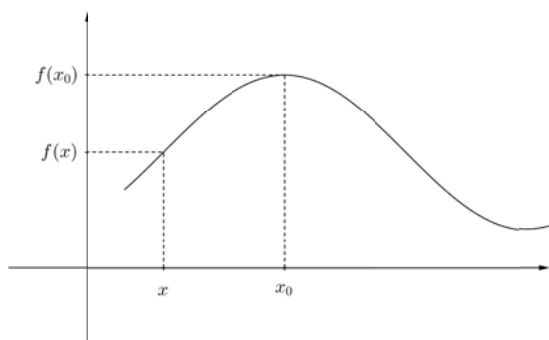


Elméleti összefoglaló:

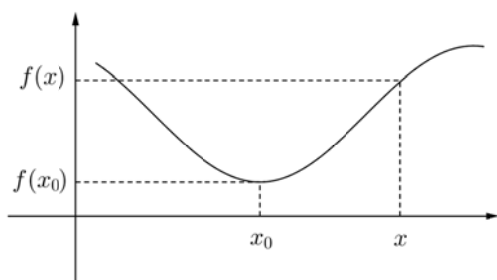
A következő részben felsoroljuk azokat a fogalmakat, amelyeket a függvények vizsgálata során a leggyakrabban használunk.

Definíció: Az f függvénynek az x_0 helyen **globális maximuma** van, ha az értelmezési tartományba eső minden x esetén $f(x) \leq f(x_0)$ (1. ábra).



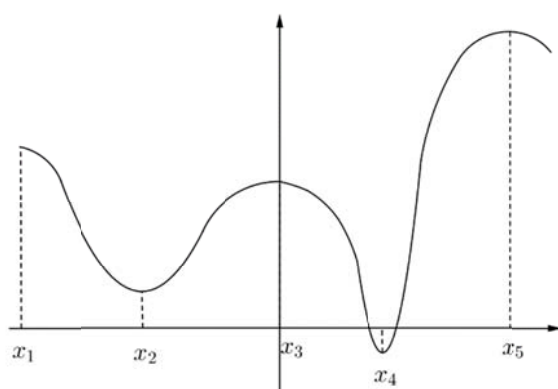
1. ábra. Globális maximum definíciója

Definíció: Az f függvénynek az x_0 helyen **globális minimuma** van, ha az értelmezési tartományba eső minden x esetén $f(x) \geq f(x_0)$ (2. ábra).



2. ábra. Globális minimum definíciója

Definíció: Az $f(x_0)$ globális maximumot és globális minimumot **globális szélsőértéknek**, az x_0 helyet pedig **globális szélsőérték helynek** nevezzük. Ha az $f(x_0)$ csak az x_0 hely valamely környezetében maximális, illetve minimális, akkor **lokális maximumról**, illetve **lokális minimumról** beszélünk, x_0 pedig lokális maximumhely, illetve lokális minimumhely, közös néven **lokális szélsőérték hely** (3. ábra).



x_2, x_4 lokális minimumhely

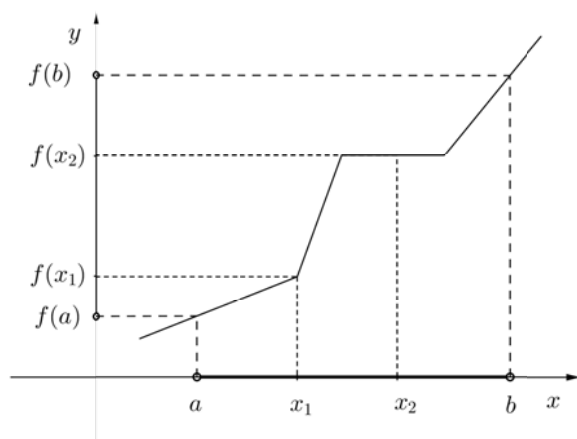
x_1, x_3, x_5 lokális maximumhely

x_5 globális maximumhely

x_4 globális minimumhely

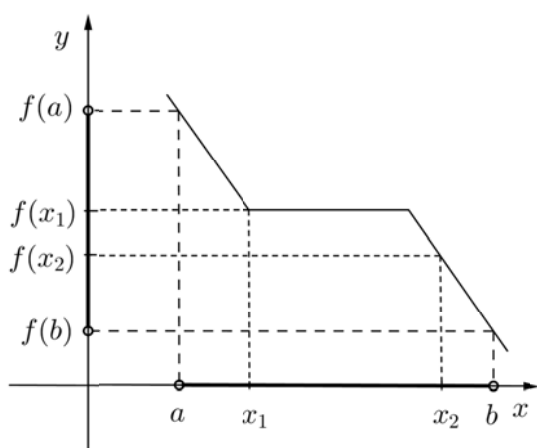
3. ábra. Példa lokális és globális szélsőértékekre

Definíció: Az f függvény **monoton nő** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$ (4. ábra).



4. ábra. Monoton növekvő függvény definíciója

Definíció: Az f függvény **monoton csökken** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) \geq f(x_2)$ (5. ábra).

