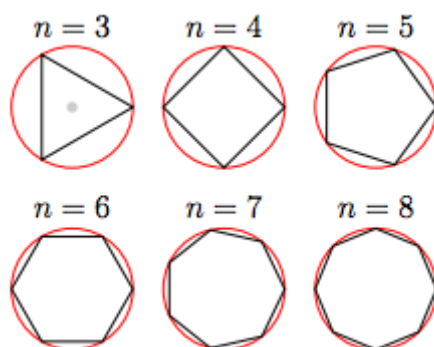
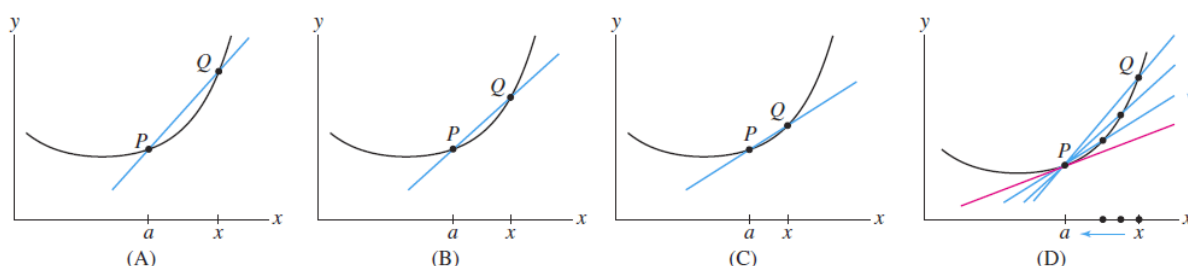


Elméleti összefoglaló

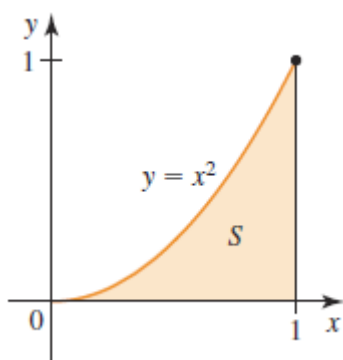
A határérték, határátmenet a matematika egyik legfontosabb fogalma. Már az ókori matematikában is felbukkan (a határérték az, amihez egy változó mennyiség egyre jobban és jobban közeledik), ma is használatos pontos megfogalmazása Augustin-Louis Cauchy és Karl Weierstrass érdeme.



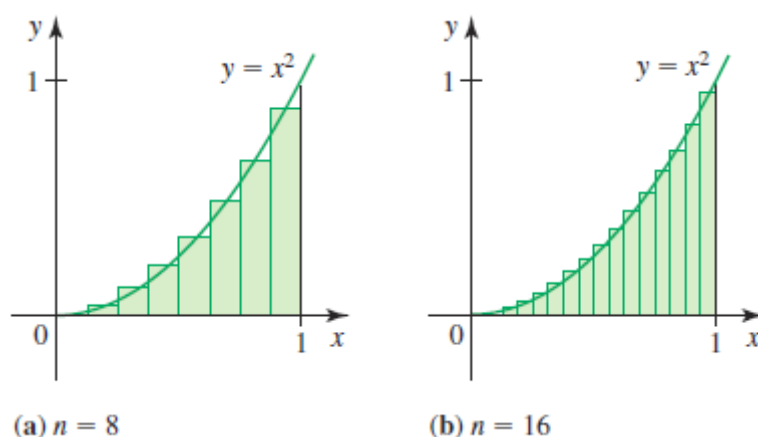
Például a körbe írt szabályos sokszögek egyre közelebb vannak a körhöz, ha az oldalszámot növeljük. Ez a határátmenet lehetővé teszi a kör kerületének és területének meghatározását.



Egy görbe P pontban húzható érintője a P és Q pontokon átmenő szelők határhelyezete, ha a Q pont minden határon túl közeledik a P ponthoz. Az itteni határátmenet segítségével felírható az érintő egyenlete.



Az ábrán látható S síkidomot (amelynek a területét a geometriában tanult módszerekkel nem lehet kiszámolni) egyre jobban megközelítik az alábbi ábrán látható kis téglalapok uniója, így a területét a téglalapok területének összege.



A két legfontosabb probléma, amely a határérték fogalmának kidolgozásához vezetett az érintő problémája, és a terület problémája.

A határérték intuitív fogalma

A határérték legegyszerűbb fajtája az egyváltozós függvény határértéke, ezzel foglalkozunk a továbbiakban.

Tekintsük az $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2(x - 1)}$ függvényt. Ez a függvény nincs értelmezve az $a = 1$ helyen. Az érdekelne minket, hogy hogyan viselkedik az $f(x)$ érték, ha x közel van 1-hez. Ennek érdekében kiszámoljuk a függvény értékét néhány 1-hez közeli helyen. A számításokat az alábbi táblázat tartalmazza.

x	0.5	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1	1.5
$f(x)$	0.75	0.95	0.995	0.9995	1.0005	1.005	1.05	1.25

Ezekből a számokból is látható, hogy ha x egyre közelebb van egyhez, akár balról, akár jobbról, $f(x)$ is közelebb lesz 1-hez. Ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy $f(x)$ határértéke 1, ha x közeledik 1-hez. Ez elvezet a határérték alábbi, matematikai szempontból nem precíz definíciójához.

