Kombinatorikus optimalizálás 6. hét

Pusztai Pál
pusztai@sze.hu

Tartalom

- Párosítások gráfokban
  - Alapfogalmak
  - Maximális élszámú párosítás
  - Minimális súlyú teljes párosítás
    - Munkák optimális kiosztása
    - Házasságkötési probléma
    - A hozzárendelési feladat
    - Magyar módszer
    - Megoldás nem teljes páros gráfokban

Párosítások gráfokban

Definíciók

Legyen adott egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráf.

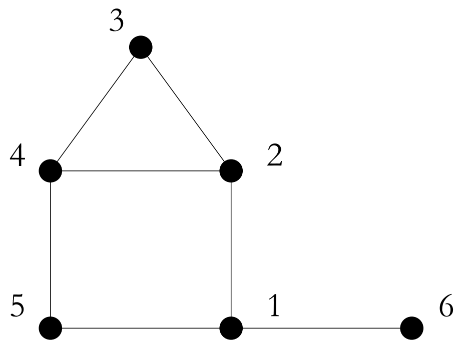
A G éleinek egy $M \subseteq E$ halmazát G egy **párosításának** nevezzük, ha G minden csúcspontja legfeljebb egy M-beli élnek végpontja.

A G éleinek egy $M \subseteq E$ párosítását **teljes párosításának** nevezzük, ha G minden csúcspontja végpontja valamelyik M-beli élnek.

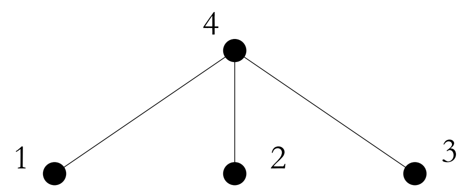
A $G = (V, E)$ gráfot **páros gráfnak** nevezzük, ha a csúcspontok V halmazának van olyan $\{A, B\}$ valódi osztályozása ($A \cup B = V,\ A \cap B = \emptyset,\ A \neq \emptyset,\ \ B \neq \emptyset$), hogy G minden élének a két végpontja különböző osztályban van.

Ha $\{A, B\}$ megfelelő osztályozás, akkor szokás a G páros gráfot $G = (A \cup B, E)$ formában megadni.

Ha az A halmaz minden csúcsából vezet él a B halmaz minden csúcsába, akkor a G **teljes páros gráf**.



Nem páros gráf



Teljes páros gráf

Feladatok

- Adjunk párosításokat és teljes párosítást az előző dián szereplő gráfokra!

Párosítási feladatok gráfokban

- Maximális élszámú párosítás
  - Meghatározandó a $G = (V, E)$ gráf egy maximális élszámú párosítása.
    - G párosításai a lehetséges megoldások és a z célfüggvény minden párosításhoz hozzárendeli annak élszámát. A feladat az alábbi alakban is felírható:

    (0) $\max\{|M|\colon\ M \text{ a } G \text{ párosítása}\}$
  - Megjegyzés
    - Mivel az $M = \emptyset$ párosítás bármely G gráfban, és G párosításainak száma véges, ezért a feladatnak mindig létezik optimális megoldása.
    - Egy feladatnak általában több maximális élszámú párosítása létezik.

Párosítási feladatok gráfokban

- Minimális súlyú teljes párosítás
  - Legyen adott egy $G = (A \cup B, E)$ páros gráf, amelyre $|A| = |B|$. Legyen adott G minden $(a, b) \in E$ élére egy w_{ab} súly.
  - Meghatározandó G egy minimális súlyú teljes párosítása, azaz a

    (1) $\min\{\sum_{(a,b)\in M} w_{ab} : M$ a G teljes párosítása$\}$
  - Megjegyzés
    - Nem mindig létezik lehetséges megoldás (G egy teljes párosítása), de ha létezik, akkor optimális megoldás is létezik.
    - A megoldás során el kell dönteni, hogy létezik-e lehetséges megoldás és ha igen, meg kell határozni egy optimális megoldást.

