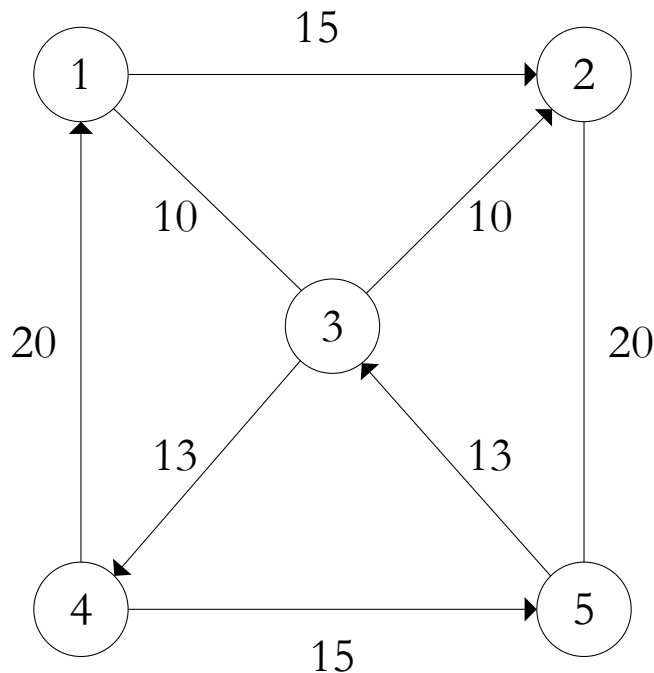
Mátrixmódszer

- **Feladat:** Határozzuk meg egy gráf összes viszonylatában a minimális utakat!
- Távolságmátrix:
 - $T[x,y]$ az x - y viszonylathoz tartozó aktuális minimális út hossza.
- Címke mátrix:
 - $C[x,y]$ az a pont amely az x - y viszonylat aktuális minimális útján az x kezdőpont után jön.
- Algoritmus:
 - A T és C mátrixok **kezdőállapotából** kiindulva;
 - A mátrixokat **lépésenként javítva**;
 - Több lépés megtétele után jut el a végeredményt adó **végállapotba**.

Mátrixmódszer

■ Kezdőállapot

- T : $T[x,y]$ legyen az x - y él hossza, ha létezik ilyen él, egyébként legyen „végtelen nagy”!
- C : A viszonylatok címkéi legyenek a végpontok!



| T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 0 | 15 | 10 | - | - |
| 2 | - | 0 | - | - | 20 |
| 3 | 10 | 10 | 0 | 13 | - |
| 4 | 20 | - | - | 0 | 15 |
| 5 | - | 20 | 13 | - | 0 |

| C | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Mátrixmódszer

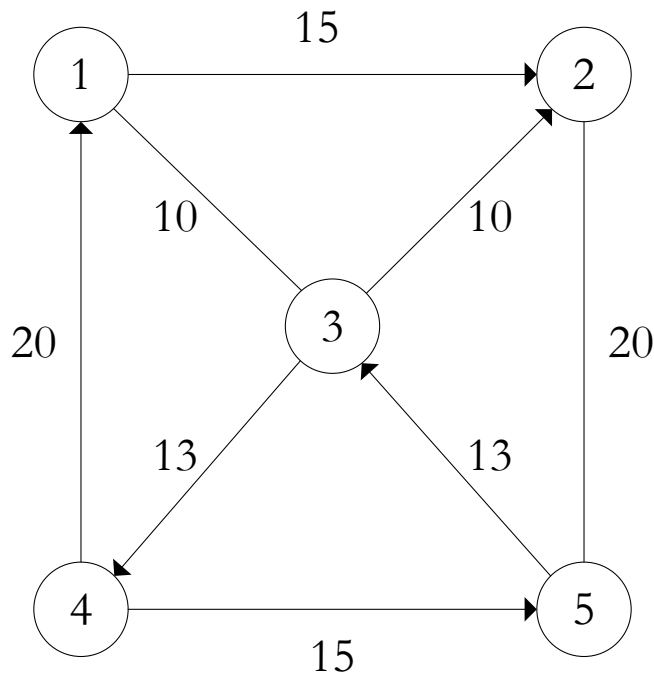
- Javító lépések
 - A hálózat minden w pontjára (egyszer) és ezen belül minden x - y viszonylatra (egyszer) vizsgáljuk meg azt, hogy az x - y viszonylat aktuális minimális útja **rövidíthető-e** a w ponton való áthaladással!
 - Ha $T[x,w] + T[w,y] < T[x,y]$ teljesül (azaz w -n keresztül rövidítünk), akkor $T[x,y]$ legyen $T[x,w] + T[w,y]$ és $C[x,y]$ legyen $C[x,w]$.



