

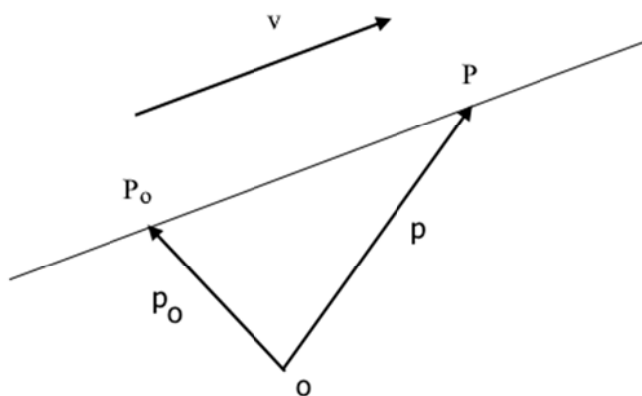
3.1. Egyenes megadása térben

Síkbeli koordinátageometriában az egyenes normálvektorának egy, az egyenesre merőleges vektort neveztünk. Térbeli egyenes esetében ez már nem egyértelmű, mert egy térbeli egyenesre végtelen sok merőleges vektor állítható, ezért a térbeli egyenes megadásához más adatra lesz szükségünk.

Legyen adott a térben egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rögzített pont és egy $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \mathbf{0}$ vektor. Ekkor pontosan egy olyan egyenes létezik, amely áthalad a P_0 ponton, és párhuzamos a \mathbf{v} vektorral. Ennek az egyenesnek a paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a P_0 rögzített pont helyvektora, a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ az egyenes egy tetszőleges P futópontjának a helyvektora, a t valós szám a paraméter, a \mathbf{v} pedig az egyenes irányvektora.



Ez annyit jelent, hogy t helyére különböző értékeket helyettesítve az egyenesen egy-egy pontot kapunk. Ez fordítva is igaz, az egyenes minden pontjának egyértelműen megfelel egy t érték.

A fenti összefüggés egy vektoregyenlet, ami azt jelenti, hogy ha az egyenlet bal és a jobb oldala megegyezik, akkor a két vektor minden koordinátája megegyezik. Felírva a koordinátákra vonatkozó egyenleteket, az egyenes **paraméteres egyenletrendszerét** kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_1 t \\ y &= y_0 + v_2 t \\ z &= z_0 + v_3 t \end{aligned} \right\} t \in \mathbb{R}.$$

Megjegyzés: Egy adott egyenes paraméteres egyenletrendszere végtelen sokféleképpen felírható!

Ha az egyenes irányvektorában egyik komponens sem nulla, akkor az egyenleteket t -re rendezve:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = (t)$$

az egyenes **paraméter nélküli** egyenletéhez jutunk.

1. feladat: Írja fel az $A(3, -1, 4)$ és $B(2, 3, -1)$ pontok által meghatározott egyenes egyenletét mindkét alakban! Adjon egy további C pontot, amely rajta van az egyenesen! Döntse el, hogy a $D(-3, 2, -1)$ pont rajta van-e az egyenesen?

Megoldás:

Az egyenes felírásához szükségünk van egy irányvektorra és egy adott pontra. Irányvektor lehet az \overrightarrow{AB} vektor, az adott pont pedig legyen az A . Mivel $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v} = (-1, 4, -5)$, ezért az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 3 - t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 4 - 5t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mivel az irányvektor egyik komponense sem nulla, ezért mindegyik egyenletet t -re rendezve megkapjuk a paraméter nélküli alakot:

$$3 - x = \frac{y + 1}{4} = \frac{4 - z}{5}.$$

Az egyenes egy tetszőleges pontját kapjuk, ha t -nek adunk egy valós értéket és ezt behelyettesítjük az egyenes paraméteres egyenletrendszerébe, így meghatározva a keresett C pont (x, y, z) koordinátáit.

Legyen például $t = 2$, ekkor $x = 1, y = 7, z = -2$, tehát az egyenes egy tetszőleges C pontja: $C(1, 7, -2)$. Világos, hogy más t érték esetén az egyenes más-más pontját kapjuk.

Egy pont akkor van rajta egy egyenesen, ha koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét. Ez a paraméteres alaknál azt jelenti, hogy minden koordináta értékhez ugyanaz a t érték tartozik. Ha $D(-3, 2, -1)$ rajta van az egyenesen, akkor D koordinátáit behelyettesítve és az egyenletrendszert megoldva mindegyik sorból azonos t -t számolunk.

$$-3 = 3 - t \rightarrow t = 6; \quad 4 = -1 + 4t \rightarrow t = \frac{5}{4}.$$

Mivel már az első két sorból különböző t értéket kaptunk, egyértelmű, hogy a D pont nincs rajta az egyenesen.

