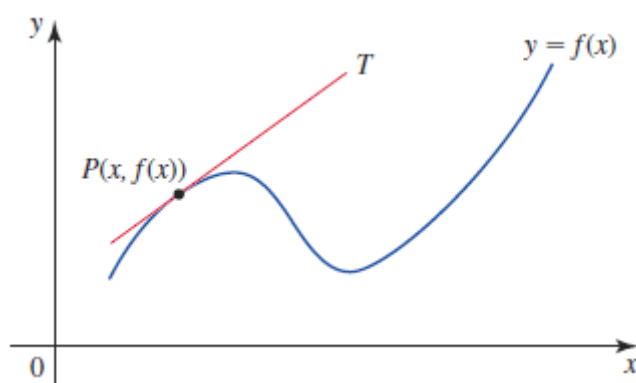


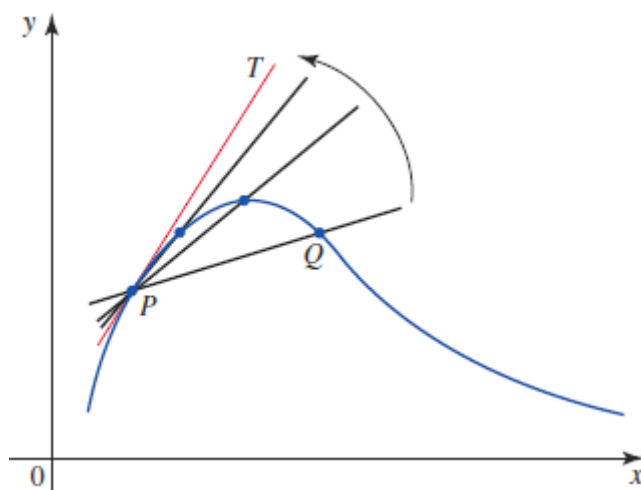
## Elméleti összefoglaló

Azt szokták mondani, hogy semmi sem állandó csak a változás. Valóban, a minket körülvevő világban minden folyamatosan átalakul, minden sok minden mással kapcsolatban van, azoktól függ. Ezeknek a viszonyoknak a felderítése a természettudományok fő feladata. A különféle függések egyik matematikai modellje a **függvény** fogalma. A változások sok jellemzője közül az egyik nagyon fontos a változás „sebessége”. A gyorsan változó folyamatok veszélyt hordozhatnak magukban azért, hogy nem adnak időt a reagálásra. A változások gyorsaságát a matematika a **derivált** fogalmával ragadja meg.

Az analízis fejlődése, amint az gyakran máskor is előfordult, szorosan kötődött problémák megoldásához. A mi esetünkben az egyik ilyen probléma az **érintő** meghatározása volt.

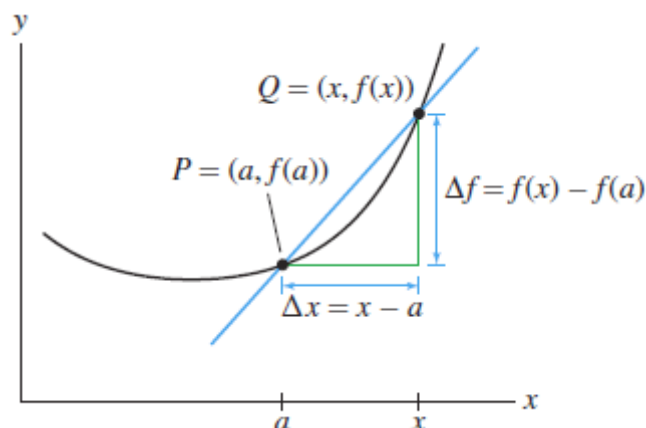


A fenti ábrán egy  $f(x)$  függvény grafikonját és annak a  $P(x, f(x))$  pontban megrajzolt „érintőjét” látjuk. Érezzük, hogy az  $f(x)$  függvény megadása és a  $P$  pont lerögzítése meghatározza az ábrán pirossal jelölt egyenest. Ennek az egyenesnek is  $y = mx + b$  az egyenlete, csak az a kérdés, hogy az  $m$  meredekség és a  $b$  konstans hogyan függ az  $f(x)$  függvénytől és a  $P(x, f(x))$  ponttól.