Minimális súlyú teljes párosítás alkalmazásai

- Munkák optimális kiosztása
  - Feladat
    - Adott bizonyos számú dolgozó és ugyanennyi munka. Az egyes dolgozók a munkákat különböző költségekkel tudják végrehajtani.
    - Osszuk szét a dolgozók között az összes munkát úgy, hogy minden dolgozó pontosan egy munkát kapjon, és a munkavégzés összköltsége minimális legyen!
  - Megoldás
    - Jelölje $d_1, \dots, d_n$ a dolgozókat és $m_1, \dots, m_n$ a munkákat. Tekintsük a $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot, ahol $V = \{d_1, \dots, d_n, m_1, \dots, m_n\}$ és minden d_i, m_j párosra $(d_i, m_j) \in E$ akkor és csak akkor, ha a d_i dolgozó képes elvégezni az m_j munkát.
    - Minden $(d_i, m_j) \in E$ élre legyen c_{ij} annak a munkavégzésnek a költsége, amikor a d_i dolgozó hajtja végre az m_j munkát, és rendeljük c_{ij}-t a (d_i, m_j) élhez súlyként.
    - Ekkor G egy minimális súlyú teljes párosítása optimális megoldása a feladatnak.

Minimális súlyú teljes párosítás alkalmazásai

- Házasságkötési probléma
  - Feladat
    - Adott bizonyos számú férfi és ugyanennyi nő. Minden férfi és nő sorba rakja az ellentétes neműeket aszerint, hogy mennyire szeretné őket párnak. A leginkább kívánatos személy kap 1-es sorszámot, a következő 2-es, és így tovább.
    - Házasítsuk ki a személyeket (azaz képezzünk férfi-nő kapcsolatokat) úgy, hogy a házasítás a nők szempontjából a legkedvezőbb legyen (azaz összeadva a nők sorszámait, amelyeket a kapott férjeikre adtak, a lehető legkisebb értéket kapjuk)!
  - Megjegyzés
    - Optimális megoldást kereshetünk a férfiak szempontjából is, a kétféle megoldás általában eltérő.
  - Megoldás
    - A probléma egy olyan párosítási feladattal oldható meg, amelynek G gráfjában a férfiak és a nők a csúcspontok, minden nőtől vezet él minden férfihoz, és az i-edik nőtől a j-edik férfihoz vezető él súlya az i-edik nő sorszáma a j-edik férfira.
    - G egy minimális súlyú teljes párosítása optimális megoldása a feladatnak.

Minimális súlyú teljes párosítás

- Az (1) feladat egyszerűsítése

Legyen $W = \max\{|w_{ab}|: (a, b) \in E\}$.

Jelölje (2) azt a párosítási feladatot, amelynek gráfja megegyezik az (1) feladat gráfjával csak a súlyok mások.

Minden $(a, b) \in E$ élre az él súlya legyen $W + w_{ab}$ a (2) feladatban.

Jelölje (1) célfüggvényét w_1 és (2) célfüggvényét w_2.

Ekkor az alábbi állítások nyilvánvalóan teljesülnek.

- Az (1) és (2) feladatoknak ugyanazok a párosítások a lehetséges megoldásai, azaz a lehetséges megoldások halmaza közös.
- G minden M teljes párosítására $w_2(M) = w_1(M) + nW$ teljesül, ahol $n = |A|$, azaz a két célfüggvény a lehetséges megoldások halmazán csak konstansban tér el egymástól.

A fenti két tényből közvetlenül adódik az alábbi állítás.

1. Segédtétel: Az (1) és (2) feladatoknak egyidejűleg létezik optimális megoldása és az optimális megoldások megegyeznek, azaz ami optimális megoldása az egyik feladatnak az a másiknak is és fordítva.

1. Következmény: Az optimális megoldás létezését és meghatározását illetően elegendő olyan típusú feladatok vizsgálatára szorítkozni, amelyekben az élek súlyai nemnegatívak.

Minimális súlyú teljes párosítás

- Az (1) feladat egyszerűsítése

Tekintsünk egy (1) típusú párosítási feladatot, amelyben $G = (A \cup B, E)$ nem teljes páros gráf és az élek w_{ab} súlyai nemnegatívak.

