

### 3.2.Tételek kölcsönös helyzete, közös pontjai

#### Két egyenes metszéspontja

Mivel közös pontot keresünk, ezért két ismeretlenes, de három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. Ezt úgy érdemes megtenni, hogy tetszőlegesen kiválasztunk két egyenletet, azokat megoldjuk, majd leellenőrizzük, hogy a kapott megoldás kielégíti-e a harmadik egyenletet. Ha igen, akkor van megoldás, azaz a két egyenes metszi egymást, ha nem, akkor nincs megoldás, azaz a két egyenes nem metszi egymást. Ezeket ilyenkor kitérő egyeneseknek nevezzük.

**1. feladat:** Határozzuk meg az  $e: x = 2 + t, y = -1 - t, z = 1 - 2t \quad t \in R$  és az  $f: x = 4 + t, y = 1 + 3t, z = t \quad t \in R$  egyenesek metszéspontját, ha létezik!

#### Megoldás

Az egyenesek irányvektorai:  $\mathbf{v}_e = (1, -1, -2)$  és  $\mathbf{v}_f = (1, 3, 1)$ . Mivel a két irányvektor nem párhuzamos egymással, ezért a két egyenes sem az, tehát vagy metszik egymást vagy kitérők. Próbáljunk metszéspontot keresni. Ebben az esetben célszerű a két egyenes egyenletében szereplő paramétert más-más betűvel jelölni, ezért az  $f$  egyenes paraméterét a továbbiakban  $u$ -val jelöljük. Ha a két egyenesnek van metszéspontja, akkor az azt jelenti, hogy van olyan  $t$  és  $u$  paraméter, amelyek ugyanazt az  $M(x, y, z)$  pontot határozzák meg. Ez azt jelenti, hogy ennek a két paraméternek ki kell elégítenie a következő egyenletrendszert:

$$2 + t = 4 + u \quad -1 - t = 1 + 3u \quad 1 - 2t = u.$$

A harmadik egyenletből megvan  $u$ , ezt beírva az első egyenletbe:

$$2 + t = 4 + 1 - 2t \rightarrow t = 1 \rightarrow u = -1$$

Ha van metszéspont, akkor ezeknek az értékeknek ki kell elégíteniük az eddig általunk fel nem használt második egyenletet is. Ha ez nem teljesül, akkor a két egyenesnek nincs metszéspontja.

Behelyettesítve a második egyenletbe:

$$-1 - 1 = 1 + 3 \cdot (-1)$$

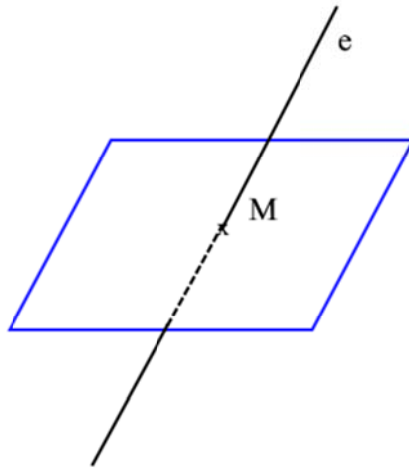
Az egyenlőség teljesül, tehát van metszéspont. Ez a metszéspont meghatározható a  $t$  paraméterrel az  $e$  egyenesből, vagy az  $u$  paraméterrel az  $f$  egyenesből is.

Ha a  $t = 1$  értéket behelyettesítjük az  $e$  egyenesbe, akkor a metszéspont:  $M(3, -2, -1)$

#### Egyenes és sík metszéspontja

**2. feladat:** Határozzuk meg az  $e: x = 2 + t, y = -2 + t, z = 3t \quad t \in R$  egyenes és az  $S: x - 2y + 5z = 20$  sík metszéspontját!

