

Elméleti összefoglaló

A határértékek pontos megfogalmazásához szükségünk lesz a kétoldali és a bal, illetve jobb oldali pontozott környezetek fogalmára. Ezekben a definíciókban δ alatt mindig egy kicsi pozitív számot kell érteni.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám δ **sugarú környezete** az $(a - \delta, a + \delta)$ nyílt intervallum.

Ennek tehát az a szám eleme, éppen az intervallum közepe. Egy x szám pontosan akkor eleme a δ sugarú környezetnek, ha $|x - a| < \delta$.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám δ **sugarú pontozott környezete** az $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ nyílt halmaz.

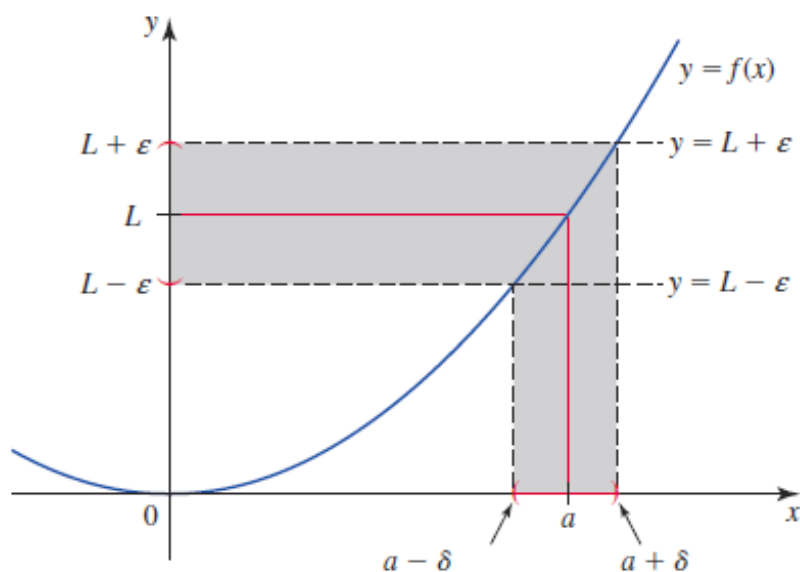
A δ sugarú pontozott környezete környezetet tehát úgy kapjuk, hogy a δ sugarú környezetből elhagyjuk az a számot, így az szétbomlik két, a bal és jobb oldalán lévő intervallum uniójára. Egy x szám pontosan akkor eleme a δ sugarú pontozott környezetnek, ha $0 < |x - a| < \delta$.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám **bal oldali δ sugarú pontozott környezete** az $(a - \delta, a)$ nyílt intervallum, **jobb oldali δ sugarú pontozott környezete** az $(a, a + \delta)$ nyílt intervallum.

Definíció: A $-\infty$ pontozott környezetei a $(-\infty, a)$ típusú nyílt intervallumok, a ∞ pontozott környezetei az (a, ∞) nyílt intervallumok.

Ezután már megfogalmazható a határérték definíciója.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fogja jelölni.



A fenti ábra az előző definíció geometriai szemléltetése. Ez a definíció pontosan azt fejezi ki, hogy $f(x)$ tetszőlegesen közel lesz L -hez, ha x már elég közel van a -hoz.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú **jobb oldali pontozott környezete** része D_f -nek, és $0 < |x - a| = x - a < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú **bal oldali pontozott környezete** része D_f -nek, és $0 < |x - a| = -(x - a) < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ fogja jelölni.

A következő hat definíció a véges helyen vett végtelen határértékekről szól.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞ , ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| < \delta$ esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞ , ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott jobb oldali környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| = x - a < \delta$ esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞ , ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott bal oldali környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| = -(x - a) < \delta$ esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott jobb oldali környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| = x - a < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a -nak δ sugarú pontozott bal oldali környezete része D_f -nek, és $0 < |x - a| = -(x - a) < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

A következő két definíció a végtelenben vett véges határértékekről szól.

Definíció: Az f függvény ∞ -ben vett határértéke az $L \in \mathbb{R}$ szám, ha tetszőlegesen nagy $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$ -ben vett határértéke az $L \in \mathbb{R}$ szám, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Végül hátra van még a négy végtelenben vett végtelen határérték.

