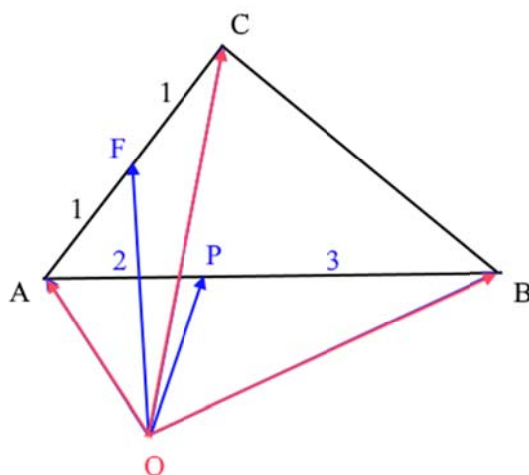


2.4. Összetett feladatok

1. feladat: Adott az ABC háromszög $A(1,-1,2)$ csúcsa, valamint az AB oldal egy olyan $P(1,1,2)$ pontja, amelyre $AP:PB=2:3$. Az AC oldal felezőpontja $F(5,5,-2)$. Határozzuk meg a háromszög hiányzó csúcsait és a súlypont koordinátáit! Számítsuk ki a háromszög területét!

Megoldás

Jelölje \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{p} , \mathbf{f} és \mathbf{s} rendre az A , B , C , P , F és S pontokba mutató helyvektorokat a szokásoknak megfelelően.



Mivel P egy ötödölő pont az AB szakaszon, ezért

$$\mathbf{p} = \frac{3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{5} \rightarrow \mathbf{b} = \frac{5\mathbf{p} - 3\mathbf{a}}{2} = \frac{5}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{2}\mathbf{a}.$$

Behelyettesítve:

$$\mathbf{b} = \frac{5}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{2}\mathbf{a} = \frac{5}{2}(1,1,2) - \frac{3}{2}(1,-1,2) = (1,4,2).$$

Eszerint a háromszög B csúcsa:

$$B(1,4,2).$$

Mivel F felezőpont az AC oldalon, ezért:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} \rightarrow \mathbf{c} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a},$$

azaz:

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a} = 2(5,5,-2) - (1,-1,2) = (9,11,-6).$$

Tehát a C csúcs koordinátái:

$$C(9,11,-6).$$

Ismert összefüggés, hogy

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{3}[(1,-1,2) + (1,4,2) + (9,11,-6)] = \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Tehát a háromszög súlypontjának koordinátái:

$$S\left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

A háromszög területének meghatározásához adjunk meg két olyan vektort, amely kifeszíti a háromszöget. Legyenek ezek most az A pontból induló \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} vektorok. Ekkor a háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 5, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (8, 12, -8).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & -12 & -8 \end{vmatrix} = -40\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 40\mathbf{k}.$$

A háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-40)^2 + (-40)^2} = 20\sqrt{2}.$$

2. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai $A(-2, 1, 2)$, $B(4, 3, -1)$ és $C(1, 9, -3)$. Bizonyítsa be, hogy a paralelogramma négyzet!

Megoldás

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az AC és BD átlók felezőpontja megegyezik. Ez a pont a paralelogramma középpontja, jelöljük K -val.

Legyenek \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , és \mathbf{k} rendre az A , B , C , D és K pontokba mutató helyvektorok.

Ekkor:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}[(-2, 1, 2) + (1, 9, -3)] = \left(-\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}\right).$$

Továbbá:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{d} = 2\mathbf{k} - \mathbf{b} = 2\left(-\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}\right) - (4, 3, -1) = (-5, 7, 0),$$

tehát a paralelogramma D csúcsa:

$$D(-5, 7, 0).$$

Egy paralelogramma akkor négyzet, ha két szomszédos oldala azonos hosszúságú és merőleges egymásra. Tekintsük az AB és AD oldalakat.

$$\overrightarrow{AB} = (6, 2, -3) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7$$

$$\overrightarrow{AD} = (3, -6, 2) \quad \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7$$

Tehát a paralelogrammánk két szomszédos oldala 7 egységnyi. Még a merőlegességet kell igazolni. Tudjuk, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk nulla. Ellenőrizzük le:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (6, 2, -3), (3, -6, 2) \rangle = 18 - 12 - 6 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy két szomszédos oldal merőleges egymásra.