Megjegyzés: Ha az egyenes felírásánál a B pontot választottuk volna adott pontnak, akkor a következő alakot kapnánk:

$$x = 2 - t, \quad y = 3 + 4t, \quad z = -1 - 5t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Úgy tűnhet, hogy másik egyenest kaptunk, pedig nem. Ez ugyanaz az egyenes, csak más az alakja.

2. feladat: Igaz-e, hogy $e: x = 1 - 2t, y = 3 + t, z = -1 - t, t \in \mathbb{R}$ és $f: 1 - x = \frac{y + 3}{2} = \frac{2z + 1}{3}$ egyenesek párhuzamosak?

Megoldás

Két egyenes párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. Az e egyenes irányvektora könnyen kiolvasható: $\mathbf{v}_e = (-2, 1, -1)$.

Az f egyenes paraméter nélküli egyenletét alakítsuk vissza a paraméteres formába, hogy az irányvektort ki tudjuk olvasni. Tudjuk, hogy

$$f: 1 - x = \frac{y + 3}{2} = \frac{2z + 1}{3} = t,$$

innen:

$$\begin{aligned}
 1-x &= t \rightarrow x = 1-t \\
 \frac{y+3}{2} &= t \rightarrow y = -3+2t \\
 \frac{2z+1}{3} &= t \rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t.
 \end{aligned}$$

Kiolvasva az f egyenes irányvektorát: $\mathbf{v}_f = (-1, 2, 1, 5)$.

Ha két vektor párhuzamos, akkor megfelelő koordinátáik hányadosa állandó. Mivel

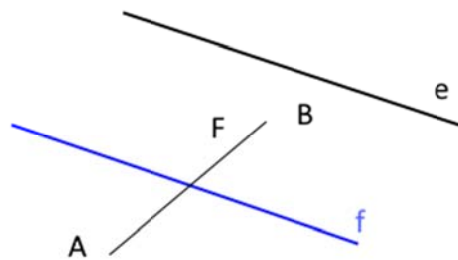
$$\frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1,5}{-1},$$

ezért a két egyenes nem párhuzamos.

3. feladat: Írja fel az AB szakasz felezőpontján átmenő, $e: \frac{x-1}{2} = \frac{2-2y}{3} = z-3$ egyenessel párhuzamos egyenes paraméter nélküli egyenletét, ha $A(2, -1, 0)$ és $B(0, -3, -2)$!

Megoldás

Készítsünk ábrát!



Legyen az általunk keresett egyenes f . Az egyenes felírásához kell egy irányvektora és egy pontja. Mivel az egyenes az AB szakasz felezőpontján megy át, ezért az lesz a rögzített pontunk. Legyen F az AB szakasz felezőpontja, ekkor annak koordinátái:

$$f_1 = \frac{2+0}{2} \rightarrow f_1 = 1$$

$$f_2 = \frac{-1+(-3)}{2} \rightarrow f_2 = -2$$

$$f_3 = \frac{0+(-2)}{2} \rightarrow f_3 = -1$$

Tehát $F(1, -2, -1)$.

Mivel $e \parallel f$, ezért az irányvektoraik párhuzamosak, tehát akár $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_f$ is lehet.

\mathbf{v}_e meghatározásához alakítsuk át az egyenes egyenletét a paraméteres alakra:

$$\frac{x-1}{2} = t \rightarrow x = 1 + 2t$$

$$\frac{2-2y}{3} = t \rightarrow y = \frac{2-3t}{2}$$

$$z-3 = t \rightarrow z = 3 + t.$$

Az egyenletből: $\mathbf{v}_e = (2, -1, 5)$. Mivel $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_f$, ezért a keresett egyenes:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1,5} = z+1$$

4. feladat: Írja fel az $A(0, -4, 3)$ és $B(-3, -1, 0)$ végpontokkal rendelkező szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontján átmenő, XY síkra merőleges egyenes paraméteres egyenletét!

