Kombinatorikus optimalizálás 10. hét

Pusztai Pál
pusztai@sze.hu

Tartalom

- Kiszolgálási feladatok
  - A *p*-medián probléma
  - 1- és 2-medián probléma fákra
    - Goldman eljárása
  - A *p*-center probléma
  - 1-center probléma fákra
    - Handler eljárása

Kiszolgálási feladatok

Fermat (XVII. század): Adott a síkon három, nem egy egyenesen fekvő pont *A*, *B* és *C*. Határozzuk meg a sík azon *X* pontját, amelyre *XA*+*XB*+*XC* távolságösszeg minimális.

Megoldás: **Toricelli** (ugyanebben az évszázadban, lásd jegyzet.)

A. Weber (1909): Adott *n* számú kliens. Hová helyezzünk el egy raktárt úgy, hogy a kliensek raktárból való kiszolgálásának összköltsége minimális legyen.

Megoldás: Vázsonyi Endre (Weiszfeld E.) (1937) .

A **Facility Location Theory** elmélet kialakulása (60-as évek) az operációkutatás részeként (a mai modern logisztika megalapozása).

1964: Vizsgáljunk olyan modelleket, amelyben a kliensek egy gráf szögpontjaiban, a kiszolgálók pedig a gráfon (beleértve a szögpontokat is) helyezkednek el.

Bizonyítást nyert, hogy számos modellben a kiszolgálóknak a gráfon történő elhelyezése visszavezethető a szögpontokba történő elhelyezésükre (**Discrete Facility Location Theory**).

Feltétel: A továbbiakban olyan hálózatokat vizsgálunk, amelyek gráfjai irányítatlan gráfok. A hálózat éleihez rendelt súlyok pozitívak.

Definiálható a gráf tetszőleges két pontja közötti legrövidebb út hossza. Az irányított gráfokra definiált (Floyd-Warshall) algoritmus használható, ha minden (i, j) élhez felvesszük a (j, i) élt is c_{ij} súllyal.

p-medián probléma

Legyen adott egy hálózat n csúccsal és jelölje (d_{ij}) a legrövidebb utak hosszainak mátrixát. Minden csúcspontban legyen egy kliens és az i-edik csúcspontban elhelyezkedő kliens igényét jelölje w_i.

p számú kiszolgáló (szolgáltató) elhelyezésére van lehetőség, amelyeket a hálózat csúcspontjaiba kell elhelyezni.

Feltételek (a szolgáltatók a kiszolgálást az alábbiak szerint végzik):

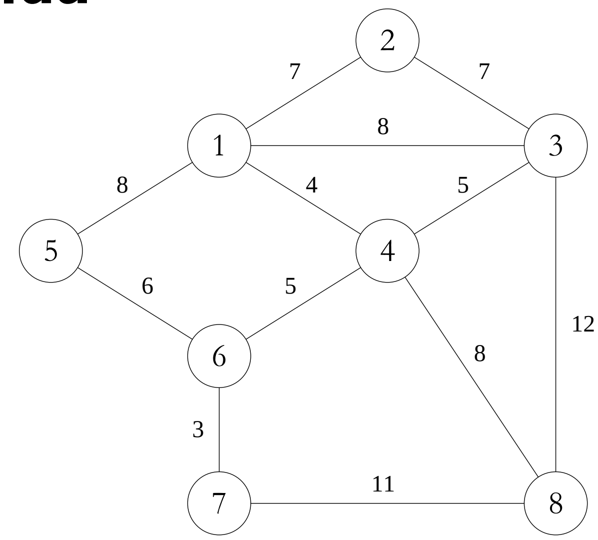
- Minden szolgáltató korlátlan mennyiségben képes minden klienst kiszolgálni.
- A szolgáltató teljes mértékben kiszolgálja a klienst, tehát nem fordulhat elő, hogy egy kliens igényét két szolgáltató megosztva elégíti ki. (Ez nem lényeges megszorítás, ugyanis megosztott kiszolgálás esetén áttérhetnénk arra a kiszolgálóra, amelyik olcsóbban tudja az illető klienst kiszolgálni.)
- A kliensek kiszolgálása külön-külön történik, tehát nem megengedett a kliensek megrendeléseinek összevont, egy fuvarral történő megoldása.

Feladat: Helyezzük el a *p* számú kiszolgálót úgy, hogy a kliensek kiszolgálásának teljes költsége minimális legyen, ahol az *i*-edik kliens kiszolgálásának a költsége a *j*-edik szögpontba telepített kiszolgálóval $w_i d_{ij}$.

Megjegyzés: Amennyiben meg van engedve a kiszolgálóknak az élekre történő telepítése, akkor ebben az esetben is van olyan optimális megoldás, hogy minden kiszolgáló a gráf valamely szögpontjában van.

