

4.1. A komplex számok fogalma, algebrai alakja

Általános iskolában már tanultunk a természetes (N), az egész (Z) és racionális (Q) számokról. A középiskolában elmélyítettük a velük kapcsolatos ismereteinket és új felfedezéseket is tettünk. Megismertük az irracionális (Q^*) számokat és így, többszöri számkör bővítés eredményeként, eljutottunk a valós számok (R) köréhez.

Eddigi tanulmányaink során azt is láttuk, hogy a valós számok halmazán nem végezhető el minden, a gyakorlatban felmerülő művelet, hiszen pl. a valós együtthatós másodfokú algebrai egyenlet sem oldható meg a valós számok halmazán, ha a diszkriminánsa negatív. Ezért célszerű lenne az R halmazt úgy bővíteni, hogy ebben az új halmazban (minden eddigi művelet változatlan megtartása mellett) tudjunk a negatív valós számokból is négyzetgyököket vonni.

Ennek érdekében bevezetünk egy elképzelt új számot, amelyet i -vel jelölünk, képzetes egységnek nevezünk és az $i = \sqrt{-1}$ értékkel definiálunk.

Definíció: A $z = a + bi$ alakú számokat, ahol $a, b \in R$ a komplex számok algebrai alakjának nevezzük.

Elnevezések és jelölések: a a komplex szám valós része $\text{Re}(z)$, b a komplex szám képzetes része $\text{Im}(z)$.

Például a $4 - 5i$ komplex szám valós része 4, a képzetes része pedig -5.

A "képzetes" elnevezés az "immaginárius" szóból ered, ezért is jelöljük "i"-vel a komplex számok nem valós, "képzetes" részét. (Az "i"-t az "immaginárius" rövidítésére használták.) A "komplex" elnevezés pedig arra utal, hogy ezek a számok összetettek, több (kettő) részből állnak.

Megjegyzés: minden valós szám olyan komplex szám, amelynek képzetes része 0. Azaz komplex szám a $4 = 4 + 0i$ vagy a $0 = 0 + 0i$ is.

Definíció: Két komplex szám *egyenlő*, ha valós részeik és képzetes részeik is egyenlők.

Műveletek algebrai alakban (összeadás, kivonás, szorzás, osztás)

Definíció: Legyen $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$. Ekkor

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Definíció: Egy $z = a + bi$ alakú komplex szám *konjugáltján* a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük. (A képzetes rész előjelét az ellenkezőjére változtatjuk.)

Például ha $z_1 = 7 + 2i$, akkor $\bar{z}_1 = 7 - 2i$, ha $z_2 = -1 + 25i$, akkor $\bar{z}_2 = -1 - 25i$, és ha $z_3 = 13 - \pi i$, akkor $\bar{z}_3 = 13 + \pi i$.

Definíció:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Ezt a bonyolult végeredményt nem kell megtanulni, csak azt érdemes megjegyezni, hogy az osztás végrehajtásának első lépése a **nevező konjugáltjával való bővítés**.

Néhány műveleti tulajdonság:

- az összeadás és a szorzás kommutatív, azaz bármely két komplex szám esetén:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{továbbá} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- az összeadás és a szorzás asszociatív, azaz bármely három komplex szám esetén:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3 \quad \text{továbbá} \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- a szorzás disztributív az összeadásra nézve, azaz:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Megjegyzés: A műveletek elvégzése során az algebrában megtanult szabályokat és azonosságokat alkalmazzuk úgy, hogy kihasználjuk az $i = \sqrt{-1}$ összefüggésből adódó $i^2 = -1$ lehetséges helyettesítést. Itt érdemes megfigyelni azt, hogy i hatványai négyes periódussal rendelkeznek, azaz

$$i = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i \cdot i^2 = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, \\ i^5 = i \cdot i^4 = i, \quad i^6 = i^2 \cdot i^4 = -1 \quad \dots$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Legyen $z_1 = 2 - 5i$ és $z_2 = -1 + 2i$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 - z_2$
- $z_1 z_2$
- $4z_1 - 3z_2$
- $(2z_1 - 3i)(1 - z_2)$
- $\operatorname{Re}(i \cdot z_1)$
- $z_1^2 - 2z_2$
- $\operatorname{Im}(z_2^2 + 2i^{10})$

Megoldás:

- Célszerű először zárójellel ellátva behelyettesíteni a kívánt értékeket a kifejezésbe, majd a komplex számokkal, mint kéttagú algebrai kifejezéseket kezelve elvégezni az algebrai átalakításokat.

$$z_1 + z_2 = (2 - 5i) + (-1 + 2i) = 2 - 5i - 1 + 2i = 1 - 3i$$

$$b) \quad z_1 - z_2 = (2 - 5i) - (-1 + 2i) = 2 - 5i + 1 - 2i = 3 - 7i$$

- A zárójel felbontásánál minden tagot minden taggal megszorozunk, majd kihasználjuk az $i^2 = -1$ összefüggést.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 5i) \cdot (-1 + 2i) = -2 + 4i + 5i - 10i^2 = -2 + 9i - 10 \cdot (-1) = 8 + 9i$$

$$d) \quad 4z_1 - 3z_2 = 4(2 - 5i) - 3(-1 + 2i) = 8 - 20i + 3 - 6i = 11 - 26i$$

$$e) \quad (2z_1 - 3i)(1 - z_2) = [2(2 - 5i) - 3i] \cdot [1 - (-1 + 2i)] =$$

Először a szögletes zárójeleken belül elvégezzük a műveleteket, majd a két zárójelet összeszorozzuk, minden tagot minden taggal.