Mivel olyan paralelogrammánk van, amelynek két szomszédos oldala egyenlő nagyságú és egymásra merőleges, ezért ez a paralelogramma négyzet.

Megjegyzés: A D csúcs meghatározása nélkül is dolgozhattunk volna. A négyzet olyan síkidom, amelynek két egyenlő hosszúságú átlója van, amelyek merőlegesen felezik egymást. Ezt a tulajdonságot kihasználva is megoldhattuk volna a feladatot.

3. feladat: Egy téglatest két élvektora $\mathbf{a} = (4, 3, 1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 0, 1)$. Határozzuk meg a harmadik \mathbf{c} élvektorát, ha tudjuk, hogy $\|\mathbf{c}\| = 5$.

Megoldás

A téglatest élei merőlegesek egymásra, ezért a keresett \mathbf{c} vektor merőleges mind az \mathbf{a} , mind a \mathbf{b} vektorra. Ha egy olyan vektort keresünk, amely két adott vektor mindegyikére merőleges, akkor ahhoz a vektoriális szorzatra lesz szükségünk. Képezzük az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Ez az új vektor csak akkor lehet a keresett \mathbf{c} élvektor, ha a hossza 5 egység.

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{43}.$$

Nekünk egy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú, de 5 hosszúságú vektorra van szükségünk, ezért

$$\mathbf{c} = \frac{5}{\sqrt{43}}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{5}{\sqrt{43}}(3, -5, 3) = \left(\frac{15}{\sqrt{43}}, -\frac{25}{\sqrt{43}}, \frac{15}{\sqrt{43}} \right).$$

A feltételeknek a most meghatározott \mathbf{c} vektor ellentettje is megfelel, így a feladat másik megoldása:

$$\mathbf{c}' = -\mathbf{c} = \left(-\frac{15}{\sqrt{43}}, \frac{25}{\sqrt{43}}, -\frac{15}{\sqrt{43}} \right).$$

4. feladat: Mekkora az $ABCD$ tetraéder D csúcsból induló testmagasságának hossza, ha $A(1, 2, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(4, 4, 3)$ és $D(-5, 10, 9)$?

Megoldás

A megoldás során a tetraéder térfogatát kétféleképpen fogjuk felírni, amelyből a keresett magasság majd meghatározható lesz.

Határozzuk meg először a tetraéder A csúcsából induló élvektorait:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) \quad \overrightarrow{AC} = (3, 2, 2) \quad \overrightarrow{AD} = (-6, 8, 8).$$

Először számoljuk ki a tetraéder térfogatát a vegyszorzat segítségével.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{ABACAD} = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-2, 1, 2), (-6, 8, 8) \rangle = 36,$$

$$V_t = \frac{|\overrightarrow{ABACAD}|}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

A D csúcsból induló testmagasság meghatározásához használjuk fel a tetraéder középiskolában tanult térfogatképletét, valamint azt, hogy a háromszög területét fel tudjuk írni a vektoriális szorzat hosszaként:

$$V_t = \frac{t_{ABC\Delta} \cdot m_D}{3} = \frac{\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \cdot m_D}{3} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \cdot m_D}{6}.$$

A vektoriális szorzatot már korábban kiszámoltuk, így:

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = 3.$$

Innen a keresett magasság:

$$6 = \frac{3 \cdot m_D}{6} \rightarrow m_D = 12.$$

5. feladat: Határozzuk meg z értékét úgy, hogy az alábbi három vektor egy síkban legyen:

$$\mathbf{a} = (2, z, z), \mathbf{b} = (-z, 3, -4) \mathbf{c} = (2z, -1, 3)$$

Megoldás

Ha három vektor egy síkban van, akkor a vegyesszorzatuk nulla. Ezt használjuk ki a megoldás során.

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0.$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & z & z \\ -z & 3 & -4 \end{vmatrix} = -7z\mathbf{i} - (-8+z)\mathbf{j} + (6+z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 0 \rightarrow \langle (-7z, 8-z, 6+z), (2z, -1, 3) \rangle = 0$$

$$-14z^2 - (8-z) + 3(6+z) = 0$$

$$-14z^2 + 4z + 10 = 0$$

$$z_1 = 1 \quad z_2 = -\frac{5}{7}.$$