Kombinatorikus optimalizálás 7. hét

Pusztai Pál
pusztai@sze.hu

Tartalom

- Speciális hozzárendelési feladatok
  - A kvadratikus hozzárendelési feladat
- Utazó ügynök probléma
  - Optimumszámítási modell
  - Az utazó ügynök probléma és a hozzárendelési feladat kapcsolata
  - B&B eljárás

Speciális hozzárendelési feladat

Legyen adott két azonos elemszámú sorozat $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$. Minden egyes a_i-hez rendeljük hozzá kölcsönösen egyértelmű módon a másik sorozat egy elemét, amit jelöljön $b_{\varphi(i)}$.

Ekkor a hozzárendelést megadó φ leképezés az $\{1, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja.

Kérdés: Milyen hozzárendelés (permutáció) mellett lesz minimális az alábbi összeg?

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_i \, b_{\varphi(i)}$

Segédtétel: Az (1) összeg akkor minimális, ha az $a_1, \dots, a_n$ és $b_{\varphi(1)}, \dots, b_{\varphi(n)}$ sorozatok ellenkezően rendezettek.

Következmény: Speciális hozzárendelési feladatokra egy hatékony megoldó eljárás adható.

A hozzárendelési feladat interpretálható olyan feladatként, amelyben a lehetséges megoldások pontosan az $\{1, \dots, n\}$ halmaz permutációi, melyek halmazát $\mathcal{P}$-vel jelöljük.

(2) $$\frac{\varphi \in \mathcal{P}}{\sum_{i=1}^{n} c_{i\varphi(i)} = z(\varphi) \to \min}$$

Ha a c_{ij} együtthatók felírhatók $c_{ij} = a_i b_j$ alakban valamilyen alkalmas $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$ konstansokkal, akkor a (2) feladat az alábbi feladatra redukálódik:

(3) $$\frac{\varphi \in \mathcal{P}}{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\varphi(i)} = z(\varphi) \to \min}$$

Speciális hozzárendelési feladat

Megoldó eljárás

Rendezzük az $a_1, \dots, a_n$ sorozat elemeit tágabb értelemben növekedő, a $b_1, \dots, b_n$ sorozat elemeit tágabb értelemben csökkenő sorrendbe, majd a rendezések szerinti i-edik tagok indexeit feleltessük meg egymásnak minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre. Az így képzett φ permutáció optimális megoldása a (3) feladatnak.

Példa

Legyen $a = (1, 3, 2, 1, 4)$, $b = (3, 1, 2, 3, 2)$ és $c_{ij} = a_i b_j$ minden $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ indexpárra.

Ekkor a feladat költségmátrixa a következő (feltüntetve a és b elemeit is):

$$
\begin{array}{c c}
a \backslash b & \begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 6 & 9 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_1 & \le & a_4 & \le & a_3 & \le & a_2 & \le & a_5 \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
b_1 & \ge & b_4 & \ge & b_3 & \ge & b_5 & \ge & b_2
\end{array}
$$

A permutáció:

$1 \to 1,\ 3$

$4 \to 4,\ 3$

$3 \to 3,\ 4$

$2 \to 5,\ 6$

$5 \to 2,\ 4$

Az optimum értéke 20.

Kvadratikus hozzárendelési feladat

- A probléma szemléletesen

Két teljes gráfra épülő hálózatot helyezzünk el egymáson úgy, hogy az egymásra helyezett élekhez tartozó súlyok szorzatainak összege minimális legyen.

- Gyakorlati alkalmazások
  - Kórházi részlegek elhelyezése
    - Adott 5 épületrész, amelyben el kell helyezni a következő kórházi részlegeket: Betegfelvétel/adminisztráció, Sebészet, Belgyógyászat, Labor, Röntgen.
    - Ismeretes az egyes épületek egymástól való távolsága, továbbá az egyes részlegek közötti betegforgalom nagysága.
    - Helyezzük el úgy a részlegeket, hogy a betegek összes mozgása minimális legyen.
  - Klaviatúra tervezés
    - Adott egy üres klaviatúra és ismertek a billentyűk közötti távolságok. Adott a klaviatúrára felviendő jelkészlet, és ismert minden jelpárra a szövegekben egymás után történő előfordulásuk gyakorisága.
    - Vigyük fel a billentyűzetre a jeleket úgy, hogy a gyakoriságszor a billentyűtávolságok minden jelpárra képezett összege minimális legyen (azaz a legkevesebb kézmozgással lehessen begépelni a különböző szövegeket).

