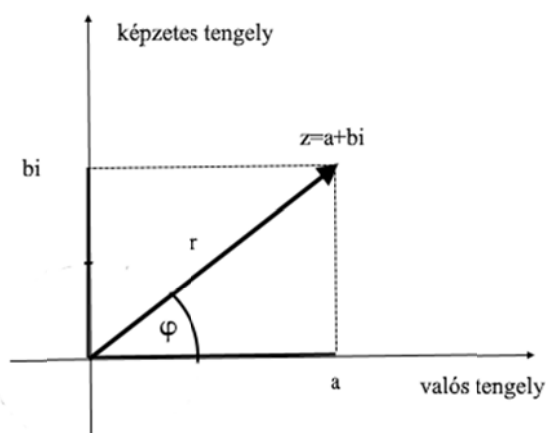


## 4.2. Komplex számok ábrázolása, trigonometrikus alak

A valós számokat számegyenesen ábrázoljuk. Egy egyenes a komplex számok ábrázolására nem elegendő, mivel ezek a számok valós és képzetes részből állnak. Éppen ezért ki kell lépünk az egyenesből a síkba. Ezt a síkot komplex számsíknak nevezzük. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert és a vízszintes tengelyen a komplex szám valós, a függőleges tengelyen pedig képzetes részét jelöljük. A valós tengelyen az egység az **1** valós szám, míg a képzetes tengelyen az  $i$  komplex szám az egység.

Ekkor a  $z = a + bi$  alakú komplex számot szokás az  $(a, b)$  pontba mutató helyvektorral szemléltetni. Ekkor a komplex számok és a koordináta rendszer pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk.



A  $z = a + bi$  alakban megadott komplex számot a valós és képzetes része egyértelműen meghatározza. A komplex számot ábrázoló vektort azonban nem kell feltétlenül ezzel a két adattal megadni. Ugyanezt a vektort megadhatjuk úgy is, ha megadjuk a vektor hosszát és a vektor valós tengely pozitív felével bezárt hajlásszögét. Ezt a két új adatot polárkoordinátáknak hívják. A vektor hosszát a komplex szám abszolút értékének is nevezzük, jele:  $r$ , amely Pitagorasz tétel segítségével:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A komplex szám hajlásszöge az a szög, amellyel a valós tengely pozitív felét az óramutató járásával ellenkező irányba el kell forgatni úgy, hogy az a komplex számot szemléltető vektor irányával essen egybe. Ennek megfelelően  $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ .

A  $\varphi$  hajlásszög meghatározásánál minden esetben fontos a vektor felrajzolása, mivel a koordináta sík különböző negyedeiben más-más módon történik. Első lépésben egy  $\beta$  segédszöget számolunk a

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{b}{a} \right| \quad \text{ha} \quad a \neq 0$$

segítségével, majd a tényleges hajlásszög meghatározása következik a következő módon:

I. síknegyedben  $\varphi = \beta$ ,

II. síknegyedben:  $\varphi = 180^\circ - \beta$ ,

III. síknegyedben:  $\varphi = 180^\circ + \beta$ ,

IV. síknegyedben  $\varphi = 360^\circ - \beta$ .

A most bevezetett polárkoordináták segítségével lehetőségünk van a komplex számokat más alakban is felírni.

Definíció: A  $z = a + bi$  nullától különböző algebrai alakban felírt komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

ahol  $r$  a vektor hossza,  $\varphi$  pedig a hajlásszöge.

### Átváltás algebrai alakból trigonometrikus alakba

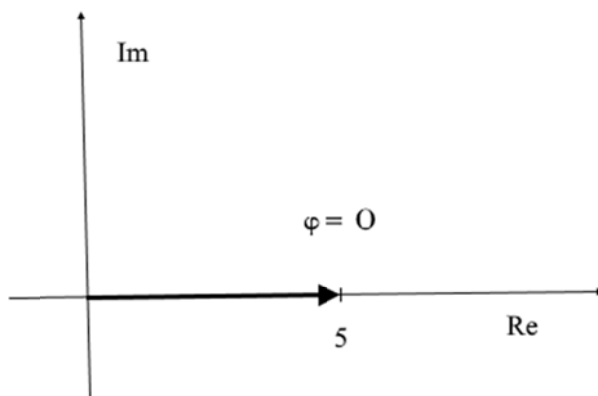
A trigonometrikus alakban megadott komplex szám algebrai alakjának meghatározása a szögfüggvények értékének behelyettesítésével és egyszerűbb alakra hozással történik.

