

Elméleti összefoglaló

Amikor meghatározzuk egy függvény derivált függvényét úgy is gondolhatunk erre a folyamatra, mint egy új függvényműveletre, amelyik az eredeti $f(x)$ függvényből elkészíti az $f'(x)$ derivált függvényt. És sokszor hasznos így, függvényműveletként gondolni a deriválásra. Persze ekkor rögtön adódik a kérdés, hogy ennek az új függvényműveletnek mi a kapcsolata a korábban megismert függvényműveletekkel. Ezeket a kapcsolatokat megfogalmazó tételeket hívjuk **deriválási szabályoknak**. Ebben a leckében megismerkedünk a deriválási szabályokkal, és begyakoroljuk a derivált függvény ezeken alapuló meghatározását. Ez sokkal gyorsabb és egyszerűbb, mint a definíció alkalmazása, és nagyon fontos lesz a későbbiek során.

Tétel: Legyen c tetszőleges konstans, az f függvény pedig differenciálható az x helyen, ekkor a $c \cdot f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Úgy szoktunk hivatkozni erre a tételre, hogy a konstans szorzó deriváláskor kiemelhető.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f + g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ennek a tételnek a tömör megfogalmazása az, hogy összeg tagonként deriválható. A tétel nem csak két függvény, hanem tetszőleges számú, véges sok függvény összegének deriválásakor is érvényben marad: ha az f_1, f_2, \dots, f_n függvények mindegyike differenciálható az x helyen, akkor az $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x).$$

Ezekből a tételekből könnyen következik, hogy f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f - g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Sőt, a legáltalánosabban ezek a tételek így fogalmazhatók meg egy tételben: ha az f_1, f_2, \dots, f_n függvények mindegyike differenciálható az x helyen, c_1, c_2, \dots, c_n pedig tetszőleges konstansok, akkor $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \dots + c_n \cdot f_n$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x))' = c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 \cdot f_2'(x) + \dots + c_n \cdot f_n'(x).$$

Ezek a tételek együtt azt jelentik, hogy a **deriválás lineáris művelet**.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ez a tétel is általánosítható, például három tényező esetén így néz ki:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$$

Figyeljük meg, hogy mivel az összeadás és a szorzás kommutatív művelet, az eddigi képletek nem változnak, ha azokban a függvényeket tetszőleges sorrendben írjuk.

Az osztás nem kommutatív művelet, ezért a törtfüggvény deriválására vonatkozó képlet nem is szimmetrikus a számlálóban és a nevezőben.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, és $g(x) \neq 0$, Ekkor a az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

A legfontosabb deriválási szabály az összetett függvény deriválási szabálya, ezt használjuk a leggyakrabban.

Tétel: Legyen az f függvény differenciálható az x helyen, a g függvény differenciálható az $f(x)$ helyen. Ekkor a $g \circ f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Természetesen ez is általánosítható többtenyezős kompozíciókra. Három tényező esetén a tétel a következő: ha az f függvény differenciálható az x helyen, a g függvény differenciálható az $f(x)$ helyen, a h függvény pedig differenciálható a $g(f(x))$ helyen, akkor a $h \circ g \circ f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(h(g(f(x))))' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ezt, és az előző tételt is, **lányszabálynak** hívják.

A függvény inverzének a képzése is tekinthető függvenyműveletnek, így persze van az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel is. A gyakorlatban azonban ezt ritkán alkalmazzuk, helyette elkészítjük az inverz függvényt, és alkalmazzuk a korábbi deriválási szabályokat.

Egy f függvény f' deriváltja maga is egy függvény. Tekinthetjük ennek a deriváltját, amit f'' fog jelölni, és ezt f **második deriváltjának** hívjuk. Ennek deriváltja f harmadik deriváltja, és így tovább. Ezeknek a magasabb rendű deriváltaknak fontos szerepe van a felsőbb matematikában.

Kidolgozott feladatok

A következő feladatokban csak a derivált függvény képletének az előállításával foglalkozunk, és nem vizsgáljuk annak értelmezési tartományát. Fel fogjuk használni az elemi függvények korábban már megismert deriváltjait.