Legyen $W \geq 1 + \sum_{(a,b)\in E} w_{ab}$.

Konstruáljuk meg a tekintett feladathoz a következő (3)-mal jelölt párosítási feladatot.

A (3) feladat gráfja legyen $G' = (A \cup B, E')$ teljes páros gráf, és G' éleinek a súlyait definiáljuk a következők szerint.

Minden $(a, b) \in E'$ élre legyen az (a, b) él súlya d_{ab}, ahol

$$d_{ab} = \begin{cases} w_{ab}, & \text{ha } (a,b) \in E \\ W & \text{különben.} \end{cases}$$

2. Segédtétel: Az (1) feladatnak akkor és csak akkor létezik optimális megoldása, ha a hozzá konstruált (3) feladat optimuma kisebb, mint W, és ebben az esetben (3) optimális megoldása egyben optimális megoldása a tekintett (1) feladatnak is.

2. Következmény: Az optimális megoldás létezését és meghatározását illetően elegendő olyan típusú feladatok vizsgálatára szorítkozni, amelyeknek gráfja teljes páros gráf és az élek súlyai nemnegatívak.

Minimális súlyú teljes párosítás

Tekintsünk egy, a 2. következményben leírtakat teljesítő párosítási feladatot.

Legyen a feladat gráfja $G = (A \cup B, E)$, ahol $|A| = |B| = n$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, és jelölje c_{ij} az (a_i, b_j) él súlyát. Most G egy M teljes párosítását egy $n \times n$-es bináris mátrixszal írjuk le. Legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (a_i, b_j) \in M \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A tekintett problémát az alábbi lineáris programozási feladattal írhatjuk le.

$$\sum_{t=1}^{n} x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$(4) \qquad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, n)$$

$$\overline{}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = z \to \min$$

Minden i-re a $\sum_{t=1}^{n} x_{it} = 1$, $x_{it} \in \{0, 1\}$, $(t = 1, \dots, n)$ feltétel biztosítja, hogy az a_i csúcsból pontosan egy él vezet a B halmazba, és minden j-re a $\sum_{t=1}^{n} x_{tj} = 1$, $x_{tj} \in \{0, 1\}$, $(t = 1, \dots, n)$ feltétel pedig azt eredményezi, hogy a b_j csúcsba pontosan egy A-beli pontból vezet él. Így minden csúcs pontosan egy élnek a végpontja. A teljes párosítás súlya $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.

Megjegyzés: A fenti (4) modellt **hozzárendelési feladatnak** (Assignment Problem) nevezik.

A hozzárendelési feladat

A lehetséges megoldások halmaza olyan bináris (0 és 1 elemekből álló) $n \times n$-es mátrixok, amelyeknek minden sora és oszlopa pontosan egy darab 1-est tartalmaz. Az ilyen tulajdonságú mátrixok száma $n!$.

Adott n esetén a különböző célfüggvényű hozzárendelési feladatokhoz ugyanazon lehetséges megoldáshalmaz tartozik (a fenti tulajdonsággal rendelkező mátrixok halmaza).

A feladatot így egyértelműen meghatározza a $\mathbf{C} = (c_{ij})$ mátrix, amit **súlymátrixnak**, vagy **költségmátrixnak** nevezünk.

Jelölés: Egy tetszőleges $\mathbf{D}^{n\times n}$ mátrixra a $\mathbf{D}$ súlymátrixú hozzárendelési feladatot $A(\mathbf{D})$-vel jelöljük.

- Példa

$$A\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

A lehetséges megoldások halmaza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A mátrixokhoz tartozó célfüggvényértékek rendre: 11, 8, 13, 12, 12, 14, a feladat optimális megoldása:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ az optimum értéke } z(\overline{\mathbf{X}}) = 8.$$

Feladatok

- Oldjuk meg az alábbi hozzárendelési feladatot!

$$A\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Magyar módszer

Legyenek $\mathbf{C}^{n\times m}$ és $\mathbf{D}^{n\times m}$ tetszőleges valós mátrixok. Azt mondjuk, hogy **C ekvivalens D**-vel, ha vannak olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ és $\beta_1, \dots, \beta_m$ valós számok, hogy bármely $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ indexpárra $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ teljesül.