Megjegyzés: Mindkét esetben adott egy alaphálózat, amelyben az élhosszak távolságok és a hálózat gráfja irányítatlan teljes gráf, továbbá adott egy másik hálózat is, amelyben az élhosszak a csúcsok közötti forgalmat adják meg és ezen hálózat gráfja azonos csúcsszámú, irányított teljes gráf.

Kvadratikus hozzárendelési feladat

Legyen adott a $G_1 = (\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\})$ hálózat az (a_{ij}) élhosszakkal, továbbá a $G_2 = (\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\})$ hálózat a (b_{ij}) élhosszakkal.

Feladat: Határozzuk meg az alábbi minimumot:

$$\frac{\varphi \in \mathcal{P}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{\varphi(i)\varphi(j)} = z(\varphi) \to \min} \tag{4}$$

A kvadratikus jelző abból adódik, hogy amennyiben permutációk helyett változókkal írjuk le a hozzárendelést, akkor egy kvadratikus célfüggvényt kapunk.

Konkrétan a fenti célfüggvény $a_{ij} b_{\varphi(i)\varphi(j)}$ tagját a $\sum_{t=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ij} x_{it} x_{jr} b_{tr}$ összeggel lehet megadni.

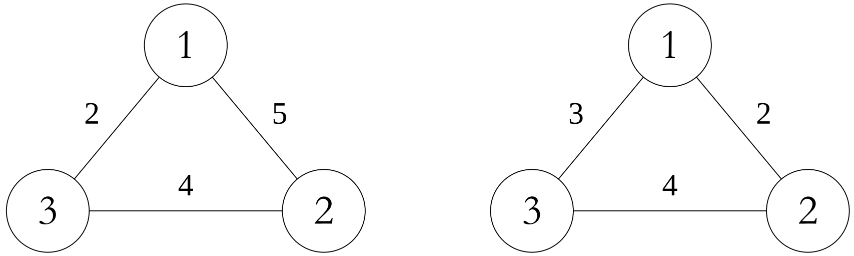
Megjegyzés: A feladat NP-nehéz.

Megoldás: B&B eljárások, heurisztikák.

- B&B eljárás
  - Az Ω halmaz az $n \times n$-es bináris mátrixok halmaza.
  - A szétválasztási függvény a mátrix egy adott elemének 0 és 1 választásával választja szét az aktuális szögponthoz tartozó lehetséges megoldások halmazát.
  - A korlátozó függvény használja az előzőekben ismertetett speciális hozzárendelési feladatok megoldását, az eljárásban pedig a magyar módszert.
  - Faépítési stratégia: a minimális korláttal rendelkező szögpont választása.

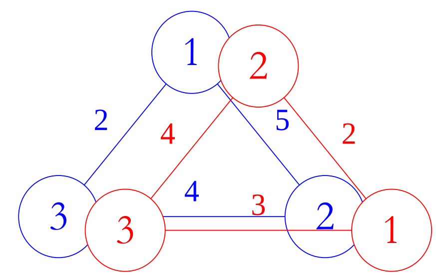
Kvadratikus hozzárendelési feladat

- Példa



φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
$1 \to 1$	$1 \to 2$	$1 \to 2$	$1 \to 1$	$1 \to 3$	$1 \to 3$
$2 \to 2$	$2 \to 1$	$2 \to 3$	$2 \to 3$	$2 \to 2$	$2 \to 1$
$3 \to 3$	$3 \to 3$	$3 \to 1$	$3 \to 2$	$3 \to 1$	$3 \to 2$