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 5x^4$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Az f függvény egy konstans és egy hatványfüggvény szorzata, ezért a konstans szorzó a deriválás művelete élé kiemelhető:

$$f'(x) = (5x^4)' = 5(x^4)' = 5(4x^3) = 20x^3.$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + \ln x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Az f függvény kéttagú összeg, amit tagonként deriválhatunk, így:

$$f'(x) = (x^2 + \ln x)' = (x^2)' + (\ln x)' = 2x + \frac{1}{x}.$$

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sin x - \cos x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $f'(x) = (\sin x)' - (\cos x)' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x.$

4. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 2e^x + \frac{3}{x}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Felhasználjuk, hogy a deriválás lineáris, a gyököt és a törtet pedig felírjuk hatványként, így minden derivált könnyen felismerhető elemi függvény deriváltja lesz:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3 - 3\sqrt{x} + 2e^x + \frac{3}{x} \right)' = (x^3)' - 3 \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' + 2(e^x)' + 3(x^{-1})' = \\ &= 3x^2 - 3 \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) + 2e^x + 3(-x^{-2}) = \\ &= 3x^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + 2e^x - \frac{3}{x^2}. \end{aligned}$$

Deriváláskor gyakori, hogy a törteket és a gyököket hatványokként kezeljük.

5. feladat: Határozzuk meg az $f(t) = (2t-1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Végezzük el a négyzetre emelést. Ekkor kapjuk, hogy $f(t) = 4t^2 - 4t + 1$. Ezt felhasználva

$$f'(t) = (4t^2 - 4t + 1)' = 4(t^2)' - 4(t)' + (1)' = 8t - 4.$$

Később ezt a függvény a szorzatfüggvény és az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva is deriválni fogjuk.

6. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Persze majd tagonként fogunk deriválni, de először a negyedik gyököt hatványként írjuk fel. Azután vegyük figyelembe, hogy $\ln 2$ konstans, így a deriváltja 0, és nem $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3} \right)' = (2^x)' - (\ln 2)' - \left(x^{\frac{3}{4}} \right)' = \\ &= 2^x \ln 2 - \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

felhasználva az a^x és az x^a elemi függvények deriváltjait.

7. feladat: Határozzuk meg az $f(t) = (2t-1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk így is írható: $f(t) = (2t-1)(2t-1)$. Így, a szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned} f'(t) &= (2t-1)'(2t-1) + (2t-1)(2t-1)' = 2(2t-1) + (2t-1)2 = \\ &= 8t - 4. \end{aligned}$$

8. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (x^2 + x)(1 - 2x^2)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Mivel a függvényünk szorzatfüggvény, alkalmazhatjuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + x)'(1 - 2x^2) + (x^2 + x)(1 - 2x^2)' = \\ &= (2x + 1)(1 - 2x^2) + (x^2 + x)(-4x) = \\ &= 1 + 2x - 6x^2 - 8x^3, \end{aligned}$$

De eljárhatunk úgy is, hogy először elvégezzük a függvényünket definiáló képletben a szorzást: $f(x) = x + x^2 - 2x^3 - 2x^4$. Ezután deriválás szempontjából már egyszerűbb a helyzet.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + x^2 - 2x^3 - 2x^4)' = (x)' + (x^2)' - 2(x^3)' - 2(x^4)' = \\ &= 1 + 2x - 6x^2 - 8x^3. \end{aligned}$$

Természetesen ugyanaz a végeredmény, mint az előbb. Látjuk, hogy gyakran elő fog fordulni, hogy egy deriválás több úton is elvégezhető.

A továbbiakban az összegek deriváltját, ha a tagok már elemi függvények, a deriválások kijelölése nélkül, közvetlenül felírjuk.

9. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (3x - \sqrt{x})(e^x + 1)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most nem célszerű elvégezni a beszorzást, mert a keletkezett szorzatok nem egyszerűsíthetők, és így kétszer is alkalmazni kéne a szorzatfüggvény deriválási szabályát.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x - \sqrt{x})'(e^x + 1) + (3x - \sqrt{x})(e^x + 1)' = \\ &= \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(e^x + 1) + (3x - \sqrt{x})e^x. \end{aligned}$$

Felmerül, hogy az utolsó képletben el kell-e végezni a beszorzásokat. Amikor csak az a feladat, hogy határozzuk meg egy függvény derivált függvényét, a deriválások elvégzése után nem fogjuk a lehetséges összevonásokat elvégezni. Ez így gyorsabb és egyszerűbb. Később, amikor a derivált függvénnyel további számításokat fogunk végezni, más lesz a helyzet.

