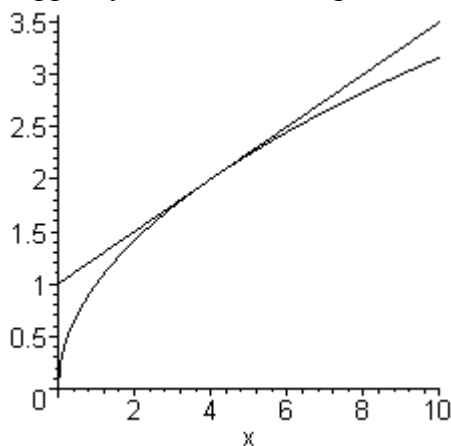


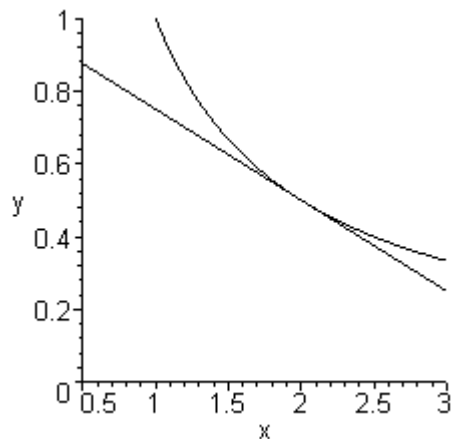
**Motivációs példa:** Egy telep üresjárási feszültsége  $U_0$ , belső ellenállása  $R_b$ . Mekkora  $R_k$  külső ellenállást kell a telepre kapcsolni, hogy a külső ellenállás teljesítménye  $P_k$  maximális legyen? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

A gyakorlati életben nagyon sok ehhez hasonló problémával találkozunk, amiben valamilyen fizikai, kémia, közgazdasági mennyiségnek maximumát vagy minimumát, azaz szélsőértékét keressük, egy másik mennyiség függvényében. Jelen esetben a  $P_k$  teljesítmény függ a külső ellenállástól, azaz  $R_k$ -tól. A két mennyiség közötti kapcsolat egy függvénnyel írható le. Ha sikerül megállapítanunk, hogy ez a függvény mikor nő, és mikor csökken, akkor azt is meg tudjuk mondani, hogy hol veszi fel a legnagyobb értékét, tehát a maximumát. Az ehhez hasonló problémák megoldásához fontos számunkra, hogy a függvényeket növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából tudjuk jellemezni. Az alábbiakban olyan módszerrel ismerkedünk meg, aminek segítségével el tudjuk dönteni, hogy egy függvény mely intervallumokon nő, és mely intervallumokon csökken, valamint hol és milyen típusú szélsőértéke van.

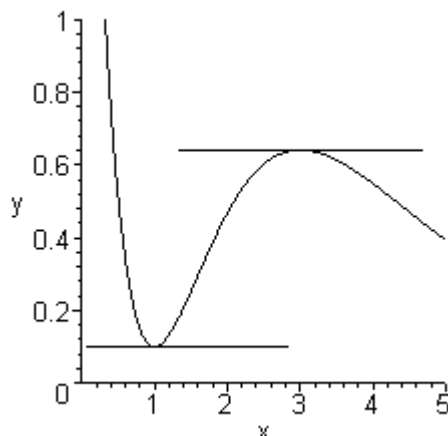
**Elméleti összefoglaló:** Mivel a derivált értéke minden pontban megadja a grafikon érintőjének meredekségét, ezért a derivált előjeléből következtethetünk arra, hogy hol nő és hol csökken a függvény, valamint hol van szélsőértéke. Szemléletesen ugyanis arra gondolhatunk, hogy ha egy pontban a derivált pozitív, akkor ott az érintő meredeksége pozitív, tehát az érintő úgymond felfelé halad, s mivel ő jól közelíti a függvényt, így a függvény is növekedni fog. Erre látunk példát az alábbi ábrán.