Gyakorlati alkalmazások: Raktárak elhelyezése bizonyos áru(k) terítésére, üzemanyagtároló telepek a töltőállomásokhoz, stb.

Példa



$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 4 & 8 & 9 & 12 & 12 \\ 7 & 0 & 7 & 11 & 15 & 16 & 19 & 19 \\ 8 & 7 & 0 & 5 & 16 & 10 & 13 & 12 \\ 4 & 11 & 5 & 0 & 11 & 5 & 8 & 8 \\ 8 & 15 & 16 & 11 & 0 & 6 & 9 & 19 \\ 9 & 16 & 10 & 5 & 6 & 0 & 3 & 13 \\ 12 & 19 & 13 & 8 & 9 & 3 & 0 & 11 \\ 12 & 19 & 12 & 8 & 19 & 13 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Legyen minden mennyiségi igény 1, azaz $w_i = 1$, $i = 1, \ldots, 8$. Ekkor az i kliens kiszolgálási költsége megegyezik a legrövidebb út hosszával.

Az 1-medián probléma ($p = 1$) esetén, ha a kiszolgálót az i csúcspontba helyezzük, akkor a kiszolgálás teljes költsége $\sum_{t=1}^{8} d_{ti}$.

A **D** oszlopösszegei rendre 60, 94, 71, 52, 84, 62, 75, 94, így a kiszolgálót a 4 csúcsba kell elhelyezni.

Az 1-medián probléma optimális megoldását adó csúcsot **1-mediánnak** nevezik.

A 2-medián probléma ($p = 2$) esetén, ha a kiszolgálókat az i és j csúcspontokba helyezzük, akkor a kiszolgálás teljes költsége $\sum_{t=1}^{8} \min\{d_{ti}, d_{tj}\}$.

Véve a lehetséges $\binom{8}{2} = 28$ darab összeget, a $\{4, 6\}$ halmaz esetén kapjuk a legkisebb értéket (37).

A 2-medián probléma optimális megoldását megadó kételemű halmazt **2-medián halmaznak** nevezik.

p-medián probléma

Legyen a hálózat gráfja $G = (V, E)$, ahol

- $V = I \cup J$,
- I pozitív egészek egy nemüres véges halmaza, a kliensek halmaza, akiknek elhelyezkedése ismert és rögzített,
- J pozitív egészek egy nemüres véges halmaza, a kiszolgálók lehetséges helyeinek pontjai,

továbbá legyen

- minden $i \in I$ és $j \in J$ párra az i kliens kiszolgálásának költsége a j csúcsba telepített kiszolgálónál c_{ij}. Ez azt jelenti, hogy a kiszolgálási költség nem függ a kiszolgálótól, csak a kiszolgálás helyétől.
- p a telepíthető szolgáltatók száma.

Most legyen Q a kiszolgálók elhelyezését rögzítő halmaz, azaz $|Q| = p$ és $Q \subseteq J$.

Az $i \in I$ klienst Q azon helyéről szolgáljuk ki, ahonnét a kiszolgálás költsége minimális, így az i kliens kiszolgálási költsége: $\min_{j\in Q}\{c_{ij}\}$.

Mivel minden klienst ki kell szolgálni, ezért a szolgáltatók rögzített elhelyezése mellett a teljes kiszolgálás költsége: $\sum_{i\in I} \min_{j\in Q}\{c_{ij}\}$.

A p-medián probléma:

(1) $\min_{Q\subseteq J, |Q|=p}\{\sum_{i\in I} \min_{j\in Q}\{c_{ij}\}\}$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az I és J halmazokra nincs megkötés. Az $I = J$ esetben a korábbi problémát kapjuk.

p-medián probléma

- Jelölések
  - Minden $j \in J$-re vezessünk be egy x_j bináris változót, és legyen

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j \text{ helyre telepítünk szolgáltatót,} \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

továbbá minden $(i, j) \in I \times J$ párra legyen

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i \text{ kliens a } j \text{ helyen lévő szolgáltatóval lesz kiszolgálva,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

- Optimumszámítási modell

$$\sum_{j \in J} x_j = p$$

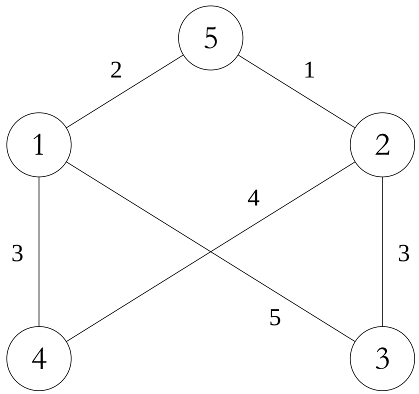
$$y_{ij} - x_j \leq 0, \quad i \in I, \quad j \in J$$

