

Elméleti összefoglaló:

Tétel: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$.

Bizonyítás: Ha $f(x) > 0$, akkor $|f(x)| = f(x)$. Alkalmazzuk az összetett függvény deriválási szabályát.

$$(\ln |f(x)| + c)' = (\ln(f(x)))' + c' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ha $f(x) < 0$, akkor $|f(x)| = -f(x)$. Most is az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk.

$$(\ln |f(x)| + c)' = (\ln(-f(x)))' + c' = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Azon x -ekre, ahol $f(x) = 0$, az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ függvény nincs értelmezve.

A feladatokban történő alkalmazáshoz a tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha olyan törtet kell integrálnunk, melynek számlálója a nevező deriváltjával egyenlő, akkor az integrálás eredménye a nevező abszolút értékének a logaritmus lesz.

Kidolgozott feladatok:

12. feladat: $\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 6} dx$

Megoldás: Az integrandus olyan tört, melynek számlálójában épp a nevező deriváltja áll, hiszen $(x^3 - 2x + 6)' = 3x^2 - 2$. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvényt kell integrálnunk.

Mivel most jól láthatóan $f(x) = x^3 - 2x + 6$, csak annyi a feladatunk, hogy behelyettesítsünk a szabályba.

$$\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 6} dx = \int \frac{(x^3 - 2x + 6)'}{x^3 - 2x + 6} dx = \ln |x^3 - 2x + 6| + c$$

13. feladat: $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx$

Megoldás: Most azt kell felismernünk az integranduson, hogy a számláló, csak egy konstans szorzóban tér el a nevező deriváltjától, hiszen $(e^{3x} + 5)' = 3e^{3x}$.

Ha be tudjuk csempészni a számlálóba a 3-at, akkor az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú lesz, s el

tudjuk végezni az integrálást. Hasonló esettel már találkoztunk korábban, és akkor a hiányzó konstanssal szoroztunk is, osztottunk is. Járjunk el most is így, és az osztást egyből írjuk az integrál jel elé reciprokkal történő szorzás formájában.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(e^{3x}+5)'}{e^{3x}+5} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk az

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c \text{ szabályba.}$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{(e^{3x}+5)'}{e^{3x}+5} dx = \frac{1}{3} \ln |e^{3x}+5| + c = \frac{1}{3} \ln(e^{3x}+5) + c$$

Mivel a $e^{3x}+5 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért hagyhattuk el az abszolút értéket az eredményben.

Amint látható, ha olyan törtünk van, melyben a számláló csak konstans szorzóban különbözik a nevező deriváltjától, akkor a hiányzó konstanssal szorozva és osztva is, elérhető, hogy

$\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen az integrandus.

14. feladat: $\int \frac{x}{x^2+4} dx$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a nevező deriváltja $(x^2+4)' = 2x$, csak egy konstans

szorzóban tér el a tört számlálójától, ami x . Ahhoz, hogy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen az

integrandus, szükség lenne a számlálóban egy 2-es szorzóra. Az előbbiek szerint szorozzunk 2-vel, és osszuk is 2-vel. Az osztást egyből írjuk az integrál elé $\frac{1}{2}$ -del szorzás formájában.

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx$$

Már csak be kell helyettesítenünk a szabályba.

$$\frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+4| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + c$$

Az abszolút érték most is elhagyható az eredményben, hiszen $x^2+4 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

15. feladat: $\int \operatorname{tg} x dx$

Megoldás: Használjuk fel a $\operatorname{tg} x$ definícióját, azaz írjunk helyette $\frac{\sin x}{\cos x}$ -et.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Az integrálandó tört számlálója csak egy előjelben tér el a nevező deriváltjától, hiszen $(\cos x)' = -\sin x$. Szorozzuk meg ezért az integrandust -1 -gyel, és az integrál elé is

írjunk egy negatív előjelet. Így elérjük, hogy az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a megfelelő integrálási szabályba.

$$-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c$$

16. feladat: $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx$

Megoldás: Ugyan törtet kell integrálnunk, de most nyilván nem igaz, hogy a számlálóban a nevező deriváltja áll, hiszen a nevezőben egy szorzat van, aminek deriváltja nem 1. Látunk azonban a függvényben részletként $\operatorname{tg} x$ -et, amiről tudjuk, hogy deriváltja $\frac{1}{\cos^2 x}$, s a nevezőben szerepel a $\cos^2 x$ is. Használjuk fel a törtek azon átalakítását, amivel emeletes törtté alakíthatunk egy törtet, ha a nevezőben szorzat áll. Ezt az alábbi módon írhatjuk:

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a}.$$

Ha ezt úgy alkalmazzuk, hogy a számlálóba $\frac{1}{\cos^2 x}$ kerül, akkor ezzel a nevezőben maradó

$\operatorname{tg} x$ deriváltját kapjuk meg, azaz $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusúvá sikerül alakítanunk a függvényt.

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} dx = \int \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a szabályba.

$$\int \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x} dx = \ln |\operatorname{tg} x| + c$$

A feladatot sikerült megoldanunk, de talán többen azt mondják magukban, hogy ők bizony másképp alakították volna az integrandust. Az előző feladatban szerepelt, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, amit most is felhasználhattunk volna. Így a tört nevezőjében még egyszerűsíthetünk is.

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx =$$

Ezen a ponton azonban elakadunk. A kapott tört nem alapintegrál, és nem tudjuk egyik

könnyen integrálható függvény típust, azaz $f(ax+b)$, vagy $f^a(x) \cdot f'(x)$, vagy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sem

kialakítani. Az átalakításunk ugyan jó, de nem segít a függvény integrálásában. Az integrálási feladatokban tudatosan keresni kell, hogy a tanult szabályok közül melyik alkalmazható az adott esetben. Mivel már két olyan szabályt is láttunk, amiben függvény és deriváltja is szerepel, így kijelenthetjük, hogy a szabályok sok esetben csak akkor ismerhetők fel, ha jól ismerjük az alapderiváltakat. Ha nem tudjuk, melyik függvénynek mi a deriváltja, akkor nem fogjuk felismerni a feladatokban, hogy ezeket az integrálási szabályokat kellene alkalmaznunk. Ilyenkor könnyen kerülhetünk olyan zsákutcába, mint amibe fenti átalakításokkal jutottunk.

17. feladat: $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

Megoldás: Ilyen formában a tört számlálója nyilván nem egyenlő a nevező deriváltjával. De a nevezőben látjuk az $\ln x$ -et, amiről tudjuk, hogy deriváltja $\frac{1}{x}$, és az x is ott van a nevezőben.

Ha ugyanúgy emeletes törtté alakítunk, mint az előző feladatban, akkor most is $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú

függvényt kapunk. Vigyünk a számlálóba az $\frac{1}{x}$ -et.

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx =$$

A szokásos módon már csak behelyettesítünk a szabályba.

$$\int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$