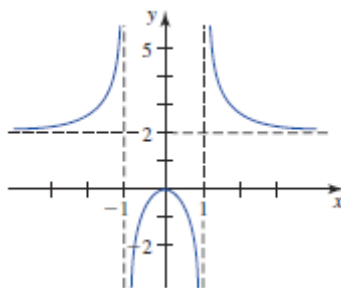
Definíció: Az f függvény ∞ -ben vett határértéke a ∞ , ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $f(x) > M$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Definíció: Az f függvény ∞ -ben vett határértéke a $-\infty$, ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $f(x) < -M$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$ -ben vett határértéke a ∞ , ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $f(x) > M$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$ -ben vett határértéke a $-\infty$, ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $f(x) < -M$. Ennek jele $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Az alábbi ábráról leolvasható az ábrázolt függvény esetén az imént definiált 15 fajta határérték közül hat. Melyik hat, és mennyi azok értéke?



A továbbiakban persze az lesz a célunk, hogy minél több függvény mindenféle határértékét ki tudjuk számítani. Ehhez, mint majd látni fogjuk az **elemi függvények határértékeit**, a **határértékekről szóló tételeket** és néhány **nevezetes limeszt** fogunk felhasználni. Kezdjük a határérték tételekkel.

Egy bonyolult függvény az elemi függvényekből épül fel a függvénytüveletek segítségével. Ezért fontos kideríteni, hogy mi a kapcsolat a függvénytüveletek és a határérték között. Ezeket a tételeket hívjuk határértéktételeknek.

A **véges határértékekre**, tehát amikor a határértékek értéke véges, érvényes az alábbi tétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L$ és $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = M$. Itt $L, M \in \mathbb{R}$, és α az a , $a+$, $a-$, ∞ , $-\infty$ szimbólumok egyike. Ekkor

a) $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$,

$$b) \lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x)g(x)) = LM,$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \alpha} (cf(x)) = cL, \text{ minden } c \in \mathbb{R} \text{ konstansra,}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M}, \text{ feltéve, hogy } M \neq 0.$$

Ha az előforduló határértékek között végtelen is van, jóval bonyolultabb a helyzet.

Bevezetünk egy jelölést, amely segítségével, persze kicsit pontatlanul, ezek a tételek tömören összefoglalhatók. (∞ mostanáig a plusz végtelent jelentette, így lesz ez a továbbiakban is, de az alábbi tételekben a hangsúly kedvéért kiírjuk a $+$ jelet.) A

$$\boxed{+\infty} \cdot \boxed{-\infty} = \boxed{-\infty}$$

jelsorozat azt fogja jelölni, hogy ha egy függvénynek **valamelyik**, (véges helyen vett kétoldali vagy egyoldali, valamelyik végtelenben vett) határértéke $+\infty$, egy másik függvénynek **ugyanott, ugyanolyan típusú** határértéke $-\infty$, akkor a szorzatuknak, szintén **ugyanott, ugyanolyan típusú** határértéke $-\infty$. Az alábbi formulákban $A \in \mathbb{R}$, és ha A a nevezőben áll, akkor $A \neq 0$.

Tétel:

$$\boxed{+\infty} \pm \boxed{A} = \boxed{+\infty},$$

$$\boxed{-\infty} \pm \boxed{A} = \boxed{-\infty},$$

$$\boxed{+\infty} \cdot \boxed{A} = \boxed{+\infty}, \text{ ha } A > 0,$$

$$\boxed{+\infty} \cdot \boxed{A} = \boxed{-\infty}, \text{ ha } A < 0,$$

$$\boxed{-\infty} \cdot \boxed{A} = \boxed{-\infty}, \text{ ha } A > 0,$$

$$\boxed{-\infty} \cdot \boxed{A} = \boxed{+\infty}, \text{ ha } A < 0,$$

$$\boxed{+\infty} + \boxed{+\infty} = \boxed{+\infty},$$

$$\boxed{-\infty} + \boxed{-\infty} = \boxed{-\infty},$$

$$\boxed{+\infty} - \boxed{-\infty} = \boxed{+\infty},$$

$$\boxed{-\infty} - \boxed{+\infty} = \boxed{-\infty},$$

$$\boxed{+\infty} \cdot \boxed{+\infty} = \boxed{+\infty},$$

$$\boxed{-\infty} \cdot \boxed{-\infty} = \boxed{+\infty},$$

$$\boxed{+\infty} \cdot \boxed{-\infty} = \boxed{-\infty},$$

$$\boxed{A} \div \boxed{\pm\infty} = \boxed{0},$$

$$\boxed{\pm\infty} \div \boxed{A} = \boxed{\pm\infty}, \text{ ha } A > 0,$$

$$\boxed{\pm\infty} \div \boxed{A} = \boxed{\mp\infty}, \text{ ha } A < 0.$$

$$\boxed{1} \div \boxed{0+} = \boxed{+\infty}, \text{ (a nevező a pozitív számokon keresztül tart nullához),}$$