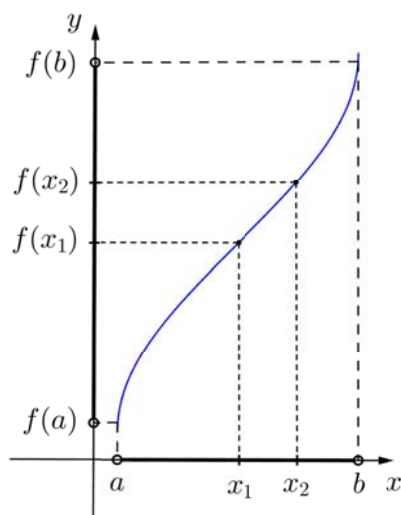


5. ábra. Monoton csökkenő függvény definíciója

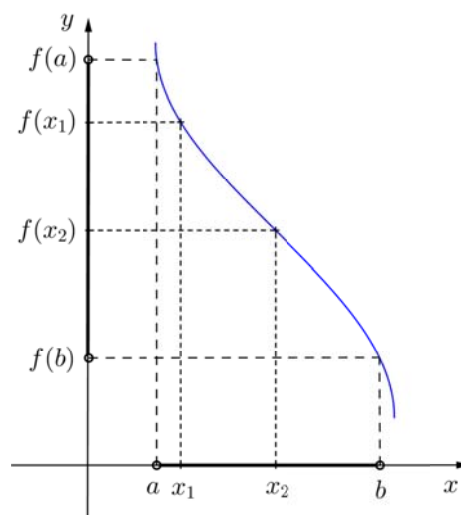
Tehát a monoton növekedés (és monoton csökkenés) definíciója megengedi, hogy a függvény grafikonjában legyenek olyan szakaszok, ahol azok párhuzamosak az x tengellyel (tehát konstansok).

Definíció: Hasonlóképp fogalmazhatóak meg a függvények szigorú monotonitására vonatkozó definíciók is. Az f függvény **szigorúan monoton nő** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_2)$ (6. ábra).

Definíció: Az f függvény **szigorúan monoton csökken** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_2)$ (7. ábra).



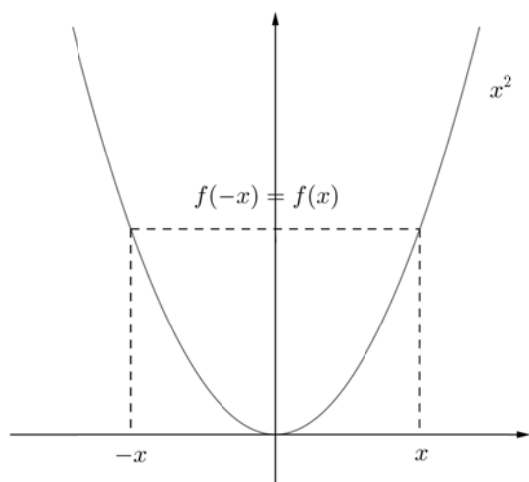
6. ábra. Szigorúan monoton növekvő függvény definíciója



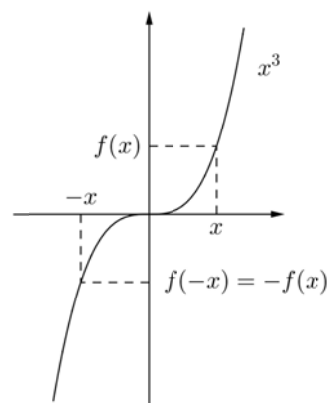
7. ábra. Szigorúan monoton csökkenő függvény definíciója

Definíció: Az f függvényt **páros** függvénynek nevezzük, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x$ is az értelmezési tartományban van és $f(-x) = f(x)$ (8. ábra).

Definíció: Az f függvényt **páratlan** függvénynek nevezzük, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x$ is az értelmezési tartományban van és $f(-x) = -f(x)$ (9. ábra).



