

További kidolgozott feladatok:

23. feladat: $\int \frac{1}{1+9x^2} dx$

Megoldás: Az integrandus ezen alakjából nem igazán látszik az, hogyan tudnánk elvégezni az integrálást. Viszont észrevehetjük, hogy az integrálandó függvény nagyon hasonlít az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényre, ami alapintegrál. A különbség az x^2 előtt álló 9-es szorzóban van. Ha egy kicsit alakítunk a függvényen, és a $9x^2$ -et $(3x)^2$ formában írjuk, akkor lényegében az $\frac{1}{1+x^2}$ -et kapjuk, csak az x szerepét a $3x$ veszi át. Az integrál így a következő alakot ölti:

$$\int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx.$$

Ebből már látható, hogy olyan összetett függvényünk van, amelynek belső függvénye

elsőfokú. A lecke elején megismert $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt alkalmazhatjuk

tehát. Most azonban nem volt olyan egyértelmű, hogy ilyen típusú az integrál. Ez csak átalakítás után válik egyértelművé. A szabály ezután a következő módon használható.

A külső függvény most $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ami egy alapintegrál: $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$.

A belső függvény $3x$, tehát $a = 3$, és $b = 0$.

Behelyettesítve a szabályba a következő eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx = \frac{\arctg 3x}{3} + c.$$

A feladatból jól látszik, hogy az alapintegrálok biztos ismerete nagyon fontos. Csak akkor jöhet rá valaki, hogy milyen alakban kell írni az integrandust, ha tisztában azzal, hogy $\frac{1}{1+x^2}$ egy alapintegrál. Ezután már könnyű észrevenni ezen alapintegrál, és az integrandus közötti hasonlóságot.

24. feladat: $\int \frac{1}{4+x^2} dx$

Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőre. Az integrandus alig különbözik az $\frac{1}{1+x^2}$ alapintegráltól, de most más helyen tér el attól, mint az előző feladatban. Elsőként azt lenne jó elérnünk, hogy a nevezőben a 4 helyén 1 álljon, ezért célszerű kiemelni $\frac{1}{4}$ -et.

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} dx$$

Ezzel elértük, hogy az integrandus lényegében olyan, mint az előző feladatban, csak x^2 együtthatója nem egy egész szám, hanem egy tört. Írjunk ezután az $\frac{x^2}{4}$ helyett $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ -t, amit

$\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ formában is írhatunk.

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx$$

Így már egyértelmű, hogy megint olyan összetett függvényt kell integrálnunk, amiben a belső függvény lineáris, s amelyben $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a külső függvény. Ennek integrálja már

korábban is szerepelt: $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$.

A belső függvény most $\frac{1}{2}x$, azaz $a = \frac{1}{2}$ és $b = 0$.

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt, azaz integráljuk a külső függvényt,

alkossunk összetettelt a lineáris belső függvénnyel, és osszuk a belső függvényből x együtthatójával. Így eredményünk az alábbi lesz:

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx = \frac{1}{4} \frac{\arctg \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + c.$$

25. feladat: $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx$

Megoldás: A feladat hasonlít az előző kettőre, azonban míg az ottani törtek nevezőjében csak egy négyzetes tag és egy konstans állt, most elsőfokú tag is van. Középiskolában megismertük a másodfokú kifejezések teljes négyzetté alakítását. Ha ezt alkalmazzuk, akkor most is elérhetjük, hogy a nevezőben csak másodfokú és konstans tag álljon.

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1$$

Írjuk ezt be az integrálba.

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx = \int \frac{1}{(x-3)^2 + 1} dx$$

Azt láthatjuk, hogy lényegében megint az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényt kaptuk, csak az x szerepét az

$x-3$ vette át. Olyan összetett függvényt kell tehát integrálnunk, aminek külső függvénye az

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény, aminek integrálja: $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$.

A belső függvény most $x-3$, azaz $a = 1$ és $b = -3$.

