Kombinatorikus optimalizálás 9. hét

Pusztai Pál
pusztai@sze.hu

Tartalom

- A halmazlefedési és halmazosztályozási probléma
  - A Chvatal-féle mohó heurisztika

Halmazlefedési probléma

A halmazlefedési probléma

Adott $I = \{1, \dots, n\}$ halmaz és I nemüres részhalmazainak egy $P_1, \dots, P_m$ rendszere a $c_1, \dots, c_m$ pozitív súlyokkal.

Feladat: Határozzuk meg I-nek egy minimális súlyú, a $P_1, \dots, P_m$ részhalmazokból felépülő fedőrendszerét. (Egy fedőrendszer súlyán a benne szereplő részhalmazok súlyainak összegét értjük.)

Feltétel: Minden $i \in I$ elemre létezik olyan P_j $(1 \leq j \leq m)$, hogy $i \in P_j$.

Megjegyzés: A feladat NP-teljes probléma.

Jelölések

- Egy tetszőleges $i \in I$, $1 \leq j \leq m$ indexekre legyen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in P_j, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

továbbá

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } P_j \text{ eleme a fedőrendszernek,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Halmazlefedési probléma

- Optimumszámítási modell

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \geq 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

(1) $$x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \dots, m), \ (\mathbf{c} > \mathbf{0})$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = z \to \min$$

Akkor és csak akkor létezik lehetséges megoldás, ha minden egyenlőtlenség baloldala tartalmaz legalább egy 0-tól különböző együtthatót, de ez teljesül (lásd az előző dia feltételét). Mivel a lehetséges megoldások L halmazára $L \subseteq \{0,1\}^m$ teljesül, így L véges, azaz létezik optimális megoldás.

Megjegyzés: A $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ feltétel nem jelent lényeges megszorítást.

- Példa

$I = \{1,2,3,4\}$, $P_1 = \{1,2\}$, $P_2 = \{1,3\}$, $P_3 = \{1,2,3\}$, $P_4 = \{2,3\}$, $P_5 = \{2,4\}$, $\mathbf{c} = (2,3,2,4,6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Az optimális megoldás: $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0, 1)$, az optimum értéke 8.

Halmazosztályozási probléma

- Optimumszámítási modell

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

(2) $$x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \dots, m), \ (\mathbf{c} > \mathbf{0})$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = z \to \min$$

A lehetséges megoldások (így az optimális megoldás) létezését lásd később.

Megjegyzés: A $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ feltétel nem jelent lényeges megszorítást.

- Példa

$I = \{1,2,3,4\}$, $P_1 = \{1,2\}$, $P_2 = \{1,3\}$, $P_3 = \{1,2,3\}$, $P_4 = \{2,3\}$, $P_5 = \{2,4\}$, $\mathbf{c} = (2,3,2,4,6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Az optimális megoldás: $\mathbf{x} = (0, 1, 0, 0, 1)$, az optimum értéke 9.

Gyakorlati alkalmazások

- Információ kigyűjtés

Adott *m* féle fájl ugyanazon anyagról különböző információtartalmakkal. Egy olyan új fájlt akarunk képezni, amely *n* féle információféleséget tartalmaz és ezek mindegyike megtalálható az előzőek valamelyikében. Mely fájlokat másoljuk össze, hogy a kívánt új fájl hossza minimális legyen.

Ha kikötjük, hogy az új fájlban az előírt információféleségek mindegyike egynél többször nem szerepelhet, akkor a probléma egy halmazosztályozási feladatot eredményez.

- Termelésszervezés

Adott *n* elvégzendő feladat és *m* olyan vállalat, amelyek mindegyike az adott feladatok közül bizonyosakat el tud végezni. Válasszunk ki az adott vállalatok közül minimális számút úgy, hogy ezek együttesen valamennyi feladatot képesek legyenek ellátni.