Definíció (intuitív): Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya tartalmaz egy olyan nyílt intervallumot, amelynek az a szám a közepe, kivéve esetleg az a számot. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L -hez, ha x már elég közel van a -hoz. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

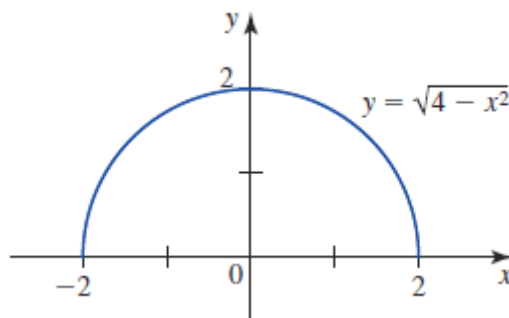
Definíció: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya értelmezve van az olyan számokra, amelyek közel vannak a -hoz, de annál nagyobbak. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **jobb oldali határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L -hez, ha x már a -hoz elég közeli, de a -nál nagyobb szám. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L.$$

Definíció: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya értelmezve van az olyan számokra, amelyek közel vannak a -hoz, de annál kisebbek. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **bal oldali határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L -hez, ha x már a -hoz elég közeli, de a -nál kisebb szám. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L.$$

A két utóbbi definíció szemléltetésére tekintsük az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ függvényt. Ennek értelmezési tartománya a $[-2, 2]$ zárt intervallum, és a grafikonja az alábbi ábrán látható.



Az ábráról könnyen leolvasható, hogy $\lim_{x \rightarrow -2+} \sqrt{4-x^2} = 0$, és $\lim_{x \rightarrow 2-} \sqrt{4-x^2} = 0$. Mindkét eredmény egy gyors numerikus kísérlettel ellenőrizhető. Például az első limesz esetén $f(-1.9999) = 0.1999975$, a második limesz esetén $f(1.9999) = 0.1999975$. Mindkét szám közel van nullához.

Az alábbi tétel a kétoldali és az egyoldali határértékek közötti kapcsolatról szól.

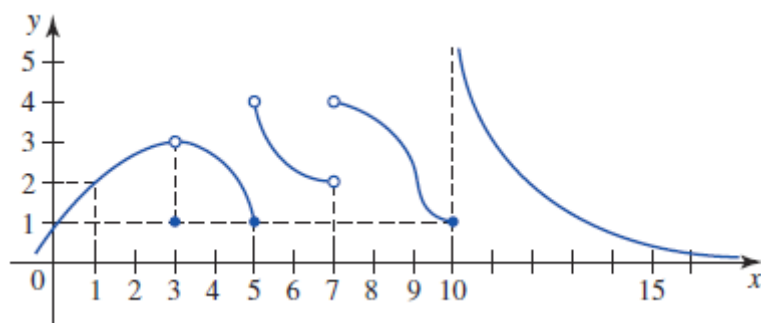
Tétel: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya tartalmaz egy olyan nyílt intervallumot, amelynek az a a közepe, kivéve esetleg az a számot. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ pontosan akkor teljesül, ha } \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L.$$

Felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet a határértéket meghatározni. Később a precíz definíció birtokában erre korrekt módszereink lesznek. De addig is, például a fenti táblázatban mutatott numerikus kísérlettel gyakran ki lehet találni a határértéket. Ha ábrát tudunk rajzolni a függvényről, az is felhasználható a határérték leolvasására. Ha egyszerűsíteni tudjuk a függvény hozzárendelési utasítását, a határérték meghatározása is egyszerűsödik.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Az alábbi ábra egy f függvény grafikonját mutatja.



Olvassuk le az ábráról az alábbi határértékeket: a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, b) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$, c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, d) $\lim_{x \rightarrow 5-} f(x)$, e) $\lim_{x \rightarrow 5+} f(x)$, f) $\lim_{x \rightarrow 7-} f(x)$, g) $\lim_{x \rightarrow 7+} f(x)$, h) $\lim_{x \rightarrow 10-} f(x)$, i) $\lim_{x \rightarrow 10+} f(x)$, j) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Megoldás: a) Ha megfigyeljük a függvényünk viselkedését a 0 körül, látjuk, hogy az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnek 1-hez, ha x elég közel van nullához, ezért $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

b) Akárhogyan közeledik az x az 1-hez, az ábra alapján az $f(x)$ függvényértékek 2-höz közelednek, azaz $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, és így $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$ is teljesül, ami eredetileg a kérdés volt.

c) Könnyen leolvassuk az előzőek alapján, hogy $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$, figyeljük meg viszont, hogy $f(3) = 1$.

d)-e) Az eddigiekkel ellentétben a függvényünk 5 körüli viselkedésénél egyáltalán nem mindegy, hogy az 5-höz a bal vagy a jobb oldalról közeledünk. Látjuk az ábráról, hogy 5-höz közeledik, de 5-nél kisebb x értékekre $f(x)$ 1-hez lesz közel, $\lim_{x \rightarrow 5-} f(x) = 1$, de ha x közel van 5-höz, de annál nagyobb, akkor $f(x)$ 4-hez közeledik, azaz $\lim_{x \rightarrow 5+} f(x) = 4$. Mivel a két egyoldali limesz külön-külön létezik ugyan, de nem egyenlő, ezért a kétoldali $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ határérték nem létezik.

f)-g)-h) Az előzőek alapján világos kell, hogy legyen, hogy $\lim_{x \rightarrow 7-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 7+} f(x) = 4$ és $\lim_{x \rightarrow 10-} f(x) = 1$.

i) Az 10-hez közeledik, de 10-nél nagyobb x számok esetén az $f(x)$ viselkedése az eddigiektől eltérő. De a grafikon azt akarja ábrázolni, hogy $f(x)$ minden határon túl nő, ha x jobbról közeledik 10-hez. Ezt így jelöljük: $\lim_{x \rightarrow 10+} f(x) = \infty$.

j) Ilyen típusú limesz sem szerepelt az eddigi definíciókban. De nyilván érezzük a grafikon azt szemlélteti, hogy ahogy egyre nagyobbá válik az x , az $f(x)$ értékek minden határon túl közelednek nullához, amit így fogunk jelölni: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Elméleti összefoglaló

Számsorozatok

Az i) és j) pontokban szereplő határértékekkel együtt eddig 5 fajta limeszről volt szó. Ki fog hamarosan derülni, hogy vannak továbbiak is, összesen 15 fajta. Ezek ismertetése előtt rátérünk a számsorozatokra. A precíz definíciók ezek segítségével könnyen megadhatók.

