

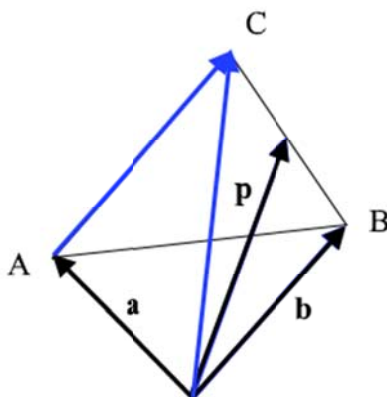
### 1.3. Összetett feladatok

**1. feladat:** Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsához egy tetszőleges  $O$  pontból az  $\mathbf{a}$ , a  $B$  csúcsba a  $\mathbf{b}$ , a  $BC$  szakasz felezőpontjába pedig a  $\mathbf{p}$  vektor mutat. Állítsuk elő  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , és  $\mathbf{p}$  segítségével :

- a) az  $O$ -ból a  $C$ -be vezető vektort
- b) az  $\overrightarrow{AC}$  vektort.

#### Megoldás

Készítsünk ábrát!



- a)  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$   
 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + 2(\mathbf{p} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{b}$
- b)  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\mathbf{p} - \mathbf{b} - \mathbf{a}$

**2. feladat:** Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra.

#### Megoldás

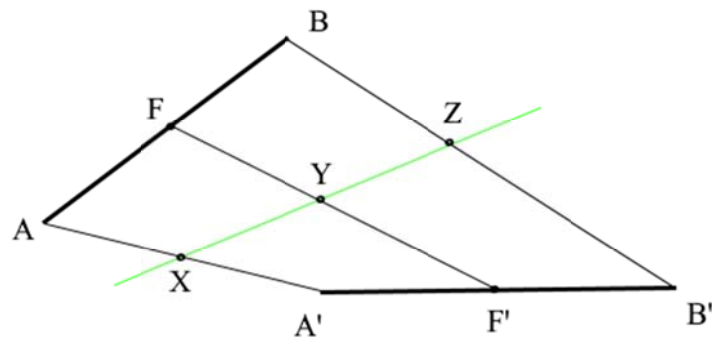
Abban az esetben, ha a két vektor nem párhuzamos, akkor megszerkesztve az összegüket és a különbségüket lényegében egy rombusz két átlóját kapjuk. Az elemi geometriából ismert, hogy ezek egymásra merőlegesek.

Ha a két vektor párhuzamos, akkor vagy azonos irányúak, vagy ellentétesek.

Ha azonos irányúak, akkor a különbségük  $\mathbf{0}$ , ha ellentétes irányúak, akkor pedig az összegük  $\mathbf{0}$ . Mivel a  $\mathbf{0}$  vektor iránya tetszőleges, ezért a  $\mathbf{0}$  vektor bármely vektorra merőleges is, ezzel az állítást igazoltuk.

**3. feladat:**  $AB$  és  $A'B'$  tetszőleges szakaszok, ezek felezőpontja  $F$  és  $F'$ . Igaz-e, hogy az  $AA'$ ,  $BB'$  és  $CC'$  szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak!

## Megoldás



Legyen  $X$  az  $AA'$ ,  $Y$  az  $FF'$  és  $Z$  a  $BB'$  szakasz felezőpontja.

Legyenek az  $A, B, F, A', B', F'$  pontokba mutató helyvektorok rendre  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$  és  $\mathbf{f}'$ .

Ekkor:

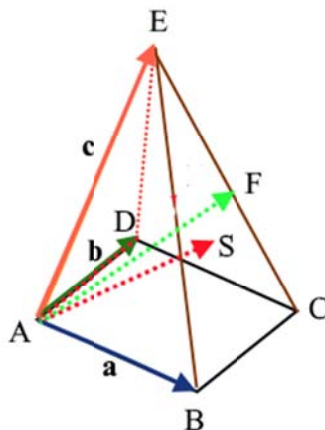
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2} & \overrightarrow{OZ} &= \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2} \\ \overrightarrow{OY} &= \frac{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OF'}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'}{2} + \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'}{2}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'}{2} = \frac{\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}}{2}.\end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy  $Y$  felezőpontja az  $XZ$  szakasznak, tehát  $X, Y$  és  $Z$  egy egyenesen vannak.

**4. feladat:** Az  $ABCDE$  szabályos négyoldalú gúla alaplaja az  $ABCD$  négyzet. Legyen  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$  és  $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$ . Fejezzük ki az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorokkal:

- a  $\overrightarrow{DE}$  vektort
- az  $A$  csúsból a  $CE$  él felezőpontjába mutató vektort
- az  $A$  csúsból a  $BCE$  oldallap súlypontjába mutató vektort.