Hasonlóan okoskodhatunk akkor, ha egy pontban a derivált negatív. Ekkor az érintő nyilván lefelé halad, s ekkor a függvény csökkenni fog. Erre mutat példát az alábbi ábra.



Ha pedig egy függvénynek valahol szélsőértéke, azaz maximuma vagy minimuma van, akkor ott az érintőnek vízszintesnek kell lennie, tehát meredeksége 0, s így a derivált értéke itt 0 kell legyen. Erre láthatunk két példát is az alábbi ábrán.



Hangsúlyozzuk, hogy ez csak szemléletes okoskodás. A pontos megfogalmazás majd a most következő definíciókban és tételekben szerepel majd. Elsőként definiáljuk pontosan a lokális növekedés és csökkenés, valamint a szélsőértékek fogalmát.

**Definíció:** Az  $f$  függvény az  $x_0 \in D_f$  helyen lokálisan növekvő, ha létezik az  $x_0$ -nak olyan környezete, amelybe eső minden  $x_1 < x_0 < x_2$  esetén teljesül, hogy  $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ . Az  $f$  függvény az  $x_0 \in D_f$  helyen lokálisan csökkenő, ha létezik az  $x_0$ -nak olyan környezete, amelybe eső minden  $x_1 < x_0 < x_2$  esetén teljesül, hogy  $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$ .

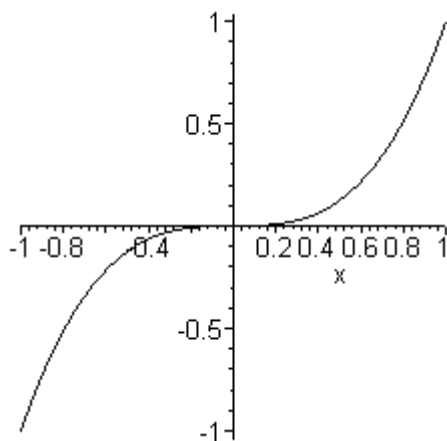
**Definíció:** Az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen helyi, másképpen lokális maximuma van, ha megadható  $x_0$ -nak olyan környezete, amelybe eső minden  $x$  esetén  $f(x) \leq f(x_0)$ . Az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen helyi, másképpen lokális minimuma van, ha megadható  $x_0$ -nak olyan környezete, amelybe eső minden  $x$  esetén  $f(x) \geq f(x_0)$ .

Ezek után kimondható az alábbi tétel, melyre a szemléletes okoskodással utaltunk.

**Tétel:** Ha az  $f$  függvény az  $x_0$  helyen differenciálható és  $f'(x_0) > 0$ , akkor a függvény az  $x_0$  helyen lokálisan növekvő.

Ha az  $f$  függvény az  $x_0$  helyen differenciálható és  $f'(x_0) < 0$ , akkor a függvény az  $x_0$  helyen lokálisan csökkenő.

A tétel megfordítása azonban sajnos nem igaz. Gondoljunk ugyanis az  $f(x) = x^3$  függvényre, amely az  $x_0 = 0$  helyen nyilván lokálisan növekvő, azonban deriváltja ott nem pozitív, hanem 0-val egyenlő. Az alábbi ábrán látható az  $f(x) = x^3$  függvény grafikonja, amiről teljesen egyértelmű, hogy a függvény nő az  $x_0 = 0$  helyen.



Így nem egészen megfordításként, következő tétel mondható ki.

**Tétel:** Ha az  $f$  függvény az  $x_0$  helyen differenciálható és ott lokálisan növekedő, akkor  $f'(x_0) \geq 0$ .

Ha az  $f$  függvény az  $x_0$  helyen differenciálható és ott lokálisan csökkenő, akkor  $f'(x_0) \leq 0$ .

A feladatok megoldása során a lokális növekedés és csökkenés helyett, az intervallumon növekedés és csökkenés fogalmát használjuk.