(2)
$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \quad i \in I$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J$$

$$\sum_{i \in I, j \in J} c_{ij} y_{ij} = z \to \min$$

Példa



$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 1 \\
y_{31} - x_1 &\leq 0 \\
y_{41} - x_1 &\leq 0 \\
y_{51} - x_1 &\leq 0 \\
y_{32} - x_2 &\leq 0 \\
y_{42} - x_2 &\leq 0 \\
y_{52} - x_2 &\leq 0 \\
y_{31} + y_{32} &= 1 \\
y_{41} + y_{42} &= 1 \\
y_{51} + y_{52} &= 1
\end{aligned}
$$

$$x_j \in \{0,1\},\ y_{ij} \in \{0,1\},\ \ i \in \{3,4,5\},\ j \in \{1,2\}$$

$$\sum_{i\in I, j\in J} c_{ij} y_{ij} = z \to min$$

A kliensek halmaza I={3, 4, 5}, a kiszolgálók lehetséges helyeinek halmaza J={1, 2}, továbbá legyen p=1.

(1) alapján $\min\left\{\sum_{i=3}^{5} c_{i1}, \sum_{i=3}^{5} c_{i2}\right\} = \min\{10,8\}$.

Tehát az 1-medián a 2 csúcs.

Probléma: Nagy bináris programozási feladatok keletkeznek, amelyek megoldása nehéz.

Jelentőség: A lineáris programozási feladatok relaxációjával alsó korlátot kaphatunk az optimumértékre.

A p-medián probléma, ha p-t nem fixáljuk, akkor NP-nehéz, ezért

- rögzített p mellett különböző B&B eljárások,
- heurisztikák,
- speciális feladatosztályokra hatékony eljárások kerültek kidolgozásra.

A továbbiakban azzal a speciális esettel foglalkozunk, amelyben a probléma G gráfja fa, és erre az esetre adunk az 1- és 2-medián problémákra hatékony eljárást.

1- és 2-medián probléma fákra

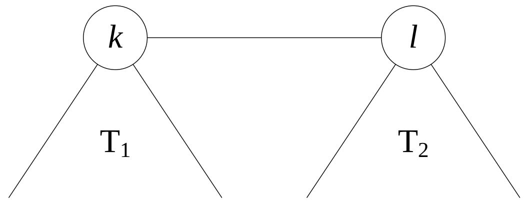
- További feltételek
  - A probléma G gráfja fa.
  - Minden szögpontban van egy kliens.
  - A szolgáltatók bármely szögpontba telepíthetők.
  - A klienseknek mennyiségi igénye van, mégpedig az i kliens igénye w_i, amit **súlynak** nevezünk.
  - Az i kliens kiszolgálási költsége a j csúcsba telepített szolgáltató révén $w_i d_{ij}$, ahol d_{ij} az i és j csúcsok távolságát jelöli. (Mivel a tekintett gráf fa, így egyetlen út van a két pont között, és d_{ij} ezen út hossza.)

1-medián probléma megoldása

A célfüggvény a gráf csúcsainak függvénye, konkrétan a j csúcsra megadja a j-be telepített szolgáltató esetén a teljes kiszolgálás költségét.

Ha a fa csúcspontjainak halmaza $\{1, \ldots, n\}$, akkor $z(j) = \sum_{i=1}^{n} w_i d_{ij}$.

Legyen k és l a tekintett G fa két szomszédos csúcsa. Elhagyva a köztük lévő irányítatlan élt, G két diszjunkt részfára esik szét, jelölje ezeket $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$, a részfákba eső csúcsok halmazát T_1 és T_2.



Egy $\mathcal{T}'$ részfához hozzárendelünk egy súlyt, amely a T' halmazban lévő csúcsok súlyainak összege, azaz $\sum_{s \in T'} w_s$. Ezt a súlyt a $\mathcal{T}'$ **részfa súlyának** nevezzük.

1. Segédtétel: $z(k) - z(l) = d_{kl}(w(\mathcal{T}_2) - w(\mathcal{T}_1))$

2. Segédtétel: Ha $w(\mathcal{T}_1) \geq w(\mathcal{T}_2)$, akkor a $\mathcal{T}_1$ fa tartalmaz 1-mediánt.

3. Segédtétel: Ha $w(\mathcal{T}_1) \geq w(\mathcal{T}_2)$, akkor véve azt a $\mathcal{T}_1'$ fát, amely a $\mathcal{T}_1$ fából a w_k súlynak a $w_k + w(\mathcal{T}_2)$ súllyal történő helyettesítésével áll elő, a $\mathcal{T}_1'$ fa bármely 1-mediánja szintén 1-medián lesz a G fára vonatkozóan is.

