Kombinatorikus optimalizálás 5. hét

Pusztai Pál
pusztai@sze.hu

Tartalom

- Bináris hátizsák feladat
  - Megoldás dinamikus programozással
  - Megoldás B&B eljárással

Hátizsák feladat

- A bináris (vagy 0−1) hátizsák feladat

Adott egy hátizsák és különböző használati tárgyak egy halmaza. Minden egyes tárgynak adott a súlya és az értéke, valamint a hátizsákban elszállítható rakomány maximális súlya.

Feladat: A rendelkezésre álló tárgyakból egy olyan rakomány összeállítása, amely szállítható (a súlya nem haladja meg a rakomány súlykorlátját) és emellett maximális értékű.

- Jelölések
  - m : a használati tárgyak száma,
  - a_j : a j-edik tárgy súlya, (j=1, …, m),
  - c_j : a j-edik tárgy értéke, (j=1, …, m),
  - b : a hátizsák rakományának súlykorlátja,
  - $x_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j\text{–edik tárgy bekerül a rakományba,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

- Optimumszámítási modell

$$\sum_{j=1}^{m} a_j\, x_j \le b$$
$$x_j \in \{0, 1\}, (j = 1, \dots, m)$$
$$\overline{\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \max}$$

Megoldás dinamikus programozással

- Legyen a tekintett feladat

$$
\begin{array}{c}
\sum_{j=1}^{m} a_j\, x_j \leq b \\
x_j \in \{0,1\}, (j = 1, \dots, m) \\
\hline
\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = z \to \max
\end{array}
$$

amelyben minden együttható pozitív egész.

Vegyük észre, hogy ennek a feladatnak mindig létezik optimális megoldása, mivel $\mathbf{0} \in L$.

Minden $k \in \{1, \dots, m\}$ és $r \in \{0, 1, \dots, b\}$ párosra legyen $f(k, r)$ az alábbi hátizsák feladat optimumának értéke:

$$
\begin{array}{c}
\sum_{j=1}^{k} a_j\, x_j \leq r \\
x_j \in \{0,1\}, (j = 1, \dots, k) \\
\hline
\sum_{j=1}^{k} c_j x_j = z \to \max
\end{array}
$$

Ha $k = m$ és $r = b$ akkor $f(m, b)$ pontosan a tekintett feladat optimumát adja, így az optimum meghatározásához elegendő az $f(k, r)$ függvényt kiszámítani az adott értelmezési tartományra.

Megoldás dinamikus programozással

Nyilvánvaló, hogy

$$f(k,0) = 0, \quad (k = 1, \dots, m)$$

és

$$f(1,r) = \begin{cases} c_1, & \text{ha } a_1 \le r \\ 0 & \text{különben} \end{cases}, \quad (r = 0, 1, \dots, b)$$

Tegyük fel, hogy ismertek az $f(k-1,r)$, $(r = 0, 1, \dots, b)$ értékek valamely $k \ge 2$ –re. Az $f(k,r)$-nek megfelelő feladatot oldjuk meg úgy, hogy $x_k = 0$ és $x_k = 1$ szerint szétbontjuk a lehetséges megoldások L' halmazát L'_0 és L'_1 halmazokra, majd a két maximum közül a nagyobbikat vesszük.

Az $x_k = 0$ helyettesítéssel L'_0 -t az alábbi feladat határozza meg:

$$\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{k-1} a_j x_j \le r \\ x_j \in \{0,1\}, (j = 1, \dots, k-1) \\ \hline \sum_{j=1}^{k-1} c_j x_j = z \to \max \end{array}$$

Vegyük észre, hogy ez pontosan az $f(k-1,r)$-hez tartozó feladat, így az optimuma $f(k-1,r)$.

Megoldás dinamikus programozással

Az $x_k = 1$ helyettesítéssel L_1' -t az alábbi feladat határozza meg:

$$\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{k-1} a_j\, x_j \leq r - a_k \\ x_j \in \{0,1\}, (j = 1, \dots, k-1) \\ \hline c_k + \sum_{j=1}^{k-1} c_j x_j = z \to \max \end{array}$$

Ha $r < a_k$, akkor $L_1' = \emptyset$. Ha $r \geq a_k$, akkor a fenti feladat megegyezik az $f(k-1, r-a_k)$-hoz tartozó feladattal azzal az eltéréssel, hogy a célfüggvényben van egy c_k additív konstans. Tehát ebben az esetben a feladat optimuma $c_k + f(k-1, r-a_k)$.

