

Elméleti összefoglaló: A szorzatfüggvény deriválási szabályának megfordításából egy újabb integrálási módszerhez juthatunk. Az alábbi tétel erről szól.

Tétel: Ha az $u(x)$ és $v(x)$ függvények differenciálhatóak, valamint $u'(x)v(x)$ integrálható, akkor az $u(x)v'(x)$ függvény is integrálható és

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Bizonyítás: Az $u(x)$ és $v(x)$ függvények differenciálhatóak, így a szorzatfüggvény deriválási szabályát alkalmazva:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Fejezzük ki ebből $u'(x)v(x)$ -et.

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

A jobb oldalon álló függvény integrálható, ebből következően a bal oldal is integrálható. Integráljuk mindkét oldalt.

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)dx$$

A jobb oldalon tagonként integrálhatunk.

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))' dx - \int u'(x)v(x)dx$$

Mivel az első tagban az $u(x)v(x)$ függvény deriváltját integráljuk, így integrálás után visszakapjuk az eredeti $u(x)v(x)$ függvényt.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

A parciális integrálás alkalmazásával az $u(x)v'(x)$ függvény integrálását az $u'(x)v(x)$ függvény integrálásra vezetjük vissza. A szabályt olyan szorzatok esetén célszerű alkalmazni, melyekben a $v'(x)$ -nek megfelelő tényező könnyen integrálható, s ha az $u'(x)v(x)$ könnyebben integrálható mint $u(x)v'(x)$. A szabály alkalmazásával soha nem fejeződik be a feladat megoldása, hiszen a jobb oldalon a második tag még integrált tartalmaz. Ezért is kapta elnevezését a szabály, hiszen csak részben történik meg az integrálás. Az alkalmazás során nagyon fontos, hogy egy integrálandó szorzat tényezői közül melyiket választjuk $u(x)$ -nek, illetve $v'(x)$ -nek. Erre vonatkozóan a kidolgozott feladatokban adunk útmutatást.

Kidolgozott feladatok:

18. feladat: $\int (2x-6) \cdot \ln x dx$

Megoldás: Az integrandus most szorzat, s azon belül is egyik tényezője polinom, a másik pedig a $\ln x$. Próbálkozzunk az előbb megismert parciális integrálás alkalmazásával.

Válasszuk a polinomot $u(x)$ -nek, mert így a szabály alkalmazása után visszamaradó integrálban majd ezen polinom deriváltja fog megjelenni, ami már csak egy konstans. Így a parciális integrálás után már nem szorzatfüggvény áll majd az integrandusban.

Legyen tehát $u(x) = 2x - 6$ és $v'(x) = \operatorname{sh} x$.

Ekkor $u'(x) = 2$ és $v(x) = \operatorname{ch} x$.

Az ismert $v'(x)$ -ből integrálással kaptuk meg $v(x)$ -et. Ezért fontos, hogy a $v'(x)$ -nek választott tényező könnyen integrálható legyen.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (2x - 6) \cdot \operatorname{sh} x dx = (2x - 6) \cdot \operatorname{ch} x - \int 2 \cdot \operatorname{ch} x dx$$

A feladatot még nem oldottuk meg, hisz még van egy integrálunk. Ebből azonban a konstans szorzót kiemelhetjük, s utána már csak egy alapintegrál marad. Így az eredmény a következő lesz:

$$\begin{aligned} (2x - 6) \cdot \operatorname{ch} x - \int 2 \cdot \operatorname{ch} x dx &= (2x - 6) \cdot \operatorname{ch} x - 2 \int \operatorname{ch} x dx = \\ &= (2x - 6) \cdot \operatorname{ch} x - 2 \operatorname{sh} x + c. \end{aligned}$$

19. feladat: $\int (3x + 7) \cdot 5^x dx$

Megoldás: Az integrandus egy hasonló szorzat, mint amilyen az előző feladatban szerepelt.

Az első tényező most is egy polinom, a második tényezőben pedig 5^x vette át a $\operatorname{sh} x$ szerepét.

Az 5^x is könnyen integrálható, így megint a parciális integrálással próbálkozhatunk.

Legyen $u(x) = 3x + 7$ és $v'(x) = 5^x$.

Ekkor $u'(x) = 3$ és $v(x) = \frac{5^x}{\ln 5}$.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (3x + 7) \cdot 5^x dx = (3x + 7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} dx$$

A még meghatározandó integrálból emeljük ki a konstansokat, így már csak egy alapintegrál marad majd, amit meghatározunk.

$$\begin{aligned} (3x + 7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} dx &= (3x + 7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{3}{\ln 5} \int 5^x dx = \\ &= (3x + 7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{3}{\ln 5} \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + c = \frac{5^x}{\ln 5} \left(3x + 7 - \frac{3}{\ln 5} \right) + c \end{aligned}$$

