

3.4. Összetett feladatok

1. **feladat:** Írja fel az $A(1,3,-2)$ ponton áthaladó, az e és f egyenesekre merőleges g egyenes egyenletét, ha

$$e: x = y = z \quad f: -x = z, \quad y = 3.$$

Adja meg a g egyenes és az xy sík metszéspontját!

Megoldás

Az egyenes egyenletrendszerének felírásához szükségünk van egy pontra és egy irányvektorra. Egy pontja adott a keresett egyenesnek. Nézzük meg, hogy mit tudunk mondani a keresett egyenes egy irányvektoráról. Jelölje \mathbf{v}_e , \mathbf{v}_f és \mathbf{v}_g az e, f és g egyenesek irányvektorait. Ha a keresett g egyenes merőleges e és f egyenesekre, akkor $\mathbf{v}_g \perp \mathbf{v}_e$ és $\mathbf{v}_g \perp \mathbf{v}_f$ is teljesül. Tehát egy olyan vektort keresünk, amelyik merőleges a két ismert vektorra. A $\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f$ éppen megfelel a feltételeknek, mivel az merőleges a \mathbf{v}_e és a \mathbf{v}_f vektorokra is, azaz legyen $\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f$.

Kiolvassa az egyenesek irányvektorait:

$$\mathbf{v}_e = (1,1,1) \quad \mathbf{v}_f = (-1,0,1).$$

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Eszerint a g egyenes egyenlete:

$$g: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = z+2.$$

Meg kell határoznunk a most felírt egyenes és az xy sík metszéspontját. Ehhez írjuk fel a g egyenes egyenletét paraméteres alakban. Ehhez a következőből kell elindulni:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = z+2 = t,$$

majd változónként külön-külön rendezéssel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{x-1}{1} = t \rightarrow x = 1+t$$

$$\frac{y-3}{-2} = t \rightarrow y = 3-2t$$

$$z+2 = t \rightarrow z = -2+t.$$

Mi az egyenesnek azt az M pontját keressük, amelyik rajta van az xy síkon. Az ilyen pont koordinátái általánosan: $M(x, y, 0)$. Mivel a harmadik koordináta 0 , ezt behelyettesítve az egyenes egyenletrendszerébe:

$$z = -2+t \quad 0 = -2+t \quad t = 2.$$

A kapott t értéket visszahelyettesítve számoljuk a pont hiányzó koordinátáit:

$$x = 1 + t \quad x = 1 + 2 = 3$$

$$y = 3 - 2t \quad y = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Tehát a keresett metszéspont:

$$M(3, -1, 0).$$

2. feladat: Adottak az $A(3, -1, 2)$, $B(4, 1, 1)$ és $C(7, -2, 5)$ pontok.

- Írjuk fel az ABC háromszög S súlypontján átmenő, a háromszög síkjára merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét!
- Írjuk fel a háromszög síkjának egyenletét!
- Adja meg a háromszög B csúcsából induló magasságának hosszát!

Megoldás

- a) Mivel az \overrightarrow{AB} és az \overrightarrow{AC} vektor is a három pontra illeszkedő síkban van, ezért vektoriális szorzatuk merőleges lesz a síkra. Mivel az általunk keresett egyenes is merőleges a síkra, ezért a keresett egyenes egy irányvektora legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Végezzük el a számolást:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (4, -1, 3)$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -7, -9).$$

Meg kell még határoznunk a háromszög súlypontjának koordinátáit:

$$s_1 = \frac{3+4+7}{3} \quad s_1 = \frac{14}{3}$$

$$s_2 = \frac{-1+1+(-2)}{3} \quad s_2 = -\frac{2}{3}$$

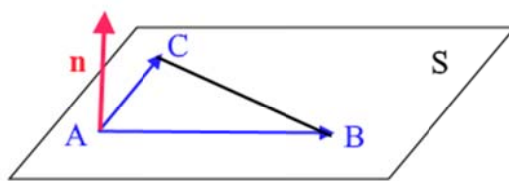
$$s_3 = \frac{2+1+5}{3} \quad s_3 = \frac{8}{3}$$

$$S\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

A keresett egyenes:

$$e: x = \frac{14}{3} + 5t, \quad y = -\frac{2}{3} - 7t, \quad z = \frac{8}{3} - 9t \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b) A háromszög síkjának felírásához szükséges a sík egy normálvektora és egy ismert pontja.