Terjesszük ki az $f(k,r)$ függvényt úgy, hogy legyen $f(k,r) = -W$, ha $r < 0$. Akkor az eddigiek alapján

$$f(k,r) = \max\{f(k-1,r),\, c_k + f(k-1, r-a_k)\},$$

amely összefüggés alapján már kiszámíthatók az $f(k,r)$ értékek az f függvény értelmezési tartományán.

Megoldás dinamikus programozással

Feladat: Oldjuk meg dinamikus programozással az alábbi 0-1 hátizsák feladatot!

$$\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 3 \\ \hline 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = z \to \max \end{array}$$

$$f(k,0) = 0, \qquad (k = 1, \dots, m)$$

$$f(1,r) = \begin{cases} c_1, & \text{ha } a_1 \le r \\ 0 & \text{különben} \end{cases}, \qquad (r = 0, 1, \dots, b)$$

$$f(k,r) = \max\{f(k-1,r),\, c_k + f(k-1, r-a_k)\},$$

$$f(2,1) = \max\{f(1,1), 2 + f(1,1-1)\} = \max\{0,2\} = 2$$
$$f(2,2) = \max\{f(1,2), 2 + f(1,2-1)\} = \max\{3,2\} = 3$$
$$f(2,3) = \max\{f(1,3), 2 + f(1,3-1)\} = \max\{3,5\} = 5$$
$$f(3,1) = \max\{f(2,1), 1 + f(2,1-2)\} = \max\{2,-W\} = 2$$
$$f(3,2) = \max\{f(2,2), 1 + f(2,2-2)\} = \max\{3,1\} = 3$$
$$f(3,3) = \max\{f(2,3), 1 + f(2,3-2)\} = \max\{5,2\} = 5$$
$$f(4,1) = \max\{f(3,1), 2 + f(3,1-1)\} = \max\{2,2\} = 2$$
$$f(4,2) = \max\{f(3,2), 2 + f(3,2-1)\} = \max\{3,4\} = 4$$
$$f(4,3) = \max\{f(3,3), 2 + f(3,3-1)\} = \max\{5,5\} = 5$$

Megjegyzés: A balra nyilak „hosszabbak” is lehetnek!

k \ r	0	1	2	3	c_k	a_k
1	0	0	3	3	3	2
2	0	↖ 2	↑ 3	↖ 5	2	1
3	0	↑ 2	↑ 3	↑ 5	1	2
4	0	↖ ↑ 2	↖ 4	↖ ↑ 5	2	1

Két optimális megoldás van:
(1,1,0,0) és (1,0,0,1),
Az optimum:5.

Feladatok

- Oldjuk meg dinamikus programozással az alábbi 0-1 hátizsák feladatot!

$$\frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4}{x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = z \to \max}$$

Megoldás B&B eljárással

- Legyen a tekintett hátizsák feladat

$$\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{m} a_j\, x_j \le b \\ x_j \in \{0,1\}, (j = 1, \dots, m) \\ \hline \sum_{j=1}^{m} c_j x_j = z \to \max \end{array}$$

amelyben minden együttható pozitív egész.

- A hátizsák feladat lineáris programozási relaxációja

$$\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{m} a_j\, x_j \le b \\ 0 \le x_j \le 1, (j = 1, \dots, m) \\ \hline \sum_{j=1}^{m} c_j x_j = z \to \max \end{array}$$

Jelölje L^* a hátizsák feladat lehetséges megoldásainak halmazát és L a relaxáció lehetséges megoldásainak halmazát. Ekkor $L^* \subseteq L$, amiből $\max\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in L^*\} \le \max\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in L\}$, azaz a relaxáció optimuma felső korlátja a hátizsák feladat optimumának.

Megjegyzés: A relaxáció optimumának egész része is felső korlátja a hátizsák feladat optimumának (ezt fogjuk felhasználni a B&B eljárás korlátozó függvényének definiálásakor).

Megoldás B&B eljárással

- A relaxáció egy optimális megoldásának meghatározása

Tétel (Dantzig): Legyen $\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_m}{a_m}$. (Ez a változók indexelésének megváltoztatásával elérhető.)

