Differenciálszámítás

1. B Írja fel az $f(x) = x^2$ függvény az $a = 1$ és az x helyekhez tartozó különbségi hányadosát.
$\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1\right]$

2. B Számolja ki az $f(x) = x^2$ függvény $a = -3$ helyhez tartozó differenciálhányadosát!
$$\left[D_f = R, \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to -3}\frac{x^2-(-3)^2}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -6\right]$$

3. B Számolja ki az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $a = 4$ helyhez tartozó differenciálhányadosát!
$$\left[D_f = [0,\infty[, \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}\right]$$

4. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 14x - 4$
$[f'(x) = 5\cdot 4x^3 + 3\cdot 3x^2 - 14 - 0 = 20x^3 + 9x^2 - 14]$

(b) $f(x) = 3\cos x - 7e^x + \sqrt[5]{x^3} + 6$
$\left[f'(x) = 3\cdot(-\sin x) - 7\cdot e^x + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + 0 = -3\sin x - 7e^x + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = -3\sin x - 7e^x + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right]$

(c) $f(x) = 4\cos x + 5^x - \dfrac{3}{x^4} + e^3$
$[f'(x) = 4\cdot(-\sin x) + 5^x\cdot\ln 5 - 3\cdot(-4)x^{-5} + 0 = -4\cdot\sin x + 5^x\cdot\ln 5 + 12\cdot\frac{1}{x^5} =$
$-4\sin x + 5^x\ln 5 + \frac{12}{x^5}]$

(d) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x}} + \log_4 x + 3x - \sqrt{\pi}$
$\left[f'(x) = 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x\cdot\ln 4} + 3 - 0 = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x\ln 4} + 3 = -\frac{7}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x\ln 4} + 3\right]$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[5]{x^3}}}$
$[f(x) = x^{\frac{3}{5}}$
$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}]$

(f) $f(x) = 5e^x - 4^x - \ln x - \log_2 x + e^2 - \ln 3$
$\left[f'(x) = 5e^x - 4^x\cdot\ln 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x\cdot\ln 2} + 0 - 0 = 5e^x - 4^x\ln 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln 2}\right]$

5. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) B $f(x) = \dfrac{11}{x} - \dfrac{\sqrt{3}}{x^4} + \dfrac{7}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt[7]{x^4}}$
$[f(x) = 11x^{-1} - \sqrt{3}x^{-4} + 7x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{4}{7}}$
$f'(x) = 11\cdot(-1)x^{-2} - \sqrt{3}\cdot(-4)x^{-5} + 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} - 2\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)x^{-\frac{11}{7}} =$
$-\frac{11}{x^2} + \frac{4\sqrt{3}}{x^5} - \frac{7}{2\sqrt{x^3}} + \frac{8}{7\sqrt[7]{x^{11}}}]$

(b) B $f(x)=x^2\sqrt{x}-\dfrac{4}{x^6}+\dfrac{8x^3}{\sqrt[4]{x^5}}$
$[f(x)=x^{\frac{5}{2}}-4x^{-6}+8x^{\frac{7}{4}}$
$f'(x)=\frac{5}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}-4\cdot(-6)x^{-7}+8\cdot\frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}+\frac{24}{x^7}+14\sqrt[4]{x^3}]$

(c) B $f(x)=(3x^5+2x)(5x^3-7x^2)$
$[f(x)=15x^8-21x^7+10x^4-14x^3$
$f'(x)=120x^7-147x^6+40x^3-42x^2]$

(d) B $f(x)=(x^2+\sqrt[5]{x^3})(\sqrt{x}-\frac{5}{x})$
$[f(x)=x^{\frac{5}{2}}-5x+x^{\frac{11}{10}}-5x^{-\frac{2}{5}}$
$f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-5+\frac{11}{10}x^{\frac{1}{10}}-5\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)x^{-\frac{7}{5}}=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}-5+\frac{11}{10}\sqrt[10]{x}+\frac{2}{\sqrt[5]{x^7}}]$

(e) B $f(x)=\dfrac{3x^7+8x^9-2x^6+5}{x^2}$
$[f(x)=3x^5+8x^7-2x^4+5x^{-2}$
$f'(x)=15x^4+56x^6-8x^3-10x^{-3}=56x^6+15x^4-8x^3-\frac{10}{x^3}]$