$$\boxed{1} \div \boxed{0-} = \boxed{-\infty}, \text{ (a nevező a negatív számokon keresztül tart nullához).}$$

A határérték segítségével megfogalmazható a függvények egy nagyon előnyös tulajdonsága.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmazza az a szám egy nyílt környezetét. Ekkor f **folytonos** a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmaz egy $[a, a + \delta)$ szerkezetű intervallumot valamilyen $\delta > 0$ -ra. Ekkor f **jobbról folytonos** a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmaz egy $(a - \delta, a]$ szerkezetű intervallumot valamilyen $\delta > 0$ -ra. Ekkor f **balról folytonos** a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$.

Tétel: Ha pontosan akkor folytonos a -ban, ha balról is és jobbról is folytonos a -ban.

Sokszor nagyon hasznos az alábbi tétel.

Tétel: Ha a g függvény folytonos L -ben, és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(L)$. Itt a helyett állhat $a +$ vagy $a -$ is.

Különösen hasznos, ha egy függvény egy intervallum minden pontjában, a végpontokban a megfelelő oldalról, folytonos, pláne, ha az egész értelmezési tartományán folytonos.

Szinte az összes elemi függvény az egész értelmezési tartományán folytonos, a végpontokban legalább valamelyik oldalról. Sőt, a függvenyműveletek általában nem rontják el a folytonosságot, pontosabban érvényes az alábbi tétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy az f és a g függvények folytonosak a -ban. Ekkor

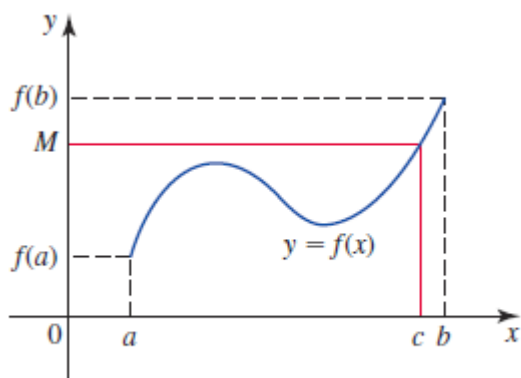
- a) az $f \pm g$ függvény is folytonos a -ban,
- b) az fg függvény is folytonos a -ban,
- c) a cf függvény is folytonos a -ban tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén,
- d) az $\frac{f}{g}$ függvény is folytonos a -ban, ha $g(a) \neq 0$.

Tétel: Ha az f függvény folytonos a -ban, a g függvény folytonos $f(a)$ -ban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is folytonos a -ban.

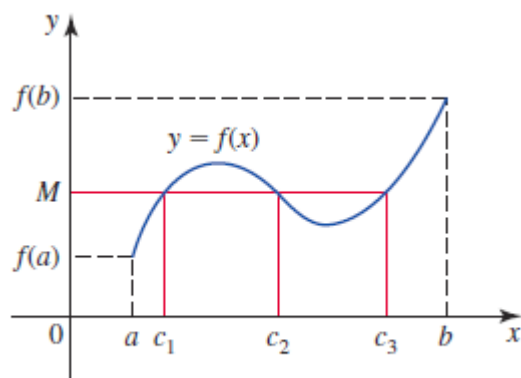
A folytonos függvények egy, szemléletesen magától értetődő, tulajdonságát fogalmazza meg a következő középértéktétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallum minden pontjában, a végpontokban a megfelelő oldalról. Legyen az M szám $f(a)$ és $f(b)$ között egy tetszőleges érték, azaz $f(a) \leq M \leq f(b)$. Ekkor van legalább egy $c \in [a, b]$ szám, úgy, hogy $f(c) = M$.