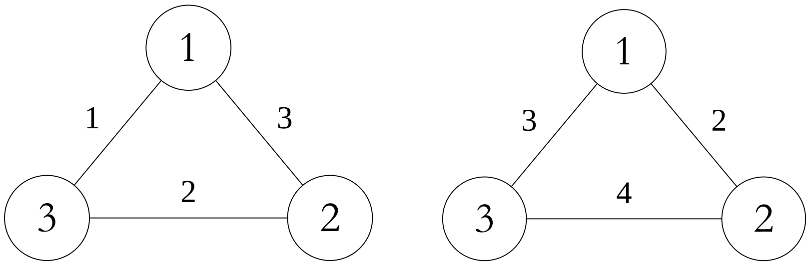
$$z(\varphi_1) = 2(a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23}) = 2(5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4) = 64$$
$$z(\varphi_2) = 2(a_{12}b_{21} + a_{13}b_{23} + a_{23}b_{13}) = 2(5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3) = 60$$
$$z(\varphi_3) = 2(a_{12}b_{23} + a_{13}b_{21} + a_{23}b_{31}) = 2(5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 72$$
$$z(\varphi_4) = 2(a_{12}b_{13} + a_{13}b_{12} + a_{23}b_{32}) = 2(5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4) = 70$$
$$z(\varphi_5) = 2(a_{12}b_{32} + a_{13}b_{31} + a_{23}b_{21}) = 2(5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2) = 68$$
$$z(\varphi_6) = 2(a_{12}b_{31} + a_{13}b_{32} + a_{23}b_{12}) = 2(5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2) = 62$$



A feladat optimális megoldása a φ_2 permutáció, az optimum értéke 60.

Feladatok

- Mi lesz az optimális megoldása az alábbi hálózatokra vonatkozóan a kvadratikus hozzárendelési feladatnak és mennyi lesz az optimum értéke?



Utazó ügynök probléma

- Az utazó ügynök probléma

Adott n számú város és az azokat összekötő utak, amelyeknek ismert a hossza. Adott továbbá egy ügynök, akinek adott városból kiindulva, minden várost végig kell látogatnia úgy, hogy minden várost pontosan egyszer érint, és az út befejeztével visszatér a kiindulási városba.

Feladat: Határozzuk meg az ügynök legrövidebb útját.

Megjegyzés: A feladat NP-teljes probléma.

- Jelölések
  - A városokat jelöljük az 1, 2, …, n számokkal.
  - Egy tetszőleges $Q \subseteq \{1, \dots, n\}$ halmazra jelölje $\bar{Q}$ az $\{1, \dots, n\} \setminus Q$ halmazt.
  - c_{ij} : az i városból a j városba vezető út hossza (ha nincs ilyen út, akkor legyen $c_{ij} = W$, ahol W egy megfelelően nagy szám).
  - $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az ügynök az } i \text{ városból a } j \text{ városba megy,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Megjegyzés: A $\mathbf{C}^{n \times n}$ mátrix nem feltétlenül szimmetrikus.

Utazó ügynök probléma

- Optimumszámítási modell

$$\sum_{t=1}^{n} x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in \bar{Q}} x_{ij} \geq 1 \quad (\emptyset \neq Q \subset \{1, \dots, n\})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = z \to \min$$

- Gyakorlati alkalmazások

Műszaki tervezés: Adott egy automata gépsor és abban egy szegecselő gép. A szegecselő gép karjának a szalagon jövő termék meghatározott pontjaiba szegecseket kell elhelyeznie. Határozzuk meg a szegecsek elhelyezésének azt a sorrendjét, amely esetén legkisebb a szegecselő gép karjának teljes mozgása.

Sorrendi ütemezés: Adott egy üzem, amely *n* féle különböző terméket gyárt. Az egyes termékféleségek gyártása időben elkülönül egymástól, és a termékváltásnál a gépeket át kell állítani. Ismeretes tetszőleges termékpárra a gépek átállításának költsége. Határozzuk meg a termékek termelésének egy olyan sorrendjét, amely mellett a gépek átállításának teljes költsége minimális.

Utazó ügynök probléma

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az ügynök az 1-gyel jelzett városból indul.

A feladat lehetséges megoldásainak száma $(n-1)!$, így mindig létezik optimális megoldás.

Megjegyzés: Ha optimumértékként W adódik, akkor a városok közötti úthálózat nem teszi lehetővé a körbejárást, azaz a gyakorlati problémának nincs lehetséges megoldása.

