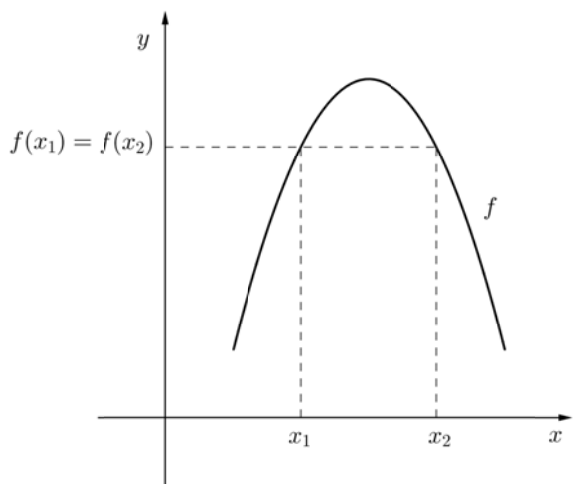
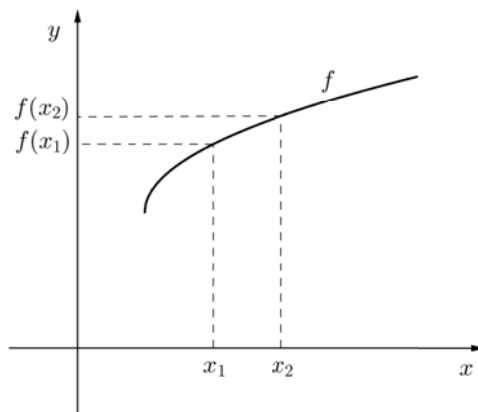


Elméleti összefoglaló:

Definíció: Egy f függvény **kölcsönösen egyértelmű**, ha bármely $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ (2. ábra).



1. ábra. Nem kölcsönösen egyértelmű függvény



2. ábra. Kölcsönösen egyértelmű függvény

Példa néhány értékre kiszámítva a fenti függvények:

$f(x) = -(x-3)^2 + 5$	$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$
$x_1 = 2, f(x_1) = f(2) = -(2-3)^2 + 5 = 6$	$x_1 = 2, f(x_1) = f(2) = \sqrt{2-1} + 2 = 3$
$x_2 = 4, f(x_2) = f(4) = -(4-3)^2 + 5 = 6$	$x_2 = 3, f(x_2) = f(3) = \sqrt{3-1} + 2 = \sqrt{2} + 2 \approx 3,41$
$f(x_1) = f(2) = 6 = f(x_2) = f(4)$	$f(x_1) = f(2) = 3 \neq f(x_2) = f(3) \approx 3,41$

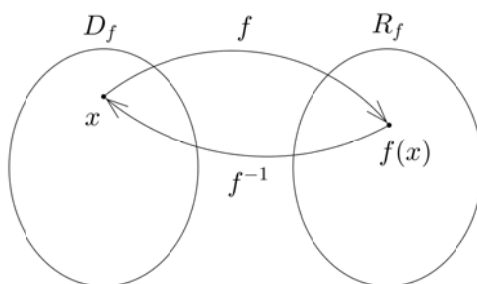
A szigorúan monoton függvények kölcsönösen egyértelmű függvények.

Definíció: Ha az f függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor létezik f^{-1} -el jelölt **inverz függvénye**, mely az f értékkészletét képezi le az f értelmezési tartományára, tehát

$$f: D_f \rightarrow R_f$$

$$f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$$

továbbá teljesül, hogy $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ bármely $x \in D_f$ esetén (3. ábra).