8. ábra. Páros függvény

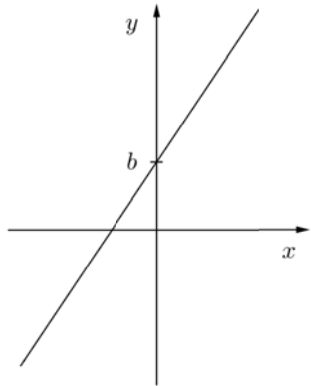


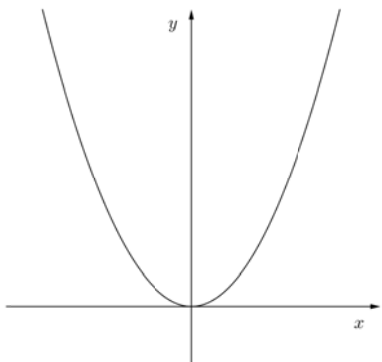
9. ábra. Páratlan függvény

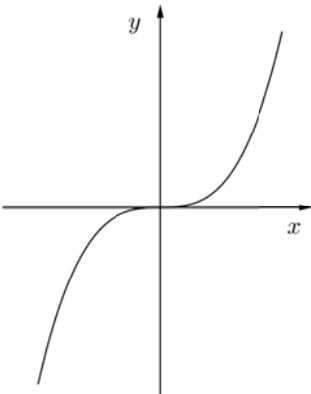
Megjegyzés: A páros függvény görbéje az y tengelyre, a páratlan függvény görbéje az origóra szimmetrikus. Az x^n (ahol n páros), $\cos x$ függvények párosak, az x^n (ahol n páratlan), $\sin x$, $\frac{1}{x}$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arctg} x$ függvények páratlanok. A többi elemi függvény se nem páros, se nem páratlan.

Definíció: Minden olyan x_0 érték, amelyre az f függvény helyettesítési értéke 0, azaz $f(x) = 0$, az f függvény **zérushelye**. Azaz a zérushely az f függvény x tengellyel való metszéspontjá(i)t adja meg.

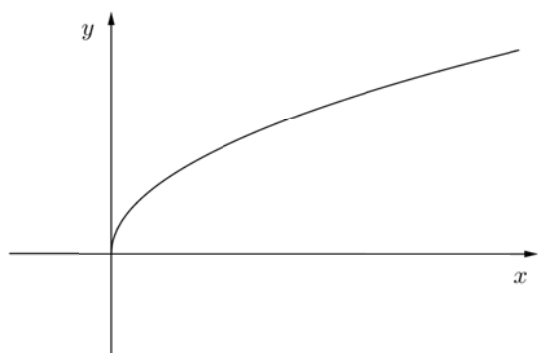
Elemi függvények

Lineáris függvény	
	$f(x) = mx + b$ b az y tengellyel való metszéspont m a meredekség
	ha $m > 0$, akkor szigorúan monoton nő
	ha $m < 0$, akkor szigorúan monoton csökken
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = \mathbb{R}$
	nincs globális szélsőérték

Hatványfüggvény	
	$f(x) = x^n$, n páros pozitív egész
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = \mathbb{R}$
	szigorúan monoton csökken $x \in (-\infty, 0]$ tartományon
	szigorúan monoton nő $x \in [0, \infty)$ tartományon
	globális minimum helye $x = 0$, értéke $y = 0$
páros függvény	

Hatványfüggvény	
	$f(x) = x^n$, n páratlan pozitív egész
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = \mathbb{R}$
	szigorúan monoton nő \mathbb{R} -en
	nincs globális szélsőértéke
	páratlan függvény

Gyökfüggvény



$$f(x) = \sqrt[n]{x}, n \text{ páros pozitív egész}$$

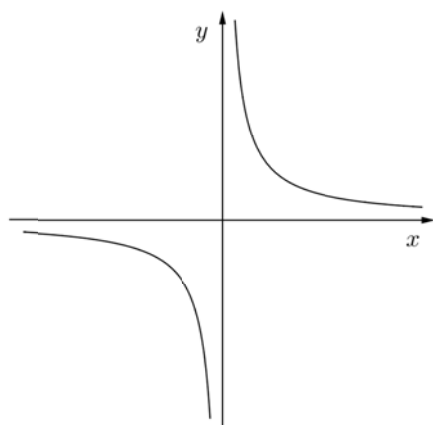
$$D_f = [0, \infty)$$

$$R_f = [0, \infty)$$

szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon

globális minimum helye $x = 0$, értéke $y = 0$

Törfüggvény



$$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \text{ páratlan pozitív egész}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

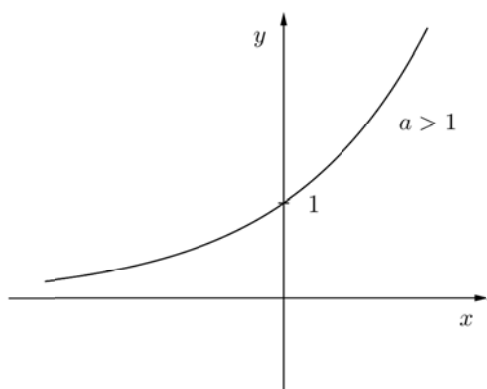
$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

szigorúan monoton csökken a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ tartományokon

nincs globális szélsőértéke

páratlan függvény

Exponenciális függvény



$$f(x) = a^x, a > 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

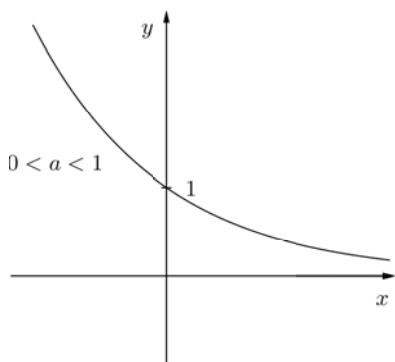
$$R_f = (0, \infty)$$

szigorúan monoton nő \mathbb{R} -en

nincs globális szélsőértéke

Fontos kiemelni az e alapú exponenciális függvényt (más néven természetes alapú exponenciális függvény), ahol e egy irracionális szám, melynek értéke $2,7182818284\dots$, jelölése: e^x .