Más szóval egy folytonos függvény két értéke között minden értéket felvesz, a grafikonja megszakítás nélkül összeköti az $(a, f(a))$ koordinátájú pontot a $(b, f(b))$ ponttal. A fenti tételt szemlélteti az alábbi ábra.



(a) $f(c) = M$



(b) $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = M$

Ismertetünk két nevezetes trigonometrikus határértéket.

Tétel:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$

A legtöbb függvény, amivel találkozni fogunk olyan lesz, amelynek az értelmezési tartománya véges vagy végtelen hosszú intervallumok diszjunkt uniója. Mivel az értelmezési tartomány belső pontjában ezek a függvények folytonosak, csak az értelmezési tartomány szélein felvett határértékek az érdekesek.

A limesz kiszámolásakor most is, hasonlóan a számsorozatokhoz, a

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad \infty - \infty, \quad -\infty - (-\infty), \quad 1^\infty$$

határozatlan alakok jelentenek gondot. Ki fog derülni, hogy ezek nagyrészt ugyanolyan átalakításokkal kezelhetők, mint amilyeneket a számsorozatoknál láttunk.

Külön vizsgálatot igényel az $\frac{1}{0}$ típusú limesz is.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{4-2x}$ függvényt, és számoljuk ki az összes, nem triviális határértékét.

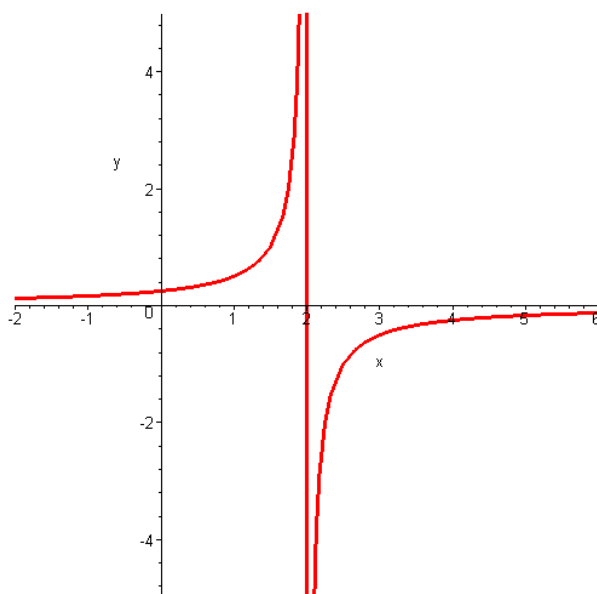
Megoldás: Mostantól nem triviális határérték alatt olyan határértéket értünk, amelyet nem lehet közvetlenül behelyettesítéssel kiszámolni. Először is megállapítjuk, hogy a függvényünk értelmezési tartománya a $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ halmaz. Ez két végtelen hosszú intervallum uniója. Két darabból áll, így négy „széle” van, és minden pontja belső pont, a D_f egy nyílt

halmaz. Azt is látjuk, hogy az $\frac{1}{x}$ elemi függvény lineáris transzformáltjával van dolgunk. Így f mindenütt folytonos, ahol értelmezve van. Ezek miatt csak az alábbi limeszek az érdekesek:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Minden más határérték a helyettesítési érték, például $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{4 - 2 \cdot 0} = \frac{1}{4}$.

Ha a vizsgált függvényről jó ábrát tudunk készíteni, az a határértékek leolvasását lehetővé teszi. De függvények lineáris transzformáltjának ábrázolását már ismerjük. Ehhez érdemes elvégezni a következő átalakítást: $f(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{x-2}$. Ezt felhasználva az alábbi ábra mutatja a függvényünk grafikonját.

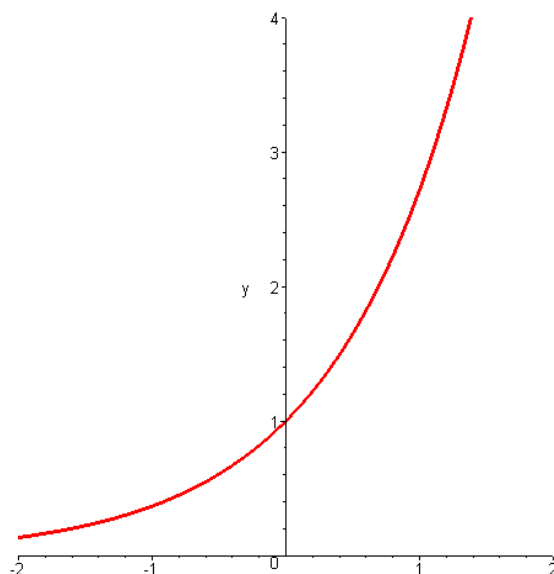


Erről már könnyen leolvassuk a kérdéses limeszeket. Mindegyiket a már bemutatott kis numerikus próbával érdemes demonstrálni. Tehát