Jelölés: A $\mathbf{C}^{n\times n}$ költségmátrix egyértelműen meghatározza a feladatot, ezért a $\mathbf{C}$ költségmátrixú feladatra a $TSP(\mathbf{C})$ jelöléssel fogunk hivatkozni (Traveling Salesman Problem).

Egy $\bar{\mathbf{X}}$ mátrixot **körútnak** nevezzük, ha minden $\bar{x}_{ij}=1$-re véve az (i,j) élt, az így képezett élek az n csúcsú teljes gráfban irányított kört alkotnak.

Segédtétel: Ha $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ $n\times n$-es valós mátrixok és $\mathbf{C}\sim\mathbf{D}$, akkor a $TSP(\mathbf{C})$ és $TSP(\mathbf{D})$ feladatok optimális megoldásai megegyeznek.

Megjegyzés: A $\mathbf{C}\sim\mathbf{D}$ a hozzárendelési feladatnál bevezetett, mátrixokra vonatkozó ekvivalenciát jelöli.

Következmény: Az optimális megoldás meghatározását illetően elegendő olyan $TSP(\mathbf{C})$ feladatok vizsgálatára szorítkozni, amelyekre $\mathbf{C}\geq 0$ teljesül.

Utazó ügynök probléma

Ha a $TSP(\mathbf{C})$ feladat harmadik feltételcsoportjától eltekintünk, akkor az $A(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladatot kapjuk, így a $TSP(\mathbf{C})$ feladat egy $\bar{\mathbf{X}}$ lehetséges megoldása egyben lehetséges megoldása az $A(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladatnak is.

Jelölje a $TSP(\mathbf{C})$ lehetséges megoldásainak halmazát L, és $A(\mathbf{C})$ lehetséges megoldásainak halmazát S. Ekkor $L \subseteq S$, és így

$$\min\{z(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in S\} \leq \min\{z(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in L\}.$$

A fentiekből adódik, hogy:

(i) ha $\bar{\mathbf{X}}$ optimális megoldása $A(\mathbf{C})$-nek és $\bar{\mathbf{X}}$ körút, akkor $\bar{\mathbf{X}}$ egyben optimális megoldása $TSP(\mathbf{C})$-nek is,

(ii) ha $\bar{\mathbf{X}}$ optimális megoldása $A(\mathbf{C})$-nek, akkor $z(\bar{\mathbf{X}})$ alsó korlátja a $TSP(\mathbf{C})$ feladat optimumértékének.

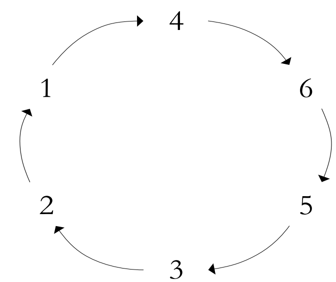
Példa

Tekintsük az alábbi költségmátrixú 6 városú $TSP(\mathbf{C})$ feladatot, ahol az $i \to i$ típusú utak kizárására a c_{ii} együtthatókat rendre W-nek választottuk.
(W-ként például használhatjuk az $1 + n \cdot \max\{c_{ij}: 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n,\ i \neq j\}$ értéket is.)

$$\begin{pmatrix} W & 6 & 11 & 6 & 16 & 19 \\ 5 & W & 16 & 13 & 21 & 9 \\ 8 & 12 & W & 22 & 18 & 11 \\ 20 & 18 & 27 & W & 22 & 15 \\ 10 & 22 & 11 & 25 & W & 18 \\ 16 & 10 & 17 & 30 & 10 & W \end{pmatrix}$$

Megoldva a megfelelő $A(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladatot magyar módszerrel, a kapott utolsó mátrix, az abból előállt $\overline{\mathbf{X}}$ optimális megoldás mátrix, és a megfelelő élek alkotta körút a következő:

$$\begin{pmatrix} W & 0 & 8 & 0^* & 10 & 16 \\ 0^* & W & 10 & 4 & 12 & 3 \\ 0 & 0^* & W & 10 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & 12 & W & 4 & 0^* \\ 0 & 8 & 0^* & 11 & W & 7 \\ 10 & 0 & 10 & 20 & 0^* & W \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Az optimum értéke: $z(\overline{\mathbf{X}}) = c_{14} + c_{21} + c_{32} + c_{46} + c_{53} + c_{65} = 6 + 5 + 12 + 15 + 11 + 10 = 59.$

