

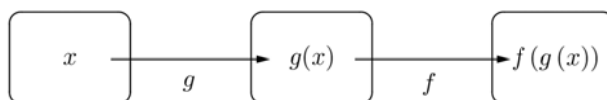
Elméleti összefoglaló:

A függvényekkel különféle műveleteket végezhetünk. Értelmezzük az f és g egyváltozós valós függvények összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát, melyek csak azokban a pontokban értelmezettek, amelyekben f és g is értelmezett (azaz értelmezési tartományuk közös részein).

- $h(x) = f(x) + g(x)$, ahol $D_h = D_f \cap D_g$
- $h(x) = f(x) - g(x)$, ahol $D_h = D_f \cap D_g$
- $h(x) = f(x)g(x)$, ahol $D_h = D_f \cap D_g$
- $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ahol $D_h = D_f \cap D_g$ és $g(x) \neq 0$

A fentiekén túlmenően egy újabb művelettel ismerkedünk meg. A függvények kompozícióját tekintjük a legfontosabb függvényműveletnek.

Definíció: Az f és g függvényekből $f(g(x))$ módon konstruált függvényt **összetett függvénynek** (f és g kompozíciójának) nevezzük. A $g(x)$ -függvényt **belső függvénynek**, az $f(x)$ függvényt **külső függvénynek** nevezzük. Az $f(g(x))$ kiértékelésekor először a $g(x)$ -et számoljuk ki, majd másodszorra alkalmazzuk f -et $g(x)$ -re (1. ábra).



1. ábra. Összetett függvény alkotása

Az összetett függvény másik szokásos jelölése $(f \circ g)(x)$. Mi az első jelölést fogjuk használni.

Ha kettőnél több függvény felhasználásával alkotunk meg egy összetett függvényt, akkor többszörösen összetett függvényről beszélünk. Például f , g , h függvények esetén $f(g(h(x)))$ többszörösen összetett függvény alkotható.

A függvényeket tetszőleges sorrendben is egymásba ágyazhatjuk, azonban ezen összetételek eredménye általában különböző: $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Tekintsük az $f(x) = x + 1$ és a $g(x) = \sqrt{x - 1}$ függvényt.

Határozzuk meg a $h = f + g$ összeg függvényt és a $k = f \cdot g$ szorzat függvényt.

Megoldás: Az f függvény mindenütt értelmezve van ($D_f = \mathbb{R}$), a g függvény az 1-nél nagyobb vagy egyenlő számok halmazán ($D_g = [1, \infty)$), ezért

$$D_h = D_k = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1, \infty) = [1, \infty).$$

A h függvény hozzárendelési utasítása

$$h(x) = f(x) + g(x) = (x + 1) + \sqrt{x - 1},$$

a k függvény hozzárendelési utasítása pedig

$$k(x) = f(x) \cdot g(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{x - 1}.$$

2. feladat: Legyen $f(x) = (x + 1)^2$ és $g(x) = x - 1$.

Határozzuk meg a $h = f - g$ és a $k = \frac{f}{g}$ függvényeket.

Megoldás: Kezdjük a különbséggel. Mivel mindkét függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, így $D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. A hozzárendelési utasítás pedig

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x + 1)^2 - (x - 1) = x^2 + x + 2.$$

A k függvény értelmezési tartományába a g függvény zérushelye nem tartozik bele, így

$D_k = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. A hozzárendelési utasítás pedig

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x+1)^2}{x-1}.$$

3. feladat: Tekintsük az $f(x) = x^2 + 3x - 2$ függvényt. Mivel egyenlő $f\left(\frac{x}{2}\right)$ és $f\left(\frac{1}{x}\right)$?

Megoldás: Egy függvény hozzárendelési utasítása mondja meg, hogy az mit rendel az argumentumához.

Most a hozzárendelési utasítás azt mondja, hogy az argumentum négyzetéhez hozzá kell adni az argumentum háromszorosát és abból levonni kettőt. Bármilyen is az argumentum, feltéve persze, hogy az értelmezési tartományban van. Ez most a valós számok halmaza, ezzel tehát nem lehet gond. Ezért

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - 2.$$

Hasonlóan, feltéve, hogy $x \neq 0$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{x}\right) - 2 = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 2.$$

4. feladat: Tekintsük az $f(x) = x - 1$ és a $g(x) = \sqrt{x} - 1$ függvényeket. Határozzuk meg a $g(f(x))$ és az $f(g(x))$ függvények hozzárendelési utasítását.

Megoldás: A $g(f(x))$ kompozícióban a g függvény az $f(x)$ -re, azaz az $x - 1$ -re fejti ki hatását. Mivel a g függvény hatása az, hogy gyököt von az argumentumából és abból még levon 1-et, azt kapjuk, hogy

$$g(f(x)) = g(x - 1) = \sqrt{x - 1} - 1.$$

Megjegyezzük, hogy így is számolhattunk volna:

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} - 1 = \sqrt{x - 1} - 1.$$

Hasonlóan

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x} - 1) - 1 = \sqrt{x} - 2,$$

mivel az f úgy hat, hogy az argumentumából levon 1-et.