Exponenciális függvény



$$f(x) = a^x, 0 < a < 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

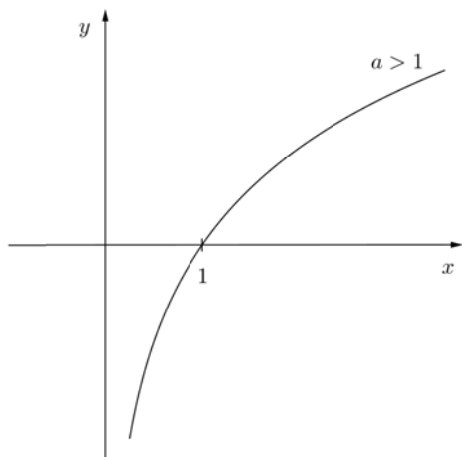
$$R_f = (0, \infty)$$

szigorúan monoton csökken \mathbb{R} -en

nincs globális szélsőértéke

Példa: radioaktív elemek felezési ideje exponenciális függvényt követ
a Föld légkörében a nyomás a magasság függvényében exponenciálisan csökken

Logaritmus függvény



$$f(x) = \log_a x, a > 1$$

$$D_f = (0, \infty)$$

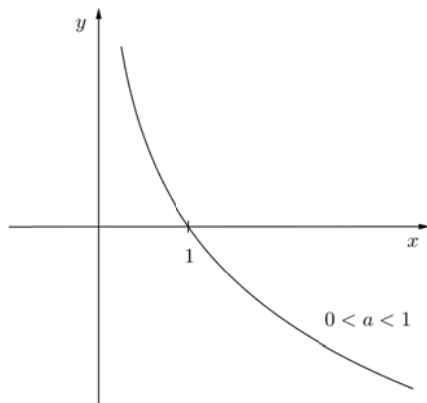
$$R_f = \mathbb{R}$$

szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon

nincs globális szélsőértéke

Fontos kiemelni a természetes logaritmus függvényt (más néven e alapú logaritmus függvény), ahol a logaritmus alapja az exponenciális függvéynél már látott e irracionális szám. Jelölése: $\ln x$ (más jelöléssel $\log_e x$)

Logaritmus függvény



$$f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$$

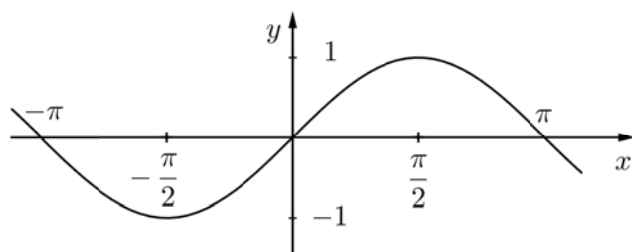
$$D_f = (0, \infty)$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

szigorúan monoton csökken az értelmezési tartományon

nincs globális szélsőértéke

Színusz függvény



$$f(x) = \sin x$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [-1, 1]$$

szigorúan monoton nő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$

szigorúan monoton csökken a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$

periodikus 2π szerint

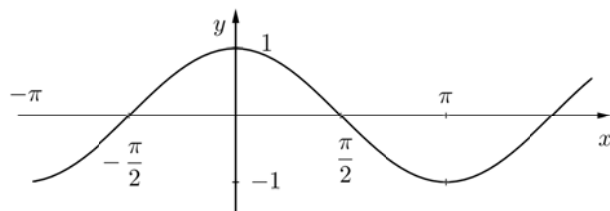
globális maximum helye $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, értéke $y = 1$

globális minimum helye $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, értéke $y = -1$

páratlan függvény

Példa: harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő grafikonja színusz függvény

Koszínusz függvény



$$f(x) = \cos x$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [-1, 1]$$

szigorúan monoton nő a $[\pi, 2\pi] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$

szigorúan monoton csökken a $[0, \pi] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$

periodikus 2π szerint

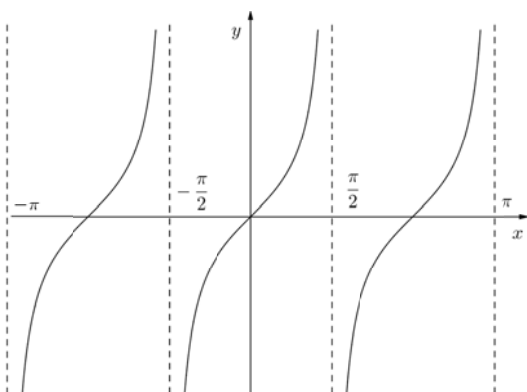
globális maximum helye $x = 0 + 2k\pi$, értéke $y = 1$