Jelölje k a legnagyobb olyan egész számot, amelyre $\sum_{t=1}^{k} a_t \leq b$ teljesül.

Ekkor az $\bar{x}_j = 1, (j = 1, \dots, k)$, $\bar{x}_{k+1} = (b - \sum_{t=1}^{k} a_t)/a_{k+1}$ vektor egy optimális megoldása a tekintett hátizsák feladat lineáris programozási relaxációjának.

- Példa

$$\begin{array}{c} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 + x_6 \leq 8 \\ 0 \leq x_j \leq 1, (j = 1, \dots, 6) \\ \hline 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 + 5x_6 = z \to \max \end{array}$$

$$\frac{c_6}{a_6} \geq \frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_3}{a_3} \geq \frac{c_4}{a_4} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \frac{c_5}{a_5}$$

$$5 \geq 3 \geq \frac{4}{3} \geq 1 \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{6}$$

A relaxáció optimális megoldása:

$$\bar{x}_6 = 1,\ \bar{x}_1 = 1,\ \bar{x}_3 = 1,\ \bar{x}_4 = 1, \bar{x}_2 = 1/4.$$

Megjegyzés: Ha a relaxáció optimális megoldása egész, akkor ez a bináris vektor optimális megoldása a hátizsák feladatnak is. Ha nem egész, akkor az egyetlen nem egész komponenst 0-ra változtatva egy jó lehetséges megoldáshoz jutunk. Pl. az $x_6^* = 1,\ x_1^* = 1,\ x_3^* = 1,\ x_4^* = 1,\ x_j^* = 0$, a többi indexre.

Megoldás B&B eljárással

- Az Ω halmaz

Az Ω halmazt az összes lehetséges bináris m-esek halmazaként definiáljuk, azaz

$$\Omega = \left\{(x_1, \dots, x_m): x_j \in \{0,1\},\ j = 1, \dots, m\right\}.$$

Nyilvánvalóan $L^* \subseteq \Omega$, másrészt $|\Omega| = 2^m$, így Ω véges.

- A γ korlátozó függvény

A γ korlátozó függvényt Ω speciális részhalmazaira definiáljuk.

Legyen $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, $J \subseteq \{1, \dots, m\}$, $I \cap J = \emptyset$, és

$$\Omega_{I,J} = \left\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in \Omega\ \ \&\ x_i = 1,\ \text{ha } i \in I\ \ \&\ \ x_j = 0,\ \text{ha } j \in J\right\}.$$

A változók egy részét konstans értéken rögzítjük. A rögzített értékű változókat az eredeti feladatba behelyettesítve ismét egy hátizsák feladatot kapunk, nevezzük ezt a feladatot az eredeti feladat (I,J)-részproblémájának, és jelölje ezen részprobléma lehetséges megoldásainak halmazát $L^*_{I,J}$. Ekkor

$$L^*_{I,J} = L^* \cap \Omega_{I,J}.$$

Legyen az (I,J)-részprobléma lineáris programozási relaxációjának optimuma $z_{I,J}$. A $z_{I,J}$ egész része felső korlátja a $z(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in L^* \cap \Omega_{I,J}$) célfüggvényértékeknek, így legyen $\gamma\left(\Omega_{I,J}\right)$ a $z_{I,J}$ egész része.

Ha $z_{I,J}$ egész, akkor a részprobléma optimális megoldásához jutunk, különben képezhetünk egy lehetséges megoldást.

Előfordulhat, hogy a rögzített értékű változókkal olyan hátizsák feladathoz jutunk, amelynek jobboldala negatív. Ekkor a részproblémának nincs lehetséges megoldása, legyen $\gamma\left(\Omega_{I,J}\right) = -W$.

Megoldás B&B eljárással

- A φ szétválasztási függvény

Legyen $\Omega_{I,J}$ az előzőekben definiált tetszőleges halmaz, ahol $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, $J \subseteq \{1, \dots, m\}$, $I \cap J = \emptyset$. Ekkor $|\Omega_{I,J}| > 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $|I| + |J| < m$.

Tegyük fel, hogy az utóbbi reláció teljesül. Ekkor van olyan $k \in \{1, \dots, m\}$, hogy $k \notin I \cup J$.