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4-2x} = 0, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4-2x} = \infty, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4-2x} = -\infty, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4-2x} = 0.$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{e^x}$ függvény minden nem triviális határértékét.

Megoldás: Most a függvényünk az e^x elemi függvény reciproka. Az e^x ábrája az alábbi:



Erről is látjuk, hogy e^x soha nem nulla, ezért f mindenütt értelmezett: $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, ami egyetlen darabból álló nyílt halmaz, két széle van, a $-\infty$ és a ∞ . Csak az itt felvett határértékek a nem triviális limeszek, hiszen f mindenütt folytonos.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \infty$, hiszen e^x ábrájáról látjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, ráadásul a nullához a pozitív

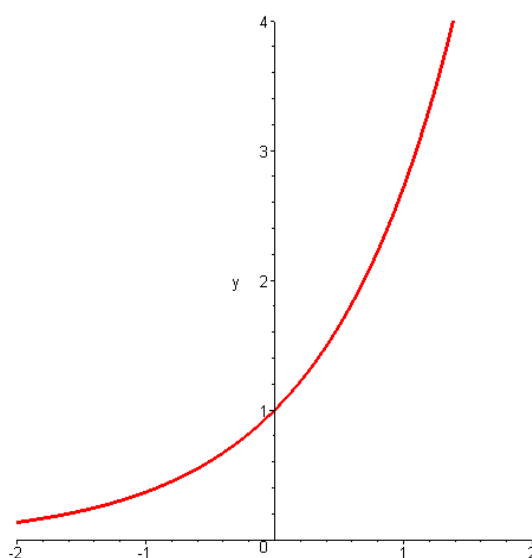
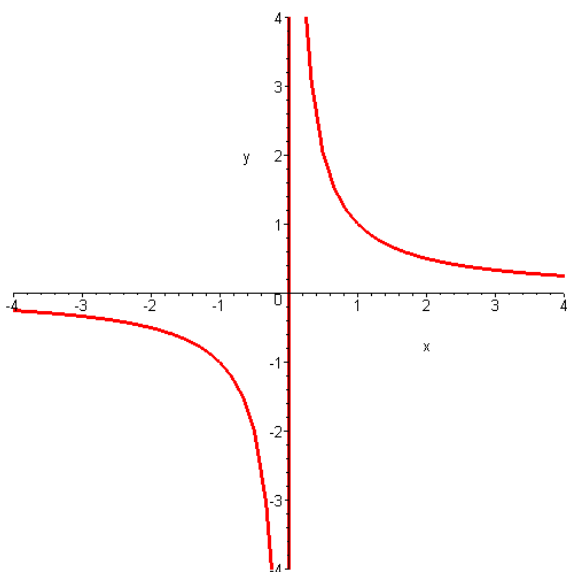
számokon keresztül közeledik e^x , ha x tart $-\infty$ -be. Így az $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$ határértékben az egyet egyre kisebb pozitív számmal osztjuk, ezért plusz végtelen ez a limesz. (A keretezett képleteket tartalmazó tétel utolsó előtti sora.)

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$, hiszen e^x ábrájáról látjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, és így a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x}$ határérték 0. (A keretezett képleteket tartalmazó tétel alulról ötödik sora.)

3. feladat: Számoljuk ki az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvény minden nem triviális határértékét.

Megoldás: Függvényünk egyedül a nullában nincs értelmezve, az értelmezési tartomány a $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ két darabból álló nyílt halmaz, aminek négy széle van. Mivel f mindenütt folytonos, ahol értelmezve van, csak ez a négy limesz a kérdéses.

Az f függvény az $\frac{1}{x}$ elemi függvénynek, mint belső függvénynek, és az e^x szintén elemi függvénynek, mint külső függvénynek a kompozíciója. Ezek ábrája van az alábbi ábrán.