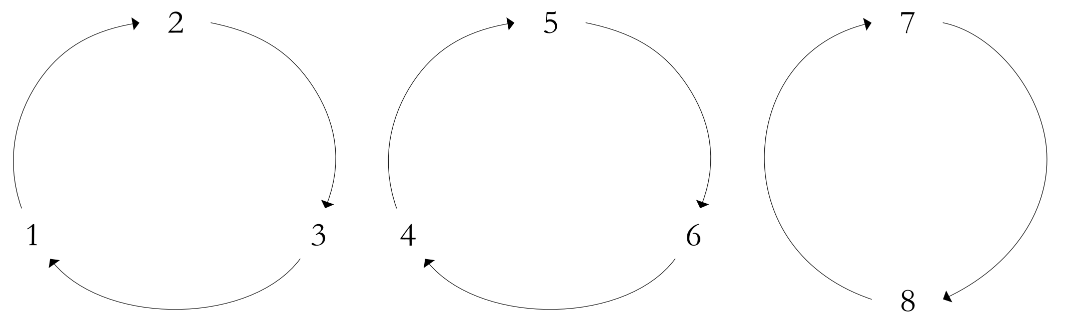
Példa

Tekintsük az alábbi költségmátrixú 8 városú $TSP(\mathbf{C})$ feladatot.

$$\begin{pmatrix} W & 2 & 11 & 10 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & W & 1 & 8 & 8 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & W & 11 & 8 & 12 & 3 & 11 \\ 11 & 9 & 10 & W & 1 & 9 & 8 & 10 \\ 11 & 11 & 9 & 4 & W & 2 & 10 & 9 \\ 12 & 8 & 5 & 2 & 11 & W & 11 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 10 & 9 & 12 & W & 3 \\ 7 & 10 & 10 & 10 & 6 & 3 & 1 & W \end{pmatrix}$$

Rendre kivonva a 2, 1, 3, 1, 2, 2, 3, 1 sorminimumokat, majd az előálló mátrix első oszlopára a 2 oszlopminimumot, a kapott $\mathbf{C}^{(0)}$ mátrixban oszlopfolytonosan kijelölve a független 0-rendszert a következő mátrixot, és részkörutakat kapjuk.

$$\begin{pmatrix} W & 0^* & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & W & 0^* & 7 & 7 & 3 & 5 & 6 \\ 0^* & 9 & W & 8 & 5 & 9 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 9 & W & 0^* & 8 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 7 & 2 & W & 0^* & 8 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 0^* & 9 & W & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 7 & 6 & 9 & W & 0^* \\ 4 & 9 & 9 & 9 & 5 & 2 & 0^* & W \end{pmatrix}$$



Az optimum értéke: $z(\overline{\mathbf{X}}) = c_{12} + c_{23} + c_{31} + c_{45} + c_{56} + c_{64} + c_{78} + c_{87} =$

$= 2 + 1 + 5 + 1 + 2 + 2 + 3 + 1 = 17.$

B&B eljárás

1. Az Ω halmaz megadása

Legyen Ω a $\{0,1\}$ feletti $n \times n$-es mátrixok halmaza. Ekkor $L \subseteq \Omega$, valamint $|\Omega| = 2^{n^2}$, így Ω véges.

2. A φ szétválasztási és a γ korlátozó függvények megadása.

2.1. A függvények definiálása az Ω halmazon.

2.2. A függvények kiterjesztése olyan $\Omega_{I,J}$ halmazokra, ahol az I halmaz az 1 értéken rögzített változók indexeit, a J halmaz a 0 értéken rögzített változók indexeit tartalmazza.

A szétválasztó függvény egy minimális elemszámú részkörút alapján választja szét a lehetséges megoldások halmazát.

A korlátozó függvény definíciója kihasználja a $TSP(\mathbf{C})$ ás az $A(\mathbf{C})$ feladatok megoldása közötti (i) és (ii) összefüggéseket.

3. Faépítési stratégia

Egy minimális korláttal rendelkező levelet választunk a faépítés során.