Ez az ábra azt mutatja, hogy az érintő a szelők határhelyzetének tekinthető: a  $P$  és  $Q$  pontokon átmenő szelő egyre „közelebb” van az érintőhöz, ahogy a  $Q$  pont egyre közelebb kerül  $P$ -hez. Ezek motiválják a következő definíciókat.

Legyen  $a, x \in D_f$  az  $f$  függvény értelmezési tartományának két különböző elem, és tekintsük az  $f$  függvény grafikonján a  $P(a, f(a))$  és a  $Q(x, f(x))$  pontokat.



**Definíció:** Az  $a \in D_f$  és  $x \in D_f$  helyekhez tartozó **különbségi hányados** vagy **differencia hányados** a

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tört.

**Definíció:** Ha az  $a \in D_f$  helyen **létezik** és **véges** az  $a$  és  $x$  helyekhez tartozó különbségi hányadosnak a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértéke, akkor az  $f$  függvény **differenciálható** az  $a \in D_f$  helyen. Ekkor a fenti határérték értékét  $f'(a)$  jelöli, és ezt az  $a \in D_f$  helyhez tartozó **differenciálhányadosnak** hívjuk, így tehát

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ha létezik  $f'(a)$ , akkor a fenti határérték létezése miatt, és azért, mert  $f(a)$  is létezik, az  $a$  hely csak belső pontja lehet a  $D_f$ -nek.

**Definíció:** Azt az  $f'$  függvényt, amelyik az  $f$  függvény értelmezési tartományának azokban az  $a$  pontjaiban van értelmezve, ahol az  $f$  függvény differenciálható, és minden ilyen helyen az értéke az  $a$ -beli  $f'(a)$  differenciálhányados, az  $f$  függvény **derivált függvényének** hívjuk.

A derivált függvény értelmezési tartomány tehát részhalmaza az eredeti függvény értelmezési tartományának.

A differenciálhányados segítségével az érintő problémája már megoldható.

**Definíció:** Ha  $f$  differenciálható az  $a \in D_f$  helyen, akkor az  $f$  grafikonjához a  $P(a, f(a))$  pontban húzható érintő **meredeksége**  $f'(a)$ , és az **érintő egyenes egyenlete**

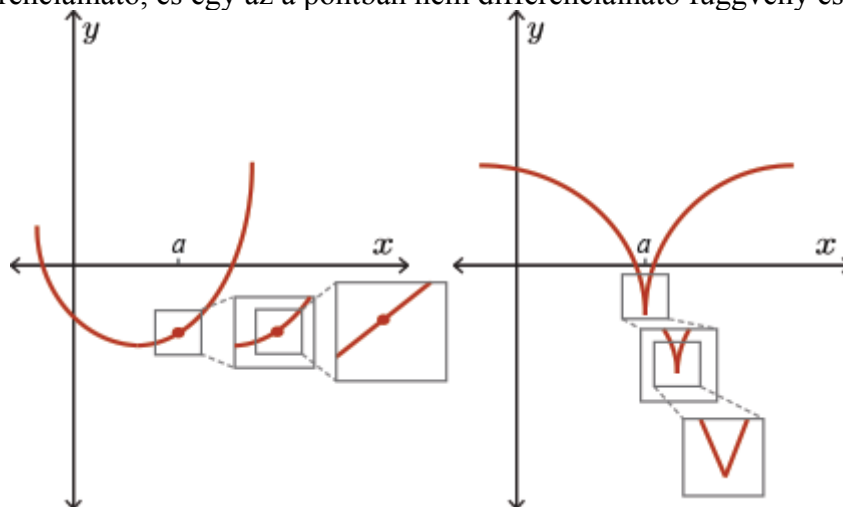
$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = \underbrace{f'(a)}_m \cdot x + \underbrace{f(a) - a \cdot f'(a)}_b.$$

Ebből látható, hogy  $f'(a) = 0$  esetén az érintő vízszintes,  $f'(a) > 0$  esetén az érintő emelkedő egyenes, vagyis az  $a$  hely közelében a függvény növekszik, és  $f'(a) < 0$  esetén pedig érintő süllyedő egyenes vagyis az  $a$  hely közelében a függvény csökken.

Az érintő egyenes tekinthető egy lineáris  $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$  függvény grafikonjának. Ezt a  $g$  függvényt hívjuk az **f függvény a-beli linearizáltjának**. Elég egy pillantást vetni egy függvényre és annak egy érintőjét mutató ábrára, hogy világos legyen: a linearizált jól közelíti az érintési pontban a függvényt. Sőt, bármilyen bonyolult is az  $f$  függvény, egy nagyon egyszerű lineáris függvény szolgáltatja ezt a jó közelítést. Ez lehetőséget ad függvényértékek közelítő meghatározására.