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt.

$$\int \frac{1}{(x-3)^2+1} dx = \frac{\operatorname{arctg}(x-3)}{1} + c = \operatorname{arctg}(x-3) + c$$

26. feladat: $\int \frac{7}{25x^2+20x+13} dx =$

Megoldás: Olyan tört áll az integrandusban, melynek számlálója konstans, nevezője pedig egy másodfokú kifejezés. Hasonlóval találkoztunk az előző három feladatban is, csak azokban a nevezőben álló másodfokú kifejezés sokkal egyszerűbb volt. Ezekben a feladatokban olyan összetett függvénné tudtuk alakítani az integrandust, melyeknek lineáris volt a belső függvénye. Most is megpróbálhatjuk ezt elérni. Hajtsunk végre olyan átalakításokat, mint az előző három feladatban. Első lépésként alakítsunk teljes négyzetté a nevezőben, a számlálóból a konstans pedig emeljük ki.

$$\int \frac{7}{25x^2+20x+13} dx = 7 \int \frac{1}{(5x+2)^2+9} dx$$

Ezután emeljük ki a nevezőből a 9-et, hogy helyén 1 maradjon. Azért tesszük ezt, mert a függvény így egyre jobban hasonlít majd az $\frac{1}{1+x^2}$ alapintegrálra.

$$7 \int \frac{1}{(5x+2)^2+9} dx = \frac{7}{9} \int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9}+1} dx$$

Az $\frac{(5x+2)^2}{9}$ -et írjuk inkább $\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2$ alakban.

$$\frac{7}{9} \int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9}+1} dx = \frac{7}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1} dx$$

Utolsó átalakításként pedig az $\frac{5x+2}{3}$ helyett használjuk inkább az $\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$ alakot, valamint cseréljük meg a nevezőben a tagok sorrendjét.

$$\frac{7}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1} dx = \frac{7}{9} \int \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2} dx$$

Ezen alakból már jól látszik, hogy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek külső függvénye az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alapintegrál, amiből $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$. A belső

függvénye pedig az $\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$ lineáris függvény, azaz $a = \frac{5}{3}$ és $b = \frac{2}{3}$.

Alkalmazzuk az ilyen összetett függvényekre vonatkozó $\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

integrálási szabályt. Az alábbi eredményt kapjuk:

$$\frac{7}{9} \int \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2} dx = \frac{7}{9} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)}{\frac{5}{3}} + c = \frac{7}{15} \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right) + c$$

A feladat megoldása során alkalmazott eljárás segítségével integrálhatjuk az összes olyan törtet, melynek számlálója konstans, nevezője pedig szorzattá nem bontható másodfokú kifejezés. Ilyenkor a nevezőben teljes négyzetté alakítunk, majd kiemeléssel elérjük, hogy az összegben szereplő konstans tag 1 legyen. A nevezőben szereplő másik tagot úgy alakítjuk, hogy egy elsőfokú kifejezés négyzete legyen. Ekkor olyan összetett függvényt kapunk, melynek külső függvénye $\frac{1}{1+x^2}$, belső függvénye pedig lineáris.

27. feladat: $\int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx$

Megoldás: Az integrandus egy szorzat, melynek első tényezője egy polinom, második tényezője pedig a $\cos x$. Ilyen esetben a parciális integrálás $\left(\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v \right)$ vezet célhoz.

Legyen $u = 4x^2 - 6x + 5$ és $v' = \cos x$.

Ekkor $u' = 8x - 6$ és $v = \sin x$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx = (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x - \int (8x - 6) \cdot \sin x dx$$

A még meghatározandó integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti feladat volt, csak 1-gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást.

Legyen $u = 8x - 6$ és $v' = \sin x$.

Ekkor $u' = 8$ és $v = -\cos x$.

Amikor a szabályba helyettesítünk, akkor figyeljünk oda, hogy az integrál előtt negatív előjel állt, ami az integrál helyére kerülő mindkét tagra vonatkozik majd. Ezért célszerű zárójelbe tenni a behelyettesítésnél, hogy csökkentsük a hibázás veszélyét.

$$\int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx = (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x - \left((8x - 6) \cdot (-\cos x) - \int 8(-\cos x) dx \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstans az integrálból.

$$\int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx = (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8 \int \cos x dx$$

Már csak egy alapintegrálunk van, melyet behelyettesítünk, majd amit lehet összevonunk. Az eredmény a következő:

$$\begin{aligned} \int (4x^2 - 6x + 5) \cdot \cos x dx &= (4x^2 - 6x + 5) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8 \sin x + c = \\ &= (4x^2 - 6x - 3) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x + c. \end{aligned}$$

28. feladat: $\int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx$

Megoldás: Az előzőhöz nagyon hasonló feladatunk van. Ugyanúgy parciális integrálással próbálkozhatunk.