Legyen $I_1 = I \cup \{k\}$, $J_1 = J$, $I_2 = I$, $J_2 = J \cup \{k\}$. Ekkor $\{\Omega_{I_1,J_1}, \Omega_{I_2,J_2}\}$ az $\Omega_{I,J}$ egy valódi osztályozása.

Legyen

$$\varphi(\Omega_{I,J}) = \{\Omega_{I_1,J_1}, \Omega_{I_2,J_2}\}.$$

A szétválasztás során tehát egy újabb változó (x_k) értékét rögzítjük 0 és 1 értéken, és ennek megfelelően bontjuk fel két osztályra az $\Omega_{I,J}$ halmazt.

A k index kiválasztási stratégiája: k legyen azon komponens indexe, amely az illető részprobléma relaxációjának optimális megoldásában nem egész értéket kap.

- A faépítési stratégia

Alkalmazzuk a maximális korláttal rendelkező szögpont kiválasztásának stratégiáját.

- Az induló megoldás

Az induló megoldás előállítására válasszuk azt a heurisztikát, amely a kiindulási feladat relaxációjából képezhető lehetséges megoldást szolgáltatja.

Megoldás B&B eljárással

- Előkészítő rész
  - Oldjuk meg a tekintett hátizsák feladat lineáris programozási relaxációját, majd a kapott optimális megoldásból határozzuk meg a hátizsák feladat egy $\mathbf{x}_0$ lehetséges megoldását. Legyen a $\bar{z}$ változó értéke $z(\mathbf{x}_0)$ és az $\mathbf{x}^*$ vektorváltozó értéke $\mathbf{x}_0$.
  - Legyen $\gamma(\Omega)$ a relaxáció optimumának egész része.
  - Legyen r=0 és

$$F_0 = \begin{cases} \{\Omega\}, & \text{ha } \gamma(\Omega) > \bar{z}, \\ \emptyset & \text{különben.} \end{cases}$$

  - Ezt követően folytassuk az eljárást az iterációs résszel.

Megoldás B&B eljárással

- Iterációs rész (r-edik iteráció)
  1. Ha $F_r = \emptyset$, akkor vége az eljárásnak, $\mathbf{x}^*$ a feladat optimális megoldása, $\bar{z}$ az optimum értéke. Különben folytassuk a 2. lépéssel.
  2. Ha $F_r \neq \emptyset$ akkor válasszunk ki egy maximális korláttal rendelkező elemet F_r elemei közül, jelölje ezt $\Omega_{I,J}$. Alkalmazzuk a φ szétválasztási függvényt $\Omega_{I,J}$-re. Legyen

     $$\varphi(\Omega_{I,J}) = \{\Omega_{I_1,J_1}, \Omega_{I_2,J_2}\}.$$

     Határozzuk meg az Ω_{I_1,J_1}, Ω_{I_2,J_2} halmazokra a $\gamma(\Omega_{I_1,J_1})$, $\gamma(\Omega_{I_2,J_2})$ korlátokat.

     Jelölje $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ a korlátok meghatározása során előálló lehetséges megoldásokat feltéve, hogy vannak ilyenek. Legyen z_r a $z(\mathbf{x}_1)$ és $z(\mathbf{x}_2)$ függvényértékek maximuma, és $\mathbf{x}^{(r)}$ az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ vektorok közül azt, amelyen a z függvény z_r értéket vesz fel.

     Definiáljuk újra $\bar{z}$ -t és $\mathbf{x}^*$-ot a következők szerint.

     Ha $z_r \leq \bar{z}$, akkor $\bar{z}$ és $\mathbf{x}^*$ nem változnak, míg $z_r > \bar{z}$ esetén $\bar{z}$-nak adjuk a z_r értéket és $\mathbf{x}^*$-ot változtassuk $\mathbf{x}^{(r)}$-re.

     Ezek után legyen

     $$F_{r+1} = \{\Omega_{I',J'} : \Omega_{I',J'} \in \left(F_r \setminus \{\Omega_{I,J}\}\right) \cup \{\Omega_{I_1,J_1}, \Omega_{I_2,J_2}\} \ \ \& \ \gamma\left(\Omega_{I',J'}\right) > \bar{z}\}.$$

     Legyen $r = r + 1$, majd folytassuk az eljárást a következő iterációs lépéssel.