**Tétel:** Ha az  $f$  függvény differenciálható  $a$ -ban, akkor folytonos is  $a$ -ban.

Sőt, ennél több is igaz. Az a pontbeli differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény grafikonja sima az a pont környékén, nincs szakadása és nincs töréspontja. Ha közelről nézzük a grafikonot, akkor az egyenesnek tűnik. Az alábbi ábrásor ezt szemlélteti egy a pontban differenciálható, és egy az a pontban nem differenciálható függvény esetén:



Az analízisben a fő célunk, hogy egy függvényről a hozzárendelési utasítás ismeretében minél több információt megismerjünk. Ki fog derülni, hogy ebben a fő segédeszköz a derivált függvény. Az  $f'$  derivált függvény vizsgálatával az eredeti  $f$  függvény számos, minket érdeklő tulajdonsága felderíthető. (Például a növekedés vagy fogyás, maximális vagy minimális értéket, a grafikon görbülésének jellege, stb.)

Tehát mindenek előtt arra van szükség, hogy minél több függvény derivált függvényét egyszerűen és gyorsan elő tudjuk állítani.

Az analízisben olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek az elemi függvényekből épülnek fel a különböző műveletek segítségével. Ebből is látható, hogy a későbbiekben az elemi függvények deriváltjainak alapvető jelentőségük lesz. A következő táblázatban megadjuk az elemi függvények deriváltjait.

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c$ , ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ , $n$ pozitív egész $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^{-n}$ , $n$ pozitív egész $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -nx^{-n-1}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ , $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ , $n$ páros pozitív egész $D_f = [0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ , $n$ páratlan pozitív egész $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f(x) = x^\alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ , irracionális $D_f = (0, \infty)$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = e^x$ , $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$ , $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$ $D_f = (0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = a^x$ , $a > 0$ $D_f = (0, \infty)$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = \log_a x$ , $a > 0$ $D_f = (0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $D_{f'} = (0, \infty)$
$f(x) = \sin x$ , $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$ , $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$ , $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$ , $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$f(x) = \arcsin x$ $D_f = [-1, 1]$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \arccos x$ $D_f = [-1, 1]$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{arcctg} x$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \operatorname{ch} x$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \operatorname{sh} x$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $D_f = [1, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $D_{f'} = (1, \infty)$
$f(x) = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $D_f = (-1, 1)$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

### Kidolgozott feladatok:

**1. feladat:** Írjuk fel az  $f(x) = x^2$  függvény az  $a = 1$  és az  $x$  helyekhez tartozó különbségi hányadosát.

**Megoldás:** Mivel az  $f$  függvény értelmezési tartománya  $\mathbb{R}$  létezik a fenti különbségi hányados:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1.$$

A különbségi hányadosnak általában kiszámoljuk a határértékét, így azt célszerű a legegyszerűbb formában felírni.

**2. feladat:** Számoljuk ki az  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény  $a = 4$  helyhez tartozó differenciáhányadosát.

**Megoldás:** Tudjuk, hogy  $D_f = [0, \infty)$ , aminek a 4 belső pontja, és

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

így tehát  $f'(4) = \frac{1}{4}$ .

**3. feladat:** Hol veszi fel a nulla értéket az  $f(x) = x - x^2$  függvény deriváltja.

**Megoldás:** Először elkészítjük a derivált függvényt. Legyen  $a \in D_f$  tetszőleges valós szám.

Mivel  $D_f = \mathbb{R}$  ez egyben belső pontja is  $D_f$ -nek. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - x^2 - (a - a^2)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) - (x^2 - a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) - (x + a)(x - a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (1 - (x + a)) = 1 - 2a. \end{aligned}$$

Mivel ez tetszőleges a számra igaz, azt kaptuk, hogy  $f'(x) = 1 - 2x$ , és a derivált függvény is az egész valós számok halmazán van értelmezve.

$f'(x) = 0$ , ha  $x = \frac{1}{2}$ , tehát a derivált függvény egyedül az  $\frac{1}{2}$  helyen veszi fel a nulla értéket.