10. feladat: Határozzuk meg az

$f(x) = (\operatorname{tg} x + \sin 30 - x)(\sqrt[3]{x} - 2^x)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Először is a $\sin 30$ egy konkrét szám, konstans, és a 30 radiánban értendő; az analízisben a trigonometrikus függvények argumentuma mindig radián van megadva.

Így $\sin 30 \approx -0.9880316241$, és nem 0.5, amennyi a 30° szinusza. Tehát $\sin 30$ deriváltja nulla, továbbá

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} x + \sin 30 - x)'(\sqrt[3]{x} - 2^x) + (\operatorname{tg} x + \sin 30 - x)(\sqrt[3]{x} - 2^x)' = \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)(\sqrt[3]{x} - 2^x) + (\operatorname{tg} x + \sin 30 - x)\left(\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - 2^x \ln 2\right). \end{aligned}$$

11. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \lg x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk három tényező szorzata, de már ismerjük egy ilyen függvény deriváltjára vonatkozó képletet, az alapján

$$f'(x) = (x^2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \lg x)' = (x^2)' \cdot \operatorname{sh} x \cdot \lg x + x^2 \cdot (\operatorname{sh} x)' \cdot \lg x + x^2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot (\lg x)' =$$

$$= 2x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \lg x + x^2 \cdot \operatorname{ch} x \cdot \lg x + x^2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}.$$

12. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (xe^x + 1)(x + \arctg x)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ebben a feladatban elkerülhetetlen a szorzatfüggvény deriválási szabályának többszöri alkalmazása. Figyeljük meg, ahogyan először csak kijelöljük a szükséges deriválásokat.

$$f'(x) = (xe^x + 1)'(x + \arctg x) + (xe^x + 1)(x + \arctg x)' =$$

$$= (xe^x)'(x + \arctg x) + (xe^x + 1)(x + \arctg x)' =$$

$$= \left((x)'e^x + x(e^x)' \right)(x + \arctg x) + (xe^x + 1)(x + \arctg x)'.$$

Ezután már könnyen elvégezhetjük a kijelölt deriválásokat, és azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = (e^x + xe^x)(x + \arctg x) + (xe^x + 1)\left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right).$$

13. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A törtfüggvény deriválási szabályát kell alkalmazni:

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{3x+1} \right)' = \frac{(2x)'(3x+1) - (2x)(3x+1)'}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{2(3x+1) - (2x)3}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}.$$

Figyeljük meg, hogy a számlálóban elvégeztük az összevonásokat, de a nevezőben a négyzetre emelést nem, ezt máskor sem fogjuk elvégezni, csak ha egytagú a nevező, így jobban kezelhető a kapott formula.

14. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A konstans számlálójú törtet, mint hamarosan látni fogjuk, gyakran célszerűbb összetett függvényként deriválni. De persze lehet törtként is, mint most is.

$$f'(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{x}+1} \right)' = \frac{(3)'(\sqrt{x}+1) - 3(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot (\sqrt{x}+1) - 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{-3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}.$$

Általában is

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

15. feladat: Számoljuk ki $f'(1)$ értékét, ha $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2}$.

Megoldás: Először meghatározzuk f derivált függvényét, majd vesszük annak a helyettesítési értékét az 1 helyen. Hogy ne kelljen kétszer alkalmazni a tört deriválási szabályt közös

nevezőre hozzuk a függvényünk: $f(x) = \frac{x^2 + (x+1)^2}{(x+1)x^2} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2}$. Most már a derivált

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2} \right)' = \frac{(2x^2 + 2x + 1)'(x^3 + x^2) - (2x^2 + 2x + 1)(x^3 + x^2)'}{(x^3 + x^2)^2} = \\ &= \frac{(4x + 2)(x^3 + x^2) - (2x^2 + 2x + 1)(3x^2 + 2x)}{(x^3 + x^2)^2} = \\ &= \frac{4x^4 + 2x^3 + 4x^3 + 2x^2 - (6x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 4x^3 + 4x^2 + 2x)}{(x^3 + x^2)^2} = \\ &= \frac{-2x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 2x}{x^4(x+1)^2} = \frac{-2x^3 - 4x^2 - 5x - 2}{x^3(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Ebből pedig $f'(1) = -\frac{13}{4}$.