Definíció: Számsorozatnak hívjuk az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, hagyományos okokból $a(n)$ helyett a_n -et írunk és a_n -et a sorozat **n -edik elemének** hívjuk, n -et pedig az a_n sorozatelem **indexének** nevezzük.

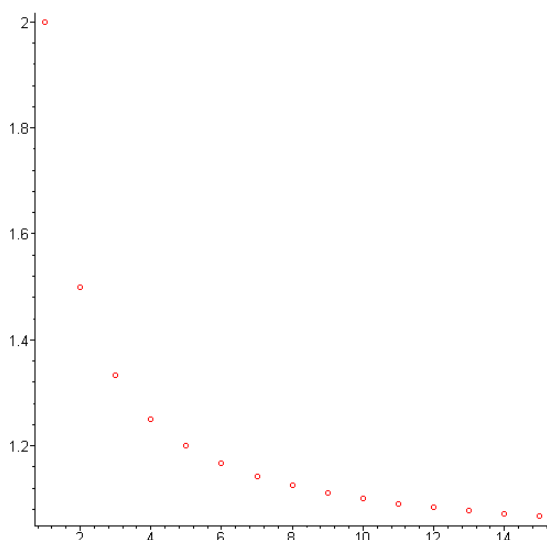
Magát a sorozatelemeket az index szerinti természetes sorrendjükben (a_n) fogja jelölni, tehát $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. A számsorozat elnevezés helyett röviden sorozatot is szokás mondani. A sorozatokat leggyakrabban az a_n elem kiszámolását lehetővé tevő képlet megadásával

definiáljuk. Például így: $a_n = n + \frac{1}{n}$. Ennek a sorozatnak az első néhány eleme

$$\left(2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \dots\right).$$

Tekintsük az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Ennek az első néhány eleme $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right)$. Ha

ábrázoljuk ezeket a számokat egy számegyenesen vagy egy koordináta rendszerben az (n, a_n) koordinátájú pontokat, az alábbi ábrákat kapjuk.



(Így minden sorozatot ábrázolhatunk, ez a szemléltetés gyakran hasznos.)

Az ábrákról leolvashatjuk, hogy (a_n) elemei egyre kisebbek, de mindegyik nagyobb, mint 1. Az elemek közelednek 1-hez. Sőt, úgy mondjuk, hogy az elemek minden határon túl közelednek 1-hez, amin azt értjük, hogy az a_n sorozatelem és az 1 távolsága, ami definíció szerint $|a_n - 1|$, tetszőlegesen kicsivé válik, ha n elég nagy. Az is igaz, hogy a sorozatelemek egyre közelednek pl. a 0-hoz is, sőt minden 1-nél kisebb számhoz is, de az ilyen számokhoz nem közelednek a sorozatelemek minden határon túl, például a 0-tól vett távolságuk mindig legalább 1, az $\frac{1}{3}$ -tól vett távolságuk mindig legalább $\frac{2}{3}$, és így tovább. Tekintsünk most egy 1-nél nagyobb számot, például 1.025-t. A sorozatelemek először közelednek 1.025-höz, de a 40. elem éppen 1,025, és ezután a sorozatelemek elkezdnek távolodni, és egyre távolabb kerülnek 1.025-től.

Ebből az elemzésből láthatjuk, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sorozat esetén az 1-nek kitüntetett szerepe van: ő az **egyetlen** valós szám, amelyhez a sorozatelemek minden határon túl közelednek.

Ilyen tulajdonságú szám sok más sorozat esetén is található, de messze nem mindegyik esetén. Például az $a_n = (-1)^n$ képlettel megadott sorozat elemei felváltva -1 és 1, ezek az elemek nem közelednek minden határon túl semmilyen számhoz. Ezek motiválják a következő definíciót.

Definíció: Az (a_n) sorozat **határértéke** vagy **limesze** az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \geq N(\varepsilon)$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Azt, hogy az (a_n) sorozat határértéke A

$$a_n \rightarrow A \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

fogja jelölni. Ilyenkor az (a_n) sorozatot **konvergensnek** hívjuk, az $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ természetes számot pedig az ε -hoz tartozó **küszöbindexnek**.

A definíció szemléletes tartalma a fenti gondolatmenet alapján az, hogy ha a sorozat határértéke A , akkor a sorozat elég nagy indexű elemei mindannyian bármilyen kis távolságnál is közelebb lesznek A -hoz. Ez a sorozatok körében a legfontosabb fogalom.

Tétel: Ha egy (a_n) sorozatnak létezik határértéke, akkor az egyértelmű.

Definíció: Az (a_n) sorozat egy **részsorozata** egy olyan (b_n) sorozat, amely úgy keletkezik, hogy töröljük az eredeti sorozat véges sok vagy végtelen sok elemét olyan módon, hogy végtelen sok elem maradjon, és a megmaradó elemek a (b_n) sorozat elemei.

Például az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozatnak néhány részsorozata az alábbi:

$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right)$, itt a páratlan indexű elemeket tartottuk meg, és minden másodikat töröltünk;
 $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\right)$, itt azokat az elemeket tartottuk meg, amelyek indexe négyzetszám;
 $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots\right)$, itt azokat az elemeket tartottuk meg, amelyek indexe prímszám.

Egy sorozatnak nyilván végtelen sok részsorozata van.

Tétel: Ha $a_n \rightarrow A$, és (b_n) részsorozata (a_n) -nek, akkor $b_n \rightarrow A$.

Ez a tétel sokszor hasznos, például erre alapozva úgy lehet megmutatni, hogy egy sorozat nem konvergens, hogy keresünk két részsorozatot, amelyeknek más a határértéke.