**4. feladat:** Határozzuk meg az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** A függvényünk értelmezési tartománya  $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ , aminek minden pontja belső pont. Legyen  $a \in D_f$  tetszőleges, ekkor

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a - x}{ax}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x - a)}{ax(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{ax} = -\frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , és  $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ , ugyan az, mint a  $D_f$ .

**5. feladat:** Határozzuk meg az  $f(x) = \sqrt{x}$  derivált függvényét.

**Megoldás:** Most a  $D_f = [0, \infty)$ , aminek a 0 nem belső pontja, itt tehát  $f$  biztosan nem deriválható. Ha azonban  $0 \neq a \in D_f$  (azaz a pozitív szám), akkor

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{a})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Tehát  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  és  $D_{f'} = (0, \infty)$ .

**6. feladat:** Írjuk fel az  $f(x) = x^2$  függvény grafikonjának érintőjét az  $a = 3$  helyen.

**Megoldás:** Határozzuk meg a függvény értékét az  $a = 3$  helyen:  $f(a) = f(3) = 9$ . Az érintési pont koordinátái tehát  $(3, 9)$ .

Meghatározzuk  $f'(a) = f'(3)$  értékét: az  $a = 3$  belső pontja a  $D_f = \mathbb{R}$ -nek, és

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a.$$

A differenciálhányados értéke az  $a = 3$  helyen, azaz a keresett érintő meredeksége:

$$m = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Helyettesítsünk ezután az érintőt megadó  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  képletbe.

$$y = 6(x - 3) + 9$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy az érintő egyenlete:  $y = 6x - 9$ .

**7. feladat:** Írjuk fel az  $f(x) = x^2 - 2x - 2$  függvény  $a = 2$ -beli érintőjének egyenletét.

**Megoldás:** Helyettesítsük a függvénybe a megadott  $a = 2$  értéket:  $f(a) = f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 2$ .

Az érintő tehát a  $(2, -2)$  pontban érinti a függvény grafikonját.

A meredekség meghatározásához szükségünk van a derivált függvényre. (Valójában most is elég lenne  $f'(2)$  értéke, de azt kiszámolni nem sokkal egyszerűbb, mint meghatározni a

derivált függvényt, és venni annak 2-ben a helyettesítési értékét.) Az  $a = 2$  belső pontja a  $D_f = \mathbb{R}$ -nek, és

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 2 - (a^2 - 2a - 2)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - a^2) - (2x - 2a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a) - 2(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} ((x + a) - 2) = 2a - 2. \end{aligned}$$

A derivált függvény tehát  $f'(x) = 2x - 2$ .

Helyettesítsünk ebbe  $a = 2$ -t, így megkapjuk a meredekséget:

$$m = f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

Részeredményeinket írjuk be az érintő  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  képletébe:

$$y = 2(x - 2) + (-2).$$

Végezzük el a műveleteket, és így megkapjuk az érintő egyenletének alábbi alakját:

$$y = 2x - 6.$$

**8. feladat:** Írjuk fel az  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény  $m = 2$  meredekségű érintőjének egyenletét.

**Megoldás:** Most az érintőt nem azzal határozzuk meg, hogy melyik pontban érinti a grafikont, hanem azzal, hogy mennyi a meredeksége. Mivel az érintő felírásához szükség van az érintési pont két koordinátájára, először ezeket kell meghatározni.

Tudjuk, hogy a derivált függvény  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Azt az  $a > 0$  számot keressük, amelyre a meredekség, azaz  $f'(a)$  éppen 2. Ehhez megoldjuk az

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = 2$$

egyenletet a-ra: a fenti képletből  $\sqrt{a} = \frac{1}{4}$ , amiből  $a = \frac{1}{16}$ . Tehát valójában az  $a = \frac{1}{16}$ -beli

érintőről van szó. Mivel  $f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}$ , az érintési pont két koordinátája  $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$ . Az érintő

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$  képletébe helyettesítve

$$y = 2\left(x - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4},$$

rendezve

$$y = 2x + \frac{1}{8}.$$

**9. feladat:** Írjuk fel az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvénynek az  $y = 4x - 9$  egyenesre merőleges érintőjének egyenletét.

**Megoldás:** Az érintőt ismét nem az érintési pont első koordinátájával adtuk meg. Azt kell először meghatározni. Ismét az érintő meredekségéről van információnk, hiszen, ha a keresett érintő merőleges a megadott  $m^* = 4$  meredekségű egyenesre, akkor a meredeksége  $m = -\frac{1}{4}$ .