3. ábra. Inverz függvény definíciója

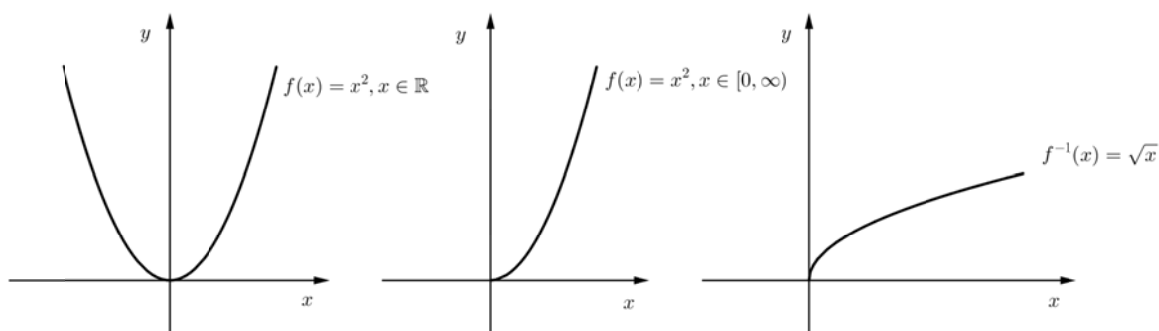
Tehát az inverz függvény értelmezési tartománya az eredeti függvény értékkészlete, és értékkészlete az eredeti függvény értelmezési tartománya.

$$R_f = D_{f^{-1}} \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

Megjegyzés: Az f^{-1} jelölés könnyen megtévesztő lehet. Ha a egy szám, akkor a^{-1} -el az $\frac{1}{a}$ reciprokot szoktuk jelölni, de az $f^{-1}(x)$ nem $\frac{1}{f(x)}$ -et jelöl.

Ha az f függvény nem kölcsönösen egyértelmű, de az értelmezési tartományának van olyan részhalmaza, ahol e feltétel teljesül, akkor az f függvény ezen a részhalmazon értelmezett leszűkítésének a definíció alapján létezik inverze.

Erre példa a $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény, amely nem invertálható, de például $x \in [0, \infty)$ leszűkített intervallumon már létezik inverze (mert itt már szigorúan monoton), mely a $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ függvény lesz (4. ábra).



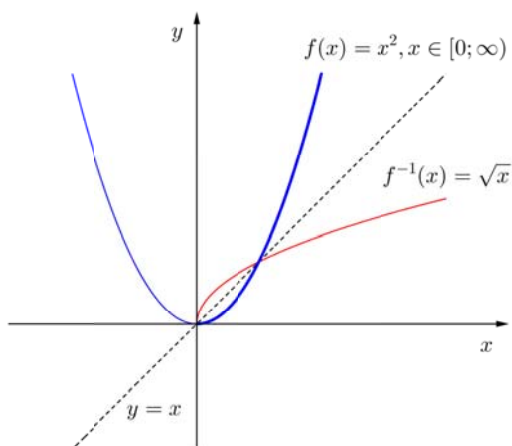
4. ábra. x^2 függvény értelmezési tartományának leszűkítése, majd invertálása

Technikailag az inverz függvény képletét az $f(x) = y$ egyenlet x -re való rendezésével lehet előállítani. Fontos még megjegyezni, hogy az inverz függvény inverze az eredeti függvény.

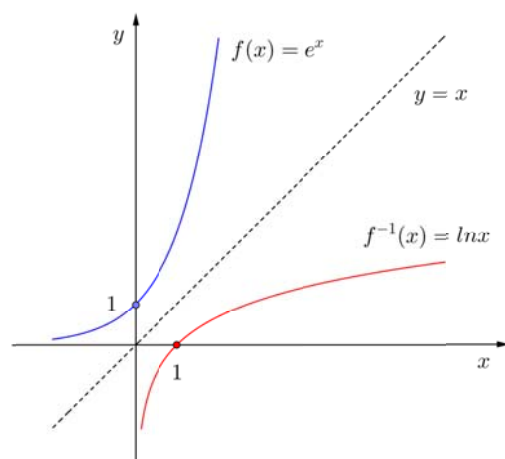
Mivel az f és f^{-1} függvényeknél az értelmezési tartomány és az értékkészlet helyet cserél, ezért a függvény ábrázolásánál a koordinátatengelyek is szerepet cserélnek. Ennek következtében az $f(x)$ és $f^{-1}(x)$ görbék egymás tükörképei, az $y = x$ egyenesre nézve.