Jelölés: A fenti relációra a **C**∼**D** jelölést fogjuk használni.

3. Segédtétel: Ha **C**, **D** $n \times n$-es valós mátrixok és **C**∼**D**, akkor az $A(\mathbf{C})$ és $A(\mathbf{D})$ hozzárendelési feladatok optimális megoldásai megegyeznek.

Adott mátrix 0 elemeinek egy rendszerét **független 0-rendszernek** nevezzük, ha a mátrix minden sora és minden oszlopa legfeljebb egy elemét tartalmazza a rendszernek.

Jelölés: Egy független 0-rendszer elemeit 0^*-gal fogjuk jelölni.

Példák: $\begin{pmatrix} 0^* & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0^* & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0^* \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0^* & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0^* \\ 0 & 0^* & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^* & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0^* \\ 3 & 4 & 0^* & 0 \\ 0 & 0^* & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Egy mátrix valamely sorát (oszlopát) **kötött sornak** (oszlopnak) nevezzük, ha mellette (felette) egy + jel áll.

Egy mátrix egy elemét **szabad elemnek** nevezzük, ha nincs semmiféle jellel ellátva, és sem a sora, sem az oszlopa nincsen lekötve.

Speciálisan, ha az illető elem 0, akkor **szabad 0**-ról beszélünk.

Jelölés: Ha egy **C** mátrix minden eleme nemnegatív, akkor a $\mathbf{C} \ge 0$ jelölést fogjuk használni.

Magyar módszer

- A hozzárendelési feladat megoldása magyar módszerrel

Az eljárással előállítunk egy olyan $\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}, \ldots, \mathbf{C}^{(k)}$ $(k \leq n)$ mátrixsorozatot amelyre teljesülnek a következők:

(1) $\mathbf{C} \sim \mathbf{C}^{(0)}$

(2) $\mathbf{C}^{(t)} \sim \mathbf{C}^{(t+1)}$ $(t = 0, \ldots, k-1)$,

(3) $\mathbf{C}^{(t)} \geq 0$ $(t = 0, \ldots, k)$,

(4) $\mathbf{C}^{(k)}$-ban ki van jelölve egy n elemű független 0-rendszer.

Tegyük fel, hogy rendelkezünk egy, a fentieket kielégítő $\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(1)}, \ldots, \mathbf{C}^{(k)}$ mátrixsorozattal.

Definiáljuk $\overline{\mathbf{X}}$ mátrixot a következőképpen:

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } c_{ij}^{(k)} = 0^* \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Állítás: $\overline{\mathbf{X}}$ optimális megoldása $A(\mathbf{C})$-nek.

Megjegyzés: A módszert H. W. Kuhn publikálta (1955) Kőnig Dénes gráfelméleti könyve (1936) és Egerváry Jenő egy cikke (1931) alapján.

Magyar módszer

- Előkészítő rész
  - A $\mathbf{C}$ mátrix i-edik sorából rendre vonjuk ki az i-edik sor elemeinek a minimumát $(i = 1, \dots, n)$, az előálló mátrixot jelölje $\bar{\mathbf{C}}$.
  - A $\bar{\mathbf{C}}$ mátrix j-edik oszlopának elemeiből rendre vonjuk az illető oszlop elemeinek a minimumát $(j = 1, \dots, n)$, és az így kapott mátrixot jelölje $\mathbf{C}^{(0)}$.
  - Jelöljünk ki $\mathbf{C}^{(0)}$-ban egy független 0-rendszert oszlopfolytonosan, azaz oszloponként haladva, a tekintett oszlopból választható 0-k közül mindig a legkisebb sorindexű 0-t vegyük fel a független 0-rendszerbe.
  - Legyen $r = 0$ és folytassuk az eljárást az iterációs résszel.

