

További kidolgozott feladatok:

1. feladat: $\int \sqrt{x}(8x - 5\sqrt[3]{x}) dx$

Megoldás: Az integrandusunk most egy szorzat. Amint az korábban szerepelt, ilyen esetben nincs általánosan alkalmazható integrálási szabály. Át kellene ezért alakítanunk úgy a függvényt, hogy már ne szerepeljen szorzás. Amint a korábbiakban, írjuk át most is a gyököket törtkitevős hatvánnyá, majd végezzük el a szorzást, azaz bontsuk fel a zárójelet.

$$\int \sqrt{x}(8x - 5\sqrt[3]{x}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(8x - 5x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \int 8x^{\frac{1}{2}} x - 5x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx$$

Az integrandus mindkét tagjában azonos alapú hatványok szorzata áll, melyeket egyetlen hatványként is írhatunk. A kitevők ekkor összeadódnak.

$$\int 8x^{\frac{1}{2}} x - 5x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx = \int 8x^{\frac{1}{2}+1} - 5x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} dx = \int 8x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{5}{6}} dx$$

Sikerült elérnünk, hogy már nincs függvények szorzása, hanem csak különbsége. Ekkor tagonként integrálhatunk. Az egyes tagokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 8x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{5}{6}} dx = \int 8x^{\frac{3}{2}} dx - \int 5x^{\frac{5}{6}} dx = 8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{5}{6}} dx$$

A két hatványt immár külön-külön integráljuk.

$$8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{5}{6}} dx = 8 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 5 \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + c = \frac{16}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{30}{11} x^{\frac{11}{6}} + c = \frac{16}{5} \sqrt{x^5} - \frac{30}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + c$$

Mivel törtkitevős hatványokat integráltunk, az eredmény most is írható hatványként és gyökös alakban is.

2. feladat: $\int \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{x^2} dx$

Megoldás: Az integrálandó függvény most egy tört. Sajnos a törtekre sincsen minden esetben használható integrálási szabály. A függvényt ezért ismét átalakítjuk az integrálás előtt. Első lépésben a gyököt írjuk hatványként.

$$\int \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{x^2} dx = \int \frac{4x - 9x^{\frac{1}{2}} + 6}{x^2} dx$$

Mivel a tört számlálójában összeg illetve különbség áll, a törtet több törtre bonthatjuk úgy, hogy az egyes tagokat külön-külön osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{4x - 9x^{\frac{1}{2}} + 6}{x^2} dx = \int \frac{4x}{x^2} dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + \int \frac{6}{x^2} dx$$

A konstans szorzókat ezután kiemelhetjük az egyes integrálokból.

$$\int \frac{4x}{x^2} dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + \int \frac{6}{x^2} dx = 4 \int \frac{x}{x^2} dx - 9 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + 6 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Az első két tagban azonos alapú hatványok hányadosa áll, amiket egyetlen hatvánnyá alakíthatunk. Ekkor a kitevők különbségét kell vennünk. A harmadik tagban egy hatvány reciproka szerepel, amit negatív kitevős hatványként írhatunk.

$$4 \int \frac{x}{x^2} dx - 9 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + 6 \int \frac{1}{x^2} dx = 4 \int x^{1-2} dx - 9 \int x^{\frac{1}{2}-2} dx + 6 \int x^{-2} dx =$$

$$= 4 \int x^{-1} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx$$

Már csak egy-egy hatványt kell integrálnunk. Vigyázzunk azonban, mert az első tagban éppen x^{-1} áll, aminek integrálása különbözik a többi hatvány integrálásától. Éppen ezért, ez ne is írjuk hatványként, hanem inkább $\frac{1}{x}$ alakban.

$$4 \int \frac{1}{x} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx$$

Most hajtsuk végre az integrálásokat.

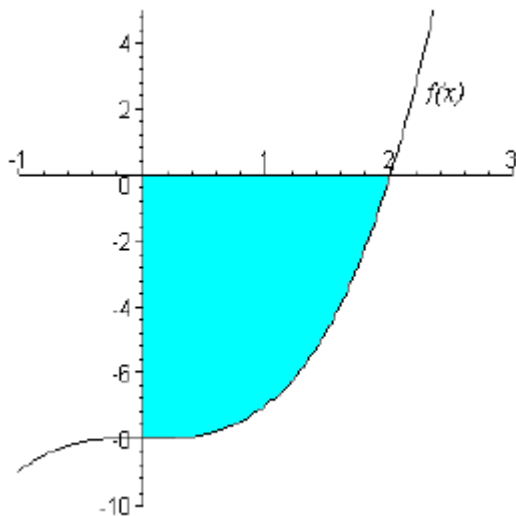
$$4 \int \frac{1}{x} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx = 4 \ln|x| - 9 \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 6 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

$$= 4 \ln|x| - 9 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 6 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 4 \ln|x| + 18x^{-\frac{1}{2}} - 6x^{-1} + c = 4 \ln|x| + \frac{18}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x} + c$$

Mint általában az ilyen feladatoknál, az eredmény most is több alakban adható meg.