16. feladat: Számoljuk ki $g'(2)$ értékét ha $f(2) = -1$, $f'(2) = 2$, és $g(x) = \frac{2x+1}{f(x)}$.

Megoldás: A g deriváltjával kezdünk:

$$g'(x) = \left(\frac{2x+1}{f(x)} \right)' = \frac{(2x+1)'f(x) - (2x+1)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{2f(x) - (2x+1)f'(x)}{f^2(x)}$$

Ebből pedig a keresett helyettesítési érték

$$g'(2) = \frac{2f(2) - (2 \cdot 2 + 1)f'(2)}{f^2(2)} = \frac{2(-1) - 5 \cdot 2}{(-1)^2} = -12.$$

17. feladat: Legyen $h(x) = \frac{f(x)+1}{g(x)-1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ és $g(1) = -2$, $g'(1) = -1$.

Megoldás: Mivel $h'(x) = \left(\frac{f(x)+1}{g(x)-1} \right)' = \frac{f'(x) \cdot (g(x)-1) - (f(x)+1) \cdot g'(x)}{(g(x)-1)^2}$, azt kapjuk, hogy

$$h'(1) = \frac{2(-3) - 2(-1)}{(-3)^2} = -\frac{4}{9}.$$

18. feladat: Határozzuk meg az $h(t) = (2t - 1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Vegyük észre, hogy $h(t)$ összetett függvény: $h(t) = g(f(t))$, ha $f(t) = 2t - 1$ és $g(t) = t^2$. Ezzel a választással $f'(t) = 2$, $g'(t) = 2t$. Ezért az összetett függvény deriválási szabály alapján

$$\begin{aligned} h'(t) &= (g(f(t)))' = g'(f(t)) \cdot f'(t) = \\ &= 2 \cdot f(t) \cdot 2 = 2 \cdot (2t - 1) \cdot 2 = 8t - 4. \end{aligned}$$

19. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $h(x)$ most is összetett függvény, hiszen $h(x) = g(f(x))$, ha $f(x) = 1 - x^2$, és $g(x) = \sqrt{x}$. Tudjuk, hogy $f'(x) = -2x$ és $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Így tehát

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

20. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \sin(x^2 - x)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $h(x)$ ismét $h(x) = g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \sin x$ választással. Mivel $f'(x) = 2x - 1$ és $g'(x) = \cos x$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \cos(f(x)) \cdot (2x - 1) = \cos(x^2 - x) \cdot (2x - 1). \end{aligned}$$

21. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \ln(x + \sqrt{x})$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most $h(x) = g(f(x))$, ha $f(x) = x + \sqrt{x}$ és $g(x) = \ln x$. De mint tudjuk $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, továbbá $g'(x) = \frac{1}{x}$. Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{f(x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

22. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \frac{1}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^2}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ahogy említettük, a konstans számlálójú törteket célszerűbb összetett függvényként deriválni. Ennek érdekében átírjuk a függvényünket

$$h(x) = \frac{1}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^2} = \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{-2}$$

alakba. Innen leolvasható, hogy $h(x) = g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az

$$f(x) = x^3 - \frac{2}{x}, \quad g(x) = x^{-2} \text{ választással. Ekkor } f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2}, \text{ és } g'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= -\frac{2}{(f(x))^3} \cdot \left(3x^2 + \frac{2}{x^2}\right) = \\ &= -\frac{2}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^3} \cdot \left(3x^2 + \frac{2}{x^2}\right). \end{aligned}$$

23. feladat: Legyen $h(x) = (x^2 - 2x)^{12}$. Milyen x -re lesz $h'(x) = 0$?

Megoldás: Az összetett függvény deriválási szabályát addig célszerű gyakorolni, hogy a kompozíció tényezőinek felírására már ne is legyen szükség. Most például a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left((x^2 - 2x)^{12}\right)' = 12(x^2 - 2x)^{11} \cdot (x^2 - 2x)' = \\ &= 12(x^2 - 2x)^{11} \cdot (2x - 2). \end{aligned}$$

Most még kicsit átalakítjuk $h'(x)$ képletét, hogy a gyökeket könnyen leolvashassuk.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 12(x^2 - 2x)^{11} \cdot (2x - 2) = \\ &= 12(x(x - 2))^{11} \cdot 2 \cdot (x - 1) = \\ &= 24x^{11}(x - 2)^{11}(x - 1). \end{aligned}$$

Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője az, azt kapjuk, hogy $h'(x) = 0$, ha $x = 0$, vagy $x = 2$, vagy $x = 1$. Mivel a h függvény mindenütt értelmezve van, mind a három szám megoldás. (A nulla és a kettő tizenegyszeres gyök, az egy egyszeres.)

