

4.3. Műveletek trigonometrikus alakban

Trigonometrikus alakban adott komplex számok esetében elvégezhető műveletek: *szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás*.

Ha trigonometrikus alakban adott komplex számokat összeadni illetve kivonni kell, akkor először a számokat algebrai alakba váltjuk át, majd abban az alakban végezzük el a kívánt műveletet.

Szorzás, osztás, hatványozás

Tétel: Legyen $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$z_1^n = r_1^n (\cos(n\varphi_1) + i \sin(n\varphi_1)).$$

A műveletek elvégzése során ügyelni kell arra, hogy az eredmény hajlásszöge itt is a 0° és 360° tartományba essen. Ha a képletek alkalmazása során forgásszöget vagy negatív szöget kapnánk, akkor a megfelelő korrekciót el kell végezni.

1. feladat: Legyen $z_1 = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$, $z_2 = 5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ és $z_3 = 3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)$. Adja meg a következő kifejezések értékét trigonometrikus alakban:

Megoldás

a) $z_1 z_2 = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 10(\cos 345^\circ + i \sin 345^\circ)$

b) $z_3 z_2 = 3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ) \cdot 5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 15(\cos 532^\circ + i \sin 532^\circ) = 15(\cos 172^\circ + i \sin 172^\circ)$

A megoldásnál felhasználva, hogy $532^\circ - 360^\circ = 172^\circ$.

c) $\frac{z_3}{z_1} = \frac{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)}{2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)} = \frac{3}{2}(\cos 187^\circ + i \sin 187^\circ)$

d) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)}{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)} = \frac{5}{3}(\cos(-112^\circ) + i \sin(-112^\circ)) = \frac{5}{3}(\cos 248^\circ + i \sin 248^\circ)$

A megoldásnál felhasználva, hogy $-112^\circ + 360^\circ = 248^\circ$.

e) $z_1^3 = 2^3(\cos 405^\circ + i \sin 405^\circ) = 8(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

f) $z_3^4 = 3^4(\cos 1288^\circ + i \sin 1288^\circ) = 81(\cos 208^\circ + i \sin 208^\circ)$

g) $\frac{z_3}{z_1 z_2^2} = \frac{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)}{2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 5^2(\cos 420^\circ + i \sin 420^\circ)} =$

$$\frac{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)}{2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 5^2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)} =$$

$$\frac{3(\cos 322^\circ + i \sin 322^\circ)}{100(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)} = \frac{3}{2}(\cos 127^\circ + i \sin 127^\circ)$$

2. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban:
 $(-3 + 4i) \cdot 2(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)$.

Megoldás

A szorzat első tényezője algebrai alakban van adva. Ahhoz, hogy a szorzást el tudjuk végezni, ezt át kell írunk trigonometrikus alakba.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{-3} \rightarrow \beta = 53,13^\circ \rightarrow \alpha = 126,87^\circ$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

Tehát

$$-3 + 4i = 5(\cos 126,87^\circ + i \sin 126,87^\circ).$$

Így már el lehet végezni a szorzást, az eredmény:

$$5(\cos 126,87^\circ + i \sin 126,87^\circ) \cdot 2(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ) = 10(\cos 236,87^\circ + i \sin 236,87^\circ).$$

3. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban: $\frac{3i}{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}$.

Megoldás

$$\frac{3i}{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} = \frac{3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)}{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} =$$

$$\frac{3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)}{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} = \frac{3}{2}(\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)) = \frac{3}{2}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ).$$

4. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban: $(3 - 3i)^4$.

Megoldás

Negyedik hatványra trigonometrikus alakban célszerű emelni. Ehhez az algebrai alakban adott komplex számot át kell váltani trigonometrikus alakba.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-3}{3} \rightarrow \beta = 45^\circ \rightarrow \alpha = 315^\circ$$

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

$$(3 - 3i)^4 = (\sqrt{18}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ))^4 = \sqrt{18}^4 (\cos 1260^\circ + i \sin 1260^\circ) =$$

$$324(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ).$$

Gyökvonás

Tétel: A z komplex számnak pontosan n darab n -edik gyöke van. Ha z trigonometrikus alakja $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor n -edik gyökei az

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} \right)$$

komplex számok, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Megjegyzés:

A nemnegatív valós számok halmazán a gyökvonás egyértelmű művelet, azaz egy nemnegatív valós számnak mindig pontosan egy darab n -edik gyöke van. Ettől eltérően a komplex számok körében a gyökvonás többértékű művelet.

Ha a z komplex szám n -edik gyökeit ábrázoljuk a koordináta rendszerben, akkor ($n \geq 3$ esetén) a megfelelő gyökök egy szabályos n -szög csúcsaiba mutató helyvektorok.

5. feladat Legyen $z = 32(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$. Határozzuk meg $\sqrt[5]{z}$ értékeit!

Megoldás

$$z_k = \sqrt[5]{32} \left(\cos \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} + i \sin \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Azaz:

$$k = 0 \quad z_0 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = 2(\cos 102^\circ + i \sin 102^\circ)$$

$$k = 2 \quad z_2 = 2(\cos 174^\circ + i \sin 174^\circ)$$

$$k = 3 \quad z_3 = 2(\cos 246^\circ + i \sin 246^\circ)$$

$$k = 4 \quad z_4 = 2(\cos 318^\circ + i \sin 318^\circ)$$

6. feladat Számítsuk ki $\sqrt[4]{-81}$ értékeit!

Megoldás

Az algebrai alakban adott komplex számot át kell váltani trigonometrikus alakba.

$$-81 = 81(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ).$$

Ekkor már alkalmazható a gyökvonás képlete:

$$z_k = \sqrt[4]{81} \left(\cos \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} + i \sin \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} \right), \text{ ahol } k = 0, 1, 2, 3.$$

Azaz:

$$k = 0 \quad z_0 = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = 3(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$k = 2 \quad z_2 = 3(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$$

$$k = 3 \quad z_3 = 3(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

7. feladat: Számítsuk ki $\sqrt[3]{-3-3i}$ értékeit!

Megoldás

A gyök alatt szereplő komplex számot át kell írni trigonometrikus alakba.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{3} \rightarrow \beta = 45^\circ \rightarrow \alpha = 225^\circ$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}.$$

Alkalmazva a gyökvonás képletét:

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{18}} \left(\cos \frac{225^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{225^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2$.

Azaz:

$$k = 0 \quad z_0 = \sqrt[3]{18}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = \sqrt[3]{18}(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ) .$$

$$k = 2 \quad z_2 = \sqrt[3]{18}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

8. feladat: Adja meg $\sqrt{\frac{1-i}{2(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)}}$ értékeit!

Megoldás

$$\sqrt{\frac{1-i}{2(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)}{2(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ)}$$

Alkalmazva a gyökvonás képletét:

$$z_k = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{115^\circ + k \cdot 360}{2} + i \sin \frac{115^\circ + k \cdot 360}{2} \right),$$

ahol $k = 0, 1$.

Azaz:

$$k = 0 \quad z_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos 57,5^\circ + i \sin 57,5^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos 237,5^\circ + i \sin 237,5^\circ) .$$