Az elemi függvények között több függvény– inverz függvény pár található (5-7. ábra).

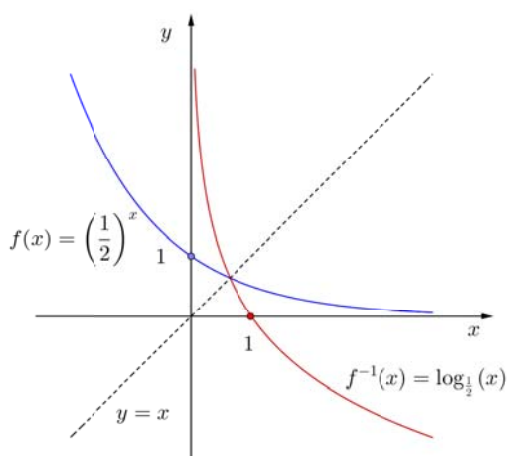
Néhány példa:



5. ábra. Hatványfüggvény és gyökfüggvény ($a > 1$)



6. ábra. Exponenciális és logaritmus függvény



7. ábra. Exponenciális és logaritmus függvény ($1 > a > 0$)

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2x - 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Először az eredeti függvény értelmezési tartományát és az értékkészletét határozzuk meg, amiből az inverz függvény értelmezési tartományára és értékkészletére következtetünk, valamint megvizsgáljuk a függvény monotonitását, amiből az inverz függvény létezésére következtetünk (ahogy láttuk csak szigorúan monoton függvényeknek van inverze).

Ebben az esetben az f értelmezési tartománya a valós számok halmaza, szigorúan monoton növekvő (grafikonja egy emelkedő egyenes), értékkészlete szintén a valós számok halmaza. Így létezik az inverz függvénye és az is a valós számok halmazán van értelmezve. Az inverz függvény képletének előállításához megoldjuk az

$$y = 2x - 3$$

egyenletet x -re, hiszen most azt keressük, hogy mit kell az $y = f(x) = 2x - 3$ -al csinálni, hogy belőle visszakapjuk az x -et.

Rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{y+3}{2}.$$

Ebből az inverz függvény képletét úgy kapjuk, hogy az y helyére x -et írunk, mivel a függvények argumentumát x -el szoktuk jelölni. Tehát az inverz függvény képlete:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 1$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Az x^3 függvény elemi alapfüggvény, mind az értelmezési tartománya, mind az értékkészlete a valós számok halmaza, és szigorúan monoton növekvő.

Ugyanezek igazak az $x^3 + 1$ függvényre is.

Létezik tehát az inverz függvény, ami szintén minden valós számra értelmezett. Előállítjuk a képletét. Megoldjuk x -re az

$$y = x^3 + 1$$

egyenletet. Kapjuk, hogy

$$x^3 = y - 1,$$

$$x = \sqrt[3]{y - 1}.$$

Innen az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}.$$

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{x+2}$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Először is $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, hiszen a nevező nem lehet nulla. Az értékkészlet meghatározása egy kicsit bonyolultabb.

Egy függvény értékkészlete azokból az y számokból áll, amelyekhez található olyan D_f -beli x , hogy $f(x) = y$.

A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy y benne van az értékkészletben, ha megoldható x -re az $y = \frac{1}{x+2}$

egyenlet. Persze csak olyan x jöhet szóba, amelyre $x \neq -2$.

Az látszik, hogy y nem lehet nulla, hiszen a törtünk számlálója soha nem nulla. De y bármely nullától különböző szám lehet. (Egy tört értéke akkor lehet 0, ha a számlálója 0. Itt a számláló

1, így a tört értéke nem lehet 0. A nevező bármilyen nullától különböző értéket felvehet, így a tört értéke (y) is bármilyen nullától különböző érték lehet.)