(f) B $f(x)=\dfrac{x^4+\sqrt[4]{x^5}-3}{\sqrt{x}}$
$[f(x)=x^{\frac{7}{2}}+x^{\frac{3}{4}}-3x^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x)=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=\frac{7}{2}\sqrt{x^5}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{3}{2\sqrt{x^3}}]$

(g) B $f(x)=\dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}}}{x^2}$
$[f(x)=\frac{x^{\frac{21}{30}}}{x^2}=x^{-\frac{39}{30}}$
$f'(x)=-\frac{39}{30}x^{-\frac{69}{30}}=-\frac{13}{10\sqrt[30]{x^{69}}}]$

6. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) $f(x)=\cos x\cdot 3^x$
$[f'(x)=-\sin x\cdot 3^x+\cos x\cdot 3^x\cdot\ln 3]$

(b) $f(x)=\log_2 x\cdot(3x^2+7)$
$\left[f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln 2}\cdot(3x^2+7)+\log_2 x\cdot 6x\right]$

(c) $f(x)=(2x^4+3x-7)\cdot\mathrm{ctg}x$
$\left[f'(x)=(2\cdot 4x^3+3)\cdot\mathrm{ctg}x+(2x^4+3x-7)\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=(8x^3+3)\mathrm{ctg}x-\frac{(2x^4+3x-7)}{\sin^2 x}\right]$

(d) $f(x)=(3\sin x+\sqrt{x})(\log_5 x-\mathrm{tg}\,x)$
$\left[f'(x)=(3\cos x+\frac{1}{2\sqrt{x}})(\log_5 x-\mathrm{tg}\,x)+(3\sin x+\sqrt{x})\left(\frac{1}{x\ln 5}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\right]$

(e) $f(x)=\dfrac{\sin x}{8^x}$
$\left[f'(x)=\frac{\cos x\cdot 8^x-\sin x\cdot 8^x\cdot\ln 8}{(8^x)^2}=\frac{\cos x\cdot 8^x-\sin x\cdot 8^x\cdot\ln 8}{8^{2x}}\right]$

(f) $f(x)=\dfrac{\sin x}{4e^x+2x}$
$\left[f'(x)=\frac{\cos x\cdot(4e^x+2x)-\sin x\cdot(4e^x+2)}{(4e^x+2x)^2}\right]$

(g) $f(x) = \ln(x^2+1)$
$\left[f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}\right]$

(h) $f(x) = \sqrt[4]{x^3+4x}$
$[f(x) = (x^3+4x)^{\frac{1}{4}}$
$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3+4x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (3x^2+4) = \frac{3x^2+4}{4\sqrt[4]{(x^3+4x)^3}}]$

(i) $f(x) = \sin(5x)$
$[f'(x) = \cos(5x) \cdot 5]$

(j) $f(x) = \sin x^5$
$\left[f'(x) = \cos x^5 \cdot 5x^4\right]$

(k) $f(x) = \sin^5 x$
$\left[f'(x) = 5(\sin x)^4 \cdot \cos x = 5\sin^4 x \cos x\right]$

(l) $f(x) = (4e^x+2x)^{10}$
$\left[f'(x) = 10(4e^x+2x)^9(4e^x+2)\right]$

7. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) B $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x+3}}{\sin x}$
$$\left[f'(x) = \frac{\frac{1}{4} \cdot (2x+3)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 \cdot \sin x - \sqrt[4]{2x+3} \cdot \cos x}{\sin^2 x}\right]$$

(b) B $f(x) = \cos^2(3x+\pi)$
$[f'(x) = 2 \cdot \cos(3x+\pi) \cdot (-\sin(3x+\pi)) \cdot 3]$

(c) B $f(x) = \sqrt[5]{\ln(4x^2+7)}$
$$\left[f'(x) = \frac{1}{5} \cdot (\ln(4x^2+7))^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{4x^2+7} \cdot 8x\right]$$

(d) B $f(x) = 8^x \cdot \sqrt[3]{1-7x}$
$$\left[f'(x) = 8^x \cdot \ln 8 \cdot \sqrt[3]{1-7x} + 8^x \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-7x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-7)\right]$$