**Definíció:** Az  $f$  függvény az  $(a,b)$  intervallumon növekvő, ha minden  $x \in (a,b)$  esetén lokálisan növekvő.

Az  $f$  függvény az  $(a,b)$  intervallumon csökkenő, ha minden  $x \in (a,b)$  esetén lokálisan csökkenő.

Ezek után feladatokban leginkább a tétel alábbi megfogalmazásra hivatkozunk.

**Tétel:** Ha  $f$  az  $(a,b)$  intervallumon differenciálható és minden  $x \in (a,b)$  esetén  $f'(x) > 0$ , akkor  $f$  az  $(a,b)$  intervallumon növekvő.

Ha  $f$  az  $(a,b)$  intervallumon differenciálható és minden  $x \in (a,b)$  esetén  $f'(x) < 0$ , akkor  $f$  az  $(a,b)$  intervallumon csökkenő.

A lokális szélsőértékekre is több tétel mondható ki. Az első a szélsőérték létezésének szükséges feltétele.

**Tétel:** Ha  $f$  differenciálható az  $x_0$  hely valamely környezetében, és  $f$ -nek  $x_0$ -ban lokális szélsőértéke van, akkor  $f'(x) = 0$ .

Gondoljunk bele, a tétel nem azt mondja ki, hogy ahol a derivált 0, ott szélsőérték van. Ez a tétel megfordítása lenne, és ez nem igaz. Példaként megint az  $f(x) = x^3$  függvényt említhetjük, amelynek deriváltja az  $x_0 = 0$  helyen 0-val egyenlő, de ott nincs szélsőértéke a függvénynek, mert ott lokálisan növekvő. Tehát csak annyit mondhatunk, ahol a derivált 0, ott

könnyen elképzelhető, hogy van szélsőérték. Ezért van szükségünk egy másik tételre is, ami már elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.

**Tétel:** Ha az  $f$  függvény differenciálható az  $x_0$  helyen és  $f'(x_0) = 0$ , valamint  $f'$  előjele megváltozik az  $x_0$ -ban, akkor  $f$ -nek az  $x_0$  helyen lokális szélsőértéke van.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk majd a függvényeket növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából.

1. Megvizsgáljuk, mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.
2. Deriváljuk a függvényt.
3. Megoldjuk az  $f'(x) = 0$  egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol szélsőérték lehet.
4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s a részeken vizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba helyettesítünk.
5. Az értelmezési tartomány egyes részein a derivált előjeléből következtetünk a növekedésre, csökkenésre.

Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk a dolgokat.

### Kidolgozott feladatok:

**1. feladat:** Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az  $f(x) = 3x^4 - 8x^3$  függvényt.

**Megoldás:** A függvény minden valós számra értelmezhető, azaz  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 24x^2 = 0$$

Emeljünk ki amit csak lehet, így alakítsunk szorzattá.

$$12x^2(x - 2) = 0$$

Szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Két eset lesz, vagy  $x^2 = 0$ , amiből  $x = 0$  következik, vagy  $x - 2 = 0$ , amiből  $x = 2$  következik. A derivált zérushelyei tehát most a 0 és a 2.

Készítsünk ezután egy táblázatot. Az első sorban az értelmezési tartomány részeit tüntessük fel. A derivált zérushelyei bontják részekre a valós számok halmazát. A zérushelyeknek is készítsünk külön oszlopot, mert ezeket a helyeket kell vizsgálnunk, hogy van-e bennük szélsőérték. A második sorban majd azt jelezzük, hogy az adott részen milyen előjelű a derivált. A harmadik sorban pedig majd azt, hogy azon a részen hogyan viselkedik a függvény. Most egyelőre azonban csak az első sort töltjük ki. Így az induló táblázatunk az alábbi.

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Most vegyünk egy számot a  $(-\infty, 0)$  intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a  $-1$ .

$$f'(-1) = 12(-1)^3 - 24(-1)^2 = -36$$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a  $(-\infty, 0)$  intervallumon.