3. feladat: Határozzuk meg azon véges síkrész területét, melyet a koordinátarendszer két tengelye és az $f(x) = x^3 - 8$ függvény grafikonja határol.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a függvényről, hogy láthassuk, hogyan is helyezkedik el a kérdéses alakzat a koordinátarendszerben. Az ábrázolás könnyű, hiszen az x^3 grafikonját kell 8-cal lefelé eltolnunk az y -tengely mentén.



Amint látható, a negyedik síknegyedben van olyan síkrész, ami a feladat feltételeinek megfelel. Nyilván szükségünk van arra, hogy meghatározzuk, hol metszi a függvény grafikonja az x -tengelyt. Az ábráról sejthető, hogy $x = 2$ a zérushely, s ez a függvénybe helyettesítéssel könnyen ellenőrizhető is. Természetesen az $x^3 - 8 = 0$ egyenletet is megoldhatjuk, s ezzel is igazolhatjuk, hogy 2-nél van a metszéspont. Így egyértelmű, hogy az alakzat a $[0, 2]$ intervallumon található. Mivel itt a függvény negatív értékeket vesz fel, így a területet a függvény ezen intervallumon vett integráljának -1 -szerese adja.

$$T = -\int_0^2 x^3 - 8 \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = -\left[\frac{x^4}{4} - 8x\right]_0^2$$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba, és hajtsuk végre a műveleteket.

$$T = -\left(\left(\frac{2^4}{4} - 8 \cdot 2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 8 \cdot 0\right)\right) = -((4 - 16) - 0) = 12$$

4. feladat: Mekkora területű véges síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^3 + x$ és $g(x) = 5x$ függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két függvénygrafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés, így először meg kell határoznunk, hol metszik egymást a grafikonok. Oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet.

$$x^3 + x = 5x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

Ha az első tényező nulla, akkor az $x = 0$ megoldást kapjuk.

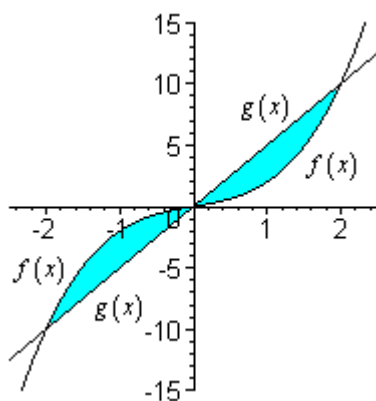
Ha a második tényező nulla, akkor $x^2 = 4$, amiből vagy $x = 2$ vagy $x = -2$.

A két függvény grafikonja tehát 3 helyen is metsz egymást. Ez azt jelenti, hogy a két grafikon által közrezárt alakzat két részből áll, mert van közrezárt alakzat az első két metszéspont és a második két metszéspont között is. Ezt jól láthatjuk, ha ábrázoljuk a két függvényt. Az ábrázoláshoz célszerű meghatározni a függvények értékét a metszéspontokban. Ezeken a helyeken a két függvény azonos értéket vesz fel. Mivel $g(x)$ az egyszerűbb függvény, így célszerű abba helyettesítve számolni.

$$f(-2) = g(-2) = 5 \cdot (-2) = -10$$

$$f(0) = g(0) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$f(2) = g(2) = 5 \cdot 2 = 10$$



A kérdéses területe két integrállal határozhatjuk meg. Mivel a $[-2, 0]$ intervallum belsejében $f(x) > g(x)$, ezért ezen az intervallumon integráljuk az $f(x) - g(x)$ függvényt, s mert a $[0, 2]$ intervallumon $g(x) > f(x)$, ezért ezen az intervallumon integráljuk az $g(x) - f(x)$ függvényt. A terület a két integrál összege lesz.

$$T = \int_{-2}^0 (x^3 + x) - 5x \, dx + \int_0^2 5x - (x^3 + x) \, dx = \int_{-2}^0 x^3 - 4x \, dx + \int_0^2 4x - x^3 \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényeket.

$$T = \int_{-2}^0 x^3 - 4x \, dx + \int_0^2 4x - x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a megszokott módon, és végezzük el a műveleteket.

$$T = \left(\left(\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2 \right) \right) + \left(\left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4} \right) \right) =$$

$$= (0 - (4 - 8)) + ((8 - 4) - 0) = 4 + 4 = 8$$

A közrezárt alakzat területe tehát 8 egység.

A feladatot egy integrál kiszámolásával is megoldhatjuk, ha kihasználjuk azt, hogy a közrezárt alakzat két része szimmetrikus az origóra. Ekkor elég az egyik integrált kiszámolnunk, és annak dupláját venni. Szimmetrikus alakzatok esetén így csökkenthetjük a számolás mennyiségét.