Magyar módszer

- Iterációs rész (r-edik iteráció)

1. Ha a $\mathbf{C}^{(r)}$-ben kijelölt független 0-rendszer elemeinek száma n, akkor vége az eljárásnak. Ellenkező esetben kössük le a $\mathbf{C}^{(r)}$-ben, 0^*-okat tartalmazó oszlopokat, és folytassuk a 2. lépéssel.
2. Keressünk sorfolytonosan szabad 0-t. Ha nincs, szabad 0, akkor az 5. lépés következik. Ha találunk szabad 0-t, akkor vizsgáljuk meg az illető 0 sorát. Ha ez a sor nem tartalmaz 0^*-t, akkor a 4. lépés következik, különben a 3. lépés.
3. A tekintett szabad 0-t lássuk el ”,”-vel, kössük le a sorát, és szüntessük meg a sorában lévő 0^* oszlopának lekötését, majd folytassuk a 2. lépéssel.
4. A tekintett szabad 0-t lássuk el ”,”-vel, és ebből a $0'$-ből kiindulva képezzünk láncot a következők szerint: minden láncbeli $0'$-re az oszlopában lévő 0^*-gal folytatódik a lánc, és minden láncbeli 0^*-ra a sorában lévő $0'$-vel folytatódik a lánc, feltéve, hogy vannak ilyen elemek. Ellenkező esetben a láncképzés véget ér.

   Ezek után legyen $\mathbf{C}^{(r+1)}$ a jelölések nélküli $\mathbf{C}^{(r)}$ mátrix, és lássuk el ”*”-gal a $c_{ij}^{(r+1)}$ elemet, ha $c_{ij}^{(r)} = 0^*$ és $c_{ij}^{(r)}$ nem szerepel a láncban, vagy $c_{ij}^{(r)} = 0'$ és $c_{ij}^{(r)}$ eleme a láncnak.

   Ezek után legyen $r = r + 1$, majd folytassuk az eljárást a következő iterációs lépéssel.
5. Képezzük a szabad elemek minimumát, majd ezt a minimumot vonjuk ki az összes szabad elemből és adjuk hozzá a kétszer kötött (soruk és oszlopuk is le van kötve) elemekhez.

   Az átalakított mátrixot tekintve az aktuális $\mathbf{C}^{(r)}$ mátrixnak, folytassuk a 2. lépéssel.

Magyar módszer

- Példa
  - Tekintsük az $A(\mathbf{C})$ hozzárendelési feladatot, ahol

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Előkészítő rész
  - A sorminimumok: 2, 2, 3, 2, 1. Ezeket rendre kivonva a megfelelő sorok elemeiből a $\bar{\mathbf{C}}$ mátrixhoz jutunk. A $\bar{\mathbf{C}}$ mátrix oszlopminimumai: 0, 0, 1, 0, 0. Ezeket rendre kivonva $\bar{\mathbf{C}}$ megfelelő oszlopainak elemeiből a $\mathbf{C}^{(0)}$ mátrixot kapjuk.

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Magyar módszer

- Előkészítő rész
  - Egy független 0-rendszer kijelölése oszlopfolytonosan.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0^* & 0 & 1 \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0^* & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  - Legyen $r = 0$ és folytassuk az eljárást az iterációs résszel.

Magyar módszer

- Iterációs rész (0-adik iteráció)
  - Mivel a független 0-rendszer elemeinek száma 4, ezért minden oszlopot kössünk le, amely 0^*-ot tartalmaz.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + & + & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0^* & 0 & 1 \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0^* & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

  - Sorfolytonosan szabad 0-t keresve, $c_{35}^{(0)}$ az első szabad 0. A harmadik sor tartalmaz 0^*-ot, így a harmadik lépés szerint $c_{35}^{(0)}$-t ellátjuk ”,”-vel, a harmadik sort lekötjük, majd a sorban lévő 0^* oszlopát (első oszlop) feloldjuk.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & + & + & + & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0^* & 0 & 1 \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 1 & 0' \\ 0 & 2 & 0 & 0^* & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ + \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

  - Ezt követően a 2. lépéssel, sorfolytonos 0 kereséssel folytatjuk az eljárást.