Most vegyünk egy számot a  $(0, 2)$  intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. az  $1$ .

$$f'(1) = 12 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 = -12$$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a  $(0, 2)$  intervallumon.

Végül vegyünk egy számot a  $(2, \infty)$  intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a  $3$ .

$$f'(3) = 12 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3^2 = 108$$

Pozitív számot kaptunk, tehát a derivált pozitív értékeket vesz fel a  $(2, \infty)$  intervallumon.

Töltsük ki ezután a táblázat második sorát, beírva a derivált előjelét. A zérushelyeken természetesen azt írjuk be, hogy a derivált ott  $0$ .

$x$	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, 2)$	$2$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	$0$	neg. $(-)$	$0$	poz. $(+)$
$f(x)$					

Ezután töltsük ki a harmadik sort is. Ahol a második sorban negatív a derivált, ott a függvény csökken, ahol pedig pozitív a derivált ott a függvény nő. Amelyik zérushelynél nem vált előjelet a derivált, ott nincs szélsőérték, de ahol megváltozik a derivált előjele ott van. Ha negatívból pozitívba vált a derivált, akkor lokális minimum van, hiszen a függvény a szélsőérték előtt csökken, azután pedig nő. Míg ha pozitívból negatívba megy át a derivált, akkor lokális maximum van, mert a függvény a szélsőérték előtt nő, utána pedig csökken.

$x$	$(-\infty, 0)$	$0$	$(0, 2)$	$2$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	$0$	neg. $(-)$	$0$	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	nincs SZÉ. $\searrow$	csökk. $\searrow$	lokális minimum	nő $\nearrow$

A függvény tehát csökken a  $(-\infty, 2)$  intervallumon, nő a  $(2, \infty)$  intervallumon, és lokális minimuma van az  $x = 2$  helyen.

Az  $x = 0$  helyen nincs szélsőérték, mert ott nem vált előjelet a derivált, s mert a függvény előtte és utána is csökken. Ebből következik, hogy az  $x = 0$  helyen is lokálisan csökkenő a függvény.

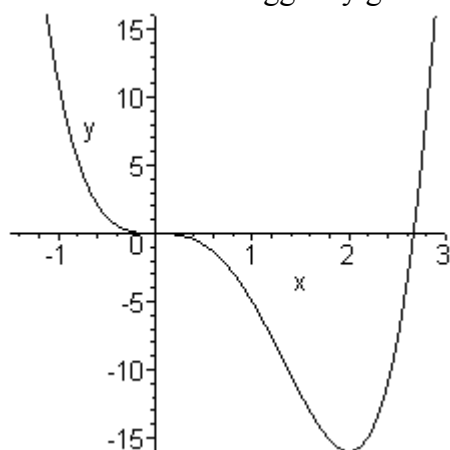
A táblázat alapján bármilyen növekedéssel, csökkenéssel és szélsőértékkel kapcsolatos kérdésre választ tudunk adni.

A szélsőérték nagyságát is megkaphatjuk, ha helyét behelyettesítjük az eredeti függvénybe. Jelen esetben tehát  $2$ -t helyettesítünk az  $f$ -be.

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 = -16$$

A függvény minimumának értéke tehát  $-16$ .

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



**2. feladat:** Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  függvényt.

**Megoldás:** A törtek miatt kikötést kell tennünk,  $x \neq 0$ .  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$f'(x) = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)' = (x^{-1} + x^{-2})' = (-1) \cdot x^{-2} + (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = 0$$

Célszerű  $-1$ -gyel szorozni, és közös nevezőre hozni. Így az alábbi kapjuk:

$$\frac{x+2}{x^3} = 0.$$

Egy tört akkor 0, ha számlálója 0. Így az  $x+2=0$  egyenletet kapjuk, amiből  $x=-2$ .

