

#### 4.4. Az algebra alaptétele, egyenletek

Ebben a szakaszban polinomiális egyenleteket oldunk meg a komplex számok halmazán. A megoldás során szem előtt tartjuk az algebra alaptételét.

Tétel: Minden

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

alakú egyenletnek, ahol  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$  és  $n \in \mathbb{Z}^+$  pontosan  $n$  darab gyöke van a komplex számok körében.

**1. feladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$2i + 3iz = 4 - 5z$$

**Megoldás**

Ez egy elsőfokú egyenlet, amit rendezéssel oldunk meg.

$$2i + 3iz = 4 - 5z \rightarrow z(5 + 3i) = 4 - 2i$$

$$z = \frac{4 - 2i}{5 + 3i} = \frac{4 - 2i}{5 + 3i} \cdot \frac{5 - 3i}{5 - 3i} = \frac{20 - 12i - 10i + 6i^2}{25 - 9i^2} = \frac{14 - 22i}{34} = \frac{14}{34} - \frac{22}{34}i.$$

**2. feladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet és ábrázolja a kapott gyököket:

$$z^3 - 1 = 0.$$

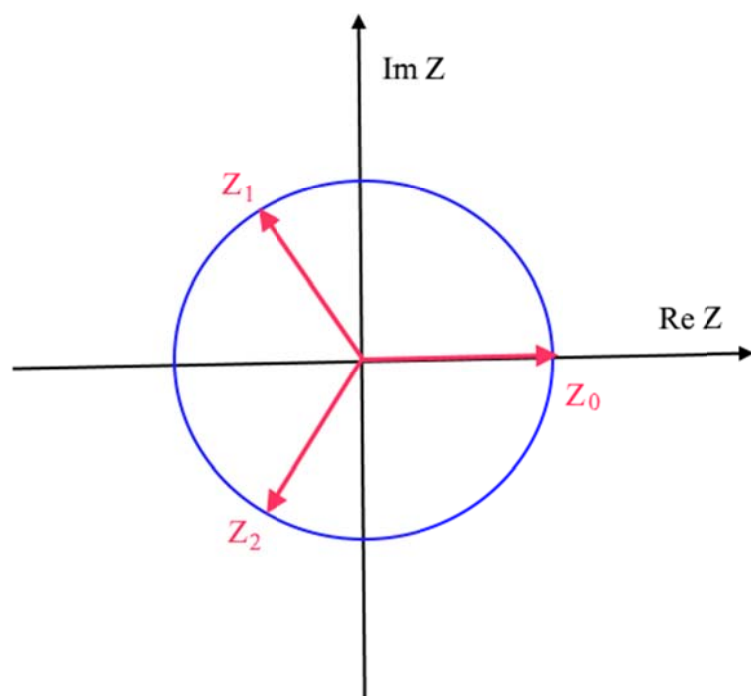
**Megoldás**

$$z^3 = 1 \rightarrow z = \sqrt[3]{1} \rightarrow z = \sqrt[3]{1}(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$
$$z_k = 1 \left( \cos \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \text{ ahol } k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0 \quad z_0 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 1 + 0i$$

$$k = 1 \quad z_1 = 1(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \quad z_2 = 1(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



**3. feladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^2 + 4z + 5 = 0$$

**Megoldás**

Ez egy másodfokú egyenlet. Használjuk a gyökképletet:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -1 + i \\ -1 - i \end{cases} \end{aligned}$$