globális minimum helye $x = \pi + 2k\pi$, értéke $y = -1$

páros függvény

Példa: harmonikus rezgőmozgás sebesség-idő grafikonja koszínusz függvény

Tangensfüggvény



$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

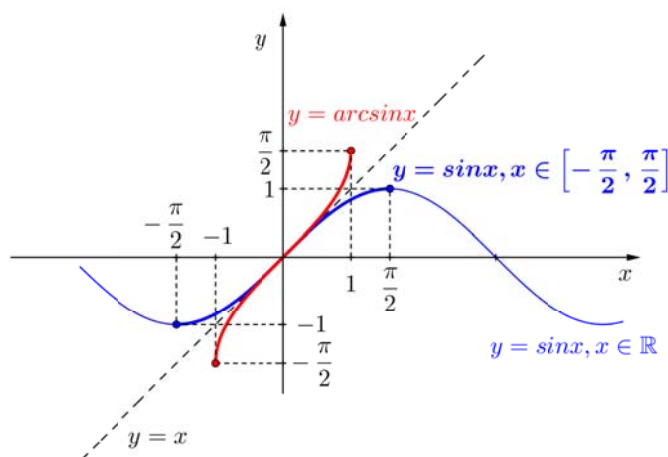
$$R_f = \mathbb{R}$$

szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon

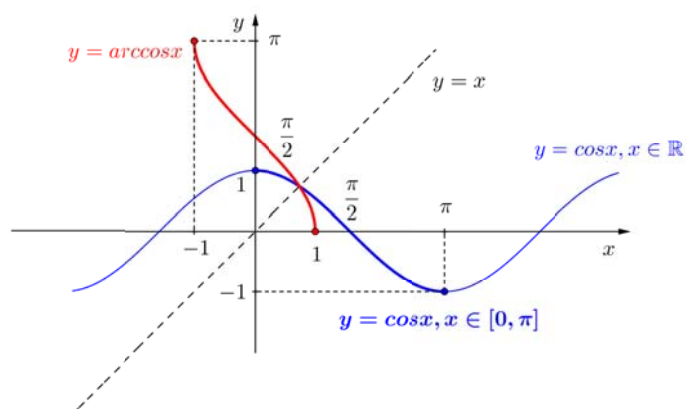
periodikus π szerint

páratlan függvény

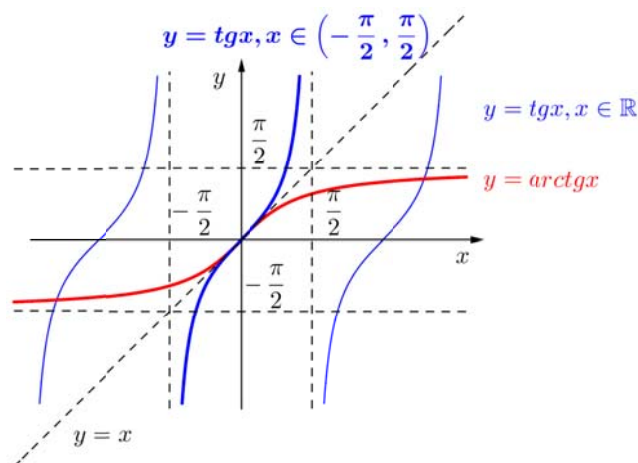
A trigonometrikus függvények periodikusak, ezért a teljes értelmezési tartományon nem invertálhatóak. Azonban a szigorúan monoton intervallumokon invertálhatóak. Az ilyen módon kapott inverz függvényeket **arkuszfüggvényeknek** (vagy ciklometrikus függvényeknek) nevezzük. Nézzük a trigonometrikus függvények értelmezési tartományának leszűkítését és invertálását ábrák segítségével (10-12. ábra). (Érdemes megfigyelni, hogy az arkuszfüggvények a trigonometrikus függvények leszűkítéséből az $y = x$ tengelyre való tükrözéssel megkaphatóak. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében az inverz fogalmának bevezetésekor.)



10. ábra. Arcsinx függvény származtatása a $\sin x$ függvényből



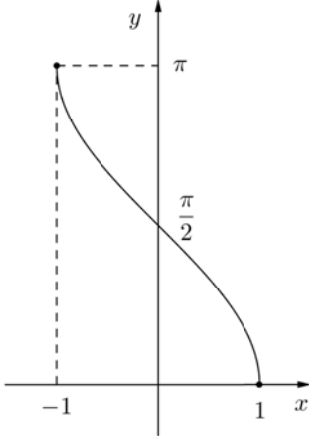
11. ábra. Arccosx függvény származtatása a $\cos x$ függvényből

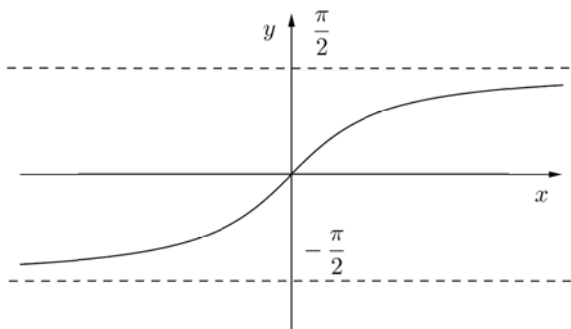


12. ábra. $\text{Arct}gx$ függvény származtatása a tgx függvényből

Tekintsük át tulajdonságaikat.