Megjegyzés: A fenti segédtételekre alapozva megadható egy eljárás az 1-medián probléma megoldására.

1-medián probléma megoldása

- Goldman-féle eljárás

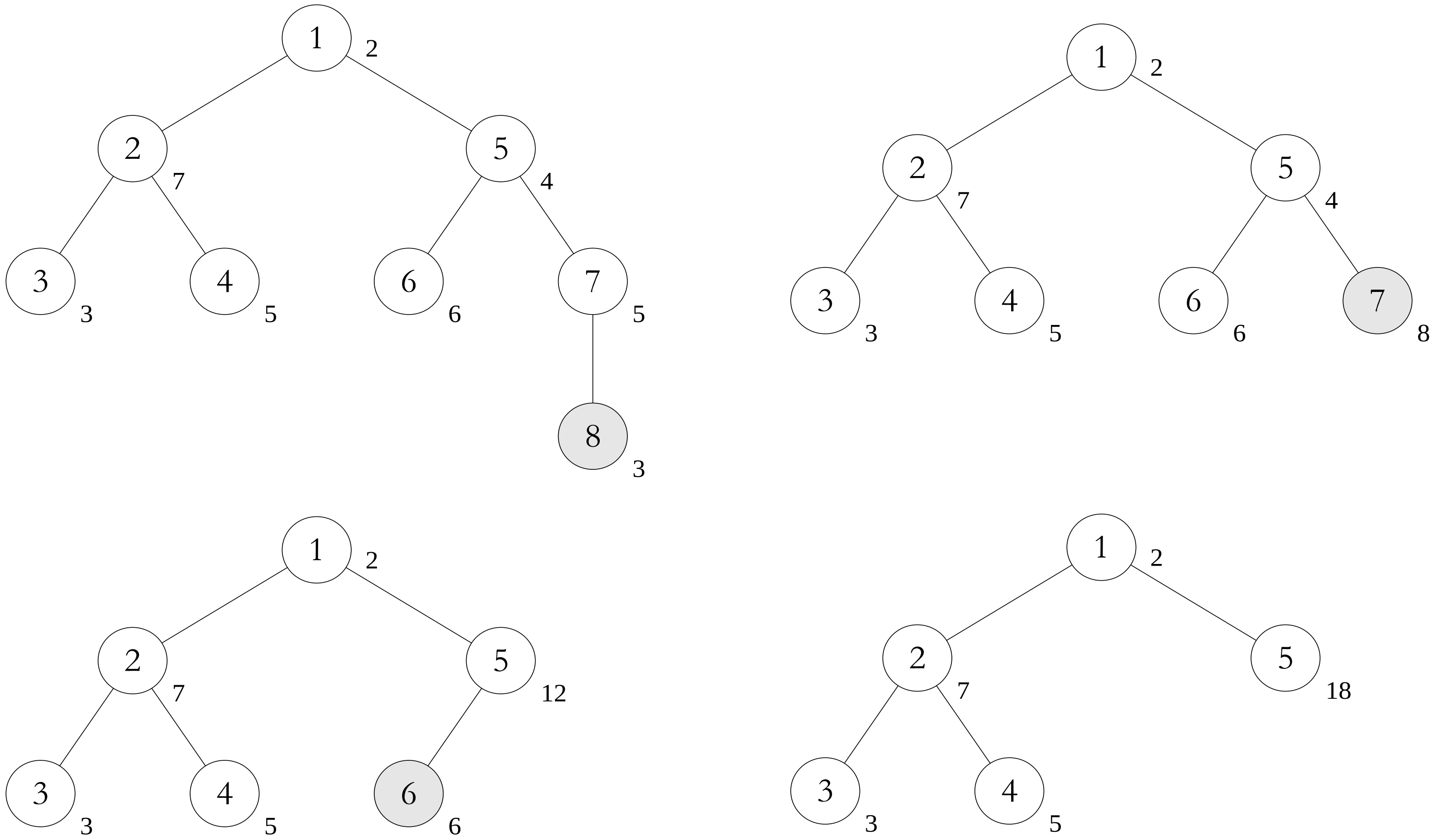
1. Ha az aktuális G fa egyetlen szögpontot tartalmaz, akkor vége az eljárásnak, az illető pont a kiindulási feladat 1-mediánja. Ellenkező esetben a 2. lépés következik.
2. Keressünk az aktuális G fában egy olyan csúcspontot, amely egyetlen szögponttal szomszédos, azaz a fa levele. Jelöljön i egy ilyen pontot. Ha $w_i \geq w(G)/2$, ahol w_i az aktuális fára vonatkozó súlyt jelöli, akkor vége az eljárásnak, i a kiindulási fában 1-medián.