Magyar módszer

- Iterációs rész (0-adik iteráció)
  - Sorfolytonosan szabad 0-t keresve, $c_{41}^{(0)}$ az első szabad 0. A negyedik sor tartalmaz 0^*-ot, ezért a 3. lépés alapján $c_{41}^{(0)}$-t ellátjuk ”,”-vel, a negyedik sort lekötjük, és a negyedik oszlopot feloldjuk.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & + & + & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0^* & 0 & 1 \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 1 & 0' \\ 0' & 2 & 0 & 0^* & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \\ + \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

  - Ismét rátérve a 2. lépésre, $c_{14}^{(0)}$ az első szabad 0. Az első sor tartalmaz 0^*-ot, ezért $c_{14}^{(0)}$-t ellátjuk ”,”-vel, az első sort lekötjük, és a harmadik oszlopot feloldjuk.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & + & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0^* & 0' & 1 \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 1 & 0' \\ 0' & 2 & 0 & 0^* & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ + \\ \\ + \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

  - Ezt követően a 2. lépéssel, sorfolytonos 0 kereséssel folytatjuk az eljárást.

Magyar módszer

- Iterációs rész (0-adik iteráció)
  - A 2. lépéssel folytatva az eljárást, azt kapjuk, hogy nincs szabad 0. Ekkor az 5. lépés következik. Képezzük a szabad elemek minimumát, ez most 1 lesz.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & + & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0^* & 0' & 1 \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 1 & 0' \\ 0' & 2 & 0 & 0^* & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ \\ + \\ + \\ \\ \end{array} \end{array}$$

  - A szabad elemek minimumát vonjuk ki az összes szabad elemből és adjuk hozzá a kétszer kötött (soruk és oszlopuk is le van kötve) elemekhez.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & + & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0^* & 0' & 1 \\ 0 & 0^* & 0 & 0 & 1 \\ 0^* & 1 & 0 & 1 & 0' \\ 0' & 3 & 0 & 0^* & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ \\ + \\ + \\ \\ \end{array} \end{array}$$

  - Az átalakított mátrixot tekintve az aktuális $\mathbf{C}^{(0)}$ mátrixnak, a 2. lépéssel folytatjuk az eljárást.

Magyar módszer

- Iterációs rész (0-adik iteráció)
  - Sorfolytonosan szabad 0-t keresve, $c_{21}^{(0)}$ az első szabad 0. Mivel $c_{21}^{(0)}$ sora tartalmaz 0^{*}-ot, ezért a 3. lépés alapján $c_{21}^{(0)}$-t ellátjuk ”,”-vel, a sorát lekötjük, és a második oszlopot feloldjuk.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0^{*} & 0' & 1 \\ 0' & 0^{*} & 0 & 0 & 1 \\ 0^{*} & 1 & 0 & 1 & 0' \\ 0' & 3 & 0 & 0^{*} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ \end{array}$$

  - Újra szabad 0-t keresve, $c_{51}^{(0)}$ lesz az első szabad 0. Mivel $c_{51}^{(0)}$ sora nem tartalmaz 0^{*}-ot, ezért a 4. lépéssel folytatódik az eljárás.

Magyar módszer

- Iterációs rész (0-adik iteráció)
  - A 4. lépés szerint $c_{51}^{(0)}$-t ellátjuk ”,”-vel, és ez lesz a lánc kezdőeleme. A lánc következő eleme az első oszlopban lévő 0^*, azaz $c_{31}^{(0)}$. Ezt az elemet a láncban a harmadik sorban elhelyezkedő $0'$, azaz $c_{35}^{(0)}$ követi. Mivel az ötödik oszlop nem tartalmaz 0^*-t, ezért $c_{35}^{(0)}$-val a lánc véget ér.

$$\mathbf{C}^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0^* & 0' & 1 \\ 0' & 0^* & 0 & 0 & 1 \\ \color{blue}{0^*} & 1 & 0 & 1 & \color{blue}{0'} \\ 0' & 3 & 0 & 0^* & 2 \\ \color{blue}{0'} & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ \end{array}$$

  - Törölve a jelöléseket, és ”*”-gal ellátva a láncon kívüli 0^*-oknak megfelelő elemeket ($c_{13}^{(0)}$, $c_{22}^{(0)}$, $c_{44}^{(0)}$), valamint ”*”-gal ellátva a láncbeli $0'$-knek megfelelő elemeket ($c_{35}^{(0)}$, $c_{51}^{(0)}$), az alábbi $\mathbf{C}^{(1)}$ mátrixot kapjuk.

$$\mathbf{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0^* & 0 & 1 \\ 0 & 0^* & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0^* \\ 0 & 3 & 0 & 0^* & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Ezek után legyen $r = r + 1$, majd folytassuk az eljárást a következő iterációs lépéssel.