## Megoldás



Keressük azt az egyenesen lévő  $M(2+t, -2+t, 3t)$  pontot, amely rajta van az  $S$  síkon is. Ha egy pont rajta van a síkon, akkor koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Helyettesítsük be a pont koordinátáit a sík egyenletébe:

$$(2+t) - 2(-2+t) + 5(3t) = 20 \rightarrow 14t = 14 \rightarrow t = 1.$$

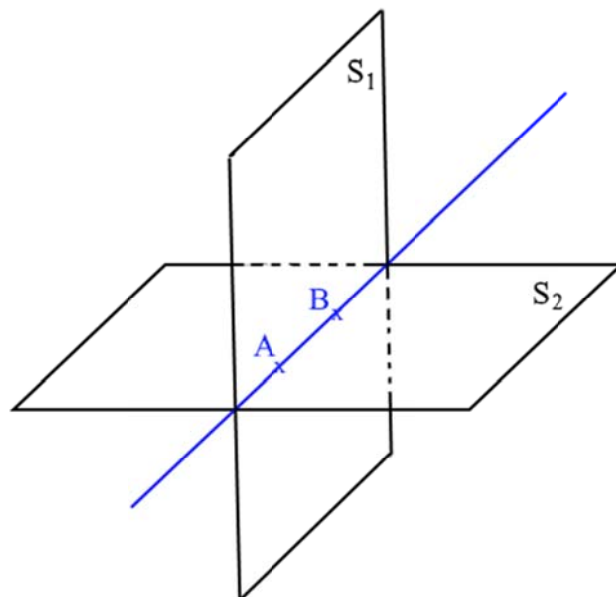
Ez azt jelenti tehát, hogy az egyenes  $t=1$  paraméterértékhez tartozó pontja rajta van az  $S$  síkon, vagyis a metszéspont  $M(3, -1, 3)$

## Két sík metszésvonala

**3. feladat:** Határozzuk meg az  $S_1: x + y - z = 1$  és  $S_2: x - y + 2z = 2$  síkok metszésvonalának egyenletét!

## Megoldás

Olvassuk ki a síkok normálvektorait:  $\mathbf{n}_{S_1} = (1, 1, -1)$  és  $\mathbf{n}_{S_2} = (1, -1, 2)$ . Látható, hogy a két normálvektor nem egymás skalárszorosa, azaz a síkok nem párhuzamosak.



Ez pedig azt jelenti, hogy egy egyenesben metszik egymást. A metszésvonal meghatározásának az a legegyszerűbb módja, ha keresünk két olyan pontot, amely a metszésvonalon rajta van. Ez egyben azt is jelenti, hogy ez a két pont mindkét síkon is rajta van. Azaz kell két olyan  $(x,y,z)$  hármas, amely mindkét sík egyenletét kielégíti. Ekkor a metszésvonal a két ponton átmenő egyenes lesz, ami így már könnyen felírható.

Tekintsük a síkok egyenleteiből álló egyenletrendszert:

$$x + y - z = 1 \quad x - y + 2z = 2$$

Ennek végtelen sok megoldása van. Ezért lehetőségünk van olyan pontokat keresni, amelyek valamelyik koordinátáját mi magunk választjuk meg tetszőleges értékkel. Célszerű egy  $A(x, y, 0)$  és egy  $B(0, y, z)$  pontot keresni.

Az  $A$  pont meghatározása során az egyenletekbe a  $z$  helyére nullát írva, megoldjuk az így kapott egyenletrendszert.

$$x + y = 1 \quad x - y = 2 \quad \rightarrow \quad x = 1,5 \quad y = -0,5 \quad \rightarrow \quad A(1,5, -0,5, 0).$$

Hasonlóan keressük meg a  $B$  pontot is:

$$y - z = 1 \quad -y + 2z = 2 \quad \rightarrow \quad z = 3 \quad y = 4 \quad \rightarrow \quad B(0, 4, 3)$$

A keresett egyenes két pontjából meghatározzuk az egyenes irányvektorát:  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (-1, 5, 4, 5, 3) = (-3, 9, 6)$ , majd a  $B$  pont segítségével felírjuk a metszésvonal egyenletét.

$$S_1 \cap S_2 = \begin{cases} x = -3t \\ y = 4 + 9t \\ z = 3 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$