**1. feladat:** Írja fel a következő komplex számokat trigonometrikus alakban:

- a)  $z = 5$
- b)  $z = -3i$
- c)  $z = 2 + 4i$
- d)  $z = -4 + 2i$
- e)  $z = -3 - 5i$
- f)  $z = 5 - 4i$

### Megoldás

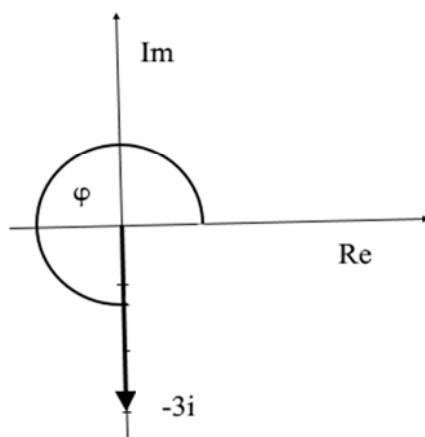
a) Először ábrázoljuk a komplex számot.



A vektor speciális elhelyezkedése miatt az ábráról leolvasható, hogy a vektor hossza 5, hajlásszöge  $0^\circ$ . Így semmiféle mellékszámolásra itt nincs szükség.

$$z = 5 = 5(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ).$$

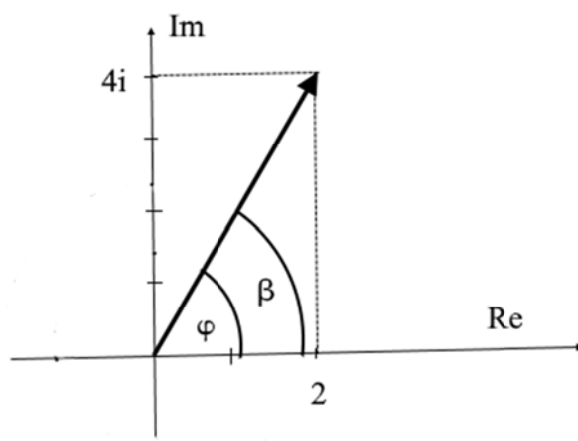
b) Most is az ábrával kell kezdeni.



Az ábráról leolvasható, hogy a vektor hossza 3, hajlásszöge pedig  $270^\circ$ .

$$z = -3i = 3(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ).$$

c) A valós és képzetes rész is pozitív, ezért egy első negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



Számítsuk ki a vektor hosszát:

$$r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

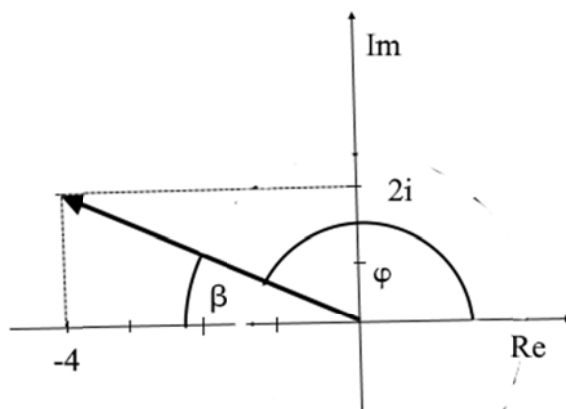
Másrészt:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{2} \rightarrow \varphi = \beta = 63,43^\circ$$

Így a keresett trigonometrikus alak:

$$z = 2 + 4i = \sqrt{20}(\cos 63,43^\circ + i \sin 63,43^\circ).$$

d) A valós negatív, a képzetes rész pozitív, ezért egy második negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