## Megoldás



a) A  $\overrightarrow{DE}$  vektor felírható két vektor különbségeként:

$$\overrightarrow{DE} = \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

- b) A  $CE$  él, mint szakasz  $F$  felezőpontjába mutató vektort akkor tudjuk könnyen meghatározni, ha ismerjük a  $CE$  szakasz két végpontjába mutató azon helyvektorokat, amelyek az  $A$  csúcsból indulnak. A vektorok összeadására vonatkozó szabály alapján:

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}.$$

A szakasz felezőpontba mutató vektor:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}.$$

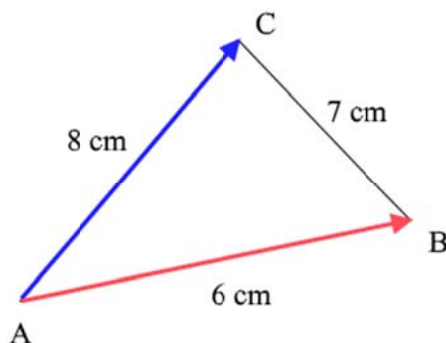
- c) Az  $A$  csúcsból a  $BCE$  oldallap súlypontjába mutató vektort akkor tudjuk előállítani, ha ismerjük a  $B$ ,  $C$  és  $E$  csúcsokba mutató,  $A$  pontból induló helyvektorokat. Felhasználva az előző eredményeket:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}.$$

A  $BCE$  oldallap súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$$

- 5. feladat:** Az  $ABC$  háromszögben  $AB=6\text{cm}$ ,  $BC=7\text{cm}$  és  $AC=8\text{cm}$ . Határozzuk meg az  $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$  értékét!



### Megoldás

A skaláris szorzat kiszámításához szükségünk van a két vektor által közbezárt szögre. Jelen esetben ez a háromszög  $A$  csúcsánál lévő szöge. Mivel ez egy általános háromszög, ezért ezt a szöveget koszinusztétellel tudjuk kiszámolni. A szokásos betűzést használva:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$7^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{17}{32} \rightarrow \alpha \approx 57,91^\circ.$$

A keresett skaláris szorzat:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 6 \cdot 8 \cdot \cos 57,91^\circ = 25,2.$$

Megjegyzés: Mivel a skaláris szorzat számolásánál a szög koszinuszára van szükség, ezért nem szükséges magát a szöveget kiszámolni. Megállhatunk a  $\cos \alpha = \frac{17}{32}$  összefüggésnél, ezt helyettesítjük be a skaláris szorzatba, ezáltal pontos eredményt kapva.

**6. feladat:** A  $k$  paraméter mely értékénél lesznek merőlegesek egymásra az  $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$  és  $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$  ( $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) vektorok?

### Megoldás

Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla, tehát a

$$\langle \mathbf{a} + k\mathbf{b}, \mathbf{a} - k\mathbf{b} \rangle = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Kihasználva a skaláris szorzat tulajdonságait és az egyenlet bal oldalát átalakítva:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - k \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + k \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - k^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

egyenlethez jutunk.

Ebből:

$$\|\mathbf{a}\|^2 - k^2 \|\mathbf{b}\|^2 = 0,$$

tehát

$$k = \pm \frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

**7. feladat:** Ha az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területe 6 egység, akkor mekkora a területe a  $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$  és a  $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$  vektorok által kifeszített paralelogrammának?

### Megoldás

Tudjuk, hogy a paralelogramma területe egyenlő az őt kifeszítő két vektor vektoriális szorzatának abszolút értékével. Tehát a keresett terület:

$$T = \|\mathbf{c} \times \mathbf{d}\|.$$

Behelyettesítve:

$$T = \|(4\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 5\mathbf{b})\|.$$

Először bontsuk fel a belső zárójeleket. Minden tagot minden taggal meg kell szorozni, de ügyelni kell arra, hogy a vektoriális szorzatnál számít a tényezők sorrendje:

$$T = \|4(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 20(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 5(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\|.$$

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \sin 0^\circ = 0$$

valamint:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

Így a keresett terület:

$$T = \|4(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 20(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 5(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\| = \|21(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\| = 21 \cdot 6 = 126 \text{ területegység.}$$

**8. feladat:** Ha az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység, akkor mennyi a térfogata az  $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedonnak?

## Megoldás

Mivel a paralelepipedon térfogata az őt kifeszítő vektorok vegyesszorzatának abszolút értékével egyenlő, ezért

$$V = |\mathbf{uvw}|.$$

Behelyettesítve:

$$V = |(2\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + 3\mathbf{c})(2\mathbf{b} - \mathbf{c})|.$$

A vegyesszorzat definíciója szerint a keresett térfogatot tovább alakítva:

$$V = |\langle (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}), (2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \rangle|.$$

Végezzük el először külön csak a vektoriális szorzást:

$$(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Kihasználva, hogy  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) = 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Helyettesítsük ezt vissza a keresett térfogatba:

$$\begin{aligned} V &= |\langle 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), (2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \rangle| = \\ &= |\langle 12(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{b} \rangle - 6\langle (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{c} \rangle - 2\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle + \langle (\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \mathbf{c} \rangle - 6\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{b} \rangle + 3\langle (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{c} \rangle| \end{aligned}$$

Felhasználva a vegyesszorzat jelölési módot, folytatva az átalakítást:

$$V = |12\mathbf{acb} - 6\mathbf{acc} - 2\mathbf{bab} + \mathbf{bac} - 6\mathbf{bcb} + 3\mathbf{bcc}|$$

Mivel három egysíkú vektor vegyes szorzata 0, ezért mindegyik tag, amelyben van ismétlődő vektor, az 0 lesz. (ha három vektor közül kettő azonos, akkor a három vektor biztosan egysíkú)

$$V = |12\mathbf{acb} + \mathbf{bac}|.$$

Felhasználva, hogy  $\mathbf{acb} = -\mathbf{abc}$  és  $\mathbf{bac} = -\mathbf{abc}$

$$V = |-12\mathbf{abc} - \mathbf{abc}| = |-13\mathbf{abc}| = 13|\mathbf{abc}|.$$

Mivel az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység ezért

$$V = 13 \cdot 5 = 65.$$