A deriváltak tehát most csak egy zérushelye van. A táblázat készítésekor azonban ne feledkezzünk meg arról, hogy 0-ban nem értelmezett a függvény. Így a 0-t is vegyük be a táblázatba ugyanúgy, mint a derivált zérushelyét. Így az induló táblázat a következő.

$x$	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$f'(x)$				X	
$f(x)$				X	

A 0 oszlopában az X-ekkel azt jelöltük, hogy ott a függvény nincs értelmezve.

Vegyünk egy számot a  $(-\infty, -2)$ -ből, mondjuk a  $-3$ -at, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-3) = -\frac{1}{(-3)^2} - \frac{2}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Vegyünk egy számot a  $(-2, 0)$ -ből, mondjuk a  $-1$ -et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} - \frac{2}{(-1)^3} = 1$$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy számot a  $(0, \infty)$ -ből, mondjuk a 1-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} - \frac{2}{1^3} = -3$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Mivel  $-2$  előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az  $x = -2$  helyen a függvénynek lokális minimuma van.

Töltsük ki ezután egyből a táblázat második és harmadik sorát is.

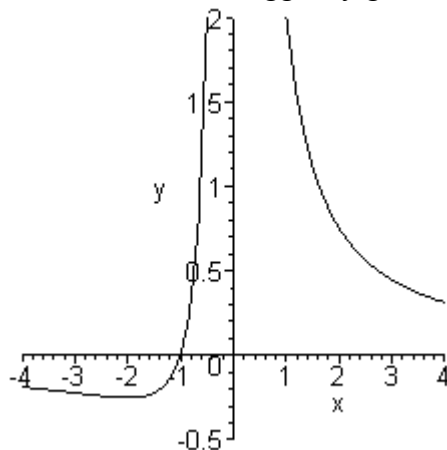
$x$	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 0)$	$0$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	$0$	poz. $(+)$	X	neg. $(-)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	lokális minimum	nő $\nearrow$	X	csökk. $\searrow$

A függvény tehát csökken a  $(-\infty, -2)$  és  $(0, \infty)$  intervallumokon, nő a  $(-2, 0)$  intervallumon, és lokális minimuma van az  $x = -2$  helyen.

A minimum értéke  $f(-2) = \frac{1}{(-2)} + \frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$ .

Bár az  $x = 0$  helyen megváltozik a derivált előjele, ez mégsem szélsőérték, hiszen itt a függvény nincs értelmezve.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



**3. feladat:** Hol növekvő az  $f$  függvény, ha deriváltja  $f'(x) = (x+2)(x-5)^2$ ? Az  $f$  ugyanott értelmezhető ahol  $f'$ .

**Megoldás:** Első lépésként meg kell vizsgálnunk, mi a legbővebb halmaz, amelyen  $f'$  értelmezhető. Mivel nem kell semmilyen kikötést tennünk  $D_{f'} = \mathbb{R}$ , s ugyanitt értelmezhető  $f$  is.

Mivel most ismerjük a függvény deriváltját, így az  $f'(x) = 0$  egyenlet megoldásával folytatjuk.

$$(x+2)(x-5)^2 = 0$$

Mivel szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így az egyenlet két egyszerűbb egyenletre bontható. Vagy  $x+2=0$ , amiből  $x=-2$ , vagy  $(x-5)^2=0$ , amiből  $x=5$ .

Készítsük most táblázatot, aminek első sorában feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit. Most a derivált két zérushelye a  $-2$  és az  $5$  bontja részekre a valós számok halmazát.

$x$	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 5)$	$5$	$(5, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Vegyünk egy számot a  $(-\infty, -2)$ -ből, mondjuk a  $-3$ -at, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-3) = (-3+2)(-3-5)^2 = -64$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Vegyünk egy számot a  $(-2, 5)$ -ből, mondjuk a  $0$ -t, s helyettesítsük a deriváltba. (Egy pozitív és egy negatív szám között mindig a  $0$ -t célszerű választani, mert azt a legegyszerűbb helyettesíteni.)

$$f'(0) = (0+2)(0-5)^2 = 50$$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy számot az  $(5, \infty)$ -ből, mondjuk a  $10$ -et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(10) = (10+2)(10-5)^2 = 300$$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Mivel  $-2$  előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az  $x = -2$  helyen a függvénynek lokális minimuma van.