- a) Kezdjünk a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}}$ limeszsel. Az $\frac{1}{x}$ bal oldalon lévő ábrájáról látszik, hogy ha x tart $-\infty$ -be, akkor $\frac{1}{x}$ a negatív számokon keresztül tart nullába. A jobb oldali ábráról leolvasható, hogy ha az exponenciális függvény argumentuma balról közeledik nullához, akkor e^x egyhez tart, (az már nem fontos, hogy alulról). Ezek miatt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.
- b) A $\lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}}$ limesz esetén a gondolatmenet a következő: ha x tart nullába a negatív számokon keresztül, akkor $\frac{1}{x}$ a $-\infty$ -be tart. Ha az exponenciális függvény argumentuma $-\infty$ -be tart, akkor e^x tart nullához, így $\lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.
- c) A $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}}$ limesz esetén, ha x a pozitív számokon keresztül nullába tart, akkor $\frac{1}{x}$ a ∞ -be tart. Ha pedig az exponenciális függvény argumentuma ∞ -be tart, akkor e^x is tart ∞ -be, ezért $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.
- d) Végül a $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$ határérték esetén, amennyiben x tart ∞ -be, akkor $\frac{1}{x}$ a pozitív számokon keresztül tart nullába. Ha az exponenciális függvény argumentuma jobbról közeledik nullához, akkor e^x egyhez tart. Ezért $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

4. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 3x + 2)$ limeszt.

Megoldás: Ez egy határozatlan alakú limesz, mert a polinomunk középső két tagja ellenkező előjelű végtelenbe tart. Ugyanúgy, mint sorozatok esetén, a legnagyobb kitevőjű x hatvány kiemelése a megoldás kulcsa.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 3x + 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)\end{aligned}$$

A szorzat első tényezőjében álló limesz $-\infty$, a második tényezőben lévő -2 , ezért (mivel tudjuk, hogy $[-\infty] \cdot [-2] = [+ \infty]$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 3x + 2) = \infty.$$

Könnyen végiggondolhatjuk, hogy minden polinomnak mindkét végtelenben valamelyik végtelen a limesze, a fenti módszer minden esetben célhoz vezet.

5. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2 - 4x^2}$ határértéket.

Megoldás: Az előbbi megjegyzésből is világos, hogy a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ határozatlan alakkal van

dolgunk. A megoldás kulcsa ismét ugyanaz, mint a sorozatok körében már látott hasonló feladatnál: számlálóból és nevezőből is kiemeljük a levező legnagyobb kitevőjű x hatványát. Először persze a nevezőben elvégezzük a négyzetre emelést és a kivonást.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2 - 4x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(-x + 2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

Itt a számláló $-\infty$ -be tart, ($[-\infty] + [2] - [0] = [-\infty]$), a nevező $4 + 0 = 4$ -be, tehát

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2 - 4x^2} = -\infty,$$

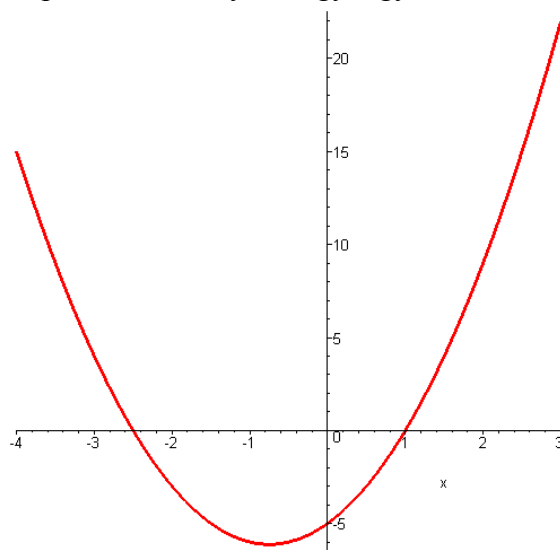
felhasználva, hogy $[-\infty] \div [4] = [-\infty]$.

6. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 5}$ határértéket.