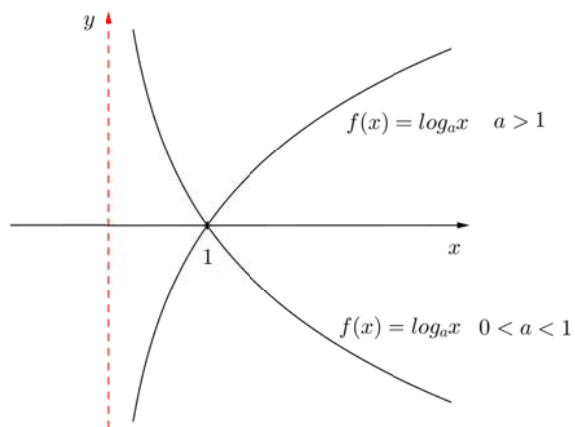
Arkuszszinusz függvény	
	$f(x) = \arcsin x$
	$D_f = [-1, 1]$
	$R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
	(Érdemes megfigyelni az $\arcsin x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\sin x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)
	szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon
	globális minimum helye $x = -1$, értéke $y = -\frac{\pi}{2}$
	globális maximum helye $x = 1$, értéke $y = \frac{\pi}{2}$
páratlan függvény	

Arkuszkoszínusz függvény	
	$f(x) = \arccos x$
	$D_f = [-1, 1]$
	$R_f = [0, \pi]$
	(Érdemes megfigyelni az $\arccos x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\cos x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)
	szigorúan monoton csökken az értelmezési tartományon
	globális minimum helye $x = 1$, értéke $y = 0$
	globális maximum helye $x = -1$, értéke $y = \pi$

Arkusztangens függvény	
	$f(x) = \arctg x$
	$D_f = \mathbb{R}$
	$R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
	(Érdemes megfigyelni az $\arctg x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\tg x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)
	szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon
	nincs globális szélsőértéke
	páratlan függvény

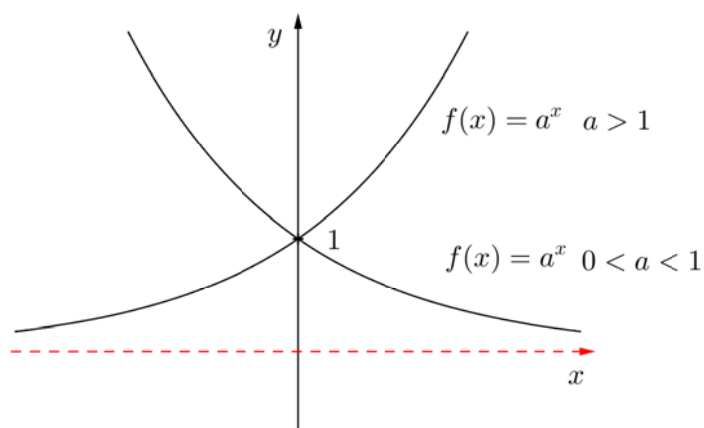
Definíció: Az **aszimptota** egy olyan görbe, többnyire egyenes, amelyet egy függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít (hozzásimul), de soha el nem éri.

Például: Az $f(x) = \log_a x$ függvénynek függőleges aszimptotája a $x = 0$ egyenletű egyenes (13. ábra).



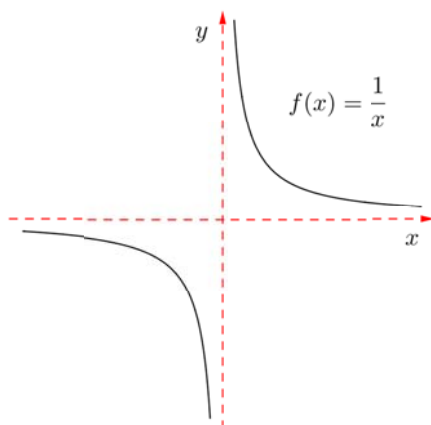
13. ábra. Logaritmus függvény függőleges aszimptotája

Az $f(x) = a^x$ függvénynek vízszintes aszimptotája az $y = 0$ egyenletű egyenes (14. ábra).