Ehhez arra kell emlékezni, hogy a síkon két egyenes akkor merőleges egymásra, ha a meredekségeik szorzata  $-1$ . Így tehát azt az  $a \neq 0$  számot keressük, amelyre  $f'(a) = -\frac{1}{4}$ .

Tudjuk, hogy  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , így az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4},$$

amiből  $a^2 = 4$ , azaz  $a = \pm 2$ , két megoldást kaptunk, tehát két ilyen érintő is van.

Ha az érintési pont első koordinátája  $a = 2$ , akkor az érintési pont második koordinátája  $f(2) = \frac{1}{2}$ , és ennek az első érintőnek az egyenlete

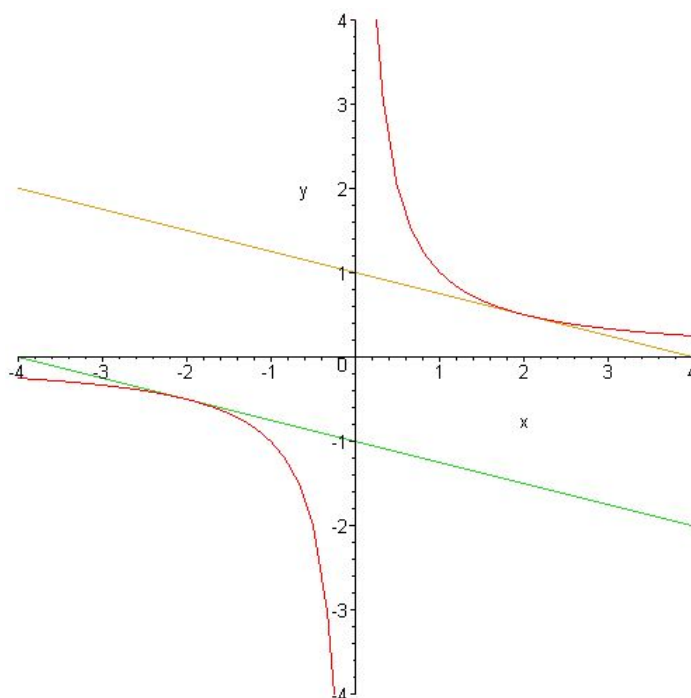
$$y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{4} + 1.$$

Ha az érintési pont első koordinátája  $a = -2$ , akkor az érintési pont második koordinátája  $f(-2) = -\frac{1}{2}$ , és ennek a második érintőnek az egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}(x - (-2)) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{x}{4} - 1.$$



A fenti ábrán a függvényünket és a két érintőjét láthatjuk.

**10. feladat:** Írjuk fel az  $f(x) = x^2$  függvénynek azt az érintőjét, amelyik átmegy a  $Q(-1, -3)$  ponton.

**Megoldás:** Ismét az érintési pont meghatározásával kell kezdenünk. Tudjuk, hogy az érintő egyenlete

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

szerkezetű, ha figyelembe vesszük  $f$  képletét is, akkor, mivel  $f'(x) = 2x$ ,

$$y = 2a(x - a) + a^2.$$

Azt a számot, vagy azokat az  $a$  számokat keressük, amelyekre ez az egyenes átmegy a  $Q$  ponton, elvégezve az  $x = -1$ ,  $y = -3$  helyettesítést és rendezve

$$-3 = 2a(-1 - a) + a^2$$

$$-3 = -2a - a^2$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0.$$

Megoldva a kapott másodfokú egyenlete  $a$ -ra két értéket kapunk:  $a = 1$  vagy  $a = -3$ .