Megoldás

Először keressük meg az A -hoz közelebbi harmadoló H_A pontot. Mivel:

$$h_1 = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3)}{3} \rightarrow h_1 = -1$$

$$h_2 = \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{3} \rightarrow h_2 = -3$$

$$h_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{3} \rightarrow h_3 = 2$$

A számolt koordinátáknak megfelelően:

$$H_A(-1, -3, 2).$$

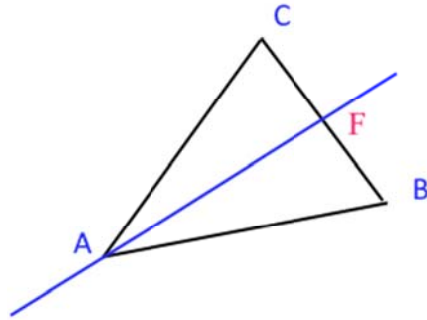
Az XY síkra merőleges egyenes párhuzamos a z tengellyel, ezért a z tengely irányába mutató bármely vektor jó lesz az általunk keresett egyenes irányvektorának is. Mivel $\mathbf{v}_z = (0, 0, 1)$, ezért a keresett egyenes:

$$x = -1, y = -3, z = 2 + t, t \in \mathbb{R}.$$

5. feladat: Írja fel az ABC háromszög A csúcsból induló súlyvonalának egyenletét, ha $A(3, 1, -2)$, $B(-3, -1, 4)$ és $C(1, 5, -6)$.

Megoldás

Tudjuk, hogy a súlyvonal a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. Ha F a BC oldal felezőpontja, akkor egy olyan egyenest kell felírnunk, amely áthalad az A és F pontokon.



A felezőpont könnyen számolható:

$$f_1 = \frac{-3+1}{2} \rightarrow f_1 = -1$$

$$f_2 = \frac{-1+5}{2} \rightarrow f_2 = 2$$

$$f_3 = \frac{4+(-6)}{2} \rightarrow f_3 = -1$$

tehát $F(-1, 2, -1)$.

A súlyvonal felírásához meghatározzuk egy irányvektorát: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AF} = (-4, 1, 1)$, adott pontnak pedig A-t választva a keresett egyenlet:

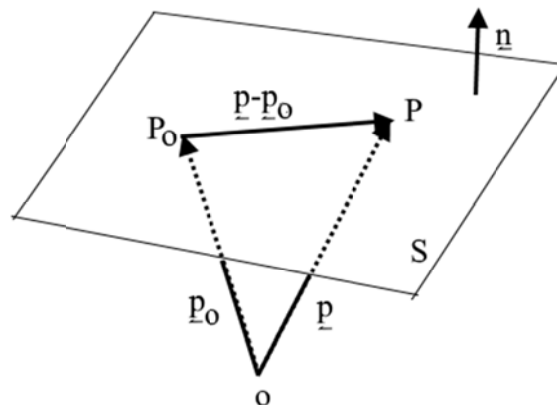
$$x = 3 - 4t, \quad y = 1 + t, \quad z = -2 + t \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sík megadása

Adott a térben egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rögzített pont és egy $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \neq \mathbf{0}$ vektor. Ekkor pontosan egy olyan sík létezik, amely áthalad a P_0 ponton, és merőleges az \mathbf{n} vektorra. Ekkor a sík normálegyenlete:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a P_0 pont helyvektora, a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ a sík egy tetszőleges P futópontjának a helyvektora, és \mathbf{n} pedig a sík egy normálvektora (a síkra merőleges vektor).



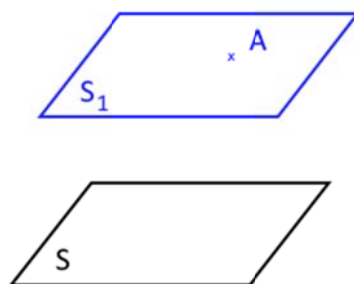
A skalárszorzat koordinátákkal felírt kiszámolási módját felhasználva megkapjuk a sík egyenletét:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

6. feladat: Írja fel az $A(2,1,-2)$ pontra illeszkedő és az $S : x - y + z = 2$ síkkal párhuzamos S_1 sík egyenletét! Adjon egy olyan B pontot, amely illeszkedik az S_1 síkra! Döntse el, hogy a $C(1,-3,2)$ pont rajta van-e az S_1 síkon?

Megoldás

A feladathoz tartozó ábra:



Két sík párhuzamos, ha normálvektoraik megegyeznek vagy párhuzamosak. Olvassuk ki az adott sík egy normálvektorát: $\mathbf{n}_S = (1, -1, 1)$, ez lehet az általunk keresett S_1 sík normálvektora is. Mivel a sík tartalmazza az A pontot, az lesz a rögzített pont. Ekkor a keresett egyenlet:

$$1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 1) - 2 \cdot (z + 2) = 0.$$

Rendezve:

$$S_1 : x + 1y - 2z = 7.$$

Ha egy B pont rajta van a síkon, akkor a pont koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Mivel most ez egy tetszőleges pont lesz, ezért két koordinátáját tetszőlegesen megválasztjuk, a harmadik koordinátát pedig helyettesítéssel számoljuk.