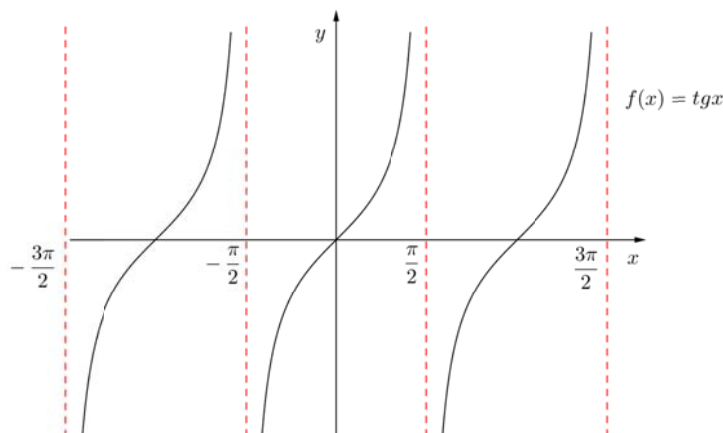
14. ábra. Exponenciális függvény vízszintes aszimptotája

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek két aszimptotája van, a függőleges $x = 0$ -ban, a vízszintes aszimptota $y = 0$ -ban (15. ábra).



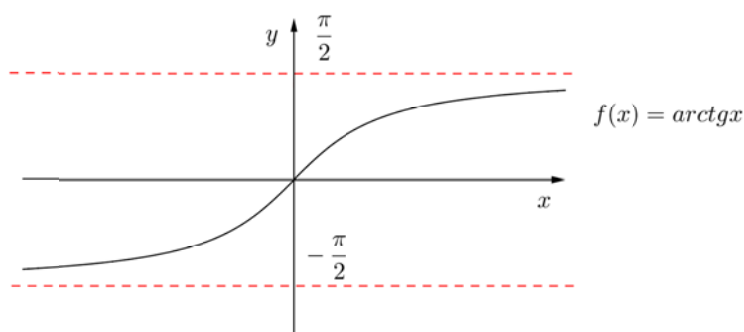
15. ábra. Tört függvény aszimptotái

Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvénynek végtelen sok függőleges aszimptotája van az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pontokban (16. ábra).



16. ábra. Tangens függvény függőleges aszimptotái

Az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvénynek két vízszintes aszimptotája van $y = -\frac{\pi}{2}$ és $y = \frac{\pi}{2}$ -ben (17. ábra).



17. ábra. Arkusztangens függvény vízszintes aszimptotái

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin(2x - 5)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Az $\arcsin(x)$ függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ intervallum, tehát az argumentumra a feltétel

$$-1 \leq 2x - 5 \leq 1.$$

Megoldjuk ezt a kettős egyenlőtlenséget. Az ezekre vonatkozó ekvivalens átalakítási lehetőségek hasonlóak az egyenlőtlenségekre vonatkozókhoz. Szabad például minden "oldalhoz" hozzáadni ugyanazt a számot. Ötöt hozzáadva minden "oldalhoz" azt kapjuk, hogy

$$4 \leq 2x \leq 6.$$

Kettővel végigosztva

$$2 \leq x \leq 3.$$

Így tehát

$$D_f = [2, 3].$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arccos\left(\frac{3x-4}{2}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Most is az a feltétel, hogy

$$-1 \leq \frac{3x-4}{2} \leq 1.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve kapjuk, hogy

$$-2 \leq 3x - 4 \leq 2,$$

$$2 \leq 3x \leq 6,$$

$$\frac{2}{3} \leq x \leq 2.$$

Így végül

$$D_f = \left[\frac{2}{3}, 2\right].$$

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{x-1}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Két kikötést kell tennünk, egyrészt a nevező, másrészt az arcsin miatt. Az osztás miatt a nevezőben $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Az arcsin miatti feltétel az, hogy

$$-1 \leq \frac{2}{x-1} \leq 1.$$

Mivel a nevező nem állandó előjelű, két esetet kell vizsgálni, ha pozitív és ha negatív. (A nullát már kizártuk.)

+	-
Ha $x - 1 > 0$, vagyis $x > 1$, akkor a nevezővel beszorozva az eredeti kettős egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $-(x - 1) \leq 2 \leq x - 1$.	Ha $x - 1 < 0$, vagyis $x < 1$, akkor a nevezővel beszorozva az eredeti kettős egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $-(x - 1) \geq 2 \geq x - 1$. (Ha negatív számmal szorzunk megfordulnak az egyenlőtlenségek irányai.)
Ennek megoldáshalmazát jelölje H_1 .	Ennek megoldáshalmazát jelölje H_2 .
Ennek a két halmaznak az uniója adja D_f -et. $D_f = H_1 \cup H_2$	

Foglalkozunk először H_1 meghatározásával.

Ekkor, az $x > 1$ feltételen túl, annak kell teljesülni, hogy

$$-x + 1 \leq 2,$$

$$\text{azaz } x \geq -1,$$

és

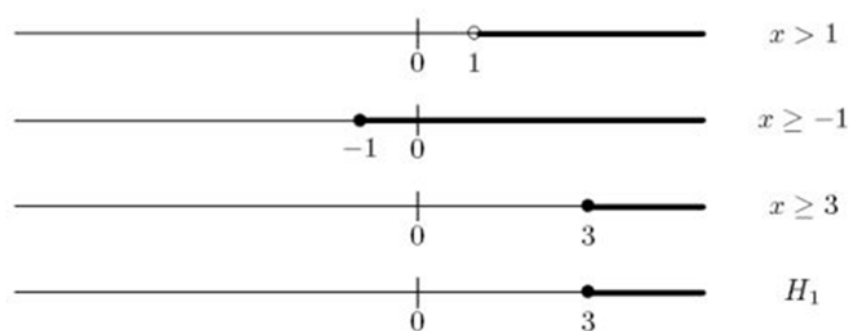
$$2 \leq x - 1,$$

$$\text{azaz } x \geq 3.$$

Ez a három egyenlőtlenség egyszerre teljesül, ha $x \geq 3$, tehát

$$H_1 = [3, \infty).$$

Ezt mutatja az alábbi ábra.