Az  $a = 1$ -beli érintő egyenlete az  $y = 2a(x - a) + a^2$  képletből

$$y = 2(x - 1) + 1$$

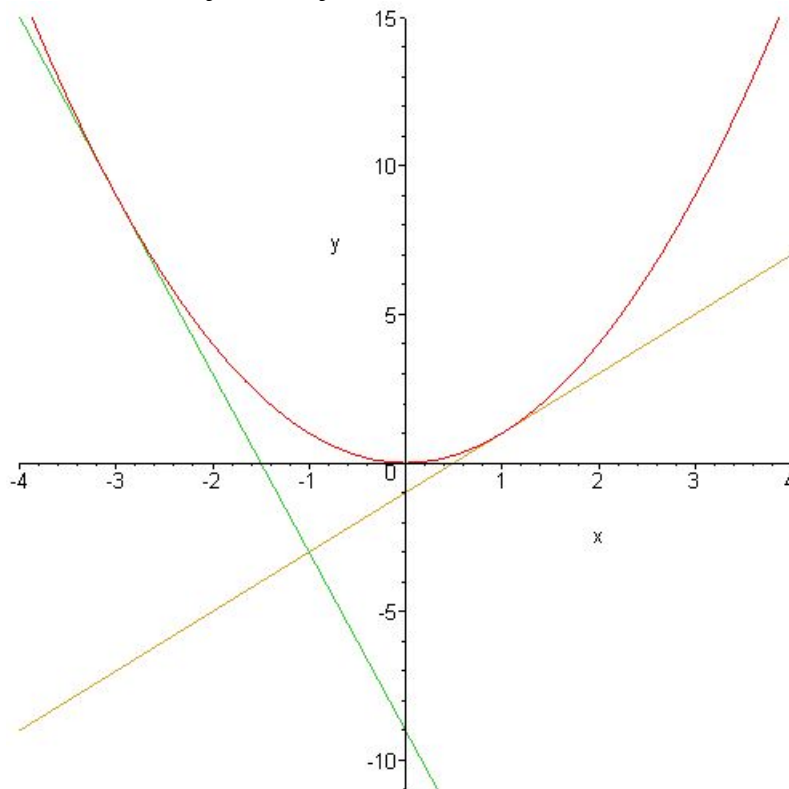
$$y = 2x - 1.$$

Ugyanígy az  $a = -3$ -beli érintő egyenlete

$$y = -6(x - (-3)) + 9 = -6(x + 3) + 9$$

$$y = -6x - 9.$$

A függvényünket és a két érintőjét mutatja az alábbi ábra.



**11. feladat:** Az  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  függvény alkalmas linearizáltját felhasználva számoljuk ki közelítően  $\sqrt[3]{8.12}$  értékét.

**Megoldás:** A linearizált az érintési pont közelében közelít jól. A 8 közel van 8.12-höz, ezért az  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  függvény  $a = 8$ -beli linearizáltját fogjuk használni  $\sqrt[3]{8.12}$  közelítő értékének kiszámolására.

Szükségünk van az érintési pont második koordinátájára is:  $f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$ , az érintési

pont tehát  $(8, 2)$ . Mivel  $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ , azt kapjuk, hogy a

meredekség  $f'(a) = f'(8) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$ . Így az  $a = 8$ -beli linearizált

$$g(x) = \frac{1}{12}(x - 8) + 2 = \frac{x}{12} + \frac{4}{3}$$

Ennek a függvénynek a 8.12 helyen vett értékével közelíthető  $\sqrt[3]{8.12}$ . Azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{8.12} \approx g(8.12) = \frac{8.12}{12} + \frac{4}{3} = 2.01.$$

Ha ezek után számológéppel is kiszámoljuk  $\sqrt[3]{8.12}$ -t, akkor a 2.009950413 értéket kapjuk. Látható, hogy a linearizált felhasználásával kapott közelítésünk meglehetősen pontos.

**12. feladat:** Alkalmas linearizáltat felhasználva számoljuk ki közelítően  $\sin(33^\circ)$  értékét.

**Megoldás:** Az analízisben a trigonometrikus függvények argumentumát radiánban kell megadni. Ezért először a  $33^\circ$ -ot átszámoljuk radiánra az  $x_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} x_{\text{fok}}$  képletet használva. De mivel a  $33^\circ$  radiánban megadott értékéhez közeli a érték is kell, hogy fel tudjuk írni az ottani linearizáltat, az átírást a következőképp csináljuk:

$$33^\circ = 30^\circ + 3^\circ = \frac{\pi}{180}(30 + 3) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60} = \frac{11\pi}{60} = 0.576,$$

(a radián mértékegységet nem írjuk ki). Innen már látjuk, hogy, mivel  $\frac{\pi}{60}$  kicsi, az

$f(x) = \sin x$  függvény  $a = \frac{\pi}{6}$ -beli linearizáltját használhatjuk a közelítéshez. Mivel

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$  és  $f'(x) = \cos x$ , a meredekség  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ezután már felírhatjuk a linearizált képletét:

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12}.$$

Ezután a keresett közelítő érték:

$$\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right) \approx g\left(\frac{11\pi}{60}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11\pi}{60} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12} = 0.5453449841.$$

Ha számológéppel számoljuk  $\sin(33^\circ)$ -ot, akkor a 0.544639035 értéket kapjuk. Látható, hogy a közelítésünk most is elég pontos.