A nem konvergens sorozatokat divergensnek is hívjuk. A divergens sorozatok nagyon szertelenül is viselkedhetnek. Két típusuk azonban mutat némi szabályszerűséget, ezek a minden határon túl növekedő, és a minden határon túl csökkenő sorozatok.

Definíció: Az (a_n) sorozat **határértéke a plusz végtelen**, ha tetszőlegesen nagy $c \in \mathbb{R}$ pozitív számhoz is van olyan $N(c) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \geq N(c)$ esetén

$$a_n > c.$$

Ezt $a_n \rightarrow \infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ fogja jelölni.

Az (a_n) sorozat **határértéke a mínusz végtelen**, ha tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív $c \in \mathbb{R}$ számhoz is van olyan $N(c) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \geq N(c)$ esetén

$$a_n < c.$$

Ezt $a_n \rightarrow -\infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ fogja jelölni.

Egy másik fajta némileg szabályos viselkedést jelent, ha a sorozat elemei egy véges intervallumba esnek. Ezzel kapcsolatos a következő definíció.

Definíció: Az (a_n) sorozat **felülről korlátos** és a $K \in \mathbb{R}$ szám a felső korlátja, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$.

Az (a_n) sorozat **alulról korlátos** és a $k \in \mathbb{R}$ szám az alsó korlátja, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$.

Az (a_n) sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Egy további szabályos viselkedés, ha a sorozat elemei egyre nőnek vagy csökkennek.

Definíció: Az (a_n) sorozat **monoton növvő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$, **monoton csökkenő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

Szokás akkor is azt mondani, hogy egy sorozat monoton növvő vagy csökkenő, ha a megfelelő egyenlőtlenség nem minden n -re, hanem csak egy adott K küszöbszámnál nagyobb vagy egyenlő n -ekre teljesül.

A monoton sorozatok egy bizonyos értelemben szabályosan viselkednek. A legtöbb sorozat nem monoton.

Mivel a sorozatok $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, az algebrai függvényműveletek rájuk is értelmezhetők. Például az összeg hozzárendelési utasítása a hozzárendelési utasítások összege, és így tovább. Kicsit pontosabban ez a három legfontosabb műveletre az alábbi.

Definíció: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat. Ekkor a két sorozat **összege** az $(a_n + b_n)$ sorozat, **szorzata** az $(a_n b_n)$ sorozat, és ha b_n egyetlen n -re sem nulla, akkor

hányadosa az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat.

A sorozatok témakörében a legfontosabb feladat a határérték meghatározása lesz, amennyiben létezik. Eközben az alábbi tételeket állandóan fel fogjuk használni. Először egy, a konvergens sorozatokról szóló tétel következik.

Tétel: Ha $a_n \rightarrow A \in \mathbb{R}$ és $b_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$, akkor

$$a_n + b_n \rightarrow A + B,$$

$$a_n b_n \rightarrow AB,$$

$$|a_n| \rightarrow |A|,$$

$$\text{ha létezik az } \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ sorozat, és } B \neq 0, \text{ akkor } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}.$$

Jóval bonyolultabb a helyzet, ha valamelyik vagy mindkét sorozat valamelyik végtelenbe tart. Csak a legfontosabb eseteket tartalmazzák az alábbi tételek.

Az összeggel kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat.

Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \rightarrow \infty$.

Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \rightarrow \infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow \infty$.

Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és $b_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \rightarrow -\infty$.

Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n + b_n \rightarrow -\infty$.

A szorzattal kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat, és tegyük fel, hogy $a_n \rightarrow \infty$.

Ha $b_n \rightarrow B > 0$, akkor $a_n b_n \rightarrow \infty$.

Ha $b_n \rightarrow \infty$, akkor $a_n b_n \rightarrow \infty$.

Ha $b_n \rightarrow B < 0$, akkor $a_n b_n \rightarrow -\infty$.

Ha $b_n \rightarrow -\infty$, akkor $a_n b_n \rightarrow -\infty$.

Tétel: Ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \geq a_n$ minden n -re, akkor $b_n \rightarrow \infty$. Hasonlóan, ha $a_n \rightarrow -\infty$ és $b_n \leq a_n$ minden n -re, akkor $b_n \rightarrow -\infty$.

Végül a hányadossal kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) sorozatot, és tegyük fel, hogy $a_n \neq 0$ semmilyen n -re.

Ha $a_n \rightarrow \pm\infty$, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

Ha $a_n \rightarrow 0$ és $a_n > 0$, minden n -re, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty$.

Ha $a_n \rightarrow 0$ és $a_n < 0$, minden n -re, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty$.

Ha $a_n \rightarrow 0$, akkor $\frac{1}{|a_n|} \rightarrow \infty$.

Ezeknek a tételeknek a kombinálásával, mint majd látjuk, számos sorozat határértéke kiszámolható. A tételek másik csoportja, ami megkönnyíti a limeszek kiszámítását a nevezetes limeszekről szóló tételek.