(e) B $f(x) = \sqrt[7]{6x^2+3x} \cdot \mathrm{ctg}(x)$
$$\left[f'(x) = \frac{1}{7} \cdot (6x^2+3x)^{-\frac{6}{7}} \cdot (12x+3) \cdot \mathrm{ctg}(x) + \sqrt[7]{6x^2+3x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right]$$

(f) B $f(x) = \dfrac{\cos(2+3x)}{\sqrt[6]{x}}$
$$\left[f'(x) = \frac{-\sin(2+3x) \cdot 3 \cdot \sqrt[6]{x} - \cos(2+3x) \cdot \frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{5}{6}}}{\sqrt[3]{x}}\right]$$

(g) B $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{7-2x}\right)$
$$\left[f'(x) = \cos\left(\sqrt[3]{7-2x}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot (7-2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2)\right]$$

(h) B $f(x) = 4^{\cos(8x^3-5x^2)}$
$\left[f'(x) = 4^{\cos(8x^3-5x^2)} \cdot \ln 4 \cdot (-\sin(8x^3-5x^2)) \cdot (24x^2-10x)\right]$

(i) B $f(x) = \dfrac{\sin(x^3+2)}{3^x}$
$\left[f'(x) = \dfrac{\cos(x^3+2)\cdot 3x^2 \cdot 3^x - \sin(x^3+2)\cdot 3^x \cdot \ln 3}{3^{2x}}\right]$

(j) B $f(x) = \sin\left(x^4+2x^5\right)\cdot 7^x$
$\left[f'(x) = \cos\left(x^4+2x^5\right)\cdot(4x^3+10x^4)\cdot 7^x + \sin\left(x^4+2x^5\right)\cdot 7^x \cdot \ln 7\right]$

(k) B $f(x) = \dfrac{x^2+9x}{\mathrm{e}^{4x+3}}$
$\left[f'(x) = \dfrac{(2x+9)\cdot \mathrm{e}^{4x+3} - (x^2+9x)\cdot \mathrm{e}^{4x+3}\cdot 4}{(\mathrm{e}^{4x+3})^2}\right]$

(l) B $f(x) = \dfrac{\sqrt[9]{3x^2+7}}{\cos x}$
$\left[f'(x) = \dfrac{\frac{1}{9}\cdot(3x^2+7)^{-\frac{8}{9}}\cdot 6x \cdot \cos x - \sqrt[9]{3x^2+7}\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}\right]$

(m) B $f(x) = \cos\left(6^x \cdot x^3\right)$
$\left[f'(x) = -\sin\left(6^x\cdot x^3\right)\cdot(6^x\cdot \ln 6 \cdot x^3 + 6^x \cdot 3x^2)\right]$

(n) B $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{7-2x}$
$\left[f'(x) = \frac{(2x\cdot \ln x + x^2\cdot\frac{1}{x})(7-2x) - x^2\cdot \ln x\cdot(-2)}{(7-2x)^2} = \frac{(2x\ln x + x)(7-2x)+2x^2\ln x}{(7-2x)^2}\right]$

(o) B $f(x) = \sqrt{3x-2} - e^{2-x}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}\cdot 3 - e^{2-x}\cdot(-1) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} + e^{2-x}\right]$

(p) B $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
$\left[f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)}\right]$

(r) B $f(x) = \cos(4-x)\left[\ln(5x) + \sqrt{6x+1}\,\right]$
$\left[f'(x) = -\sin(4-x)\cdot(-1)\cdot\left[\ln(5x)+\sqrt{6x+1}\,\right] + \cos(4-x)\cdot\left(\frac{1}{5x}\cdot 5 + \frac{1}{2\sqrt{6x+1}}\cdot 6\right)\right]$

(s) B $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{4x^2+1}}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{4x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1\cdot(4x^2+1)-x\cdot 8x}{(4x^2+1)^2}\right]$

(t) B $f(x) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x-3}{5}\right)$
$[f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{5}\cdot x - \frac{3}{5}\right)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x-3}{5}\right)}\cdot\frac{1}{5}]$

(v) B $f(x) = e^{\sqrt{x}\sin x}$
$\left[f'(x) = e^{\sqrt{x}\sin x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \sin x + \sqrt{x}\cdot\cos x\right)\right]$

8. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

   (a) V $f(x) = \sin(6x^4 - 4x^3 + 5) \cdot \lg x^5$
   $\left[f'(x) = \cos(6x^4 - 4x^3 + 5) \cdot (24x^3 - 12x^2) \cdot \lg x^5 + \sin(6x^4 - 4x^3 + 5) \cdot \dfrac{1}{x^5 \cdot \ln 10} \cdot 5x^4\right]$

   (b) V $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{4-5x}}{\mathrm{e}^{3x}}$
   $\left[f'(x) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot (4-5x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-5) \cdot \mathrm{e}^{3x} - \sqrt[3]{4-5x} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot 3}{\mathrm{e}^{6x}}\right]$

   (c) V $f(x) = \cos\left(\sqrt[8]{3-9x}\right)$
   $\left[f'(x) = -\sin\left(\sqrt[8]{3-9x}\right) \cdot \dfrac{1}{8} \cdot (3-9x)^{-\frac{7}{8}} \cdot (-9)\right]$

   (d) V $f(x) = \sin\left(x^4 + 2x^5\right) \cdot 7^{3x+2}$
   $\left[f'(x) = \cos\left(x^4 + 2x^5\right) \cdot (4x^3 + 10x^4) \cdot 7^{3x+2} + \sin\left(x^4 + 2x^5\right) \cdot 7^{3x+2} \cdot \ln 7 \cdot 3\right]$

   (e) V $f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\mathrm{e}^{5x^2+6x}}$
   $\left[f'(x) = \dfrac{-\sin(3x) \cdot 3 \cdot \mathrm{e}^{5x^2+6x} - \cos(3x) \cdot \mathrm{e}^{5x^2+6x} \cdot (10x+6)}{(\mathrm{e}^{5x^2+6x})^2}\right]$

   (f) V $f(x) = (2-8x)^5 \cdot \mathrm{tg}(3x^2)$
   $\left[f'(x) = 5 \cdot (2-8x)^4 \cdot (-8) \cdot \mathrm{tg}(3x^2) + (2-8x)^5 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(3x^2)} \cdot 6x\right]$

   (g) V $f(x) = \sin\left(\dfrac{\log_3 x}{x^2}\right)$
   $\left[f'(x) = \cos\left(\dfrac{\log_3 x}{x^2}\right) \cdot \left(\dfrac{\frac{1}{x \cdot \ln 3} \cdot x^2 - \log_3 x \cdot 2x}{x^4}\right)\right]$

   (h) V $f(x) = \cos\left(\sqrt[4]{-3x+10}\right)$
   $\left[f'(x) = -\sin\left(\sqrt[4]{-3x+10}\right) \cdot \dfrac{1}{4} \cdot (-3x+10)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-3)\right]$

   (i) V $f(x) = \sqrt[3]{\ln(4x-5)}$
   $\left[f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot (\ln(4x-5))^{-\frac{2}{3}} \cdot \dfrac{1}{4x-5} \cdot 4\right]$

9. Adja meg az alábbi függvények x_0 helyen vett érintőinek az egyenletét!

   (a) B $f(x) = \mathrm{e}^{6-5x},\ x_0 = \dfrac{6}{5}, D(f) = R$ $[y = -5x + 7]$

   (b) B $f(x) = \ln(3x-1),\ x_0 = \dfrac{2}{3}, D(f) = \left]\dfrac{1}{3}; \infty\right[$ $[y = 3x - 2]$

   (c) B $f(x) = \dfrac{3}{x^2},\ x_0 = -2, D(f) = R \setminus \{0\}$ $[y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}]$

   (d) B $f(x) = \sqrt{7-x} + 4,\ x_0 = 3, D(f) =]-\infty; 7]$ $[y = -\frac{1}{4}x + \frac{27}{4}]$

(f) B $f(x) = \dfrac{4}{x} + 5,\ x_0 = -3, D(f) = R \setminus \{0\}$ $[y = -\frac{4}{9}x + \frac{7}{3}]$

(g) B $f(x) = (-2 + 3x)^3 - 5,\ x_0 = 1, D(f) = R$ $[y = 9x - 13]$

(i) B $f(x) = \ln(x^2 - 3),\ x_0 = 2, D(f) =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; \infty[$ $[y = 4x - 8]$

10. Írja fel a következő hozzárendeléssel adott függvények x_0 pontjához tartozó érintőinek az egyenletét!

