

#### 4.5. Összetett feladatok

**1. feladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^2 + 19 + 4i = (4 + 2i)z$$

**Megoldás**

Az egyenletet nullára rendezzük, majd használjuk a gyökképletet:

$$\begin{aligned} z^2 - (4 + 2i)z + 19 + 4i &= 0 \\ z_{1,2} &= \frac{(4 + 2i) \pm \sqrt{(-4 - 2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (19 + 4i)}}{2} = \\ &= \frac{4 + 2i \pm \sqrt{16 + 16i + 4i^2 - 76 - 16i}}{2} = \frac{4 + 2i \pm \sqrt{-64}}{2} = \\ &= \frac{4 + 2i \pm 8i}{2} = \begin{cases} 2 + 5i \\ 2 - 3i \end{cases} \end{aligned}$$

**2. feladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^6 + 8\sqrt{3} z^3 = 64i^{2010}$$

**Megoldás**

Ez egy másodfokú egyenletre visszavezethető egyenlet, ha a  $z^3 = x$  helyettesítést elvégezzük. A rendezésnél használjuk ki az  $i^{2010} = (i^2)^{1005} = (-1)^{1005} = -1$  összefüggést.

$$z^6 + 8\sqrt{3} z^3 = 64i^{2010} \rightarrow x^2 + 8\sqrt{3}x + 64 = 0$$

Használjuk a gyökképletet  $x$  meghatározására:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-8\sqrt{3} \pm \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2} = \frac{-8\sqrt{3} \pm \sqrt{-64}}{2} = \\ &= \frac{-8\sqrt{3} \pm \sqrt{64}i^2}{2} = \frac{-8\sqrt{3} \pm 8i}{2} = \begin{cases} -4\sqrt{3} + 4i \\ -4\sqrt{3} - 4i \end{cases} \end{aligned}$$

Elvégezzük a visszahelyettesítést.

Ha

$$x_1 = z^3 = -4\sqrt{3} + 4i = 8(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$

$$z_k = 2 \left( \cos \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{150^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \text{ ahol } k = 0, 1, 2.$$

Ha

$$x_2 = z^3 = -4\sqrt{3} - 4i = 8(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

$$z_l = 2 \left( \cos \frac{210^\circ + l \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{210^\circ + l \cdot 360^\circ}{3} \right) \text{ ahol } l = 0, 1, 2.$$

Tehát az egyenlet gyökei:

$$k = 0 \quad z_0 = 2(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$$

$$k = 1 \quad z_1 = 2(\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ)$$

$$k = 2 \quad z_2 = 2(\cos 290^\circ + i \sin 290^\circ)$$

$$l = 0 \quad z_3 = 2(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$$

$$l = 1 \quad z_4 = 2(\cos 190^\circ + i \sin 190^\circ)$$

$$l = 2 \quad z_5 = 2(\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ)$$

**3. feladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2 - 3i)z^4 + 8\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = -40 + 40i$$

**Megoldás**

Először a trigonometrikus alakban adott komplex számot át kell írni algebrai alakra, majd az egyenletet rendezzük.

$$(2 - 3i)z^4 + 8\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -40 + 40i$$

$$(2 - 3i)z^4 - 8 - 8i = -40 + 40i \rightarrow (2 - 3i)z^4 = -31 + 48i$$

$$z^4 = \frac{-31 + 48i}{2 - 3i} = \frac{-16(2 - 3i)}{2 - 3i} = -16 = 16(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

Az egyenlet gyökei:

$$z_k = 2\left(\cos \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} + i \sin \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}\right),$$

ahol  $k = 0, 1, 2, 3$ .

**4. feladat:**

$$\left(i - \frac{i-1}{z}\right) \cdot (z - i^{103} + 3iz) = 0$$

**Megoldás**

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla:

$$i - \frac{i-1}{z} = 0 \quad \text{vagy} \quad z - i^{103} + 3iz = 0.$$

Az első egyenlet megoldása:

$$i - \frac{i-1}{z} = 0 \rightarrow i = \frac{i-1}{z}$$

$$z = \frac{i-1}{i} = \frac{i-1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i^2 + i}{-i^2} = \frac{1+i}{1} = 1+i.$$

A második egyenlet megoldásánál használjuk ki, hogy  $i^{103} = i^{102} \cdot i = (i^2)^{51} \cdot i = -i$ .

$$z + i + 3iz = 0 \rightarrow z = \frac{-i}{1+3i} = \frac{-i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} = -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i.$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$z_1 = 1 + i \text{ és } z_2 = -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i.$$