Ezért $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Az f függvény nem szigorúan monoton, de kölcsönösen egyértelmű, létezik tehát az inverz függvény. Hátra van még a képletének előállítása. Ennek érdekében megoldjuk x -re az

$$y = \frac{1}{x+2}$$

egyenletet, feltételezve, hogy $y \neq 0$, $x \neq -2$. Kapjuk, hogy

$$x = \frac{1}{y} - 2.$$

Ebből az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2.$$

4. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2^{x-1} + 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: A függvényünk mindenütt értelmezett és értékkészlete $R_f = (3, \infty)$, továbbá szigorúan monoton növekvő. Létezik tehát az inverz függvény. Az inverz képletének előállításához megoldjuk az

$$y = 2^{x-1} + 3$$

egyenletet, feltéve, hogy $y > 3$.

Ekkor

$$2^{x-1} = y - 3,$$

majd mindkét oldal kettes alapú logaritmusát véve, és felhasználva a logaritmus egyik azonosságát ($\log_a(x^n) = n \log_a x$) azt kapjuk, hogy

$$\log_2(2^{x-1}) = \log_2(y - 3),$$

$$(x - 1)\log_2(2) = \log_2(y - 3),$$

$$x - 1 = \log_2(y - 3),$$

$$x = \log_2(y - 3) + 1.$$

Végül is az inverz függvény képlete

$$f^{-1}(x) = \log_2(x - 3) + 1.$$

5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = -\ln(x + 7) - 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: A logaritmus argumentumára kell kikötést tennünk, $x + 7 > 0$.

Ezt rendezve $x > -7$ kell, hogy teljesüljön, azaz $D_f = (-7, \infty)$. Ez lesz az inverz függvény értékkészlete. A logaritmus függvény értékkészlete \mathbb{R} , így az inverz függvény értelmezési tartománya is ez lesz.

Megoldjuk x -re az $y = -\ln(x + 7) - 3$ egyenletet.

$$y + 3 = -\ln(x + 7)$$

$$-y - 3 = \ln(x + 7)$$

Mindkét oldalt e alapra emeljük és logaritmus azonosságot ($a^{\log_a b} = b$) alkalmazva kapjuk, hogy

$$e^{-y-3} = e^{\ln(x+7)}$$

$$e^{-y-3} = x + 7$$

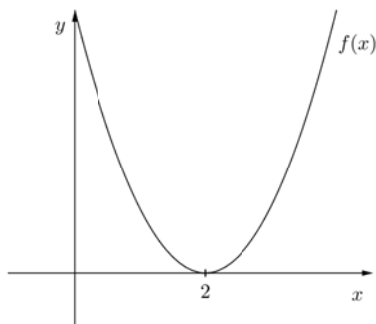
$$e^{-y-3} - 7 = x$$

Ez alapján az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = e^{-y-3} - 7$$

6. feladat: Tekintsük az $f(x) = x^2 - 4x + 4$ függvényt. Határozzuk meg egy alkalmas megszorításának az inverz függvényét.

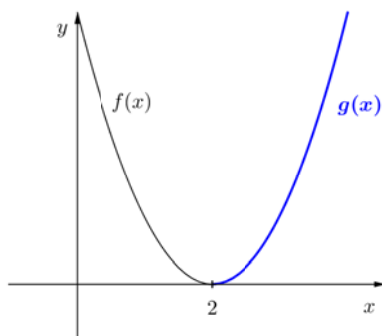
Megoldás: Az $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ felírásból látszik, hogy a függvénynek egy zérushelye van ($(x - 2)^2 = 0$ egyenlet megoldásából), mégpedig az $x = 2$ -ben. Mivel a főegyüttható pozitív, így a függvény képe egy felfelé nyíló parabola, mely a 8. ábrán látható.



8. ábra

Látszik, hogy a függvény nem szigorúan monoton az egész értelmezési tartományán, de ha megszorítjuk a kettőnél nagyobb, vagy egyenlő számokra, a megszorítás már az lesz.