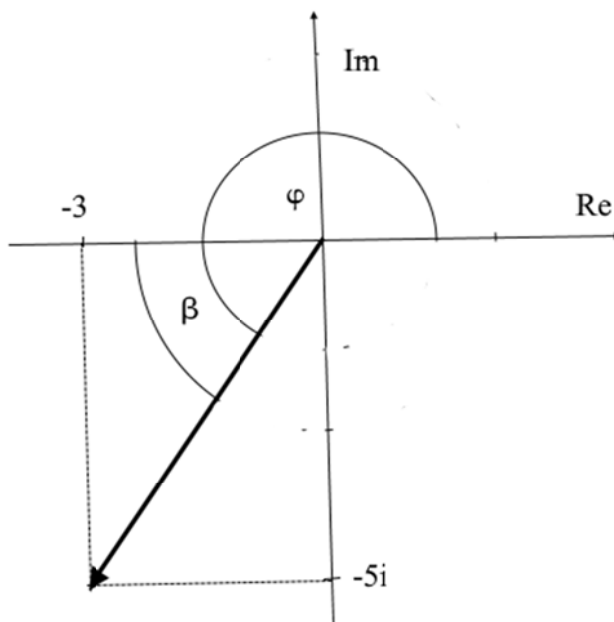
$$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{4} \rightarrow \varphi = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 26,57^\circ = 153,43^\circ$$

A keresett trigonometrikus alak:

$$z = -4 + 2i = \sqrt{20} (\cos 153,43^\circ + i \sin 153,43^\circ).$$

- e) A valós és képzetes rész is negatív, ezért egy harmadik negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

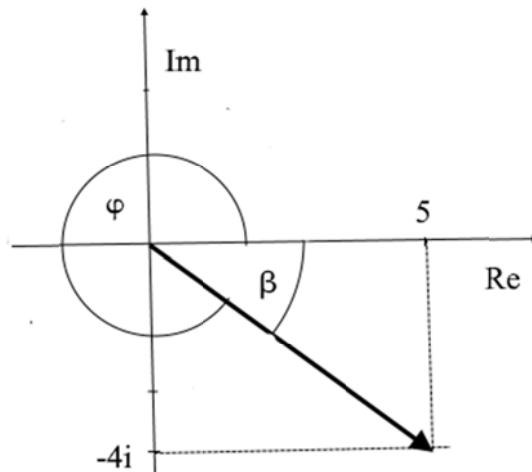
$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{3} \rightarrow \varphi = 180^\circ + \beta = 180^\circ + 59,04^\circ = 239,04^\circ$$

A keresett trigonometrikus alak:

$$z = -3 - 5i = \sqrt{34} (\cos 139,04^\circ + i \sin 139,04^\circ).$$

- f) A valós pozitív, a képzetes rész negatív, ezért egy negyedik negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

$$r = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{5} \rightarrow \varphi = 360^\circ - \beta = 360^\circ - 38,66^\circ = 321,34^\circ$$

A keresett trigonometrikus alak:

$$z = 5 - 4i = \sqrt{41} (\cos 321,34^\circ + i \sin 321,34^\circ).$$

**2. feladat:** Írja fel a következő komplex számokat algebrai alakban:

- a)  $z = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
- b)  $z = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$
- c)  $z = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$
- d)  $z = 5(\cos 222^\circ + i \sin 222^\circ).$

**Megoldás**

$$\text{a) } z = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{b) } z = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\text{c) } z = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} + i \left( \frac{-1}{2} \right) \right) = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$\text{d) } z = 5 (\cos 123^\circ + i \sin 123^\circ) = 5 (-0,5446 + i \cdot 0,8387) = 2,723 + 4,1935i .$$

**3. feladat:** Legyen  $z = \frac{6}{\sqrt{2}} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ . Határozza meg  $\text{Im}(z)$  és  $\text{Re}(z)$  értékeket!

### Megoldás

A trigonometrikus alakból át kell térni az algebrai alakra, hogy válaszolni tudjunk.

$$z = \frac{6}{\sqrt{2}} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = \frac{6}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 3 - 3i \rightarrow \text{Re}(z) = 3, \text{ Im}(z) = -3 .$$