   Ellenkező esetben a 3. lépés következik.
3. Legyen j a tekintett i csúcs szomszédja az aktuális G fában. Töröljük az aktuális G fából az i csúcsot, valamint az (i, j) élt, továbbá változtassuk meg a törléssel előálló új fa csúcsainak súlyozását úgy, hogy a j csúcs súlyát változtassuk $w_i + w_j$-re.

   Tekintsük az előállított új fát az új súlyokkal aktuális fának, majd folytassuk az 1. lépéssel.

- Megjegyzés
  - Egyetlen 1-medián van
    - ha az eljárás az 1. lépéssel fejeződik be,
    - ha az eljárás a 2. lépéssel fejeződik be és $w_i > w(G)/2$.
  - Két 1-medián van
    - ha az eljárás a 2. lépéssel fejeződik be és $w_i = w(G)/2$. Ekkor a másik 1-medián az eredményként kapott csúcsnak az eljárás végén kapott szomszédja.

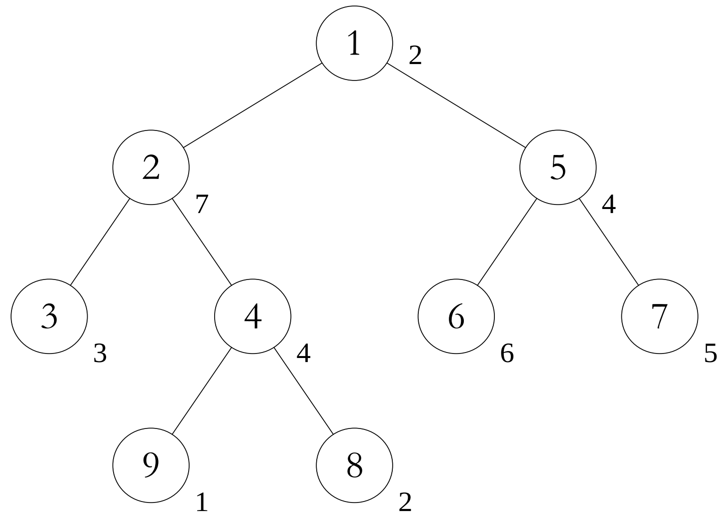
Példa



A Goldman-féle eljárás

Feladatok

- Milyen 1-medián(oka)t kapunk a Goldman-féle eljárással az alábbi fára? Rajzoljuk fel az eljárás során előálló fákat!



2-medián probléma megoldása

A 2-medián probléma esetén a célfüggvény a következő:

$$z(k,l) = \sum_{i=1}^{n} w_i \min\{d_{ik}, d_{il}\}.$$

Tegyük fel, hogy $\{k,l\}$ egy 2-medián halmaz. Legyen

$$T_1 = \{i: i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ d_{ik} = \min\{d_{ik}, d_{il}\}\},$$

és $T_2 = V \setminus T_1$. Felvéve a T_1-beli pontok, majd a T_2-beli pontok közötti éleket, akkor két diszjunkt részfát kapunk, amelyeket jelöljön $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$.

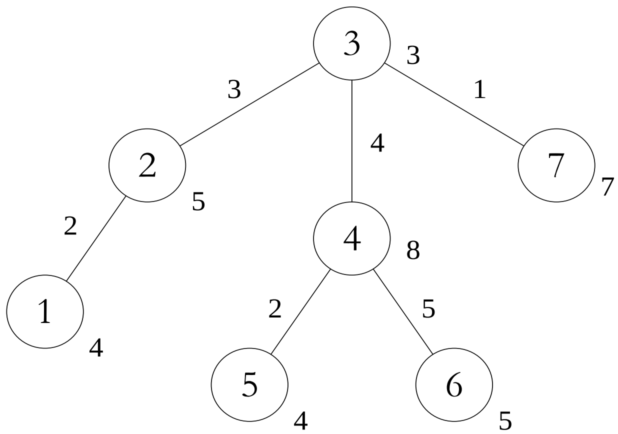
Állítás: k 1-medián $\mathcal{T}_1$-ben, l 1-medián $\mathcal{T}_2$-ben.

Következmény: Minden 2-medián halmaz elemei a megfelelő részfákban 1-mediánok.

Megoldó eljárás

Vegyük a G fa összes $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ felbontását (ezek száma $n-1$), és határozzuk meg ezekre az 1-medián párokat, majd válasszunk ki közülük egy olyan párt, amelyre a 2-medián probléma célfüggvénye minimális értéket vesz fel. Így egy 2-medián halmazt kapunk.