Az  $x = 5$  helyen nem változik a derivált előjele, és a függvény  $5$  előtt és után is nő, így ezen a helyen nincs szélsőérték. A függvény az  $x = 5$  helyen is lokálisan nő.

$x$	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 5)$	$5$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	$0$	poz. $(+)$	$0$	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	lokális minimum	nő $\nearrow$	nincs SZÉ. $\nearrow$	nő $\nearrow$

A kész táblázat alapján már csak válaszolnunk kell a kérdésre. Látható, hogy a függvény a  $(-2, \infty)$  intervallumon nő.

**4. feladat:** Hol csökkenő az  $f$  függvény, ha deriváltja  $f'(x) = \frac{3-x}{x+4}$ ? Az  $f$  ugyanott értelmezhető ahol  $f'$ .



**Megoldás:** A feladat nagyon hasonlít az előzőhöz, így ugyanúgy járhatunk el. Első lépésként határozzuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. A nevező nem lehet zérus, így  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ .

Ezután oldjuk meg az  $f'(x) = 0$  egyenletet.

$$\frac{3-x}{x+4} = 0 \Rightarrow 3-x = 0 \Rightarrow x = 3$$

Nézzük ezután, milyen részekre kell bontanunk az értelmezési tartományt. Az előzőekben szerepelt, hogy a derivált zérushelyei bontják részekre az értelmezési tartományt, mert általában ezeken a helyeken változik meg a derivált előjele. De nem csak zérushelyen változhat egy függvény előjele, hanem olyan helyen is, ahol nincs értelmezve. Gondoljunk pl.

az  $\frac{1}{x}$  függvényre, amely nincs értelmezve az  $x = 0$  helyen. A negatív  $x$  értékekre negatív ez a függvény, a pozitív  $x$ -ekre pedig pozitív. Nincs tehát zérushely a  $0$ -ban, hisz a függvény itt nem is értelmezett, de a függvény előjele mégis változik. Amikor készítjük a táblázatot, akkor tehát nem csak a derivált zérushelyével kell részekre bontani az értelmezési tartományt, hanem az értelmezési tartományban levő szakadási hellyel is. Készítsük el most a táblázatot, egyelőre az első sorát kitöltve. A szakadási helyen azonban a második és a harmadik sorban jelölhetjük, hogy ott a derivált nem értelmezett, így a függvényről sem tudunk semmit mondani.

$x$	$(-\infty, -4)$	$-4$	$(-4, 3)$	$3$	$(3, \infty)$
$f'(x)$		X			
$f(x)$		X			

Ezután vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány részein a derivált előjelét, és ebből határozzuk meg, nő vagy csökken ott a függvény.

Vegyünk egy  $-4$ -nél kisebb számot. Legyen pl.  $-5$ , s helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(-5) = \frac{3-(-5)}{-5+4} = -8$$

Negatív értéket kaptunk, tehát  $x < -4$  esetén negatív a derivált, ebből következően itt csökken a függvény.

Vegyünk egy  $-4$  és  $3$  közé eső számot. Legyen pl.  $0$ , s ezt is helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(0) = \frac{3-0}{0+4} = \frac{3}{4}$$

Pozitív értéket kaptunk, tehát ha  $-4 < x < 3$ , akkor pozitív a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy  $3$ -nál nagyobb számot is. Legyen pl.  $4$ , és helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(4) = \frac{3-4}{4+4} = -\frac{1}{8}$$

Negatív értéket kaptunk, így ha  $3 < x$  akkor negatív a derivált, tehát ekkor csökken függvény.