Megoldás: Külön-külön a számláló és a nevező is mindenütt folytonos függvényeket, a véges 1 helyen vett két- és egyoldali limeszeik is a helyettesítési értékek. Ezért a számláló 2-be, a

nevező nullába tart, az $\frac{1}{0}$ problémás esettel van dolgunk. $\left(\frac{2}{0} = 2 \cdot \frac{1}{0} \right)$

Ilyenkor az a döntő, hogy a nevező hogyan tart nullába. Ezt legegyszerűbben a nevező grafikonjának felrajzolásával tisztázhatjuk. Ez most könnyű, mert a nevező két gyöke $-\frac{5}{2}$ és 1, a grafikonja felfelé nyíló parabola, amely átmegy a gyökökön. Az ábrája alább látható.

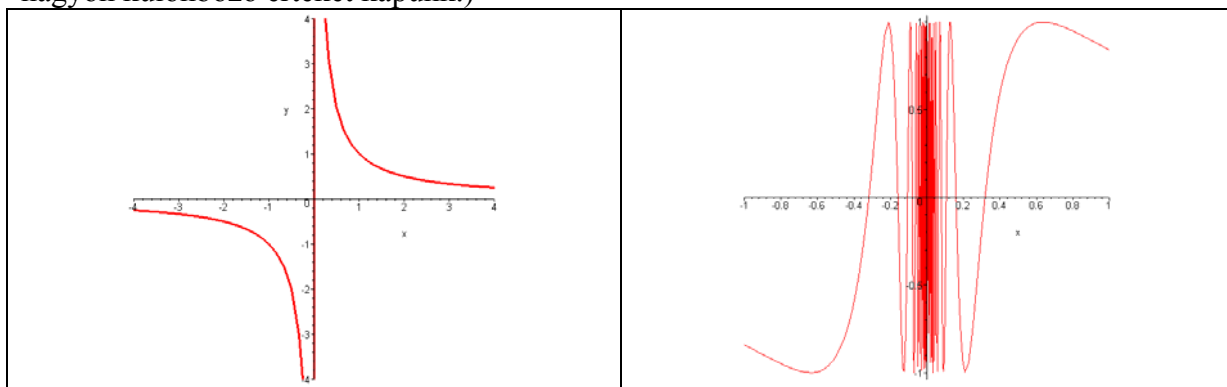


Erről látjuk, hogy ha x tart az 1-be balról, akkor a nevező a negatív számokon keresztül tart nullába. Ezek alapján, felhasználva a $\boxed{1} \div \boxed{0-} = \boxed{-\infty}$ tételt,

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 5} = -\infty.$$

Könnyen meggondolhatjuk, hogy a jobb oldali limesz ∞ , azaz $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 5} = \infty$.

A kétoldali $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 5}$ határérték pedig nem létezik, amiről egy kis numerikus kísérlettel meg is győződhetünk. (Kiszámolva a tört értékét például $x = 0.999$ és $x = 1.00001$ esetén, két nagyon különböző értéket kapunk.)



A fenti ábra két függvényt mutat, amelyeknek a nullában nem létezik a kétoldali limesze, a második, oszcilláló függvénynek még az egyoldali limeszei sem léteznek.

7. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + x + 6}{x^2 + 2x - 8}$ határértéket.

Megoldás: Kettőben a számláló és a nevező helyettesítési értéke is nulla, a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakkal van dolgunk. Ilyen esetben a másodfokú polinomok gyöktényezős felbontása segít. A

számláló gyökei $-\frac{3}{2}$ és 2 , ezért gyöktényezős felbontása $-2x^2 + x + 6 = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2)$.

A nevező gyökei -4 és 2 , az ő gyöktényezős felbontása $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$. Így a törtünket egyszerűsíteni tudjuk $x - 2$ -vel, ami után a limesz már leolvashatóvá válik. Tehát

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + x + 6}{x^2 + 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2)}{(x + 4)(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2\left(x + \frac{3}{2}\right)}{x + 4} = \frac{-2 \cdot \frac{7}{2}}{6} = -\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

8. feladat: Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & \text{ha } x < 2, \\ \sqrt{x-1} + 1, & 2 < x \end{cases}$ függvényt. Létezik-e a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ határérték, és ha igen, akkor mennyi az értéke?