Példa



Az (1,2) él elhagyásával $T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{2, \dots, 7\}$, a $\mathcal{T}_1$ fában az 1 csúcs az 1-medián, a $\mathcal{T}_2$ fában (alkalmazva a Goldman-féle eljárást) a 4 csúcs adódik 1-mediánként. Ezekre a csúcsokra $z(1,4) = 90$.

A (2,3) él elhagyásával létrejövő részfákban a 2 és 4 csúcsok lesznek az 1-mediánok, és $z(2,4) = 78$.

A (3,4) él elhagyásával a 3 és 4 csúcsok lesznek a megfelelő 1-mediánok, és $z(3,4) = 75$.

A (4,5) él elhagyása után az 5 és 3 csúcsok az 1-mediánok, és $z(5,3) = 93$.

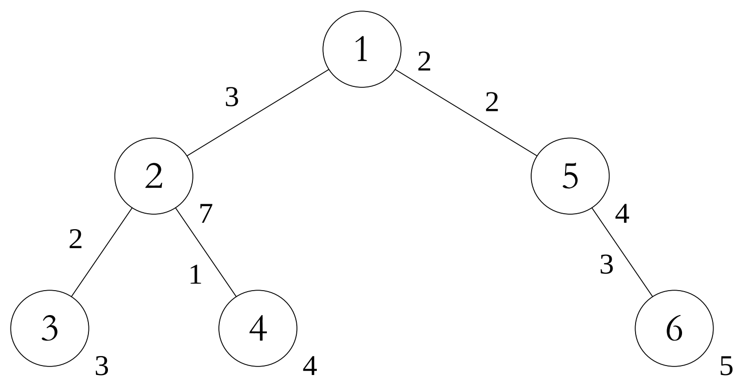
A (4,6) élre a 6 és 3 csúcsok adódnak, amelyekre $z(6,3) = 98$.

Végül a (3,7) él elhagyásával a 4 és 7 csúcsok válnak 1-mediánná, és $z(4,7) = 80$.

A kapott célfüggvényértékek közül 75 a minimális, így a $\{3,4\}$ halmaz egy 2-medián halmaz.

Feladatok

- Milyen 2-medián(oka)t kapunk az alábbi fára és mennyi lesz az optimum értéke? Adjuk meg az egyes élek elhagyásával kapott 1-medián csúcspárokat és a hozzájuk tartozó célfüggvényértékeket is!



p-center probléma

A *p*-center problémát a *p*-medián feladathoz képest úgy lehet általánosan megfogalmazni, hogy a center problémáknál a klienseknek nincsen mennyiségi igénye, továbbá más a cél, nevezetesen a kiszolgálókat úgy kell elhelyezni, hogy a kiszolgálók és az általuk kiszolgált kliensek távolságának maximuma minimális legyen.

Gyakorlati alkalmazások: Egy város lakosai mint kliensek, és a rendőrörsök, vagy a mentőállomások mint kiszolgálók; egy város épületei mint kliensek és a tűzoltóállomások, mint kiszolgálók; stb.

Legyen adott egy n csúcsú irányítatlan gráfon alapuló hálózat a c_{ij} élhosszakkal.

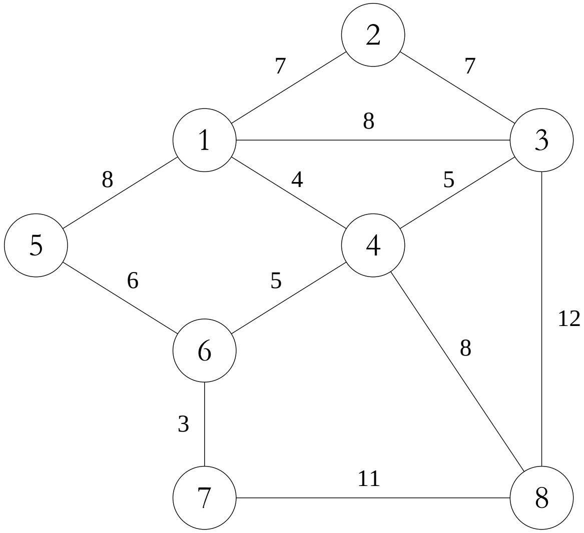
Jelölje a legrövidebb utak hosszainak mátrixát (d_{ij}). Minden csúcspontban legyen egy kliens, és legyen lehetőség *p* számú kiszolgáló elhelyezésére a hálózat csúcspontjaiba.

Feltételek (a szolgáltatók a kiszolgálást az alábbiak szerint végzik):

- Minden kiszolgáló képes kiszolgálni bármelyik klienst.
- Minden kiszolgáló kapacitása korlátlan, azaz bármelyik klienst képes kiszolgálni.
- Egy klienst csak egy kiszolgáló szolgálhat ki.
- A kliensek kiszolgálása külön-külön történik, azaz nincs összevont, szimultán kiszolgálás.