Az utolsó két feladatban az volt a közös, hogy olyan szorzatot kellett integrálnunk, melyek egyik tényezője egy polinom, másik tényezője pedig az a^x , e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ függvények valamelyike. Ilyenkor célszerű a parciális integrálást alkalmazni olyan szereposztással, hogy $u(x)$ a polinom legyen, $v'(x)$ pedig a másik tényező. A szabályt használva a visszamaradó integrálban eggyel alacsonyabb foksámú polinom marad már csak. Ha az eredeti polinom elsőfokú volt, akkor a visszamaradó integrálban $u'(x)$ már csak egy konstans lesz, ami az integrálból kiemelhető. A $v'(x)$ -nek megfelelő függvényt könnyen tudjuk integrálni, hiszen az függvények a^x , e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ mindegyike alapintegrál. Ráadásul az integrálás eredményeként kapott $v(x)$ függvényt is könnyű integrálni, mert az is alapintegrál, vagy annak szám szorosa lesz. Ez akkor fontos, ha a polinom nem elsőfokú. Ilyenkor a szabályt többször kell alkalmazni egymás után, egészen addig, míg a polinomból csak egy konstans marad a deriválások után. Erre majd a későbbiekben mutatunk példát.

20. feladat: $\int (4x+3) \cdot \ln x dx$

Megoldás: Ismét szorzatot kell integrálnunk, és az egyik tényező most is polinom, de a másik tényezőben álló $\ln x$ más típusú mint ami az előző két feladatban szerepelt. Akkor ott olyan függvény állt, amely alapintegrál volt. A $\ln x$ nem ilyen függvény. Ezért nem célszerű $v'(x)$ -nek választani, hiszen akkor a $v(x)$ -et nem könnyű meghatározni. Legyen tehát a szereposztás most a parciális integrálás során a következő:

$$u(x) = \ln x \text{ és } v'(x) = 4x + 3.$$

$$\text{Ekkor } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ és } v(x) = 2x^2 + 3x.$$

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int (4x+3) \cdot \ln x dx = (2x^2 + 3x) \cdot \ln x - \int (2x^2 + 3x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

A még meghatározandó integrálban egyszerűsítsünk, majd végezzük el az integrálást. Nem lesz nehéz dolgunk, mert az egyszerűsítés után egy polinomot kell integrálnunk.

$$(2x^2 + 3x) \cdot \ln x - \int 2x + 3 dx = (2x^2 + 3x) \cdot \ln x - (x^2 + 3x) + c$$

21. feladat: $\int x^3 \cdot \ln x dx$

Megoldás: Hasonló szorzatot kell integrálnunk mint az előző feladatban, csak most a polinom nem több tagból áll, hanem csak egyetlen tagból. Ugyanúgy járhatunk el, mint az előbb.

$$\text{Legyen } u(x) = \ln x \text{ és } v'(x) = x^3.$$

$$\text{Ekkor } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ és } v(x) = \frac{x^4}{4}.$$

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int x^3 \cdot \ln x dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx$$

A visszamaradó integrálban most is egyszerűsítsünk, a konstans szorzót pedig emeljük ki. Mivel x -nek egy hatványa marad csak, így ezt már könnyen tudjuk integrálni.

$$\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c$$

Az eredmény szebb alakban írható, ha kiemeljük amit lehet.

$$\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + c$$

22. feladat: $\int \ln x dx$

Megoldás: Az előző négy feladatban szorzat állt az integrálban, de most nem. Azaz egy egyszerű trükkal most is szorzattá alakíthatjuk. Írjuk az $\ln x$ -et $1 \cdot \ln x$ formában. Az 1 is egy polinom, csak nagyon egyszerű polinom, hiszen 0 a fokszáma. $(1 = x^0)$ Így már ugyanúgy járhatunk el mint az előző két feladatban.

$$\text{Legyen } u(x) = \ln x \text{ és } v'(x) = 1.$$

Ekkor $u'(x) = \frac{1}{x}$ és $v(x) = x$.

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

A visszamaradó integrálban egyszerűsítsünk, majd hajtsuk végre az integrálást.

$$x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = x \cdot \ln x - x + c$$

Az eredmény kiemelés után most is írható más alakban.

$$x \cdot \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

Az utolsó három feladatban olyan szorzatokat kellett integrálni, melyek egyik tényezője polinom volt, ez lehetett csak egy konstans is, a másik tényezője pedig az $\ln x$. Ilyenkor is alkalmazható a parciális integrálás, de nem a polinomot kell $u(x)$ -nek választani, hanem az $\ln x$ -et. Ennek oka az, hogy az $\ln x$ nem alapintegrál, így nem olyan könnyen integrálható mint például a $\sin x$. Természetesen ez azt is jelenti, hogy ilyenkor a polinom lesz a $v'(x)$. Ez jó is, hiszen egy polinom hatványfüggvények konstans szorosának összegéből áll, a hatványok pedig könnyen integrálhatóak. Az integrálás növeli a hatványok fokszámát, így az integrálás utáni polinomban nem szerepel konstans tag. A legalacsonyabb fokszámú tag is legalább elsőfokú. Mivel az $\ln x$ deriváltja $\frac{1}{x}$, így a visszamaradó integrálban egy legalább elsőfokú tagokat tartalmazó polinomot szorzunk $\frac{1}{x}$ -szel. Ilyenkor mindig egyszerűsíthetünk x -szel, és egy polinomot kapunk. Ezt pedig könnyen tudjuk integrálni.