Legyen $u = x^2 + 4x - 7$ és $v' = \operatorname{sh}(3x - 8)$.

Ekkor $u' = 2x + 4$ és $v = \frac{\operatorname{ch}(3x - 8)}{3}$.

A v meghatározásakor figyeljünk oda arra, hogy $v' = \operatorname{sh}(3x - 8)$ olyan összetett függvény, aminek belső függvénye elsőfokú. Az integrálás során ne felejtünk el osztani a belső függvényből x együtthatójával.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx = (x^2 + 4x - 7) \cdot \frac{\operatorname{ch}(3x - 8)}{3} - \int (2x + 4) \cdot \frac{\operatorname{ch}(3x - 8)}{3} dx$$

A konstans szorzókat célszerű egy-egy tagban előre emelni.

$$\int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx = \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) - \frac{1}{3} \int (2x + 4) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) dx$$

A megmaradt integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti volt, csak 1-gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást.

Legyen $u = 2x + 4$ és $v' = \operatorname{ch}(3x - 8)$.

$$\text{Ekkor } u' = 2 \text{ és } v = \frac{\operatorname{sh}(3x - 8)}{3}.$$

Amikor a szabályba helyettesítünk, akkor figyeljünk oda, hogy az integrál előtti $-\frac{1}{3}$ szorzó az integrál helyére kerülő mindkét tagra vonatkozik majd. Ezért célszerű zárójelbe tenni a behelyettesítésnél, hogy csökkentsük a hibázás veszélyét.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx &= \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) - \frac{1}{3} \left((2x + 4) \cdot \frac{\operatorname{sh}(3x - 8)}{3} - \int 2 \cdot \frac{\operatorname{sh}(3x - 8)}{3} dx \right) \end{aligned}$$

Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstans az integrálból.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx &= \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) - \frac{1}{9} (2x + 4) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) + \frac{2}{9} \int \operatorname{sh}(3x - 8) dx \end{aligned}$$

Már csak egy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, aminek belső függvénye elsőfokú. Amikor először alkalmaztuk a parciális integrálást, akkor már integráltuk is ezt a függvényt, hiszen akkor ez volt a v' -nek választott tényező. Az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx &= \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) - \frac{1}{9} (2x + 4) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) + \frac{2}{9} \frac{\operatorname{ch}(3x - 8)}{3} + c = \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) - \frac{1}{9} (2x + 4) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) + \frac{2}{27} \operatorname{ch}(3x - 8) + c. \end{aligned}$$

Ha összevonjuk a két $\operatorname{ch}(3x - 8)$ -at tartalmazó tagot, akkor az eredmény kicsit rövidebben is írható.

$$\int (x^2 + 4x - 7) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) dx = \frac{1}{3} \left(x^2 + 4x - \frac{61}{9} \right) \cdot \operatorname{ch}(3x - 8) - \frac{1}{9} (2x + 4) \cdot \operatorname{sh}(3x - 8) + c.$$

29. feladat: $\int 3^x \cdot \cos x dx$

Megoldás: Az integrandus olyan szorzat, melynek egyik tényezője exponenciális, másik tényezője pedig a $\sin x$ vagy $\cos x$ függvények valamelyike. Ilyen esetben is sokszor célszerű a parciális integrálás alkalmazása, sőt kétszer is kell használni a szabályt. Az ilyen integrandus esetén mindegy, hogyan osztjuk ki a szerepeket az első parciális integrálás során. Legyen most $u = 3^x$ és $v' = \cos x$ a szereposztás.