Mátrixmódszer

Végállapot

- T végállapota megadja minden viszonylatra a minimális út hosszát. Pl. a 2-4 viszonylat távolsága 46.
- C végállapota a megtalált minimális utakat tükrözi. Pl. a 2-4 viszonylat minimális útja: 2-5-3-4, hiszen $C[2,4]=5$, $C[5,4]=3$, $C[3,4]=4$.



| T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 0 | 15 | 10 | 23 | 35 |
| 2 | 43 | 0 | 33 | 46 | 20 |
| 3 | 10 | 10 | 0 | 13 | 28 |
| 4 | 20 | 35 | 28 | 0 | 15 |
| 5 | 23 | 20 | 13 | 26 | 0 |

| C | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 2 | 5 | 2 | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 4 | 1 | 1 | 5 | 4 | 5 |
| 5 | 3 | 2 | 3 | 3 | 5 |

Faépítés

- **Feladat:** Határozzuk meg egy gráf adott kezdőpontú viszonylataiban a minimális utakat!



Faépítés

- **Feladat:** Határozzuk meg egy gráf adott kezdőpontú viszonylataiban a minimális utakat!
- Távolságtömb:
 - Az egyes pontok aktuális távolsága a kezdőponttól.
- Címketömb:
 - Egy x pont címkéje az x pont elődje az aktuális minimális fában. A gyökérpont címkéje önmaga lesz.
- Algoritmus:
 - A T és C **kezdőállapotából** kiindulva;
 - Azok elemeit (tehát magát a fát) **lépésenként építve** és korrigálva;
 - Pontszám lépés megtétele után jut el a végeredményt adó **végállapotba**.

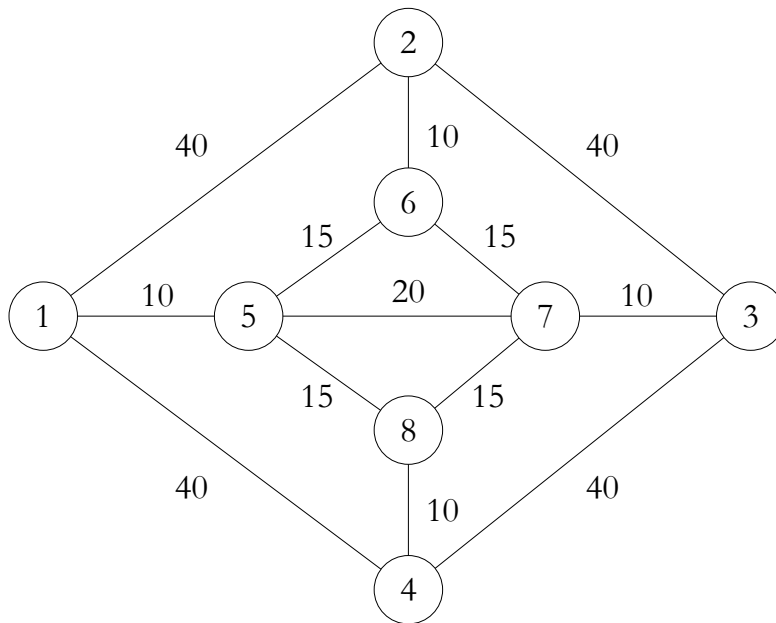
Faépítés

- Jelölések:
 - K : a **kész** pontok halmaza, elemei már végleges (nem rövidíthető) távolsággal és végleges címkével rendelkeznek.
 - A : az **aktív** pontok halmaza, elemei már rendelkeznek (nem „végtelen”) távolsággal és címkével, de ezek még változhatnak.
 - $H[x,y]$: az x - y él **hossza**.