Megoldás: Látjuk, hogy a 2 jobb és bal oldalán más formula definiálja f -et. Ilyenkor úgy járhatunk el, hogy kiszámoljuk 2-ben az egyoldali limeszeket. Ha azok léteznek és egyenlők, akkor létezik a kétoldali limesz is, és a közös értékkel egyenlő. De most az egyoldali limeszek egyszerűek:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x) = 2,$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-1} + 1 = 2.$$

Ezekből már következik, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

9. feladat: Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2, & \text{ha } x < 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0, \\ e^x + \cos x + 1, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$ függvényt. Létezik-e a

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ határérték, és ha igen, akkor mennyi az értéke?

Megoldás: Ismét az egyoldali limeszekkel kezdünk.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + x + 2) = 2.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \cos x + 1) = 3.$$

Külön-külön létezik a bal és a jobb oldali határérték, de nem egyenlők, így a kétoldali $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ limesz nem létezik.

10. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x}$ határértéket.

Megoldás: A számláló és a nevező is nullához tart nullában, a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakkal van

dolgunk. És mivel a számlálóban lévő gyökök különbsége ($\sqrt{4-x} - \sqrt{4}$) is szerepet játszik ebben, ismét a sorozatokhoz hasonlóan, gyöktelenítjük a számlálót. Ezt követően egyszerűsítés után a limesz megállapítható.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x} - \sqrt{4})(\sqrt{4-x} + \sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4-x) - 4}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4}} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

11. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3}$ határértéket.

Megoldás: Ismét nullához tart a számláló és a nevező is, de most a a gyökök különbsége a számlálóban és a nevezőben is hozzájárul a $\frac{0}{0}$ határozatlan alak kialakulásához. Ezért gyöktelenítjük a számlálót és a nevezőt is. Elvégezve és a kínálkozó egyszerűsítéseket

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{10-x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{4}}{\sqrt{10-x} - \sqrt{9}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(\sqrt{5-x} - \sqrt{4})(\sqrt{5-x} + \sqrt{4})}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4}}}{\frac{(\sqrt{10-x} - \sqrt{9})(\sqrt{10-x} + \sqrt{9})}{\sqrt{10-x} + \sqrt{9}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(5-x) - 4}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4}}}{\frac{(10-x) - 9}{\sqrt{10-x} + \sqrt{9}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4}}}{\frac{1-x}{\sqrt{10-x} + \sqrt{9}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} + \sqrt{9}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

12. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x}$ határértéket.

Megoldás: Először is a limesz $\frac{0}{0}$ típusú, és a tört szerkezetéről eszünkbe jut a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nevezetes limesz. Átalakítjuk úgy a törtünket, hogy ez felhasználható legyen,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}.$$

Ha a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}$ limeszben elvégezzük a $3x = u$ helyettesítést, akkor, mivel

$3x \rightarrow 0$ pontosan akkor igaz, ha $u \rightarrow 0$, azt kapjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Ezt

felhasználva tehát a végeredmény $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{3}{5}$.

13. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

Megoldás: Az világos, hogy a limesz $\frac{0}{0}$ típusú. Felhasználva, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\sin(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(4x)} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(4x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}. \end{aligned}$$

De itt, mivel a $\cos x$ függvény mindenütt folytonos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(4x)} = \frac{1}{\cos 0} = 1$, így elég a

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}$ határértéket kiszámolni. Ezt a törtet is át fogjuk alakítani, úgy, hogy a fenti nevezetes limesz felhasználható legyen.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin(4x) \frac{1}{\sin(3x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(4x \frac{\sin(4x)}{4x} \frac{3x}{\sin(3x)} \frac{1}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{3} \frac{\sin(4x)}{4x} \frac{3x}{\sin(3x)} \right) = \\ &= \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(3x)}. \end{aligned}$$

Most már, az előző feladatban látott helyettesítést alkalmazva látjuk, hogy itt mindkét limesz egyenlő, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\sin(3x)} = \frac{4}{3}.$$

14. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{2x}$ határértéket.

Megoldás: Ebben a $\frac{0}{0}$ típusú limeszben a számlálóban gyökök különbsége áll, ezért

gyöktelenítünk, és átalakítás után a másodiknak említett nevezetes trigonometrikus limesz felhasználható.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{2x(1 + \sqrt{\cos x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos x})} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos x})} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

15. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)(1 - \cos x)}{x^2}$ határértéket.

Megoldás: Ebben a $\frac{0}{0}$ típusú limeszben mindkét említett nevezetes trigonometrikus limesz felbukkan alkalmas átalakítások után.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)(1 - \cos x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \right) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$