Tétel: $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Tétel: $a_n = n^\alpha \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1, & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0, & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases}$

Tétel: $a_n = q^n \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1, \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1, \\ \text{nem létezik a határérték,} & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$

Legyen $a_n = n$, $b_n = n^2$. Ekkor $a_n \rightarrow \infty$, és $b_n \rightarrow \infty$. Könnyen látható, hogy $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$,

ugyanakkor $\frac{b_n}{a_n} = n \rightarrow \infty$. Ez azt mutatja, hogy pusztán az az információ, hogy mi egy tört számlálójának és nevezőjének külön-külön a limesze a tört limeszét nem határozza meg. Ezt

úgy mondjuk, hogy a $\frac{\infty}{\infty}$ típusú tört határozatlan alak. Ilyen határozatlan alak, nem csak tört esetén, több fajta is van. A legfontosabbak az alábbiak:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad \infty - \infty, \quad -\infty - (-\infty), \quad 1^\infty.$$

Az ilyen sorozatok limeszének meghatározása nehézséget jelent. A megoldás minden esetben abban áll, hogy azonos átalakításokkal átalakítjuk a_n képletét, hogy a fenti tételek alkalmazásával a limesz leolvasható legyen. Hogy ezt hogyan érdemes csinálni, az persze sorozat típustól függően más és más lehet. A kidolgozott feladatokban bemutatjuk a legfontosabb eseteket. Arra kell törekedni, hogy egy új feladat megoldás során sikerüljön beazonosítani a feladat típusát, majd ezután végre kell hajtani a típushoz tartozó megoldási módszert.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Írjuk fel az $a_n = 2^n$ sorozat első néhány elemét.

Megoldás: Rendre behelyettesítve n helyére az 1, 2, 3, 4, 5, értékeket, kapjuk, hogy $(a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, \dots)$.

2. feladat: Mi lehet az $a_n = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ sorozat hozzárendelési utasítása.

Megoldás: A megadott elemek alapján az a szabály körvonalazódik, hogy az n -edik elem az n -edik páratlan szám, tehát

$$a_n = 2n - 1.$$

Figyeljük meg, hogy n legkisebb értéke 1, tehát a **nullát nem tekintjük természetes számnak**.

3. feladat: Mi lehet az $a_n = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$ sorozat hozzárendelési utasítása.

Megoldás: Az első elemet $\frac{0}{1}$ alakban is felírhatnánk, így még szembeötlőbb, hogy az n -edik elem olyan tört, amelynek a nevezője n , a számlálója pedig $n-1$, tehát

$$a_n = \frac{n-1}{n}.$$

4. feladat: Mi az $a_n = \frac{1}{2n+1}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Az egyik tételünk szerint, ha egy sorozat valamelyik végtelenbe tart, akkor a reciproka nullához tart. De $2n+1 \rightarrow \infty$, (hiszen ha $n \rightarrow \infty$, akkor $2n \rightarrow \infty$, és ezért a nála eggyel nagyobb $2n+1$ is végtelenbe tart; ezek mindegyike felsorolt tételek egy nagyon egyszerű alkalmazása, mindenkinek javasoljuk, hogy azonosítsa be a szóban forgó tételeket).

Így látjuk, hogy $a_n = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$.

De úgy is okoskodhattunk volna, hogy a sorozatunk részsorozat az $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ sorozatnak, egy konvergens sorozat minden részsorozat, egy szintén felsorolt tétel szerint, ugyanoda konvergál, mint az eredeti sorozat. Ezért ismét azt kapjuk, hogy $a_n \rightarrow 0$.

5. feladat: Mi az $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Tudjuk, hogy $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, hiszen ez n^α szerkezetű nevezetes sorozat $\alpha > 0$ esete. Így az egyik tételünk szerint, (meg kellene az olvasónak keresni) a nála nagyobb $\sqrt{n+1}$ is tart végtelenbe. Így az előbbi feladatban is felhasznált tétel szerint a reciproka nullába tart, azaz

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0.$$

6. feladat: Mi az $a_n = n^2 - 3n$ sorozat határértéke?

Megoldás: Mivel n^2 és $3n$ is plusz végtelenbe tart, ez egy $\infty - \infty$ típusú határozatlan alak. De az alábbi átalakítás könnyen meghatározhatóvá teszi a limeszt:

$$a_n = n^2 - 3n = n(n-3).$$

Itt mindkét tényező végtelenbe tart, és akkor az egyik tételünk szerint a szorzatuk is,

$$a_n = n^2 - 3n \rightarrow \infty.$$

Látjuk, hogy a_n képlete másodfokú polinom. A polinomok esetén egy másfajta átalakítás, a legmagasabb fokú n hatvány kiemelése hasznosabb, mert minden esetben működik.

$$a_n = n^2 - 3n = n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} \right) = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} \right).$$

Ebben a szorzatban az első tényező plusz végtelenbe tart, $\frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 3 \cdot 0 = 0$, így a második tényező $1 - 0 = 1$ -be tart, ami egy pozitív szám, így egy másik tételünk szerint a szorzatuk plusz végtelenbe tart. Ugyanazt a végeredményt kaptuk, mint előbb.

Azt is könnyű végiggondolni, hogy a legmagasabb fokú n hatvány kiemelése mindig leolvashatóvá teszi a limeszt, mert kiemelés után az első tényező mindig plusz végtelenbe tart, a második pedig a főegyütthatóhoz. Így azt kapjuk, hogy **polinom esetén a határérték mindig végtelen, mégpedig plusz végtelen, ha a főegyüttható pozitív, és mínusz végtelen, ha a főegyüttható negatív.**

7. feladat: Mi az $a_n = (2n-1)n - (1-2n)^2$ sorozat határértéke?

Megoldás: Ha megnézzük a sorozatunk képletét, láthatjuk, hogy a szorzások elvégzése után egy másodfokú polinom keletkezik, amelynek a főegyütthatója $2n^2 - 4n^2 = -2n^2$ lenne, azaz

$$a_n = -2n^2 + \dots$$

A többi tagot nem is kell kiszámolni, mert a limesz szempontjából érdektelenek. Mivel a főegyüttható negatív, $a_n = (2n-1)n - (1-2n)^2 \rightarrow -\infty$.

8. feladat: Mennyi az $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ sorozat határértéke?