Magyar módszer

- Iterációs rész (1. iteráció)
  - Mivel $\mathbf{C}^{(1)}$-ben egy 5-elemű független 0-rendszer van kijelölve, ezért az eljárás véget ér.

$$\mathbf{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0^* & 0 & 1 \\ 0 & 0^* & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0^* \\ 0 & 3 & 0 & 0^* & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Az alábbi $\overline{\mathbf{X}}$ mátrix egy optimális megoldás, az optimum értéke $z(\overline{\mathbf{X}}) = 12$.

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ hiszen } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Megjegyzés
  - A szükséges iterációk k száma $\mathbf{C}$-től függően a $0,1,\dots,n-1$ értékek bármelyike lehet. (Pl. lehet olyan 5×5-ös $\mathbf{C}$ mátrix, amelyre $\mathbf{C}^{(0)}$, $\mathbf{C}^{(1)}$, $\mathbf{C}^{(2)}$, $\mathbf{C}^{(3)}$, $\mathbf{C}^{(4)}$ az előálló mátrixsorozat.)
  - A láncképzés során előfordulhat, hogy a lánc egyetlen $0'$ elemből, a kezdő elemből áll. Ekkor elfajuló láncról beszélünk, a benne szereplő $0'$-vel közvetlenül bővíthető az előzőleg előállított független 0 rendszer.

Magyar módszer

- Egy rövidebb megadási mód
  - Az algoritmus előzőekben ismertetett végrehajtásában az egyes lépéseket szándékosan túlrészleteztük.
  - A $\mathbf{C}^{(0)}$ mátrix ismételt leírása nélkül kijelölhető $\mathbf{C}^{(0)}$-ban a független 0-rendszer, leköthetők az oszlopok, és végrehajthatók a sorkötések valamint az oszlopfeloldások. Ez utóbbit a ”+” jel bekarikázásával jelöljük.
  - A mátrix ismételt leírása csak a 4. és 5. lépés végrehajtása után szükséges. Eszerint végrehajtva az eljárást, az alábbi mátrixokhoz jutunk:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cccccc} \oplus & + & \oplus & \oplus & & \\ 2 & 3 & 0^* & 0' & 1 & + \\ 1 & 0^* & 1 & 1 & 2 & \\ 0^* & 0 & 0 & 1 & 0' & + \\ 0' & 2 & 0 & 0^* & 2 & + \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \oplus & & & & \\ 2 & 4 & 0^* & 0' & 1 & + \\ 0' & 0^* & 0 & 0 & 1 & + \\ 0^* & 1 & 0 & 1 & 0' & + \\ 0' & 3 & 0 & 0^* & 2 & + \\ 0' & 0 & 0 & 2 & 1 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0^* & 0 & 1 \\ 0 & 0^* & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0^* \\ 0 & 3 & 0 & 0^* & 2 \\ 0^* & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Magyar módszer

- Néhány futási adat (egy átlagos PC-n)

n	mátrix elemek	futási idő
100	1-1000	1 mp
500	1-10	2 mp
500	1-1000	8 mp
1000	1-10	30 mp
1000	1-100	2 perc
1000	1-1000	2 perc
1000	1-10000	2 perc
2000	1-10	4 perc
2000	1-100	17 perc
2000	1-1000	30 perc
3000	1-10	6 perc
3000	1-100	62 perc

n	mátrix elemek	futási idő (pp.mm)
1000	1-20	00.30
1000	1-50	01.20
1000	1-100	02.20
1000	1-200	03.10
1000	1-300	03.20
1000	1-500	02.20
1000	1-1000	01.40
1000	1-10000	01.40