H_2 esetén, az $x < 1$ feltételen túl, annak kell teljesülni, hogy

$$-x + 1 \geq 2,$$

$$\text{azaz } x \leq -1,$$

és

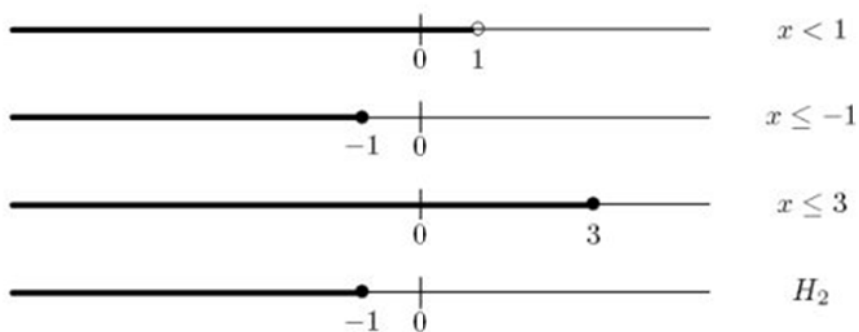
$$2 \geq x - 1,$$

$$\text{azaz } x \leq 3.$$

Ez a három egyenlőtlenség egyszerre teljesül, ha $x < -1$, tehát

$$H_2 = (-\infty, -1).$$

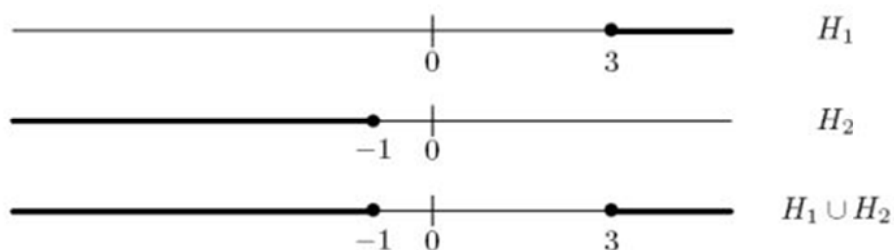
Grafikusan mindez.



Ezek alapján végül

$$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -1] \cup [3, \infty).$$

Az unió grafikus előállítását mutatja az alábbi ábra.



4. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{\arcsin(3x)-4}{2}$ függvény inverzét.

Megoldás: Mivel az $\arcsin x$ függvény szigorúan monoton függvény az értelmezési tartományán, így van inverz függvénye. Rendezzük a következő egyenletet x -re.

$$y = \frac{\arcsin(3x) - 4}{2}$$

$$2y = \arcsin(3x) - 4$$

$$2y + 4 = \arcsin(3x)$$

Mindkét oldalnak vesszük a szinuszát:

$$\sin(2y + 4) = \sin(\arcsin(3x)).$$

Mivel az inverz függvény inverzét vesszük a jobb oldalon, így a jobb oldal:

$$\sin(2y + 4) = 3x,$$

$$\text{amiből } \frac{\sin(2y+4)}{3} = x.$$

Felcserélve a változókat kapjuk, hogy

$$y = \frac{\sin(2x+4)}{3},$$

amiből az inverz függvény

$$f^{-1} = \frac{\sin(2x + 4)}{3}.$$

5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 7 - 4\operatorname{arctg}(x + 1)$ függvény inverzét.

Megoldás: Mivel az $\operatorname{arctg}x$ függvény szigorúan monoton függvény \mathbb{R} -en, így van inverz függvénye. Rendezzük a következő egyenletet x -re.

$$y = 7 - 4\operatorname{arctg}(x + 1)$$

$$y - 7 = -4\operatorname{arctg}(x + 1)$$

$$\frac{y - 7}{-4} = \operatorname{arctg}(x + 1)$$

Mindkét oldalnak vesszük a tangensét:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y - 7}{-4}\right) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x + 1))$$

Mivel az inverz függvény inverzét vesszük a jobb oldalon, így a jobb oldal:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y - 7}{-4}\right) = x + 1,$$

$$\text{amiből } \operatorname{tg}\left(\frac{y - 7}{-4}\right) - 1 = x.$$

Felcserélve a változókat kapjuk, hogy

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x - 7}{-4}\right) - 1,$$

amiből az inverz függvény

$$f^{-1} = \operatorname{tg}\left(\frac{x - 7}{-4}\right) - 1.$$