Megoldás: A sorozat képlete egy tört, amelynek számlálója és nevezője is plusz végtelenbe tart, ezért a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Ezekben az esetekben

leggyakrabban a **kiemelés** vezet eredményre. Polinomok hányadosa esetén a nevező legmagasabb fokú n hatványát, (csak az n hatványt, az együtthatóját már nem), célszerű kiemelni a számlálóból és nevezőből is. Most tehát a számlálóból és nevezőből is n -et. Kiemelés és egyszerűsítés után

$$a_n = \frac{2n-1}{n+2} = \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}.$$

Ezek ekvivalens átalakítások voltak. Az utolsó tört például a 120. elem kiszámolására egyáltalán nem célszerű, de a limesz leolvasására nagyon is. Hiszen látjuk, hogy a számláló 2-höz, a nevező 1-hez tart, és így a tört $\frac{2}{1} = 2$ -hez, vagyis

$$a_n = \frac{2n-1}{n+2} \rightarrow 2.$$

9. feladat: Mennyi az $a_n = \frac{3n^2-2n+4}{-2n^2+n-3}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Most a számláló a plusz végtelenbe, a nevezője mínusz végtelenbe tart, tehát ismét a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. A módszerünk szerint kiemelünk a

számlálóból és nevezőből is n^2 -et, majd egyszerűsítünk:

$$a_n = \frac{3n^2-2n+4}{-2n^2+n-3} = \frac{n^2\left(3-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(-2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{-2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}.$$

Az utolsó törtben a számláló 3-ba, a nevező -2-be tart, ezért

$$a_n = \frac{3n^2-2n+4}{-2n^2+n-3} \rightarrow \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Egy rövid kis numerikus kísérlettel alátámaszthatjuk az eredményünket. Emlékszünk, hogy a limesz az a szám, amihez nagy index esetén a sorozatelem igen közel van. Számoljuk ki kalkulátorral, mondjuk a_{1231} -et. Ez nem egy kellemes számolás, de

$$a_{1231} = -1.499796666.$$

Ez tényleg közel van $-\frac{3}{2}$ -hez. Ilyen numerikus kísérletet minden határérték kiszámolása során végezhetünk, ez segít, hogy rossz eredményt ne fogadjunk el helyesnek.

10. feladat: Mennyi az $a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{-2n - 3}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Ismét a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Most a számlálóból és a nevezőből is n -et kell kiemelni, majd egyszerűsíteni vele:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{-2n - 3} = \frac{n \left(n + 3 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(-2 - \frac{3}{n} \right)} = \frac{n + 3 + \frac{1}{n}}{-2 - \frac{3}{n}}.$$

Ebben a törtben a számláló plusz végtelenbe, a nevező -2 -be tart, ezért a hányadosuk mínusz végtelenbe, gondoljuk meg, nagy számnak a fele is nagy, ha még a mínusz előjelet is figyelembe vesszük, akkor nagy negatív, tehát:

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{-2n - 3} \rightarrow -\infty.$$

Az iméntihez hasonló numerikus kísérlet azt mutatja, hogy például $a_{2879} = -1440.249783$, egy jó nagy abszolút értékű negatív szám, összhangban a kapott végeredménnyel.

11. feladat: Mennyi az $a_n = \frac{-n^2 + n + 2}{n^3 - n^2 + 2n - 2}$ sorozat határértéke?

Megoldás: A limesz $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú, a módszerünk szerint a számlálóból és a nevezőből is n^3 -t emelünk ki:

$$a_n = \frac{-n^2 + n + 2}{n^3 - n^2 + 2n - 2} = \frac{n^3 \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} \right)}{n^3 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3}}.$$

Az utolsó törtben a számlálóban minden tag nullához tart, így az egész számláló is, a nevező 1 -hez tart, tehát

$$a_n = \frac{-n^2 + n + 2}{n^3 - n^2 + 2n - 2} \rightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

Az előző három feladatból leszűrhető a következő tétel:

Két polinom hányadosának a határértéke

(1) a főegyütthatók hányadosa, ha a számláló és a nevező azonos fokszámú,

(2) végtelen, ha a számláló magasabb fokszámú, mint a nevező, mégpedig mínusz végtelen, ha a főegyütthatók ellenkező előjelűek, és plusz végtelen, ha a főegyütthatók azonos előjelűek,

(3) nulla, ha a számláló alacsonyabb fokszámú, mint a nevező.

12. feladat: Tekintsük az $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$ sorozatot. Adjunk küszöbindexet $\varepsilon = 0.01$ -hez.

Megoldás: Először is, mivel a_n azonos fokszámú polinomok hányadosa, a limesze $\frac{1}{2}$.

Küszöbindexet adni a megadott ε -hoz annyit jelent, hogy meghatározunk egy természetes számot úgy, hogy az annál nagyobb vagy egyenlő indexekre teljesül az

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < 0.01$$

egyenlőtlenség. (Általában, ha A jelöli a határértéket, akkor az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.)

Beírjuk tehát a_n helyére a képletét, és megoldjuk az

$$\left| \frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| < 0.01$$

egyenlőtlenséget. Először közös nevezőre hozunk az abszolút értéken belül:

$$\left| \frac{2(n+1) - (2n-1)}{2(2n-1)} \right| < 0.01.$$

A számlálóban elvégezve a műveleteket és összevonásokat kapjuk, hogy

$$\left| \frac{3}{2(2n-1)} \right| < 0.01.$$

A kapott tört számlálója pozitív, és a nevezője is az, hiszen sorozatok körében az n pozitív egész szám lehet. Így a tört maga is pozitív, egy pozitív szám abszolút értéke önmaga, tehát a

$$\frac{3}{2(2n-1)} < 0.01$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A következő lépésben átszorunk a nevezőben lévő $2n-1$ tényezővel, ami minden n -re pozitív, vagyis nem fordul meg az egyenlőtlenség iránya.

$$\frac{3}{2} < 0.01 \cdot (2n-1).$$

Ezután átosztva a szintén pozitív 0.01 -al, megint nem fordul meg az egyenlőtlenség iránya.

$$\frac{3}{2 \cdot 0.01} < 2n-1,$$

$$\frac{300}{2} < 2n-1,$$

$$150 < 2n-1.$$

Innen

$$\frac{151}{2} < n,$$

$$75.5 < n.$$

Minden átalakítás ekvivalens átalakítás volt, tehát a kiinduló egyenlőtlenség teljesül, ha $n > 75.5$. Tehát a keresett küszöbindex $N(0.01) = 76$.