Legyen $B(-2, 3, z)$. Ekkor

$$-2 + 1 \cdot 3 - 2z = 7 \rightarrow z = -3,$$

tehát $B(-2, 3, -3)$.

Ha $C(1, -3, 2)$ rajta van a síkon, akkor koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Ezt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Mivel

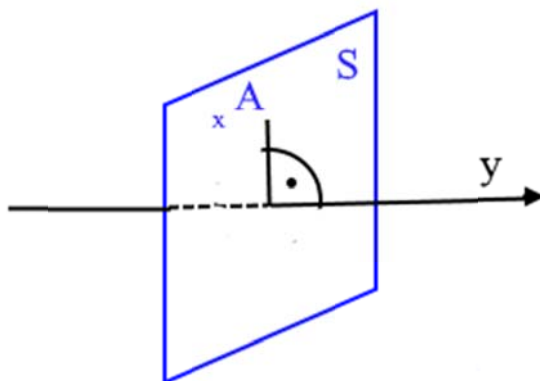
$$1 - 3 - 4 \neq 7,$$

ezért C nincs rajta az S_1 síkon.

7. feladat: Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az y tengelyre és áthalad az $A(1, -2, 3)$ ponton!

Megoldás

Készítsünk egy kész ábrát!



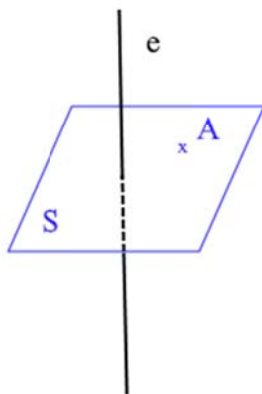
A y tengely merőleges a keresett síkra, ezért $\mathbf{n}_s = \mathbf{v}_y$ teljesül. Mivel $\mathbf{v}_y = (0, 1, 0)$, így a keresett sík:

$$S: 0(x-1) + 1(y+2) + 0(z-3) = 0 \rightarrow y = -2.$$

8. feladat: Írja fel az $e: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} = 1-z$ egyenesre merőleges és az $A(1, -2, 3)$ ponton átmenő sík egyenletét!

Megoldás

Rajzoljunk egy kész ábrát!



Az előző feladat alapján tudjuk, hogy $\mathbf{n}_s = \mathbf{v}_e$. Az egyenes irányvektorának meghatározásához vissza kell alakítani paraméteres alakba.

$$\frac{x-1}{3} = t \rightarrow x = 1 + 3t,$$

$$\frac{2-y}{2} = t \rightarrow y = 2 - 2t,$$

$$1 - z = t \rightarrow z = 1 - t.$$

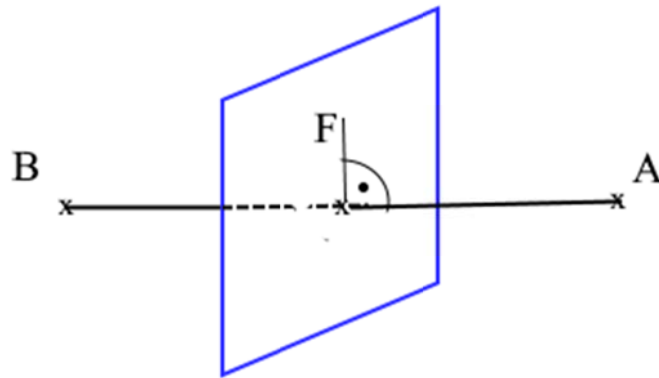
Innen $\mathbf{v}_e = (3, -2, -1)$. Mivel $\mathbf{n}_s = \mathbf{v}_e$, így a keresett sík egyenlete:

$$S: 3(x-1) - 2(y+2) + 1(z-3) = 0 \rightarrow 3x - 2y + z = 10.$$

9. feladat: Írja fel az AB szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét, ha $A(1, 2, -3)$ és $B(-3, 4, 1)$.

Megoldás

Rajzoljunk!



Először meghatározzuk a szakasz felezőpontját: $F\left(\frac{1-3}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (-1, 3, -2)$.

Mivel a felezőmerőleges egyenese merőleges a síkra, ezért $\mathbf{v}_f = \mathbf{n}_s$.

Tudjuk, hogy $\mathbf{v}_f = \overrightarrow{AB} = \mathbf{n}_s = (-4, 2, 4)$, így a keresett sík egyenlete:

$$-4(x+1) + 2(y-3) + 4(z+1) = 0,$$

átrendezve:

$$-4x + 2y + 4z = 6 \rightarrow 2x - y + 2z = 3.$$