Feladat: Helyezzük el a *p* számú kiszolgálót a gráf csúcspontjaiba úgy, hogy a kiszolgálók és az általuk kiszolgált kliensek távolságának maximuma minimális legyen.

Példa



$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 4 & 8 & 9 & 12 & 12 \\ 7 & 0 & 7 & 11 & 15 & 16 & 19 & 19 \\ 8 & 7 & 0 & 5 & 16 & 10 & 13 & 12 \\ 4 & 11 & 5 & 0 & 11 & 5 & 8 & 8 \\ 8 & 15 & 16 & 11 & 0 & 6 & 9 & 19 \\ 9 & 16 & 10 & 5 & 6 & 0 & 3 & 13 \\ 12 & 19 & 13 & 8 & 9 & 3 & 0 & 11 \\ 12 & 19 & 12 & 8 & 19 & 13 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Az 1-center probléma ($p = 1$) esetén, ha a kiszolgálót az j csúcsba helyezzük, akkor az i kliensnek a kiszolgálótól való távolsága d_{ij}. A d_{ij}, $i = 1, \dots, 8$ értékek maximuma adja a legrosszabb helyzetben lévő kliens távolságát a kiszolgálótól. Ez pontosan a **D** mátrix j-edik oszlopában lévő elemek maximuma. Ezt akarjuk minimalizálni.

A **D** oszlopmaximumai rendre 12, 19, 16, 11, 19, 16, 19, 19. Ezek közül a 11 a legkisebb, így a kiszolgálót a 4 csúcsba kell elhelyezni.

A 2-center probléma ($p = 2$) esetén, ha a kiszolgálókat az i és j csúcspontokba helyezzük, akkor a t klienst a hozzá közelebb eső kiszolgálóval tudjuk kiszolgálni, azaz a t csúcsban lévő kliens távolsága az őt kiszolgáló szolgáltatótól $\min\{d_{ti}, d_{tj}\}$. Ezek maximuma $t = 1, \dots, 8$ értékekre adja a legrosszabb helyzetben lévő kliens távolságát. Ezt minimalizálva az összes $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, 8\}$ kételemű halmazra az $\{1, 4\}$ halmaz esetén kapjuk a legkisebb maximumot (8).

Az optimális megoldásokat **1-centernek**, ill. **2-center halmaznak** nevezik.

p-center probléma

Legyen a hálózat gráfja $G = (V, E)$, ahol

- $V = I \cup J$,
- I pozitív egészek egy nemüres véges halmaza, a kliensek halmaza, akiknek elhelyezkedése ismert és rögzített,
- J pozitív egészek egy nemüres véges halmaza, a kiszolgálók lehetséges helyeinek pontjai,

továbbá legyen

- minden $i \in I$ és $j \in J$ párra az i és j pontokat összekötő legrövidebb út hossza d_{ij},
- p az elhelyezendő szolgáltatók száma.

Most legyen Q a kiszolgálók elhelyezését rögzítő halmaz, azaz $|Q| = p$ és $Q \subseteq J$.

Ekkor rendre a Q-beli pontokba elhelyezve a kiszolgálókat, az $i \in I$ kliensnek az őt kiszolgáló szolgáltatótól való távolsága: $\min_{j \in Q}\{d_{ij}\}$.

A legrosszabb helyzetben lévő kliens távolsága a kiszolgálójától: $\max_{i \in I}\{\min_{j \in Q}\{d_{ij}\}\}$.

A p-center probléma:

(3) $\min_{Q \subseteq J, |Q| = p}\{\max_{i \in I}\{\min_{j \in Q}\{d_{ij}\}\}\}$.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az I és J halmazokra nincs megkötés. Az $I = J$ esetben a korábbi problémát kapjuk.

p-center probléma

- Jelölések
  - Minden $j \in J$-re vezessünk be egy x_j bináris változót, és legyen

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j \text{ helyre telepítünk szolgáltatót,} \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

továbbá minden $(i, j) \in I \times J$ párra legyen

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i \text{ kliens a } j \text{ helyen lévő szolgáltatóval lesz kiszolgálva,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

- Optimumszámítási modell

$$\sum_{j \in J} x_j = p$$

$$y_{ij} - x_j \le 0, \quad i \in I, \quad j \in J$$

(4) $$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \quad i \in I$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J$$

$$\max_{i \in I, j \in J} \{d_{ij} y_{ij}\} = z \to \min$$

p-center probléma

A *p*-center probléma, ha *p*-t nem fixáljuk, akkor NP-nehéz, ezért

- rögzített *p* mellett különböző B&B eljárások,
- heurisztikák,
- speciális feladatosztályokra hatékony eljárások kerültek kidolgozásra.