Faépítés

■ Kezdőállapot

- **T**: A kezdőponthoz rendeljük 0, a többi ponthoz „végtelen nagy” távolságértékeket!
- **C**: A kezdőpont címkéje legyen önmaga!
- **K**: Legyen üres!
- **A**: Csak a kezdőpontot tartalmazza!



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 0 | - | - | - | - | - | - | - |
| C | 1 | | | | | | | |

■ Megjegyzés:

- A kezdőállapot valójában az egy pontból, mint gyökérpontból álló fának felel meg.

Faépítés

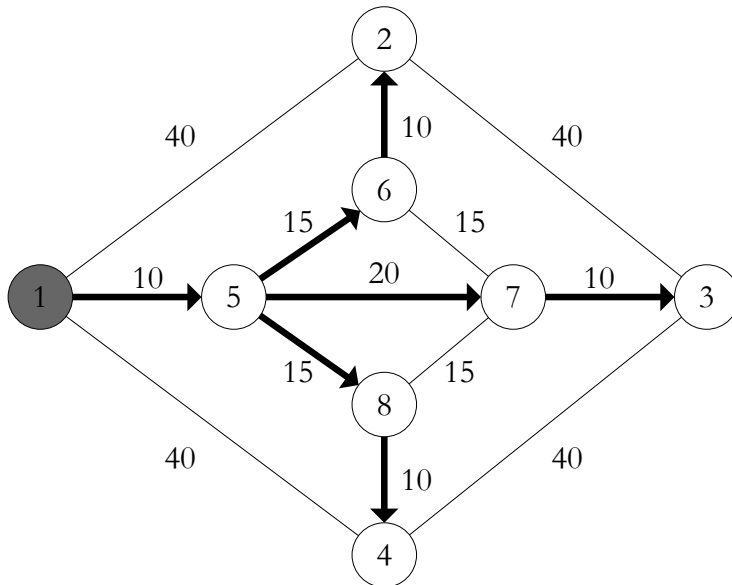
- Javító lépések
 - a) Válasszuk ki az A halmaz minimális távolságú elemét, jelölje ezt x . Töröljük A -ból és vegyük hozzá K -hoz (ez már kész, nem változik)!
 - b) Az x -ből kiinduló élek minden y végpontjára vizsgáljuk meg azt, hogy y útja **rövidíthető-e** az x ponton való áthaladással! Ha $T[x] + H[x, y] < T[y]$ teljesül, akkor $T[y]$ legyen $T[x] + H[x, y]$, $C[y]$ legyen x , és A legyen $A + [y]$.
 - c) Ha van még aktív elem, azaz ha A nem üres, akkor folytassuk az a) ponttól!



Faépítés

Végállapot

- T végállapota minden egyes pontra, mint végpontra megadja az adott kezdőpontból kiinduló, hozzá vezető minimális út hosszát. Pl. az 1-4 viszonylat távolsága 35.
- C végállapota a megtalált minimális fát tükrözi. Pl. az 1-4 viszonylat minimális útja: 1-5-8-4, hiszen $C[4]=8$, $C[8]=5$, $C[5]=1$.



Az 1 gyökérpontú minimális fa

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| T | 0 | 35 | 40 | 35 | 10 | 25 | 30 | 25 |
| C | 1 | 6 | 7 | 8 | 1 | 5 | 5 | 5 |

A távolság- és címketömb

