

Motivációs példa:

Egy termék gyártásánál a határköltség megmutatja, hogy az összköltség hogyan változik, ha a termelés egy egységgel növekszik. Azaz a határköltség a költségfüggvény deriváltja. Ha a határköltséget ismerjük, akkor hogyan lehetne előállítani a költségfüggvényt?

Egy termék előállításánál a határbevétel azt mutatja meg, hogy miként változik a bevétel, ha az eladásokat egy egységgel emeljük. Azaz a határbevétel a bevétel-függvény deriváltja. Ha ismerjük a határbevételt, fel tudnánk írni a bevétel-függvényt?

Amint látható, több olyan problémával találjuk magunkat szembe, melyben ismerünk egy függvényt, és olyan függvényt keresünk, aminek ez az ismert függvény a deriváltja. Az alábbiakban a matematika azon témakörét ismerhetjük meg, amely ezzel a problémával foglalkozunk.

Elméleti összefoglaló:

Definíció: A $F(x)$ függvényt a $f(x)$ függvény primitív függvényének nevezzük, ha $F'(x) = f(x)$.

Egy $f(x)$ függvénynek nem csak egy primitív függvénye van. Tekintsük például a $f(x) = \cos x$ függvényt. Ennek nyilván primitív függvénye a $F(x) = \sin x$ függvény, hiszen $(\sin x)' = \cos x$. De primitív függvény lesz a $F_1(x) = \sin x + 1$ függvény is, mert $(\sin x + 1)' = (\sin x)' + 1' = \cos x + 0 = \cos x$.

Sőt, ha ezt így meggondoltuk, akkor azt mondhatjuk, $f(x)$ -nek végtelenül sok primitív függvénye van, mert bármilyen konstans hozzáadhatunk $\sin x$ -hez, mindenképpen olyan függvényt kapunk, aminek deriváltja $\cos x$, hiszen a konstans deriváltja 0 lesz. Ezek alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvénynek primitív függvénye a $F(x)$ függvény, akkor bármely $F(x) + c$ függvény is primitív függvénye, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Felvetődik azonban a kérdés, hogy ilyen módon megkaphatunk-e minden olyan függvényt, ami primitív függvénye $f(x)$ -nek? A válasz erre igen, ezt is megfogalmazhatjuk egy tételben.

Tétel: Ha $F_1(x)$ és $F_2(x)$ is primitív függvénye $f(x)$ -nek, akkor $F_1(x) - F_2(x)$ konstans függvény.

Amint láthatjuk, egy $f(x)$ függvény primitív függvényei egy halmazt alkotnak, s ezen halmaz bármely két eleme csak egy konstansban tér el egymástól. Elég tehát egy elemet ismernünk ebből a halmazból, mert akkor az összes elemet megkaphatjuk ezen elemből különböző konstansok hozzáadásával. Mivel a primitív függvények halmazát ilyen egyszerűen megkaphatjuk, ezért egy fogalmat definiálunk.

Definíció: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmazát az $f(x)$ függvény határozatlan integráljának nevezzük, és $\int f(x)dx$ -szel jelöljük.

Ha $F(x)$ egy primitív függvénye $f(x)$ -nek, akkor $\int f(x)dx = F(x) + c$, ahol c tetszőleges konstans.

Amint a fentiekből látható, a határozatlan integrálás vagy másképp a primitív függvény keresés a deriválás megfordításának tekinthető. Ezért a továbbiakban úgy haladhatunk, hogy tekintjük az alapderiváltakat, és azokat megfordítva az úgynevezett alapintegrálokat kapjuk.

Például azt az alapderiváltat, hogy $(\sin x)' = \cos x$ az $\int \cos x dx = \sin x + c$ formában fordítjuk meg, és írjuk alapintegrálként. Néhány esetben a megfordításon egy kicsit alakítunk. Például ha a $(\cos x)' = -\sin x$ alapderiváltból indulunk ki, akkor az egyszerű megfordítás

$\int -\sin x dx = \cos x + c$ lenne, de ezt inkább $\int \sin x dx = -\cos x + c$ formában írjuk, hiszen

nyilván $(-\cos x)' = \sin x$ is igaz. Hasonlóan a $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ alapderiváltból az

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$ alapintegrált kapjuk.