Mindez a másik felírási móddal:

$$f(g(x)) = g(x) - 1 = (\sqrt{x} - 1) - 1 = \sqrt{x} - 2.$$

5. feladat: Legyen $f(x) = e^{x-1}$ és $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Írjuk fel mind a két sorrendű kompozíció képletét.

Megoldás:

$$g(f(x)) = g(e^{x-1}) = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}},$$

vagy a másik felírási móddal

$$g(f(x)) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}.$$

Hasonlóan

$$f(g(x)) = f\left(x + \frac{1}{x}\right) = e^{x + \frac{1}{x} - 1},$$

vagy

$$f(g(x)) = e^{g(x)-1} = e^{x + \frac{1}{x} - 1}.$$

A kétfajta felírási mód közül használja az olvasó a számára természetesebbet. Mi a továbbiakban csak az egyiket adjuk meg.

6. feladat: Legyen $f(x) = x^2 + x + 2$. Határozzuk meg $f(f(x))$ képletét.

Megoldás:

$$f(f(x)) = f(x^2 + x + 2) = (x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) + 2 = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 8.$$

7. feladat: Tekintsük az $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ és a $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ függvényeket. Írjuk fel $g(f(x))$ képletét.

Megoldás:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{\frac{x+1}{x-1} + 1} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1) + (x-1)} = \frac{1}{x}.$$

Noha a kompozíció általában bonyolultabb függvény, mint a külső és a belső függvény, a példánk mutatja, hogy ez fordítva is lehet.

8. feladat: Tudjuk, hogy $f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 + 3x - 1$. Mivel egyenlő $f(x)$?

Megoldás: Az a feladatunk, hogy kifejezzük $x^2 + 3x - 1$ -et az $\frac{x}{2}$ függvényeként. Amit $\frac{x}{2}$ -vel csinálni kell, hogy belőle $x^2 + 3x - 1$ legyen, az a keresett hozzárendelési utasítás.

Mivel könnyen látható, hogy

$$x^2 + 3x - 1 = 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{2}\right) - 1,$$

ezért a keresett hozzárendelési utasítás:

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 1.$$

9. feladat: Ha $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, mivel egyenlő $f(x)$?

Megoldás: Most azt keressük, hogy mit kell az $x + \frac{1}{x}$ -el csinálni, hogy belőle $x^2 + \frac{1}{x^2}$ legyen.

Vegyük észre, hogy

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

ahonnan

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

Tehát

$$f(x) = x^2 - 2.$$

10. feladat: Bontsuk fel két függvény kompozíciójára $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvényt.

Megoldás: Az egyik lehetséges megoldás a következő:

Legyen $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = \sqrt{x}$. Ekkor

$$h(x) = g(f(x)),$$

hiszen

$$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

De eljárhattunk volna máshogy is.

$$\text{Legyen } u(x) = x^2 \text{ és } v(x) = \sqrt{x + 1}.$$

Ekkor

$$h(x) = v(u(x)),$$

hiszen

$$v(u(x)) = \sqrt{u(x) + 1} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Látjuk tehát, hogy összetett függvényt általában többféleképpen lehet egyszerűbb függvények kompozíciójára bontani. Hogy a lehetőségek közül melyiket célszerű választani, azt az dönti el, hogy a továbbiakban mire akarjuk használni a felbontást.

Ez az eljárás, tehát egy összetett függvény felbontása egyszerűbb függvények kompozíciójára, a későbbiekben igen fontos lesz, és nagyon gyakran fog szerepelni.

11. feladat: Bontsuk fel a $h(x) = e^{x^3} - x$ függvényt két függvény kompozíciójára.

Megoldás: Először egy jelöléssel kapcsolatos megjegyzés. Az a^{b^c} alakú hatványoknál felmerül, hogy ez $a^{(b^c)}$, vagy $(a^b)^c$ rövidítése-e, ez a kettő ugyanis nem ugyanaz. Például $2(3^2) = 2^9 = 512$, de $(2^3)^2 = 8^2 = 64$. Az a konvenció, hogy

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$$

Most már egy lehetséges felbontás

$$f(x) = x^3,$$

$$g(x) = e^x - \sqrt[3]{x}.$$

Ekkor valóban

$$h(x) = g(f(x)),$$

hiszen

$$g(f(x)) = g(x^3) = e^{x^3} - \sqrt[3]{x^3} = e^{x^3} - x.$$

(Az volt itt a lényeg, hogy mivel az eredeti függvényben x^3 és x is szerepel, kifejeztük az x -et x^3 -bel.)

12. feladat: Bontsuk fel az $u(x) = \sqrt{2 - \sin^2 x}$ függvényt három függvény kompozíciójára.

Megoldás: Most is több megoldás van, ezek közül talán a legtermészetesebb az alábbi.

Legyen $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = 2 - x$ és $h(x) = \sqrt{x}$.

$$\text{Ekkor } u(x) = h(g(f(x))),$$

hiszen

$$h(g(f(x))) = h(g(\sin^2 x)) = h(2 - \sin^2 x) = \sqrt{2 - \sin^2 x}.$$