(a) V $f(x) = \dfrac{\sin x - 3}{\sqrt{x+1}},\ x_0 = 0, D(f) =]-1; \infty[$ $[y = \frac{5}{2}x - 3]$

(b) V $f(x) = xe^{x-1} + 4,\ x_0 = 0, D(f) = R$ $[y = \frac{1}{e}x + 4]$

(c) V $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+3}}{x},\ x_0 = 2, D(f) = [-1; \infty[\setminus\{0\}$ $[y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}]$

(d) V $f(x) = (2x - 1)\sin(3x) + 5,\ x_0 = 0, D(f) = R$ $[y = -3x + 5]$

11. V Hol metszi az $f(x) = x^2 - 8x + 19$ függvény $x_0 = 5$ -beli érintője az x tengelyt?
[az érintő egyenlete: $y = 2x - 6$, az x tengelyt a $(3, 0)$ koordinátájú pontban metszi]

12. V Hol metszi az $f(x) = \sqrt{x+3}$ függvény $x_0 = -2$ -beli érintője az x és az y tengelyeket?
[az érintő egyenlete: $y = \frac{1}{2}x + 2$, az x tengelyt a $(-4, 0)$, az y tengelyt a $(0, 2)$ koordinátájú pontban metszi]

13. V Írja fel az $f(x) = x^2$ függvénynek azt az érintőjét, amelyik átmegy a $Q(-1, -3)$ ponton!
[Ha $x_0 = -3$, akkor az érintő egyenlete:$y = -6x - 9$
Ha $x_0 = 1$, akkor az érintő egyenlete:$y = 2x - 1$]

14. V Határozza meg az $f(x) = \ln(x^2 + 6)$ függvény $5y - 2x = 10$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
[Ha $x_0 = 2$, akkor az érintő egyenlete:$y = \frac{2}{5}(x - 2) + \ln 10$
Ha $x_0 = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = \frac{2}{5}(x - 3) + \ln 15$]

15. V Írja fel az $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2 - x}$ függvény $y = 3x$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
[Ha $x_0 = 1$, akkor az érintő egyenlete:$y = 3x - 2$
Ha $x_0 = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = 3x - 14$]

16. V Írja fel az $f(x) = 3x + 5\ln x$ függvény $4x - y = 3$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
$[y = 4(x - 5) + 15 + 5\ln 5]$

17. V Írja fel az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ függvény $m = 9$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
[Ha $x_0 = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = 9(x - 3) + 1 = 9x - 26$
Ha $x_0 = -1$, akkor az érintő egyenlete:$y = 9(x + 1) - 3 = 9x + 6$]

18. V Írja fel az $f(x) = \dfrac{2x + 4}{(x - 6)^2} + 7x$ függvény $m = 7$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
$[y = 7(x + 10) - \frac{1121}{16} = 7x - \frac{1}{16}]$

19. B Legyen $h(x) = (x^2 - 2x)^{12}$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?
$[D_f = R, x = 0, x = 1, x = 2]$

20. B Legyen $h(x) = (2x^3 + 3x^2)^3$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?
$\left[D_f = R, x = -\frac{3}{2}, x = -1, x = 0\right]$

21. V Legyen $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?
$[D_f = R, x = -1, x = 1]$

22. V Legyen $h(x) = \ln^2(x^2 - 1)$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?
$\left[D_f =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}\right]$

23. Határozza meg az alábbi függvények második deriváltfüggvényét!

    (a) B $f(x) = -2x^3 + x^2 - 6x - 3$
    $\left[f'(x) = -6x^2 + 2x - 6, f''(x) = -12x + 2\right]$

    (b) V $f(x) = x^2 \cdot \cos(2x)$
    $\left[f'(x) = 2x\cos(2x) - 2x^2 sin(2x), f''(x) = (2 - 4x^2)\cos(2x) - 8x\sin(2x)\right]$

    (c) V $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
    $[f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x - 2)]$

    (d) V $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt[4]{x^3}$
    $\left[f''(x) = \frac{1}{16}(77x^2 - 3)x^{-\frac{5}{4}}\right]$