24. feladat: Legyen $h(x) = \ln^2(x^2 - 1)$. Milyen x -re lesz $h'(x) = 0$?

Megoldás: Kezdjük a derivált függvénnyel. Mivel

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \ln(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = \\ &= 2 \ln(x^2 - 1) \cdot 2x = 4x \ln(x^2 - 1). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\ln 1 = 0$, így ennek a szorzatnak három gyöke van: a $-\sqrt{2}$, a nulla és a $\sqrt{2}$. De azt is tudjuk, hogy a derivált függvény értelmezési tartománya, a definíció alapján, az eredeti függvény értelmezési tartományának részhalmaza. Akkor is, ha a derivált képletének lehetséges legbővebb értelmezési tartománya ennél bővebb.

Mivel a h függvény nincs értelmezve a nullában, ezért a feladat kérdésére az a válasz, hogy $h'(x) = 0$, ha $x = \pm\sqrt{2}$.

25. feladat: Határozzuk meg az $s(x) = \sqrt{\ln(1-2x^3)}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ez a függvény egy háromszorosán összetett függvény: $s(x) = h(g(f(x)))$, ha $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$, és $f(x) = 1 - x^3$. Ezeknek a deriváltja rendre:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -3x^2.$$

A láncszabály alapján $s'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Vegyük azt is figyelembe, hogy, leolvasva az s képletéről, $g(f(x)) = \ln(1 - x^3)$. Ezek alapján:

$$\begin{aligned} s'(x) &= h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(f(x))}} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(1-x^3)}} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot (-3x^2). \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az utolsó képletben zárójelbe tettük a $-3x^2$ tényezőt. Ha ezt nem tettük volna, és a pontot sem írtuk volna ki, amit amúgy nem is kötelező, a képlet hibás lenne.

26. feladat: Határozzuk meg az $s(x) = \sin(\sqrt{e^x - x})$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most is egy háromszorosán összetett függvénnel van dolgunk, persze újra a láncszabályt fogjuk alkalmazni. Mivel $(\sin x)' = \cos x$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, és végül

$(e^x - x)' = e^x - 1$, kapjuk, hogy

$$s'(x) = \cos(\sqrt{e^x - x}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{e^x - x}} \right) \cdot (e^x - 1).$$

27. feladat: Legyen $f(x) = -2x^3 + x^2 - 6x - 3$. Határozzuk meg $f''(x)$ -et.

Megoldás: Először meghatározzuk az $f'(x)$ derivált függvényt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x^3 + x^2 - 6x - 3)' = \\ &= -6x^2 + 2x - 6. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \\ &= (-6x^2 + 2x - 6)' = \\ &= -12x + 2. \end{aligned}$$

28. feladat: Legyen $f(x) = x^2 \cos(2x)$. Határozzuk meg $f''(x)$ -et.

Megoldás: Most, a szorzat deriválási szabályát alkalmazva,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \cos(2x))' = \\ &= (x^2)' \cos(2x) + x^2 (\cos(2x))' = \\ &= 2x \cos(2x) + x^2 (-\sin(2x) \cdot 2) = \\ &= 2x \cos(2x) - 2x^2 \sin(2x). \end{aligned}$$

Ez alapján, még kétszer alkalmazva a szorzat deriválási szabályát, és elvégezve a lehetséges összevonásokat

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x \cos(2x) - 2x^2 \sin(2x))' = \\ &= (2x)' \cos(2x) + 2x (\cos(2x))' - \left[(2x^2)' \sin(2x) + 2x^2 (\sin(2x))' \right] = \\ &= 2 \cos(2x) + 2x (-\sin(2x) \cdot 2) - \left[4x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x) \cdot 2 \right] = \\ &= 2 \cos(2x) - 4x \sin(2x) - 4x \sin(2x) - 4x^2 \cos(2x) = \\ &= (2 - 4x^2) \cos(2x) - 8x \sin(2x). \end{aligned}$$