Ismét azzal a (legegyszerűbb) speciális esettel foglalkozunk, amelyre feltesszük, hogy

  - A probléma *G* gráfja fa.
  - Minden szögpontban van kliens.
  - Minden szögpontba lehet kiszolgálót telepíteni.

1-center probléma fákra

Jelölés: Legyen adott egy G fa, és jelölje i és j a fa két csúcsát. Akkor pontosan egy összekötő út létezik G-ben, amelyet $[i, j]$-vel, az $[i, j]$ út hosszát pedig d_{ij}-vel jelöljük.

Azt mondjuk, hogy az $[i, j]$ **út maximális** G-ben, ha bármely k, l csúcspárra $d_{ij} \geq d_{kl}$ teljesül.

4. Segédtétel: Legyen i a $G = (V, E)$ fa egy tetszőleges csúcsa, ahol $|V| > 1$. Rendre határozzuk meg az i-ből a fa további csúcsaiba vezető utak hosszait, jelöljön $[i, j]$ egy olyan utat, amelyre ez a hossz maximális. Ugyanezt hajtsuk végre a j csúcsra, és jelöljön $[j, k]$ egy olyan utat, amelyre a hossz maximális. Akkor a $[j, k]$ a G fa egy maximális útja.

Legyen $[i, j]$ egy tetszőleges irányítatlan út, amelyben az élhosszak pozitívak.

Az $[i, j]$ út r csúcspontját az $[i, j]$ **felezéspontjának** nevezzük, ha az $[i, j]$ út bármely s csúcspontjára $\max\{d_{ri}, d_{rj}\} \leq \max\{d_{si}, d_{sj}\}$ teljesül, ahol $d_{ri}, d_{rj}, d_{si}, d_{sj}$ rendre az $[r, i]$, $[r, j]$, $[s, i]$, $[s, j]$ utak hosszát jelölik. (Pl. egy él esetén az él bármelyik végpontja felezéspontja az élnek.)

5. Segédtétel: Legyen a G fa egy maximális útja $[j, k]$. Akkor a $[j, k]$ út felezéspontja 1-center G-ben.

Megjegyzés: A 4. és 5. segédtételekre alapozva megadható egy eljárás az 1-center probléma megoldására.

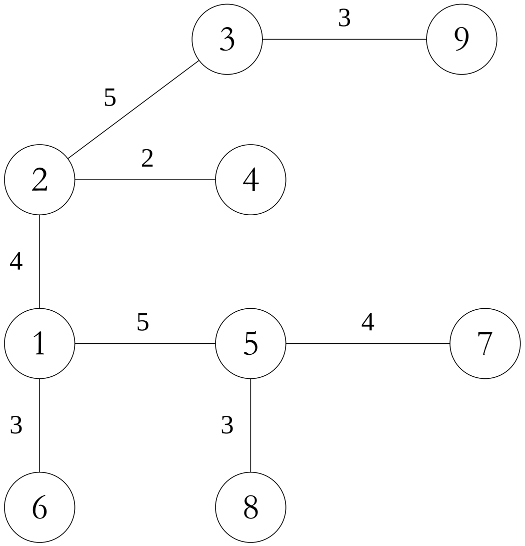
1-center probléma fákra

- Handler eljárása

1. Rögzítsünk a G fában egy i csúcspontot. Határozzunk meg a G fában az i csúcstól egy legtávolabbi csúcspontot, amelyet jelöljön j.
2. Határozzunk meg a G fában a j csúcstól egy legtávolabbi csúcspontot, amelyet jelöljön k.
3. Határozzuk meg az 1. és 2. lépésekben kiválasztott j és k pontokat összekötő út felezéspontját. Ezzel az eljárás véget ér, a felezéspont 1-center pont lesz a G fában.

Megjegyzés: Az eljárással kapcsolatban kérdés lehet, hogy miként lehet adott pontból az összes többi pontba vezető utak hosszát meghatározni. Ez megtehető egy korábban ismertetett eljárással (lásd: fák egyenletes bejárása egy adott csúcsból, mint gyökérpontból).

Példa



Vegyük kiindulási pontként a 6 csúcsot. Akkor a 6 csúcstól a 9 csúcs van legtávolabb a fában. Ezek után a 9 csúcstól a 7 csúcs lesz legtávolabb. A [7, 9] út felezéspontja 1. Tehát az optimális megoldás az 1 csúcs, ide kell telepíteni a kiszolgálót. Ilyen telepítésnél a kiszolgálótól legtávolabbra lévő pont 12 egységnyi távolságra van.

Feladatok

- Milyen 1-centert kapunk az alábbi fára és mennyi lesz az optimum értéke? Végezzük el a Handler-féle eljárást két különböző (pl. az 1 és a 2) csúcsból kiindulva!