Ha kikötjük, hogy a feladatok elvégzésére kiválasztott vállalatok között nem lehet olyan kettő, amelyek ugyanazon feladatot tudják elvégezni, akkor halmaosztályozási problémához jutunk.

- Játékszervezés

Egy társaságban mindenki hajlandó pingpongozni valakivel, de nem szükségképpen mindenkivel. (A hajlandóság kölcsönös.) Hogyan kell minimális számú játszmát lejátszani úgy, hogy mindenki legalább egyszer játsszon.

Ebben az esetben a fedőrendszer elemei olyan kételemű halmazok, amelyek az egymással játszani hajlandó személyeket tartalmazzák.

Ha kikötjük, hogy mindenki legfeljebb egyszer játszhat, akkor halmazosztályozási problémához jutunk, amelynek megoldása a társaság egy párosítását eredményezi.

Halmazosztályozási probléma

- A (2) modellhez konstruáljuk meg az alábbi (3) feladatot:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \geq 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

(3) $$x_j \in \{0,1\} \quad (j = 1, \dots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j' x_j = \tilde{z} \to \min$$

ahol $c_j' = c_j + Rt_j$ $(j = 1, \dots, m)$, $R > \sum_{j=1}^{m} c_j$, $t_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ $(j = 1, \dots, m)$.

Tétel: Ha a (2) feladatnak létezik lehetséges megoldása, akkor a (2) és (3) feladatok optimális megoldásai megegyeznek.

Következmény: Annak eldöntésére, hogy létezik-e lehetséges megoldása a (2) feladatnak, végezzük el a következőket. A megadott $P_1, \dots, P_m$ részhalmazokhoz vegyük hozzá a $P_{m+1} = \{1, \dots, n\}$ részhalmazt is egy alkalmasan nagy súllyal (pl. $1 + \sum_{j=1}^{m} c_j$ elegendően nagy súly).

Így teljesül a tétel feltétele. Belátható, hogy megoldva a kibővített (2)-höz konstruált (3) feladatot, az eredeti (2)-nek akkor és csak akkor létezik optimális megoldása, ha a kibővített (2) optimuma kisebb, mint $1 + \sum_{j=1}^{m} c_j$, azaz P_{m+1} nem szerepel a kibővített feladat optimális megoldásában.

A továbbiakban az (1) feladat megoldásával foglalkozunk.

B&B eljárás

1. Az Ω halmaz megadása

Legyen Ω az összes bináris m-esek halmaza. Ekkor $L \subseteq \Omega$, valamint $|\Omega| = 2^m$, így Ω véges.

2. A φ szétválasztási és a γ korlátozó függvények megadása.

A függvények definiálása Ω speciális $\Omega_{I,J}$ részhalmazaira történik, ahol az I halmaz az 1 értéken rögzített változók indexeit, a J halmaz a 0 értéken rögzített változók indexeit tartalmazza.

A szétválasztó függvény egy további változó értékét rögzíti 0 és 1 értéken, és ennek megfelelően választja szét az $\Omega_{I,J}$ halmazt.

A korlátozó függvény az (I, J)-részprobléma lineáris programozási relaxációjának optimumát használja korlátként. Minden egyes korlát meghatározásánál egy lehetséges megoldás is előáll.

3. Faépítési stratégia

Egy minimális korláttal rendelkező levelet választunk a faépítés során.

Az (1) feladatban az $x_j \in \{0, 1\}$ $(j = 1, \dots, m)$ feltételcsoportot az $x_j \geq 0$ $(j = 1, \dots, m)$ feltételekkel helyettesítve a feladat **lineáris programozási relaxációját** kapjuk.

Az optimális megoldás meghatározását illetően elegendő a $0 \leq x_j \leq 1$ $(j = 1, \dots, m)$ feltételek mellett tekinteni a lineáris programozási relaxációt. A megoldás duális szimplex algoritmussal meghatározható.