Az így kapott alapintegrálokat egy táblázatban foglaljuk össze. Ez lényegében az alapderiváltak táblázatának megfordítása, olyan apróbb változtatásokkal, amikről fentebb írtunk.

Az alapintegrálok táblázata:

$\int k dx = kx + c, k \in \mathbb{R}$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	

Néhány alapintegrállal kapcsolatban szeretnénk megjegyzést tenni. Az egyik a hatványok

integrálásra vonatkozó $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alapintegrál. Itt arra hívjuk fel

nyomatékosan a figyelmet, hogy a -1 -edik hatvány kivétel. Bár a hatványokat általában úgy integráljuk, hogy a kitevőt eggyel megnöveljük, és osztunk az új kitevővel, a -1 -edik hatvány

esetén nem ez történik. Mivel $x^{-1} = \frac{1}{x}$ a természetes alapú logaritmus, azaz $\ln x$ deriváltja,

ezért az $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ alapintegrált kapjuk. Ez csak pozitív x -ekre igaz, hiszen a

logaritmus csak ekkor értelmezhető. Belátható azonban, hogy negatív x -ek esetén

$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c$ igaz, s ezt együttesen $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ formában foglalhatjuk össze. Ez

így már pozitív és negatív x -ekre is igaz.

Az alapintegrálok megismerése után jó lenne, ha ahhoz hasonló szabályokat is megfogalmazhatnánk, mint amilyenek a deriválásnál szerepeltek, mert akkor az alapintegrálokból műveletekkel képezett függvényeket is tudnánk integrálni. Nézzük milyen szabályok igazak a primitív függvényekre.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a $k \cdot f(x)$, $k \in \mathbb{R}$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$.

Bizonyítás: Legyen $F(x)$ egy primitív függvénye $f(x)$ -nek, azaz $F'(x) = f(x)$, vagy másképp $\int f(x) dx = F(x) + c$. Ekkor nyilván $k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$, ami azt jelenti, hogy $k \cdot F'(x)$ egy primitív függvénye $k \cdot f(x)$ -nek, azaz

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + c = k \cdot \int f(x) dx.$$

A tétel másképp úgy fogalmazható, hogy integrálás során konstans szorzó kiemelhető az integrálból.

Tétel: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor az $f(x) + g(x)$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Bizonyítás: Legyen $F(x)$ az $f(x)$ és $G(x)$ a $g(x)$ egy-egy primitív függvénye, tehát $F'(x) = f(x)$ és $G'(x) = g(x)$, vagy $\int f(x) dx = F(x) + c$ és $\int g(x) dx = G(x) + c$. Ekkor nyilván $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, azaz $F(x) + G(x)$ primitív függvénye $f(x) + g(x)$ -nek, tehát

$$\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + c = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Ezt a tételt fogalmazhatjuk meg úgy is, hogy függvények összegét tagonként integrálhatjuk. A fenti két tételből nyilván az is következik, hogy függvények különbsége esetén

$$\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

A deriválásnál ezután az következett, hogy a függvények szorzatára, hányadosára és az összetett függvényekre is sikerült deriválási szabályt találnunk. Ezek a deriválási szabályok bármilyen szorzat, tört vagy összetett függvény esetén alkalmazhatóak voltak. Sajnos az

integrálásnál ilyen szabályok nincsenek. Nem lehet kimondani olyan összefüggést, amelynek segítségével bármilyen függvények szorzata, vagy hányadosa, vagy kompozíciója integrálható lenne. A későbbiekben megismerünk majd szabályokat, melyek segítségével függvények szorzatát integrálhatjuk, de ezek a szabályok nem alkalmazhatók bármilyen függvények szorzata esetében, csak bizonyos speciális esetekben. Megismerünk majd olyan szabályt is, amit függvények hányadosának integrálására használhatunk, de csak bizonyos speciális törtekre alkalmazható. Speciális összetett függvényekre is lesz majd integrálási szabály, de azt sem lehet általánosan alkalmazni minden összetett függvényre. Éppen ezért az integrálás több találékonyságot igényel majd, mint amire a deriválásnál szükség volt.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 3x^4 - 2\sin x + 8e^x$ függvény határozatlan integrálját, azaz $\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x dx$ -et!