Megoldás B&B eljárással

- Példa

$$\begin{array}{c} 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 12x_5 \leq 20 \\ x_j \in \{0,1\}, (j = 1, \dots, 5) \\ \hline 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = z \to \max \end{array}$$

- Előkészítő rész
  - A relaxáció optimális megoldása (1, 1, 1, 6/7, 0). Az ebből képezhető lehetséges megoldás $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1, 0, 0)$, így $\bar{z} = z(\mathbf{x}_0) = 9$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0$, $\gamma\left(\Omega_{\emptyset,\emptyset}\right) = 11$, $r = 0$, $F_0 = \left\{\Omega_{\emptyset,\emptyset}\right\}$.

Megoldás B&B eljárással

- Iterációs rész (0-adik iteráció)
  1. Mivel $F_0 \neq \emptyset$, ezért a 2. lépés következik.
  2. F_0-ból csak $\Omega_{\emptyset,\emptyset}$ választható. Mivel a relaxáció optimális megoldásában az x_4 változó kapott nem egész értéket, ezért a szétválasztásnál x_4-nek kell értéket adni, azaz

     $$\varphi(\Omega_{\emptyset,\emptyset}) = \{\Omega_{\{4\},\emptyset}, \Omega_{\emptyset,\{4\}}\}.$$

     A $(\{4\},\emptyset)$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása az (1, 1, 6/7, 1, 0) vektor.

     Az optimum egész része 11, ezért $\gamma(\Omega_{\{4\},\emptyset}) = 11$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0, 1, 0)$, $z(\mathbf{x}_1) = 8$.

     Az $(\emptyset,\{4\})$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása az (1, 1, 1, 0, 1/2) vektor.

     Az optimum egész része 11, ezért $\gamma(\Omega_{\emptyset,\{4\}}) = 11$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 1, 0, 0)$, $z(\mathbf{x}_2) = 9$.

     Mivel $z_0 = 9$, $z_0 \leq \bar{z}$, ezért $\bar{z}$ és $\mathbf{x}^*$ nem változnak.

     $F_1 = \{\Omega_{\{4\},\emptyset}, \Omega_{\emptyset,\{4\}}\}$, $r = r + 1$.

Megoldás B&B eljárással

- Iterációs rész (1. iteráció)
  1. Mivel $F_1 \neq \emptyset$, ezért a 2. lépés következik.
  2. Válasszuk F_1-ből az $\Omega_{\{4\},\emptyset}$ halmazt. Ezt az x_3 változó értékadásaival kell szétválasztani.

$$\varphi(\Omega_{\{4\},\emptyset}) = \{\Omega_{\{3,4\},\emptyset}, \Omega_{\{4\},\{3\}}\}.$$

A $(\{3,4\}, \emptyset)$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása az (1, 2/3, 1, 1, 0) vektor.

Az optimum egész része 11, ezért $\gamma(\Omega_{\{3,4\},\emptyset}) = 11$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $z(\mathbf{x}_1) = 10$.

A $(\{4\}, \{3\})$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása az (1, 1, 0, 1, 1/2) vektor.

Az optimum egész része 10, ezért $\gamma(\Omega_{\{4\},\{3\}}) = 10$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0, 1, 0)$, $z(\mathbf{x}_2) = 8$.

Most $z_1 = 10$, $z_1 > \bar{z}$, ezért $\bar{z}$-t z_1-re, azaz 10-re, és $\mathbf{x}^*$-ot $\mathbf{x}_1$-re változtatjuk.

$F_2 = \{\Omega_{\{3,4\},\emptyset}, \Omega_{\emptyset,\{4\}}\}$, $r = r + 1$.

Megoldás B&B eljárással

- Iterációs rész (2. iteráció)
  1. Mivel $F_2 \neq \emptyset$, ezért a 2. lépés következik.
  2. Válasszuk F_2-ből az $\Omega_{\{3,4\},\emptyset}$ halmazt. Ezt az x_2 változó értékadásaival kell szétválasztani.

$$\varphi(\Omega_{\{3,4\},\emptyset}) = \{\Omega_{\{2,3,4\},\emptyset}, \Omega_{\{3,4\},\{2\}}\}.$$

A $(\{2,3,4\},\emptyset)$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása a (3/4, 1, 1, 1, 0) vektor.