$$= [4 - 10i - 3i] \cdot [1 + 1 - 2i] = [4 - 13i] \cdot [2 - 2i] = 8 - 8i - 26i + 26i^2 = -18 - 34i$$

f) Ebben a feladatban először el kell végezni a zárójelben szereplő műveletet, majd kiolvasni az eredmény valós részét.

$$\operatorname{Re}(i \cdot z_1) = \operatorname{Re}[i(2 - 5i)] = \operatorname{Re}[2i - 5i^2] = \operatorname{Re}[5 + 2i] = 5$$

$$g) \quad z_1^2 - 2z_2 = (2 - 5i)^2 - 2(-1 + 2i) = 4 - 20i + 5i^2 + 2 - 4i = 1 - 24i$$

$$h) \quad \operatorname{Im}(z_2^2 + 2i^{10}) = \operatorname{Im}[(-1 + 2i)^2 + 2(i^2)^5] = \operatorname{Im}[1 - 4i + 4i^2 + 2 \cdot (-1)^5] =$$

$$\operatorname{Im}(1 - 4i - 4 - 2) = \operatorname{Im}(-5 - 4i) = -4.$$

2. feladat: Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = -2 + 6i$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét:

$$a) \quad \overline{z_1} + \overline{3z_2}$$

$$b) \quad \overline{(2z_1)^2}$$

$$c) \quad \frac{z_1}{z_2}$$

$$d) \quad \frac{i}{z_1}$$

$$e) \quad 1 - \frac{3}{z_2}$$

Megoldás:

a)

$$\overline{z_1} + \overline{3z_2} = \overline{3 + 2i} + \overline{3(-2 + 6i)} = 3 - 2i - 6 - 18i = -3 - 20i$$

b)

$$\overline{(2z_1)^2} = \overline{2(3 + 2i)^2} = \overline{2(9 + 12i + 4i^2)} = \overline{2(5 + 12i)} = \overline{10 + 24i} = 10 - 24i$$

c)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{-2 + 6i} = \frac{3 + 2i}{-2 + 6i} \cdot \frac{-2 - 6i}{-2 - 6i} = \frac{-6 - 18i - 4i - 12i^2}{(-2)^2 - (6i)^2} = \frac{6 - 22i}{4 - 36i^2} = \frac{6 - 22i}{40} = \frac{6}{40} - \frac{22}{40}i$$

d)

$$\frac{i}{z_1} = \frac{i}{3 + 2i} = \frac{i}{3 + 2i} \cdot \frac{3 - 2i}{3 - 2i} = \frac{3i + 2i^2}{(3)^2 - (2i)^2} = \frac{-2 + 3i}{9 - 4i^2} = \frac{-2 + 3i}{13} = \frac{-2}{13} + \frac{3}{13}i$$

e)

$$1 - \frac{3}{z_2} = 1 - \frac{3}{-2+6i} = \frac{-2+6i-3}{-2+6i} = \frac{-5+6i}{-2+6i} \cdot \frac{-2-6i}{-2-6i} = \frac{10+30i-12i-36i^2}{(-2)^2-(6i)^2} = \frac{46+18i}{4-36i^2} = \frac{46+18i}{40}.$$

3. feladat: Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok körében:

a) $3 - 4iz = z + 5i$

b) $(1 + i + iz + z) \cdot \left(1 + \frac{i}{z}\right) = 0$

c) $z^2 + 2z + 10 = 0$

Megoldás:

a) Ebben az egyenletben az ismeretlen első hatványon szerepel, ezért ez egy elsőfokú egyenlet. Első lépésben az egyenletet rendezni kell. Egyik oldalra kerülnek az ismeretlent tartalmazó tagok, míg a másik oldalra a többiek. Ezt követően a z kiemelése után egy osztással lépünk tovább.

$$3 - 4iz = z + 5i \rightarrow 3 - 5i = z + 4iz \rightarrow 3 - 5i = z(1 + 4i)$$

$$z = \frac{3 - 5i}{1 + 4i} = \frac{3 - 5i}{1 + 4i} \cdot \frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{3 - 12i - 5i + 20i^2}{1 + 16} = \frac{-17 - 17i}{17} = -1 - i.$$

b) Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Eszerint két egyenletet kapunk:

$$(1 + i + iz + z) = 0 \quad \text{vagy} \quad \left(1 + \frac{i}{z}\right) = 0.$$

Oldjuk meg az első egyenletet:

$$1 + i + iz + z = 0 \rightarrow iz + z = -1 - i \rightarrow z(1 + i) = -1 - i$$

$$z = \frac{-1 - i}{1 + i} = \frac{-1 - i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{-1 + i - i + i^2}{1 - (i)^2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Oldjuk meg a másik egyenletet is.

$$1 + \frac{i}{z} = 0 \rightarrow \frac{i}{z} = -1 \rightarrow z = -i.$$

Tehát az egyenletnek két megoldása van: $z_1 = -1$ és $z_2 = -i$.

c) Használjuk a gyökképletet:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}i^2}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = \begin{cases} -1 + 3i \\ -1 - 3i \end{cases}.$$