Kicsit többet is csináltunk, mint amit a feladat szövege megkövetelt, hiszen a lehető legkisebb küszöbindexet sikerült meghatározni. Minden 76-nál nagyobb egyenlő természetes szám is jó küszöbindex 0.01-hoz.

13. feladat: Tekintsük az $a_n = \frac{-3n-2}{2n+1}$ sorozatot. Adjunk küszöbindexet $\varepsilon = 0.02$ -hoz.

Megoldás: Ugyanúgy, mint az előbb, először meghatározzuk a határértéket. Ez most $-\frac{3}{2}$.

Ezért az

$$\begin{aligned} |a_n - A| &< \varepsilon, \\ \left| a_n - \left(-\frac{3}{2} \right) \right| &< 0.02, \\ \left| \frac{-3n-2}{2n+1} + \frac{3}{2} \right| &< 0.02 \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Ismét a közös nevezőre hozás az első lépés, amit a számláló kiszámolása követ:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2(-3n-2) + 3(2n+1)}{2(2n+1)} \right| &< 0.02 \\ \left| \frac{-1}{2(2n+1)} \right| &< 0.02. \end{aligned}$$

A kapott tört minden n -re negatív, így abszolút értéke önmaga mínusz egyszerese:

$$\begin{aligned} \frac{-(-1)}{2(2n+1)} &< 0.02, \\ \frac{1}{2(2n+1)} &< 0.02. \end{aligned}$$

(Nem az egyenlőtlenséget szoroztuk meg mínusz eggyel, hanem a bal oldali negatív törtet, hogy kiszámoljuk az abszolút értékét.) A hátralévő lépések már egyszerűek:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &< 0.02 \cdot (2n+1), \\ \frac{1}{2 \cdot 0.02} &< 2n+1, \\ \frac{50}{2} &< 2n+1, \\ 12 &< n. \end{aligned}$$

A keresett, egyébként most is a lehető legjobb, küszöbindex tehát $N(0.02) = 13$.

Egy kis numerikus kísérlet:

$$\left| a_{11} + \frac{3}{2} \right| = |-0.021739130| = 0.021739130 > 0.02, \text{ sőt}$$

$$\left| a_{12} + \frac{3}{2} \right| = |-0.02| = 0.02, \text{ ami nem kisebb } 0.02\text{-nál, de viszont már}$$

$$\left| a_{13} + \frac{3}{2} \right| = |-0.018518519| = 0.018518519 < 0.02, \text{ és még nagyobb indexekre az abszolút érték}$$

még inkább kisebb 0.02-nál. A példákban látott módszerrel mindig a legkisebb küszöbindexet kapjuk

14. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \frac{3^{n+1} - 2}{2^n + 1}$ sorozat limeszét.

Megoldás: Ebben a feladatban a q^n nevezetes sorozat két példánya is szerepel $q = 3$ és $q = 2$ választással. A megadott tételből tudjuk, hogy a limesz mindkét esetben plusz végtelen. Így a tört számlálója és nevezője is végtelenbe tart, a limesz $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú. Az ilyen típusú limeszek kiszámolásakor, mint eddig is, legtöbbször a **kiemelés** segít. Olyan mennyiségeket igyekszünk kiemelni a számlálóból és a nevezőből külön-külön, hogy a kiemelés során kapott másik tényező nullától különböző konstanshoz tartson, és ez a konstans a nevezőben még nullától különbözzön is. Először picit átalakítjuk a_n képletét:

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2}{2^n + 1} = \frac{3 \cdot 3^n - 2}{2^n + 1}.$$

Ezután a számlálóból kiemelünk 3^n -t, a nevezőből 2^n -t, és néhány átalakítást is elvégezzünk:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^{n+1} - 2}{2^n + 1} = \frac{3 \cdot 3^n - 2}{2^n + 1} = \frac{3^n \left(3 - \frac{2}{3^n} \right)}{2^n \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)} = \\ &= \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{3 - \frac{2}{3^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = \left(\frac{3}{2} \right)^n \cdot \frac{3 - \frac{2}{3^n}}{1 + \frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

A kapott szorzatban $\left(\frac{3}{2} \right)^n \rightarrow \infty$, hiszen $\frac{3}{2} > 1$. A tört számlálója 3-ba tart, hiszen $3^n \rightarrow \infty$,

ezért $\frac{2}{3^n} \rightarrow 0$. Hasonlóan a nevező 2-hez tart, így a tört $\frac{3}{1} = 3$ -hoz, ami egy pozitív szám, és tudjuk az egyik tételünkéből, hogy egy plusz végtelenbe tartó és egy pozitív konstanshoz tartó mennyiség szorzata plusz végtelenbe tart, tehát

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2}{2^n + 1} \rightarrow \infty.$$

15. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \frac{2^n - 5^n}{10^n - 9^{10}}$ sorozat limeszét.