Az optimum egész része 11, ezért $\gamma\left(\Omega_{\{2,3,4\},\emptyset}\right) = 11$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1, 1, 0)$, $z(\mathbf{x}_1) = 9$.

A $(\{3,4\},\{2\})$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása az (1, 0, 1, 1, 1/6) vektor.

Az optimum egész része 10, ezért $\gamma\left(\Omega_{\{3,4\},\{2\}}\right) = 10$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $z(\mathbf{x}_2) = 10$.

Mivel $z_2 = 10$, $z_2 \leq \bar{z}$, ezért $\bar{z}$ és $\mathbf{x}^*$ nem változnak.

$F_3 = \{\Omega_{\{2,3,4\},\emptyset}, \Omega_{\emptyset,\{4\}}\}$, $r = r + 1$.

Megoldás B&B eljárással

- Iterációs rész (3. iteráció)
  1. Mivel $F_3 \neq \emptyset$, ezért a 2. lépés következik.
  2. Válasszuk F_3-ból az $\Omega_{\emptyset,\{4\}}$ halmazt. Ezt az x_5 változó értékadásaival kell szétválasztani.

     $$\varphi(\Omega_{\emptyset,\{4\}}) = \{\Omega_{\{5\},\{4\}}, \Omega_{\emptyset,\{4,5\}}\}.$$

     Az $(\{5\},\{4\})$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása az (1, 1, 1/7, 0, 1) vektor.

     Az optimum egész része 10, ezért $\gamma\left(\Omega_{\{5\},\{4\}}\right) = 10$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0, 0, 1)$, $z(\mathbf{x}_1) = 10$.

     Az $(\emptyset,\{4,5\})$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása az (1, 1, 1, 0, 0) vektor.

     Az optimum értéke 9, ezért $\gamma\left(\Omega_{\emptyset,\{4,5\}}\right) = 9$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 1, 0, 0)$, $z(\mathbf{x}_2) = 9$.

     Mivel $z_3 = 10$, $z_3 \leq \bar{z}$, ezért $\bar{z}$ és $\mathbf{x}^*$ nem változnak.

     $F_4 = \{\Omega_{\{2,3,4\},\emptyset}\}$, $r = r + 1$.

Megoldás B&B eljárással

- Iterációs rész (4. iteráció)
  1. Mivel $F_4 \neq \emptyset$, ezért a 2. lépés következik.
  2. Válasszuk F_4-ből az $\Omega_{\{2,3,4\},\emptyset}$ halmazt. Ezt az x_1 változó értékadásaival kell szétválasztani.

     $$\varphi(\Omega_{\{2,3,4\},\emptyset}) = \{\Omega_{\{1,2,3,4\},\emptyset}, \Omega_{\{2,3,4\},\{1\}}\}.$$

     Az $(\{1,2,3,4\}, \emptyset)$-részfeladat jobboldala negatív, ezért $\gamma\left(\Omega_{\{1,2,3,4\},\emptyset}\right) = -W$.

     A $(\{2,3,4\}, \{1\})$-részfeladat relaxációjának optimális megoldása a (0, 1, 1, 1, 1/4) vektor.

     Az optimum egész része 10, ezért $\gamma\left(\Omega_{\{2,3,4\},\{1\}}\right) = 10$, a származtatható lehetséges megoldás $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 1, 1, 0)$, $z(\mathbf{x}_2) = 9$.

     Mivel $z_4 = 9$, $z_4 \leq \bar{z}$, ezért $\bar{z}$ és $\mathbf{x}^*$ nem változnak.

     $F_5 = \emptyset$, $r = r + 1$.
- Iterációs rész (5. iteráció)
  1. Mivel $F_5 = \emptyset$, ezért vége az eljárásnak.

     Az optimális megoldás: $\mathbf{x}^* = (1, 0, 1, 1, 0)$, az optimum: 10.

Feladatok

- Rajzoljuk fel az előző példa B&B fáját, a szögpontoknál tüntessük fel a megfelelő $\Omega_{I,J}$ halmazokat, a $\gamma(\Omega_{I,J})$ korlátokat, a származtatható lehetséges megoldásokat, és az azokhoz tartozó célfüggvényértékeket!