24. Adott a függvény első deriváltjának képlete. Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

    (a) B $f'(x) = x(2 - x)^5(x + 3)^2, \quad D(f) = R$

    Megoldás
    $f'(x)$ zérushelyei: $-3; 0; 2$

$D(f)$	$]-\infty; -3[$	$x = -3$	$]-3; 0[$	$x = 0$	$]0; 2[$	$x = 2$	$]2; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	csökken↘	X	csökken ↘	lok.min.	nő↗	lok.max.	csökken↘

    (b) B $f'(x) = \dfrac{(2x + 8)^5}{(3 - x)^8}, \quad D(f) = R \setminus \{3\}$

    Megoldás
    $f'(x)$ zérushelyei: -4

$D(f)$	$]-\infty; -4[$	$x = -4$	$]-4; 3[$	$x = 3$	$]3; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$+$
$f(x)$	csökken↘	lok.min.	nő↗	nincs ért.	nő↗

    (c) B $f'(x) = \dfrac{(x - 5)^2(3x - 6)^3}{x - 1}, \quad D(f) =]1; \infty[$

    Megoldás
    $f'(x)$ zérushelyei: $2; 5$

$D(f)$	$]1;2[$	$x=2$	$]2;5[$	$x=5$	$]5;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	X	nő $\nearrow$

(d) B $f'(x) = \dfrac{(x-3)^3(x+1)^4}{x^2} \cdot e^{2x+3}, \quad D(f) = R \setminus \{0\}$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei:$-1;3$

$D(f)$	$]-\infty;-1[$	$x=-1$	$]-1;0[$	$x=0$	$]0;3[$	$x=3$	$]3;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	X	csökken $\searrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

(e) B $f'(x) = (x-2)^2 \ln x, \quad D(f) =]0;\infty[$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei:$1;2$

$D(f)$	$]0;1[$	$x=1$	$]1;2[$	$x=2$	$]2;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	X	nő $\nearrow$

25. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = 2x^4 - 8x^3$ függvénynek?

Megoldás

$D(f) = R$

$f'(x) = 8x^3 - 24x^2 = 8x^2(x-3)$

$f'(x)$ zérushelyei: $0;3$

$D(f)$	$]-\infty;0[$	0	$]0;3[$	3	$]3;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	X	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f(3) = -54$

26. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ függvénynek?

Megoldás

$D(f) = R \setminus \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{-x-2}{x^3}$

$f'(x)$ zérushelyei: -2

$D(f)$	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;0[$	0	$]0;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$-$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok. min	nő $\nearrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$

$f(-2) = -\dfrac{1}{4}$

27. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = 4xe^{-x^2}$ függvénynek?

Megoldás

$D(f) = R$
$f'(x) = 4e^{-x^2} + 4xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(4 - 8x^2)$
$f'(x)$ zérushelyei: $\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$D(f)$	$]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}[$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$]-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}[$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$]\frac{1}{\sqrt{2}};\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	lok.max.	csökken $\searrow$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = -1,72$
$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 1,72$

28. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{(x-1)^2}$ függvénynek?

Megoldás
$D(f) = R\backslash\{1\}$
$f'(x) = \frac{-2x(x-1)^2 - (2-x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x(x-1)-(2-x^2)2}{(x-1)^3} = \frac{2x-4}{(x-1)^3}$
$f'(x)$ zérushelyei:2

$D(f)$	$]-\infty;1[$	1	$]1;2[$	2	$]2;\infty[$
$f'(x)$	$+$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	nő $\nearrow$	nincs ért.	csöken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f(2) = -2$

29. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ függvénynek?

Megoldás
$D(f) = R$
$f'(x) = \frac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6-6x^2}{(x^2+1)^2}$
$f'(x)$ zérushelyei:$-1; 1$

$D(f)$	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	lok.max.	csökken $\searrow$

$f(-1)=-3; f(1)=3$

30. V Adja meg az $f(x)=\ln(x^2+1)^2$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

Megoldás
$D(f)=R$
$f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x=\frac{4x}{(x^2+1)}$
$f'(x)$ zérushelyei:0

$D(f)$	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f(0)=0$

31. V Adja meg az $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

Megoldás
$D(f)=R\setminus\{0\}$
$f'(x)=2x\cdot e^{\frac{1}{x}}+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$
$f'(x)$ zérushelyei:$\frac{1}{2}$

$D(f)$	$]-\infty;0[$	0	$]0;\frac{1}{2}[$	$x=\frac{1}{2}$	$]\frac{1}{2};\infty[$
$f'(x)$	$-$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2$