Megoldás: Az világos, hogy a nevező tart plusz végtelenbe. Megvizsgáljuk a számlálót. Mivel

$$2^n - 5^n = 5^n \left(\frac{2^n}{5^n} - 1 \right) = 5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n - 1 \right)$$

látjuk, hogy a szorzat első tényezője plusz végtelenbe, a második tényezője -1-be tart, így a szorzat maga mínusz végtelenbe. Tehát ismét a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típussal van dolgunk. (Ha a számlálóból 2^n -t emeltünk volna ki kicsit más úton, de akkor is kijött volna, hogy a mínusz végtelenbe tart, érdemes kipróbálni.) Ezután a_n -t a módszerünkkel, kiemeléssel, átalakítjuk, figyelembe véve, hogy $10^n = 2^n \cdot 5^n$.

$$a_n = \frac{2^n - 5^n}{10^n - 9^{10}} = \frac{2^n - 5^n}{2^n \cdot 5^n - 9^{10}} = \frac{5^n \left(\frac{2^n}{5^n} - 1 \right)}{5^n \left(2^n - \frac{9^{10}}{5^n} \right)} = \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^n - 1}{2^n - \frac{9^{10}}{5^n}}.$$

A kapott tört számlálója -1-be tart, a nevezője plusz végtelenbe, így a tört nullába, $a_n \rightarrow 0$.

16. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}$ sorozat határértékét.

Megoldás: Mindkét gyök alatti mennyiség, és így mindkét gyökös mennyiség is plusz végtelenbe tart, tehát a $\infty - \infty$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Mivel ezt négyzetgyökök különbsége okozza, a gyöktelenítésnek nevezett eljárás segít a limesz kiszámolásában. Ennek lényege az alábbi azonosság:

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

Ezt alkalmazva az $A = n + 2$, $B = n - 3$ választással

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-3} = \frac{(n+2) - (n-3)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}} = \frac{5}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}}.$$

Ezek az átalakítások lehetővé teszik a limesz meghatározását, hiszen az utolsó tört nevezője végtelenbe tart, így a tört nullába, $a_n \rightarrow 0$.

A szokott numerikus kísérlettel $a_{100000} \approx 0.0079057$, ami alátámasztja az eredményünket. Azt is látjuk ebből, hogy a sorozat elég lassan tart nullához. Például az előbbi feladatban szereplő sorozat esetén már $a_{10} \approx -0.001$, az a sorozat igen gyorsan tart nullába.

17. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \sqrt{n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 1}$ sorozat határértékét.

Megoldás: Ugyanazok miatt, mint az előbb most is a $\infty - \infty$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. A gyöktelenítés módszerét hívjuk segítségül.

$$a_n = \sqrt{n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 1} = \frac{(n^2 - n + 2) - (n^2 + 2n - 1)}{\sqrt{n^2 - n + 2} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}} =$$

$$= \frac{-3n + 3}{\sqrt{n^2 - n + 2} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}}.$$

Az utolsó törtben a számláló mínusz végtelenbe, a nevező plusz végtelenbe tart. A gyöktelenítés nem oldott meg minden, mert határozatlan alakot kaptunk. Ha azonban kiemelünk a számlálóból és a nevezőből n -et, a limesz kiszámolhatóvá válik:

$$a_n = \frac{-3n + 3}{\sqrt{n^2 - n + 2} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}} = \frac{n \left(-3 + \frac{3}{n} \right)}{\sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} + \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}} =$$

$$= \frac{n \left(-3 + \frac{3}{n} \right)}{\sqrt{n^2} \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{n \left(-3 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \right)} =$$

$$= \frac{-3 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}}.$$

Az utolsó tört számlálója -3 -ba tart, a gyök alatti mennyiségek mindketten 1 -be, így a nevező 2 -be, tehát

$$a_n = \sqrt{n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 1} \rightarrow -\frac{3}{2}.$$

18. feladat: Monoton-e az $a_n = \frac{n-1}{2n+1}$ sorozat valamelyik értelemben?

Megoldás: Tájékozódásul kiszámoljuk a sorozat néhány tagját. Például $a_1 = 0$, $a_{40} \approx 0.481$, $a_{1000} \approx 0.499$. Ezek a számok növekednek, és ez alapján azt tételezzük fel, hogy a sorozat növvő. Tehát azt próbáljuk meg bebizonyítani, hogy $a_n \leq a_{n+1}$ teljesül minden n -re, vagy minden, valamilyen küszöbszámnál nagyobb minden n -re. Mivel a_{n+1} -et úgy lehet kifejezni n -el, hogy a sorozatot definiáló képletbe az n helyére $n+1$ -et írunk, az $a_n \leq a_{n+1}$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{(n+1)-1}{2(n+1)+1} = \frac{n}{2n+3}.$$

Itt az elején és a végén álló törtben mindkét nevező pozitív, keresztbe szorozva velük egyszer sem fordul meg az egyenlőtlenség iránya, így azt kapjuk, hogy

$$(n-1)(2n+3) \leq n(2n+1).$$

Elvégezve a műveleteket, és egyszerűsítéseket ebből következik, hogy

$$2n^2 - 2n + 3n - 3 \leq 2n^2 + n$$

$$-3 \leq 0.$$

Az az egyenlőtlenség, hogy $-3 \leq 0$ minden n -re igaz, mert n -től függetlenül igaz. Ezért a sorozatunk növvő az első elemétől kezdve.

19. feladat: Monoton-e az $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ sorozat valamelyik értelemben?

Megoldás: Most például $a_{10} \approx 1.049$, $a_{100} \approx 1.005$, $a_{1000} \approx 1.0005$. Ezek a számok egyre kisebbek, ezért arra gondolunk, hogy a sorozat csökkenő, azaz $a_n \geq a_{n+1}$. Ezt az egyenlőtlenséget akarjuk igazolni. Kiírva ezt n -el

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}.$$

Mivel \sqrt{A} a pozitív A szám két négyzetgyöke közül a pozitívot jelenti, ez így is írható:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \geq 0.$$

Ebből négyzetre emeléssel, és rendezéssel

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$$

adódik. Mivel a nevezők ismét pozitívak, keresztbe szorzás után ezt azt jelenti, hogy $n+1 \geq n$, vagyis $1 \geq 0$. Ez egy ismét minden n -re igaz egyenlőtlenség. Tehát a sorozatunk az első elemétől kezdve csökkenő.