Megoldás: Mivel függvények összegét illetve különbségét kell integrálnunk, ezért tagonként végezhetjük el az integrálást. Így három integrált kapunk.

$$\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x dx = \int 3x^4 dx - \int 2\sin x dx + \int 8e^x dx$$

Az egyes integrálokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 3x^4 dx - \int 2\sin x dx + \int 8e^x dx = 3\int x^4 dx - 2\int \sin x dx + 8\int e^x dx$$

Már csak alapintegrálok szerepelnek, melyeket egyszerűen behelyettesítünk. Az első részben

egy hatványfüggvényt kell integrálnunk, így itt az $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

alapintegrálra hivatkozva eggyel megnöveljük a kitevőt, s osztunk az új kitevővel. A második részben az $\int \sin x dx = -\cos x + c$, a harmadikban pedig az $\int e^x dx = e^x + c$ alapintegrálra hivatkozunk.

$$3\int x^4 dx - 2\int \sin x dx + 8\int e^x dx = 3\frac{x^5}{5} - 2(-\cos x) + 8e^x + c = \frac{3}{5}x^5 + 2\cos x + 8e^x + c$$

Nem írjuk ki mindegyik rész integrálásánál külön-külön a c integrációs konstans, mert c bármilyen valós értéket felvehet. Ha többször szerepelne, akkor a konstansok összege is egy konstans lenne, ami bármilyen valós értéket felvehetne. Ezért elég mindig csak egyetlen konstans írunk a primitív függvény után.

2. feladat: $\int 7\sqrt[4]{x} dx$

Megoldás: Első lépésként a konstans szorzót emeljük ki az integrálból.

$$\int 7\sqrt[4]{x} dx = 7\int \sqrt[4]{x} dx$$

Az alapintegrálok között a különböző gyökök a hatványokban szerepelnek. A deriválásnál is az történt, hogy a gyököket törtkitevős hatványként írtuk, és hatványként felírt alakot deriváltuk. Most ugyanígy járunk el az integrálás során is.

$$7\int \sqrt[4]{x} dx = 7\int x^{\frac{1}{4}} dx$$

Ezután már hivatkozhatunk az $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alapintegrálra.

$$7 \int x^{\frac{1}{4}} dx = 7 \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + c = 7 \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5} x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5} \sqrt[4]{x^5} + c.$$

Az eredményt írhatjuk törtkitevős hatványként, vagy gyökös formában is.

3. feladat: $\int \frac{6}{x^5} dx$

Megoldás: Kezdjük most is a konstans szorzó kiemelésével.

$$\int \frac{6}{x^5} dx = 6 \int \frac{1}{x^5} dx$$

Az integrálandó függvényben, amit integrandusnak is szoktak hívni, most egy hatvány reciprokát látjuk. Ezt felírhatjuk negatív kitevős hatvány formájában, s így ismét csak egy hatványt kell majd integrálnunk. Ugyanígy járhattunk el az ilyen függvények deriválásakor is.

$$6 \int \frac{1}{x^5} dx = 6 \int x^{-5} dx$$

A hatvány integrálásakor most is növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$6 \int x^{-5} dx = 6 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = 6 \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{6}{4} x^{-4} + c = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^4} + c$$

Az eredményt most írhatjuk negatív kitevős hatvány, vagy tört formájában is.

4. feladat: $\int \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} dx$

Megoldás: Az integrálást ebből az alakból nyilván nem tudjuk végrehajtani, ezért először átalakítjuk az integrálandó függvényt. A gyököket írjuk át törtkitevős hatvánnyá, amint azt egy korábbi feladatban tettük.

$$\int \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx$$

Végezzük el a zárójelen belül a szorzást. Azonos alapú hatványok szorzása esetén egyetlen hatványt kapunk, melyben a kitevők összeadódnak.

$$\int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int \left(x^{1+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx$$

Most egy hatványt tovább hatványozunk. Ha ezt egyetlen hatványként írjuk, akkor a kitevők szorzódnak.

$$\int \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}} dx = \int x^{\frac{3}{10}} dx$$

Az integrandust sikerült egyetlen hatvánnyá alakítunk, így végre tudjuk hajtani az integrálást.

$$\int x^{\frac{3}{10}} dx = \frac{x^{\frac{3}{10}+1}}{\frac{3}{10}+1} + c = \frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} x^{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} \sqrt[10]{x^{13}} + c$$

Az eredmény most is több alakban írható. Hagyhatjuk törtkitevős hatványként, de írhatjuk gyökös formában is.