Mivel a derivált értéke az  $x = 3$  helyen előjelet vált, így ezen a helyen van lokális szélsőértéke a függvénynek. Mert a derivált pozitívból negatívba megy át, így ezen a helyen lokális maximum van.

Ezután kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

$x$	$(-\infty, -4)$	$-4$	$(-4, 3)$	$3$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	X	poz. $(+)$	0	neg. $(-)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	X	nő $\nearrow$	lokális maximum	csökk. $\searrow$

A kitöltött táblázat alapján válaszolhatunk a feladat kérdésére. A függvény csökken a  $(-\infty, -4)$  és  $(3, \infty)$  intervallumokon.

**5. feladat:** Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az  $f$  függvénynek, ha deriváltja  $f'(x) = (x-2)^2 \ln x$ ? Az  $f$  ugyanott értelmezhető ahol  $f'$ .

**Megoldás:** Az előző feladatok megoldásából láthattuk, hogy egy függvény szélsőértékeinek meghatározásához is azokra a lépésekre van szükség, mint a növekedés és a csökkenés vizsgálatához. Így járunk el hasonlóan, mint az előzőekben. Elsőként vizsgáljuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. Most a  $\ln x$  miatt ki kell kötnünk, hogy  $x$  csak pozitív értékeket vehet fel, így  $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ .

Ezután oldjuk meg az  $f'(x) = 0$  egyenletet.

$$(x-2)^2 \ln x = 0$$

Arra hivatkozunk, hogy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője 0. Így az egyenletet egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$$(x-2)^2 = 0 \text{ vagy } \ln x = 0$$

Az első egyenlet megoldása nyilván  $x = 2$ .

A második egyenlet mindkét oldalát tekintjük úgy mint kitevőt, s az  $e$  számot emeljük fel ezen kitevőkre. Így a bal oldalon olyan kompozíciót kapunk, amiben egy függvény és inverze szerepel, így ott egyszerűen  $x$  áll.

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

A derivált zérushelyei tehát az 1 és a 2.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve. Figyeljünk oda, hogy az értelmezési tartomány most csak a pozitív valós számok halmaza. Így az első részben nem a  $(-\infty, 1)$  intervallum áll, hanem ott a  $(0, 1)$  intervallumnak kell szerepelni.

$x$	$(0, 1)$	$1$	$(1, 2)$	$2$	$(2, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Ezután vizsgáljuk a derivált előjelét az egyes részekben, s ebből következtessünk a növekedésre vagy a csökkenésre.

A  $(0, 1)$  intervallumban található pl. az 0.5. Helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(0.5) = (0.5 - 2)^2 \ln 0.5 \approx -1.56$$

A derivált értéke itt negatív, tehát ezen az intervallumon csökken a függvény.

Az  $(1, 2)$  intervallumban található pl. az 1.5, amit behelyettesítünk a deriváltba.

$$f'(1.5) = (1.5 - 2)^2 \ln 1.5 \approx 0.101$$

A derivált értéke ezen a helyen pozitív, ebből következően ezen az intervallumon nő a függvény.

Végül a  $(2, \infty)$  intervallumban van pl. az 3, amit a deriváltba helyettesítünk.

$$f'(3) = (3 - 2)^2 \ln 3 \approx 1.10$$

A derivált pozitív ezen a helyen, így itt is nő a függvény.

Az  $x = 1$  helyen a derivált előjele megváltozik, így itt a függvénynek lokális szélsőértéke van.

Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Az  $x = 2$  helyen a derivált nem vált előjelet, így ezen a helyen nincs szélsőértéke a függvénynek. Mivel előtte és utána is növekvő a függvény, így ezen a helyen is lokálisan növekvő a függvény.

Töltsük ki ezután a táblázat második és harmadik sorát is.

$x$	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	lokális minimum	nő $\nearrow$	nincs SZÉ. $\nearrow$	nő $\nearrow$

A függvénynek tehát csak az  $x = 1$  helyen van lokális szélsőértéke, ahol lokális minimuma van.