Tekintsük tehát a $g(x) = x^2 - 4x + 4$, $D_g = [2, \infty)$ függvényt (mely az eredeti függvény megszorítása) (9.ábra), és ennek határozzuk meg az inverzét.



9. ábra

A 9. ábra alapján g értékkészlete $R_g = [0, \infty)$. Ez lesz az inverz értelmezési tartománya.

Megoldjuk az $y \geq 0$, $x \geq 2$ feltételek mellett x -re az

$$y = x^2 - 4x + 4 \text{ egyenletet.}$$

$$(x - 2)^2 = y,$$

$$x - 2 = \sqrt{y}, \text{ (tudjuk, hogy } x - 2 \geq 0, \text{ ezért nem kell itt } |x - 2| \text{-t írunk),}$$

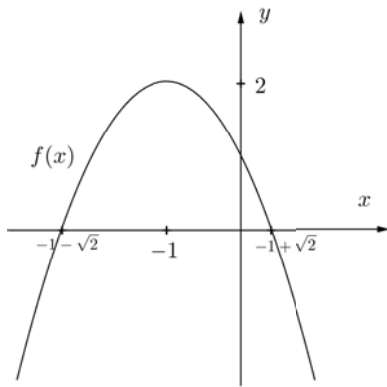
$$x = \sqrt{y} + 2.$$

A g inverz függvénye tehát

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2.$$

7. feladat: Tekintsük az $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ függvényt és alkalmas megszorításának határozzuk meg az inverzét.

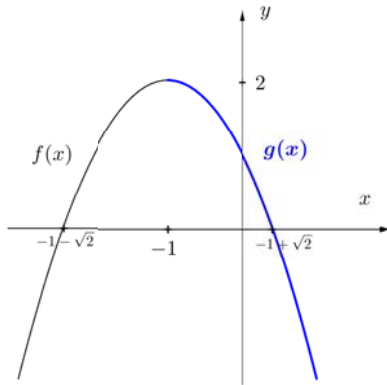
Megoldás: A függvény ábrázolásához először a megoldóképlet segítségével kiszámítjuk a gyököket: $x_1 = -1 - \sqrt{2} \approx -2,41$, $x_2 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41$. Ezek lesznek a függvény zérushelyei. Mivel a függvény főegyütthatója negatív, így egy lefelé nyíló parabola lesz a függvényünk grafikonja (10. ábra). A parabola csúcsának x koordinátája a gyökök átlaga, mivel azonos távolságra található a két zérushelytől. A csúcs y koordinátája pedig a függvény képletébe való helyettesítéssel kapható meg: $f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 2$. (Megjegyzés: az ábrázolás egyszerűbb módjáról a Függvény transzformációk című leckében tanulunk majd.)



10. ábra

A 10. ábra alapján látszik, hogy ha megszorítjuk a függvényünket a -1 -nél nagyobb, vagy egyenlő számokra, akkor egy szigorúan monoton csökkenő függvényt kapunk.

Tekintsük tehát a $g(x) = 2 - (x + 1)^2$, $D_g = [-1, \infty)$ függvényt (mely az eredeti függvény megszorítása) és határozzuk meg az inverzét (11. ábra).



11. ábra

A 11. ábra alapján világos, hogy $R_g = (-\infty, 2]$.

Megoldjuk tehát az $y \leq 2$, $x \geq -1$ feltételek mellett x -re az

$$y = 2 - (x + 1)^2$$

egyenletet.

$$(x + 1)^2 = 2 - y,$$

$$x + 1 = \sqrt{2 - y},$$

(az abszolút értéket megint nem kell kitenni, hiszen a feltételek miatt $x + 1 \geq 0$).

Ebből

$$x = \sqrt{2 - y} - 1.$$

Ez alapján az inverz függvény

$$g^{-1}(x) = \sqrt{2 - x} - 1.$$