A lineáris programozási relaxáció egy optimális megoldásában minden 0-tól különböző komponens helyébe 1-t írva egy fedőrendszerhez jutunk.

Heurisztikus eljárás (Chvatal)

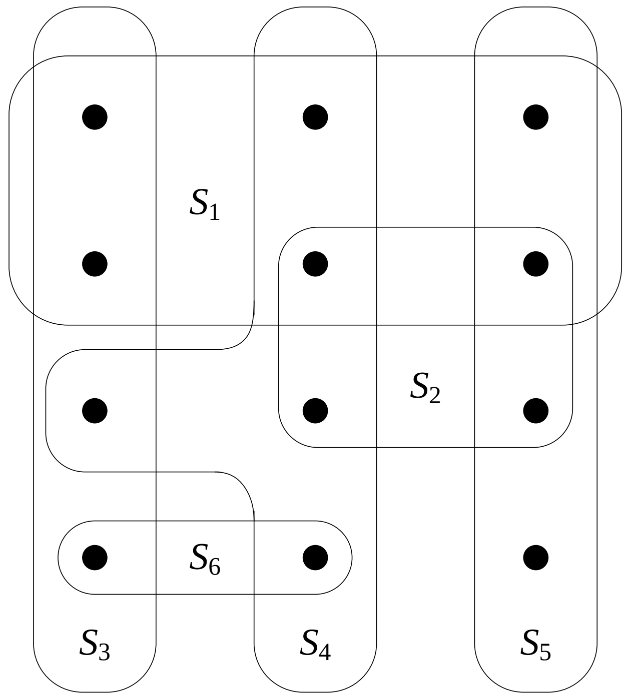
- Előkészítő rész
  - Legyenek az R és W halmazok üresek. (R az eredmény, W a lefedett elemek halmaza.)
- Iterációs rész
  - Ha $W = I$, akkor vége az eljárásnak. Az algoritmus által szolgáltatott fedőrendszer R.
  - Ellenkező esetben legyen $P_i \notin R$ az a halmaz, amelyre $P_i \setminus W \neq \emptyset$ és a $c(P_i)/|P_i \setminus W|$ érték minimális.
  - Vegyük fel P_i-t az R halmazba, legyen $W = W \cup P_i$ és térjünk rá a következő iterációra.

Tétel: A Chvatal-féle heurisztikus eljárás $\sum_{i=1}^{d} 1/i$ -approximációs, ahol d a halmazrendszer egy maximális elemszámú tagjának elemszámát jelöli.

Tétel: Ha $P \neq NP$, akkor nem létezik konstans approximációs hányadossal rendelkező polinomkorlátos heurisztika a halmazlefedési problémára.

- Megjegyzések
  - P a polinom időben megoldható, NP a polinom időben ellenőrizhető problémákból áll.
  - $P \subseteq NP$.
  - Az NP-teljes problémák „legalább olyan nehezek”, mint bármely NP-beli probléma.
  - Ha az NP-teljes problémák közül akár csak egy is megoldható polinom időben, akkor minden NP-beli probléma megoldható polinom időben.
  - A $P \neq NP$ nem bizonyított, így lehet, hogy az NP-teljes problémák is megoldhatók polinom időben.

Halmazlefedési probléma



A halmazlefedési probléma egy esete

Feladatok

- Mi az optimális megoldása az előző dián szereplő feladatnak és milyen megoldást ad (mely halmazokat választja ki és milyen sorrendben) a Chvatal-féle heurisztika, ha minden részhalmaz egyforma súlyú?
- Az alábbi szavakat betűk halmazának tekintve milyen megoldást ad a heurisztika, ha holtverseny esetén a kisebb indexűt választjuk. A szavak súlyai legyenek egyformák.
  - {arid, dash, drain, heard, lost, nose, shun, slate, snare, thread}
- Mi lesz az eredmény, ha a szavak súlyai rendre: 2, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 3.