A normálvektor merőleges a síkra, így kihasználva az előző feladatrészen kapott eredményt:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -7, -9).$$

A sík egyenletét az \mathbf{n} normálvektor és az A pont segítségével írjuk fel:

$$5(x-3) - 7(y+1) - 9(z-2) = 0$$

Átrendezve:

$$5x - 7y - 9z = 4.$$

- c) A B csúsból induló magasságának hossza nem más, mint a B csúsból az AC oldalra bocsátott merőleges szakasz hossza. Másképpen fogalmazva, a B csúcs és az AC oldalegyenes távolsága. Ezt viszont a következőképpen lehet számolni:

$$d_{B,AC} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Kihasználva az első részben kapott eredményeket:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -7, -9) \quad \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + (-7)^2 + (-9)^2} = \sqrt{155}$$

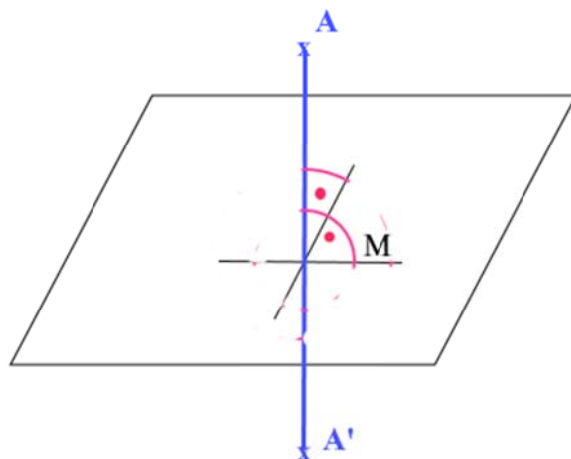
$$\overrightarrow{AC} = (4, -1, 3) \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

Tehát a keresett magasság hossza: $\frac{\sqrt{155}}{\sqrt{26}} \approx 2,44$.

3. feladat: Tükrözzük az $A(-2, 1, -1)$ pontot az $S: x + y + z = 1$ egyenletű síkra!

Megoldás

Egy pontot egy síkra úgy tükrözzük, hogy először a pontból merőlegest állítunk a síkra, megkeressük a merőleges egyenes és a sík M metszéspontját, majd kihasználjuk, hogy ez a metszéspont felezőpontja az eredeti pont és a tükörkép alkotta szakasznak.



Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor a sík egy normálvektora lehet az egyenes egy irányvektora. Hívjuk ezt az egyenest e egyenesnek, ekkor

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{n}_s = (1, 1, 1)$$

Felírhatjuk a síkra merőleges, az A ponton átmenő e egyenes egyenletét:

$$e: x = -2 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = -1 + t \quad t \in \mathbb{R}$$

Az M metszéspont meghatározásához helyettesítsük be az e egyenes egyenletét az S sík egyenletébe:

$$-2 + t + 1 + t - 1 + t = 1 \rightarrow -2 + 3t = 1 \rightarrow t = 1$$

azaz

$$M(-1, 2, 0).$$

Kihasználva, hogy M felezőpont és a tükörkép pontot $A'(x, y, z)$ módon jelölve, a felezőpontra vonatkozó összefüggés alapján:

$$-1 = \frac{-2 + x}{2} \rightarrow x = 0$$

$$2 = \frac{1 + y}{2} \rightarrow y = 3$$

$$0 = \frac{-1 + z}{2} \rightarrow z = 1$$

A keresett tükörkép:

$$A'(0, 3, 1).$$

4. feladat: Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2, 3, 5)$ ponton és illeszkedik az y tengelyre!

Megoldás

A sík megadásához szükségünk van egy pontra és egy normálvektorra. A pont adott, a normálvektort kell meghatároznunk. Ha a sík illeszkedik egy egyenesre, akkor a sík egy normálvektora merőleges lesz az egyenesre, és így az egyenes egy irányvektorára is. Tehát olyan \mathbf{n} normálvektort keresünk, amely merőleges az y tengely $\mathbf{v}_y = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ irányvektorára.

Másrészt, ha megadnánk egy Q pontot az y tengelyen, akkor a \overrightarrow{QP} vektor illeszkedik a síkra, tehát merőleges az \mathbf{n} normálvektorra. Adjunk meg egy pontot az y tengelyről! A

legegyszerűbb az origó, azaz $Q(0,0,0)$. Ekkor $\overrightarrow{QP} = (2,3,5)$. Tehát keresünk egy \overrightarrow{QP} és \mathbf{v}_y vektorokra merőleges vektort. A feltételnek megfelel a vektoriális szorzata. Ezért legyen

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{QP} \times \mathbf{v}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-5, 0, 2).$$

Az S sík egyenlete:

$$S: -5(x-2) + 0(y-3) + 2(z-5) = 0.$$

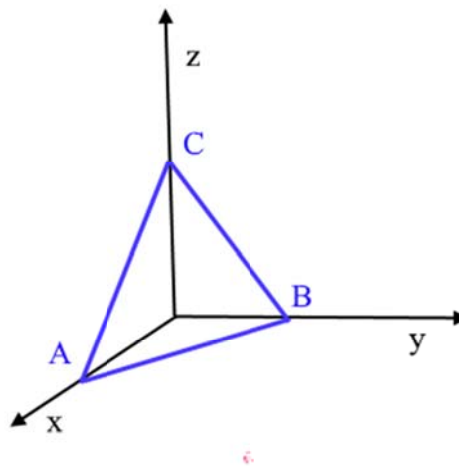
Rendezéssel a következő egyenlethez jutunk:

$$-5x + 2z = 0.$$

5. feladat: Mekkora területű háromszöget metszenek ki a koordinátasíkok az $S: 2x - y + 3z = 6$ egyenletű síkból?