32. V Adja meg az $f(x)=x\ln x$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

Megoldás
$D(f)=]0;\infty[$
$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$
$f'(x)$ zérushelyei:$\frac{1}{e}$

$D(f)$	$]0;\frac{1}{e}[$	$\frac{1}{e}$	$]\frac{1}{e};\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

33. V Adja meg az $f(x) = x^2 \ln(x^2)$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

Megoldás
$D(f) = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = 2x \cdot \ln(x^2) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = 2x\left(\ln(x^2) + 1\right)$
$f'(x)$ zérushelyei:$-\dfrac{1}{\sqrt{e}}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$D(f)$	$]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{e}}[$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$]-\frac{1}{\sqrt{e}}; 0[$	0	$]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$]\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{e}$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{e}$

34. V Adja meg az $f(x) = \ln(-x^2 + x + 12)$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

Megoldás
$D(f) =]-3; 4[$
$f'(x) = \frac{1}{-x^2+x+12} \cdot (-2x + 1) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+12}$
$f'(x)$ zérushelyei:$\frac{1}{2}$

$D(f)$	$]-3; \frac{1}{2}[$	$x = \frac{1}{2}$	$]\frac{1}{2}; 4[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	nő$\nearrow$	lok.max	csökken$\searrow$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{49}{4}\right)$

35. V Mekkorának kell választani egy 20cm kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?
[a téglalap oldalai:5cm;5cm. A terület maximumának értéke tehát $25cm^2$.]

36. V Két pozitív szám összege 1. A szorzatuk maximumát keressük.
[$\frac{1}{4}$]

37. V Egy termék iránti keresletet a t egységár függvényében $K(t) = \dfrac{t}{t^2 + 4}$ függvény írja le. Vizsgáljuk meg, hogy milyen egységár mellett lesz a termék iránti kereslet a legnagyobb?
[A feladat szövegéből következik, hogy a termék utáni keresletet megadó függvény értelmezési tartománya csak a pozitív valós számok halmaza lehet.t=2]

38. V Két pozitív szám szorzata 100. Melyik ez a két szám, ha összegük minimális? Mekkora a minimális összeg?
[poitív számok:10;10. Minimális összeg 20.]

39. V Adott egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög. Tekintsük azokat a háromszögbe írható téglalapokat, amelyeknek egyik csúcsa a háromszög derékszöge, az ezzel szemközti csúcs pedig az átfogóra esik. A legnagyobb területű ilyen téglalapnak mekkorák az oldalai?
[a téglalap oldalai:2, $\frac{3}{2}$. A maximális terület 3 területegység.]

40. V Egy tó egyenes partján szeretnénk elkeríteni egy téglalap alakú telket. Ehhez 200 m drótfonat áll rendelkezésünkre. A legnagyobb területű téglalapot szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a tó felőli oldalon nem lesz kerítés. Mekkorának kell választani az oldalait, hogy területe maximális legyen?
[A partra merőleges oldal 50 m, a parttal párhuzamos oldal 100 m.]

41. V Valamely joghurt iránti keresletet az $f(x) = e^{-0,02x+10}$ függvény fejezi ki, melyben x a joghurt egységára Ft-ban, $f(x)$ pedig a hozzá tartozó heti kereslet. Milyen egységár mellett lenne a heti árbevétel maximális? Mekkora heti kereslet tartozik ezen egységárhoz, s mekkora a maximális heti árbevétel?
[maximális árbevétel akkor érhető el, ha a joghurt egységára 50 Ft;$f(50) = 8103$;ilyen áron tehát 8103 darab joghurt adható el hetenként]

42. V Egy adott termék termelési költségét a termelt mennyiség függvényében az $f(x) = 2x^2 + 500000$ függvény adja meg, ahol x a termelt mennyiség, $f(x)$ pedig ezen termékmennyiség előállításának a költsége. Határozzuk meg, hogy mekkora termelés esetén lesz az egy termékre jutó átlagköltség minimális?
[Az átlagköltség a termelési költség és a termelt mennyiség hányadosa:$\frac{f(x)}{x} = 2x + \frac{500000}{x}$; $x = 500$ a lokális minimumhely, azaz a minimális termelési átlagköltség 500 darabos szériával érhető el]