Ekkor $u' = 3^x \cdot \ln 3$ és $v = \sin x$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x - \int 3^x \cdot \ln 3 \cdot \sin x dx$$

Emeljük ki az integrálból a konstans $\ln 3$ -at, majd osszuk ki a következő parciális integráláshoz a szerepeket. Itt már nem mindegy, hogyan választunk. Ugyanúgy kell kiosztanunk a szerepeket, mint az első esetben.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x - \ln 3 \int 3^x \cdot \sin x dx$$

Legyen tehát $u = 3^x$ és $v' = \sin x$ a szereposztás.

Ekkor $u' = 3^x \cdot \ln 3$ és $v = -\cos x$.

Újra helyettesítsünk a szabályba.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x - \ln 3 \cdot (3^x \cdot (-\cos x) - \int 3^x \cdot \ln 3 \cdot (-\cos x) dx)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és ismét emeljük ki a konstans az integrálból.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x - \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x dx$$

Így lényegében egy olyan egyenletet kaptunk, amiben az integrál az ismeretlen, mert a kétszeri parciális integrálás után az eredeti integrál szám szorosát kaptuk. Annyi a feladatunk, hogy ebből az egyenletből kifejezzük az integrált. Első lépésként adjunk mindkét oldalhoz

$$\ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x dx \text{ -et.}$$

$$\int 3^x \cdot \cos x dx + \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x + c$$

Emeljük ki az integrált a bal oldalon.

$$(1 + \ln^2 3) \int 3^x \cdot \cos x dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x + c$$

Végül osszuk az egyenlet mindkét oldalát $(1 + \ln^2 3)$ -mal.

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = \frac{1}{1 + \ln^2 3} (3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x) + c$$

Ha az eredményből kiemeljük a 3^x -t, akkor a következő alakban is megadható:

$$\int 3^x \cdot \cos x dx = \frac{3^x}{1 + \ln^2 3} (\sin x + \ln 3 \cdot \cos x) + c.$$

30. feladat: $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$

Megoldás: A feladat hasonlít az előzőre. Olyan szorzatot kell integrálnunk, melynek egyik tényezője exponenciális, másik tényezője pedig \sin . Most is parciális integrálással célszerű próbálkoznunk, és tetszőlegesen oszthatjuk ki a szerepeket.

Legyen pl. $u = e^{2x}$ és $v' = \sin 3x$.

$$\text{Ekkor } u' = 2e^{2x} \text{ és } v = -\frac{\cos 3x}{3}.$$

Szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy mindkét tényező olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú. Figyeljünk oda, mert amikor u -ból u' -t állítjuk elő, akkor a deriválásnál a belső függvény deriváltjával szoroznunk kell a külső függvény deriváltját, amikor pedig v' -ből állítjuk elő v -t, azaz integrálunk, akkor a belső függvényből x együtthatójával osztanunk kell a külső függvény integrálját.

Helyettesítsünk be ezután a szabályba.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) - \int 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) dx$$

Mielőtt újra alkalmaznánk a parciális integrálást, célszerű ezt egy kicsit rendezni, s a konstansokat kiemelni a tagokban.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \cos 3x dx$$

Most újra osszuk ki a szerepeket immáron figyelve arra, hogy ugyanúgy tegyük ezt, mint az első esetben.

Legyen $u = e^{2x}$ és $v' = \cos 3x$.

Ekkor $u' = 2e^{2x}$ és $v = \frac{\sin 3x}{3}$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \left(e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} dx \right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és a konstansokat most is emeljük ki a tagokból.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$$

A kétszeri parciális integrálás után az eredeti integrál egy szám szorosát kaptuk a jobb oldalon. Így annyi a feladatunk, hogy a kapott egyenletből fejezzük ki az integrált. Adjunk

hozzá mindkét oldalhoz $\frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$ -et.

$$\frac{13}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cdot \sin 3x + c$$

Végül osszunk $\frac{13}{9}$ -del, azaz szorozzunk $\frac{9}{13}$ -dal.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{3}{13} e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{13} e^{2x} \cdot \sin 3x + c$$

Ha az eredményből kiemelünk amit lehet, akkor az alábbi formában is írható:

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = \frac{e^{2x}}{13} (2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + c.$$