Megoldás

Határozzuk meg először a kimetszett háromszög csúcspontjainak koordinátáit.



Az x tengelyre eső A csúcsponttól tudjuk, hogy a második és harmadik koordinátája 0 , azaz $y = z = 0$. A sík egyenlete alapján, akkor $x = 3$.

Az y tengelyen lévő B csúcspontnál $x = z = 0$, behelyettesítve a sík egyenletébe: $y = -6$.

A z tengelyen lévő C csúcspont koordinátái, ha $x = y = 0$, akkor $z = 2$.

Tehát a csúcspontok:

$$A(3,0,0) \quad B(0,-6,0) \quad C(0,0,2).$$

Válasszuk ki az egyik pontot, például A -t. Indítsunk vektorokat A -ból a háromszög másik két csúcába. A megadott két vektor kifeszíti a háromszöget és területe pedig

$$t = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Végezzük el a számolást!

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -6, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-12, 6, -18)$$

$$t = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 36 + 324} = \sqrt{126}.$$

6. feladat: Adott az $ABCD$ tetraéder, ahol $A(4, 7, 6)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-1, 5, 3)$ és $D(4, -5, 2)$.

- Határozzuk meg a tetraéder ABC és BCD oldallapjai által bezárt szögét!
- Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéderben az ABC oldallap és az AD oldalegyenes által bezárt szöget!

Megoldás

- Két sík hajlásszöge megadható, ha ismerjük a síkok normálvektorainak hajlásszögét, tehát nem kell a síkok egyenletét felírni, elég a normálvektort ismerni. Ezért állítsuk elő a feladatban szereplő síkok egy-egy normálvektorát.

Az ABC oldallap normálvektora egy olyan vektor lehet, amely merőleges az ABC síkra. Az adatokból ismerhetünk két olyan vektort, amely benne van az említett síkban, ezek az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} vektorok. A keresett normálvektor mindkét vektorra merőleges, tehát adódik, hogy válasszuk normálvektornak az $\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Adatokkal:

$$\overrightarrow{AB} = (-4, -6, -8) \quad \overrightarrow{AC} = (-5, -2, -3),$$

$$\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -6 & -8 \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (2, 28, -22),$$

$$\mathbf{n}_{ABC} = \sqrt{2^2 + 28^2 + (-22)^2} = 2\sqrt{318}$$

Hasonló megfontolások alapján a BCD oldallap egy normálvektora pedig legyen $\mathbf{n}_{BCD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}$.

Adatokkal:

$$\overrightarrow{BD} = (4, -6, 4) \quad \overrightarrow{BC} = (-1, 4, 5)$$

$$\mathbf{n}_{BCD} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (-46, -24, 10)$$

$$\mathbf{n}_{BCD} = \sqrt{(-46)^2 + (-24)^2 + 10^2} = 2\sqrt{698}.$$

Ekkor:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{n}_{ABC}, \mathbf{n}_{BCD} \rangle}{\|\mathbf{n}_{ABC}\| \|\mathbf{n}_{BCD}\|} = \frac{2 \cdot (-46) + 28 \cdot (-24) + (-22) \cdot 10}{2\sqrt{318} \cdot 2\sqrt{698}} =$$

$$= \frac{-984}{4\sqrt{221964}} \quad \varphi \approx 121,48^\circ$$

Mivel $90^\circ < \varphi$, ezért a két sík hajlásszöge:

$$\alpha = 180^\circ - \varphi \approx 180^\circ - 121,48^\circ \approx 58,52^\circ.$$

- b) A hajlásszög meghatározásához elegendő ismerni az ABC oldallap egy normálvektorát és az AD oldalegyenes egy irányvektorát. Használjuk fel, hogy az előző részben már meghatároztuk az ABC oldallap egy normálvektorát:

$$\mathbf{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 28, -22)$$

Az AD oldalegyenes egy irányvektora lehetne az:

$$\overrightarrow{AD} = (0, -12, -4).$$

Ekkor a keresett szög:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n}_{ABC} \rangle}{\|\overrightarrow{AD}\| \|\mathbf{n}_{ABC}\|} = \frac{0 \cdot 2 + (-12) \cdot 28 + (-4) \cdot (-22)}{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 28^2 + (-22)^2}} = \\ &= \frac{-248}{4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{318}} \approx -0,5497 \quad \varphi \approx 123,35^\circ. \end{aligned}$$

Mivel $90^\circ < \varphi$, ezért a keresett hajlásszög:

$$\alpha = \varphi - 90^\circ \approx 123,35^\circ - 90^\circ \approx 33,35^\circ.$$