Feladatok

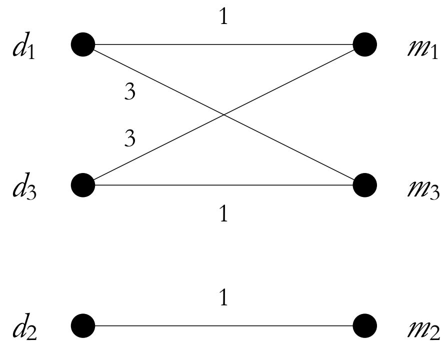
- Oldjuk meg magyar módszerrel az alábbi hozzárendelési feladatot! Használjuk a rövidebb megadási módot!

$$A\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Minimális súlyú teljes párosítás

- Az (1) feladat megoldása nem teljes páros gráfokban (1. példa)

Határozzuk meg az alábbi gráf egy minimális súlyú teljes párosítását.



A 2. segédtételnek megfelelően legyen W az élek súlyainak összege plusz 1, azaz W=10.

Egészítsük ki a gráfot új élekkel úgy, hogy teljes páros gráfot kapjunk. Az új élek súlya legyen W.

Az új párosítási feladatot a (4) alakban felírva, és magyar módszerrel megoldva az alábbi mátrixsorozatot kapjuk:

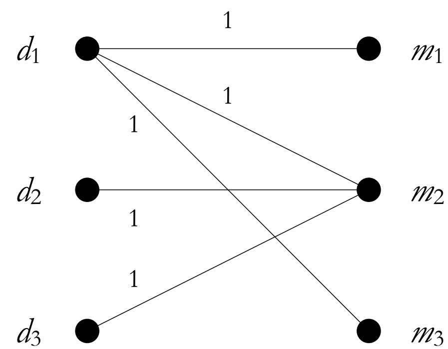
$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 10 & 1 & 10 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 \\ 9 & 0 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^* & 9 & 2 \\ 9 & 0^* & 9 \\ 2 & 9 & 0^* \end{pmatrix}$$

Egy minimális súlyú teljes párosítás az $M = \{(d_1, m_1), (d_2, m_2), (d_3, m_3)\}$ élhalmaz, amelynek súlya 3. Másrészt $3 < 10 = W$, így a 2. segédtétel alapján M optimális megoldása (minimális súlyú teljes párosítása) az 1. példában megadott feladatnak.

Minimális súlyú teljes párosítás

- Az (1) feladat megoldása nem teljes páros gráfokban (2. példa)

Határozzuk meg az alábbi gráf egy minimális súlyú teljes párosítását.



A 2. segédtételnek megfelelően legyen W az élek súlyainak összege plusz 1, azaz W=6.

Egészítsük ki a gráfot új élekkel úgy, hogy teljes páros gráfot kapjunk. Az új élek súlya legyen W.

Az új párosítási feladatot a (4) alakban felírva, és magyar módszerrel megoldva az alábbi mátrixsorozatot kapjuk:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 1 & 6\\ 6 & 1 & 6\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc}\oplus & + & \end{array} & \\ \begin{pmatrix}0^* & 0 & 0'\\ 5 & 0^* & 5\\ 5 & 0 & 5\end{pmatrix} & \begin{array}{c}+\\ \\ \end{array}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & \oplus & \end{array} & \\ \begin{pmatrix}0^* & 5 & 0'\\ 0' & 0^* & 0\\ 0' & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c}+\\ +\\ \end{array}\end{array} \qquad \begin{pmatrix}0 & 5 & 0^*\\ 0 & 0^* & 0\\ 0^* & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Azt kapjuk, hogy az $M=\{(d_1,m_3),(d_2,m_2),(d_3,m_1)\}$ élhalmaz egy minimális súlyú teljes párosítás az új feladatban. Másrészt M súlya 8, ami nagyobb, mint W, így a 2. segédtételből következik, hogy nincs optimális megoldása, és így lehetséges megoldása sem a 2. példában megadott feladatnak.