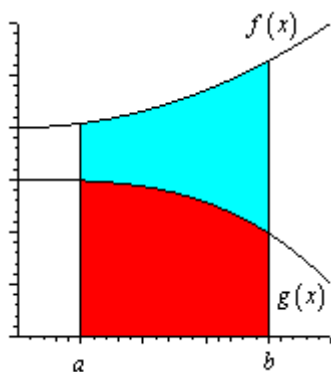


Elméleti összefoglaló: A határozott integrál nem csak olyan alakzatok területének meghatározását teszi lehetővé, melyek egy függvény grafikonja és az x -tengely között helyezkednek el, hanem más görbékkel határolt alakzatokét is. Ha például a folytonos $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai nem metszik egymást az $[a, b]$ intervallum belsejében, akkor a függvények grafikonjai, valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt síkrész területe, vagy máképp fogalmazva a függvények grafikonjai közti terület az $[a, b]$ intervallumon a következő:

$$T = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|.$$

Ha tudjuk, hogy az $[a, b]$ -n $f(x) \geq g(x)$, akkor az abszolút érték elhagyható, hiszen $f(x) - g(x)$ nem negatív értékű függvény az $[a, b]$ -n. Az állítás helyességét az egyszerűség kedvéért $f(x)$ és $g(x)$ $[a, b]$ -n pozitív függvények esetén az alábbi ábra segítségével láthatjuk be.



Ezen látható, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ megadja a pirossal és kékkel jelölt alakzatok területének

összeget, az $\int_a^b g(x) dx$ pedig csak a piros alakzat területét. A kékkel jelölt síkrész területe így

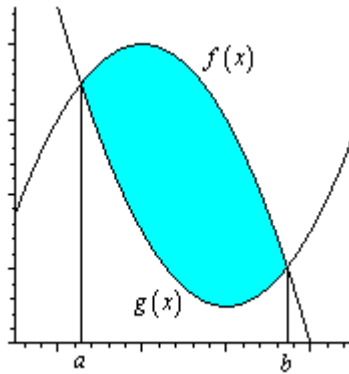
a kettő különbsége, tehát: $T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$. A határozott integrál tulajdonságai

között szerepelt, hogy azonos intervallumon vett integrálok különbsége megegyezik a függvények különbségének integráljával, azaz:

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Két függvény grafikonja közti területet tehát úgy kapjuk, hogy a nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbbat, s különbséget integráljuk.

Lényegében ugyanígy járhatunk el, ha két függvény grafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés. Az ilyen alakzat a grafikonok metszéspontjai között helyezkedik el, amint az alábbi ábrán látható.



Ilyenkor először meg kell oldanunk az $f(x) = g(x)$ egyenletet. Ezzel kapjuk meg a metszéspontok helyét, azaz a -t és b -t. Ezek után az $[a, b]$ -n nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbat, s különbséget integráljuk $[a, b]$ -n.

Kidolgozott feladatok:

15. feladat: Mekkora az $f(x) = 4x - x^2 + 1$ és $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények grafikonjai közötti terület az $[1, 4]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a két függvényről a megadott intervallumon. Ha kiszámoljuk a két függvény értékét az intervallum végpontjaiban, akkor a görbék jelleg alapján könnyű elkészíteni az ábrát.

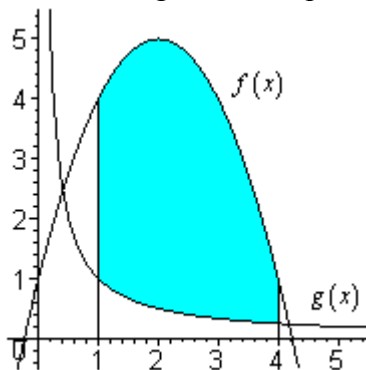
$$f(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 + 1 = 4$$

$$f(4) = 4 \cdot 4 - 4^2 + 1 = 1$$

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(4) = \frac{1}{4}$$

Az $f(x)$ grafikonja egy konkáv parabola, $g(x)$ grafikonja pedig hiperbola. Illesszünk ilyen görbéket a meghatározott pontokra.



Amint látható, a megadott intervallumon belül nem metszi egymást a két függvény. Így egyszerűen vennünk kell a két függvény különbségét, s azt kell integrálnunk a megadott

intervallumon. Mivel tudjuk, hogy az adott intervallumban $f(x) > g(x)$, így ha az $f(x) - g(x)$ különbséget vesszük, akkor nincs szükség abszolút értékre.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1\right) - \frac{1}{x} dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1\right) - \frac{1}{x} dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x \right]_1^4$$

Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x \right]_1^4 = \left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} + 4 - \ln 4 \right) - \left(2 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} + 1 - \ln 1 \right) = \\ &= \left(32 - \frac{64}{3} + 4 - \ln 4 \right) - \left(2 - \frac{1}{3} + 1 - 0 \right) = 12 - \ln 4 \approx 10.61 \end{aligned}$$

A kérdéses terület tehát közelítőleg 10.61 egység.

17. feladat: Mekkora területű síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^2 - 1$ és $g(x) = 1 - x$ függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két görbe által közrezárt síkrész területe a kérdés, ezért meg kell határoznunk a metszéspontjaikat. Oldjuk meg tehát az $f(x) = g(x)$ egyenletet.

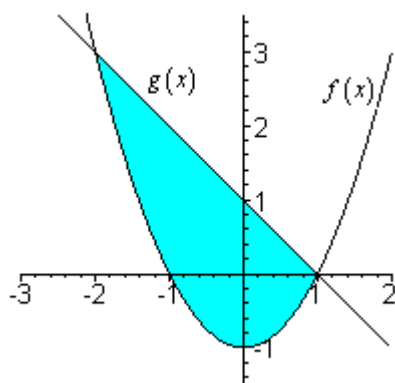
$$x^2 - 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

A kért területet ezután úgy kaphatjuk, hogy a két függvény különbségét integráljuk a két metszéspont között, azaz a $[-2, 1]$ intervallumon, s vesszük az integrál abszolút értékét. Ha azonban el tudjuk dönteni, melyik függvény nagyobb az intervallum belsejében, és a nagyobb értékű függvényből vonjuk ki a kisebb értékűt, akkor nincs szükség az abszolút értékre. Ha készítünk egy ábrát, akkor arról ezt le tudjuk majd olvasni. Az intervallum végpontjaiban a két függvény most ugyanazon értékeket veszi fel. Mivel $g(x)$ az egyszerűbb, így ebbe célszerű helyettesíteni.

$$f(-2) = g(-2) = 1 - (-2) = 3$$

$$f(1) = g(1) = 1 - 1 = 0$$

Az $f(x)$ másodfokú függvény, grafikonja konvex parabola, $g(x)$ elsőfokú, grafikonja egyenes. Ezek után már könnyű egy jó ábrát készíteni.



A $[-2, 1]$ intervallum belsejében láthatóan $g(x) > f(x)$, ezért a $g(x) - f(x)$ függvényt integráljuk, s így nem lesz szükség abszolút értékre.

$$T = \int_{-2}^1 (1-x) - (x^2-1) dx = \int_{-2}^1 2-x-x^2 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_{-2}^1 2-x-x^2 dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1$$

Helyettesítsük a határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = 4.5 \end{aligned}$$

A két grafikon által közrezárt terület tehát 4.5 egység.