A feladatból látható, hogy az integrandus megadott alakjából nem lehet elvégezni az integrálást. De az átalakítások után már olyan formában kapjuk meg a függvényt, ami egyetlen alapintegrál. Az integrálási feladatokban nagyon sokszor nem az okozza a fejtörést, hogy magát az integrálási lépést hogyan hajtsuk végre, hanem hogyan készítsük elő az integrálást, azaz milyen módon alakítsuk át az integrandust az integrálás előtt. Az átalakítások során nagyon gyakran olyan azonosságokra hivatkozunk, amelyek a középiskolából ismertek. Különösen szeretnénk kiemelni a hatványozás azonosságait, mert a hatványok gyakran fordulnak elő, s átalakításukra több azonosságot is ismerünk.

5. feladat: $\int (3x^2 + 1)(5x - 4) dx$

Megoldás: Az integrandusunk most egy szorzat. Amint az korábban szerepelt, ilyen esetben nincs általánosan alkalmazható integrálási szabály. Át kellene ezért alakítanunk úgy a függvényt, hogy már ne szerepeljen szorzás. Végezzük el a szorzást, azaz bontsuk fel a zárójeleket.

$$\int (3x^2 + 1)(5x - 4) dx = \int 15x^3 - 12x^2 + 5x - 4 dx =$$

Egyszerű polinomot kaptunk. Ekkor tagonként integrálhatunk. Az egyes tagokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 15x^3 - 12x^2 + 5x - 4 dx = 15 \int x^3 dx - 12 \int x^2 dx + 5 \int x dx - 4 \int 1 dx =$$

Alkalmazzuk a hatványfüggvényekre vonatkozó integrálási szabályt.

$$15 \frac{x^4}{4} - 12 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} - 4x + c = 15 \frac{x^4}{4} - 4x^3 + 5 \frac{x^2}{2} - 4x + c$$

6. feladat: $\int \frac{2x^2 + x - 3}{x^2} dx$

Megoldás: Az integrálandó függvény most egy tört. Sajnos a törtekre sincsen minden esetben használható integrálási szabály. Mivel a tört számlálójában összeg illetve különbség áll, a törtet több törtre bonthatjuk úgy, hogy az egyes tagokat külön-külön osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{2x^2 + x - 3}{x^2} dx = \int \frac{2x^2}{x^2} dx + \int \frac{x}{x^2} dx - \int \frac{3}{x^2} dx$$

Ahol tudunk egyszerűsítsünk és a konstans szorzókat emeljük ki az egyes integrálokból.

$$\int 2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{3}{x^2} dx = 2 \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx - 3 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Az első két tag egyszerű alapintegrál, nem kell már tovább alakítani. A harmadik tagban egy hatvány reciproka szerepel, amit negatív kitevős hatványként írhatunk fel.

$$\int 2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{3}{x^2} dx = 2 \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx - 3 \int x^{-2} dx$$

Már csak egy-egy hatványt kell integrálnunk.

$$2 \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx - 3 \int x^{-2} dx = 2x + \ln|x| - 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 2x + \ln|x| + \frac{3}{x} + c$$

7. feladat: Egy termék gyártása során x mennyiség esetén a határköltség $C'(x) = 6x + 4$.

Határozzuk meg a költségfüggvényt, ha tudjuk, hogy a fix költség éppen 30?

Megoldás: A határköltség megmutatja az összköltség változását, ha egy egységgel növeljük a termelést. Tehát a keresett $C(x)$ költségfüggvény deriváltja éppen $C'(x) = 6x + 4$. Azt már tudjuk, hogy végtelen sok olyan függvény adható, aminek a deriváltfüggvénye éppen $6x + 4$. Most azt kellene megkeresni a sok függvény között, amelyeknek $x = 0$ esetén (amikor nincs termelés) éppen 30-t vesz fel helyettesítési értéként, azaz $C(0) = 30$. Kezdjük most is a feladat megoldását a primitívfüggvények előállításával. Az integrációs konstans a félreértések elkerülése végett jelöljük most k -val.

$$\int 6x + 4 dx = 3x^2 + 4x + k$$

A $x = 0$ behelyettesítésével kapjuk, hogy $C(0) = k = 30$. Tehát a keresett költségfüggvény $C(x) = 3x^2 + 4x + 30$