**13. feladat:** Hol metszi az  $f(x) = x^2 - 8x + 19$  függvény a  $x = 5$ -beli érintője az  $x$  tengelyt?

**Megoldás:** Először felírjuk az érintő egyenletét. Mivel  $f(5) = 4$ , az érintési pont az  $(5, 4)$  koordinátájú pont. Szükségünk van  $f'(5)$  értékére. Mivel  $f$  nem elemi függvény még nem ismerjük a deriváltját. Később a derivált függvény egy adott helyen vett értékét mindig úgy fogjuk kiszámolni, hogy meghatározzuk a derivált függvényt, és vesszük annak a szóban forgó helyettesítési értékét. Ehhez azonban a deriválási szabályok ismeretére van szükség, ami a következő fejezet témája. Ezért most a definíciót használva számoljuk ki  $f'(5)$  értékét:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 19 - 4}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 3)(x - 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x - 3) = 2, \end{aligned}$$

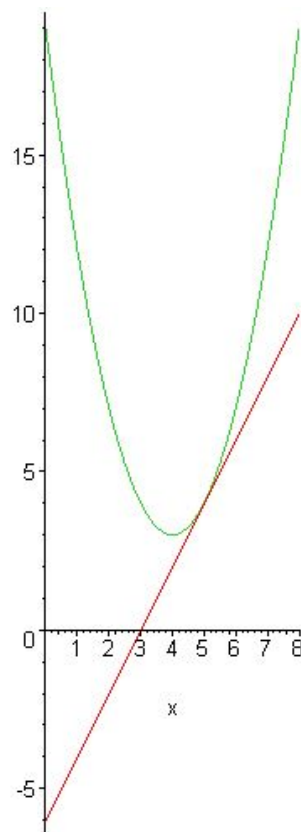
így az érintő meredeksége  $m = f'(a) = f'(5) = 2$ .

Ezek felhasználásával az érintő egyenlete:

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) = \\ &= 2(x - 5) + 4 = 2x - 6. \end{aligned}$$

Az  $y = 2x - 6$  egyenes ott metszi az  $x$  tengelyt, ahol az  $y = 0$ . A  $2x - 6 = 0$  egyenletből  $x = 3$ .

Tehát az  $f(x) = x^2 - 8x + 19$  függvény  $x = 5$ -beli érintője az  $(3, 0)$  koordinátájú pontban metszi az  $x$  tengelyt. Az alábbi ábrán a függvényünket és az érintőjét láthatjuk.



**14. feladat:** Hol metszi az  $f(x) = \sqrt{x+3}$  függvény a  $x = -2$ -beli érintője az  $x$  és az  $y$  tengelyt?

**Megoldás:** Úgy, mint az előző feladatban, az érintő egyenletének felírásával kezdünk. Mivel  $f(-2) = 1$ , az érintési pont  $(-2, 1)$ . Ezen kívül az érintő felírásához  $f'(-2)$  értékére van szükségünk, amit most is a definíció alapján határozzunk meg. ( $f$  összetett függvény, deriválásával a következő fejezetben foglalkozunk.)

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x+3} + 1)}{(x + 2)(\sqrt{x+3} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)}{(x + 2)(\sqrt{x+3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Az érintő meredeksége tehát  $m = f'(a) = f'(-2) = \frac{1}{2}$ . Ezeket felhasználva az érintő egyenlete

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) = \\ &= \frac{1}{2}(x - (-2)) + 1 = \frac{x}{2} + 2. \end{aligned}$$

Az  $y = 0$  egyenletből, azaz az  $\frac{x}{2} + 2 = 0$  egyenletből  $x = -4$ , vagyis az érintő az  $x$  tengelyt a  $(-4, 0)$  koordinátájú pontban metszi. Az  $y$  tengellyel való metszéspontot megkapjuk, ha az érintő  $y = \frac{x}{2} + 2$  képletében az  $x$  helyére nullát írunk, így  $y = 2$  adódik, tehát az érintő az  $y$  tengelyt a  $(0, 2)$  koordinátájú pontban metszi. A függvényünket és az érintőjét mutatja az alábbi ábra.

