PARAMÉTERES SÍKGÖRBÉK

1. B Határozza meg a $c(t) = (2t - 1, t^2),\ t \in [0; 2]$ paraméteres alakban adott görbe esetén a paraméteres deriváltat!
   Megoldás
   $y' = t$

2. B Határozza meg a $c(t) = (2t^2, 3t - 4),\ t \in [0; 2]$ paraméteres alakban adott görbe esetén a paraméteres deriváltat!
   Megoldás
   $y' = \dfrac{3}{4t}$

3. B Határozza meg a $c(t) = (t^2 + t, t - \dfrac{1}{t}),\ t \in [1; 4]$ paraméteres alakban adott görbe esetén a paraméteres deriváltat!
   Megoldás
   $y' = \dfrac{t^2 + 1}{2t^3 + t^2}$

4. B Határozza meg a $c(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t),\ t \in [-\dfrac{\pi}{2}; 0]$ paraméteres alakban adott görbe esetén a paraméteres deriváltat!
   Megoldás
   $y' = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$

5. B Határozza meg a $c(t) = (\dfrac{1}{t} - 3t, t^3),\ t \in \left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$ paraméteres alakban adott görbe esetén a paraméteres derivált értékét $t = -1$-ben!
   Megoldás
   $y' = \dfrac{3t^4}{-1 - 3t^2};\ y' = -\dfrac{3}{4}$

6. B Határozza meg a $c(t) = (\ln t, \mathrm{e}^{2t}),\ t \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$ paraméteres alakban adott görbe esetén a paraméteres derivált értékét $t = 1$-ben!
   Megoldás
   $y' = 2t\mathrm{e}^{2t};\ y' = 2\mathrm{e}^2$

7. B,V Határozza meg a $c(t) = (2(t - \sin t), 2(1 - \cos t))\,,\ t \in [0; 2\pi]$ paraméteres alakban adott görbe esetén a paraméteres derivált értékét $t = \dfrac{\pi}{6}$-ban!
   Megoldás
   $y' = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t};\ y' = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$

8. B,V Írja fel a $c(t) = (2t+1, t^3 - t^2 + 1),\ t \in [0; 2]$ paraméterezésű görbe $t = 1$ paraméterhez tartozó érintőjét!

Megoldás
$y' = \dfrac{3t^2 - 2t}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

9. B,V Írja fel a $c(t) = (t^3 - 3t, t^2 - 9),\ t \in [0; 2]$ paraméterezésű görbe $t = \sqrt{3}$ paraméterhez tartozó érintőjét!
Megoldás
$y' = \dfrac{2t}{3t^2 - 3}$; $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 6$

10. B,V Írja fel a $c(t) = (\sin(2t), \cos(3t)),\ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ paraméterezésű görbe $t = \dfrac{\pi}{6}$ paraméterhez tartozó érintőjét!
Megoldás
$y' = \dfrac{-3\sin(3t)}{2\cos(2t)}$; $y = -3x + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

11. B,V Írja fel a $c(t) = (t \cdot \cos t, t \cdot \sin t),\ t \in [0; 2\pi]$ paraméterezésű görbe $t = \dfrac{\pi}{2}$ paraméterhez tartozó érintőjét!
Megoldás
$y' = \dfrac{\sin t + t \cdot \cos t}{\cos t - t \cdot \sin t}$; $y = -\dfrac{2}{\pi}x + \dfrac{\pi}{2}$

12. V Írja fel a $c(t) = (t^2 + t, t^2 - t^3),\ t \in [-2; 2]$ paraméterezésű görbe $P(0; 2)$ ponton átmenő érintőjét!
Megoldás
$y' = \dfrac{2t - 3t^2}{2t + 1}$; $y = 5x + 2$

13. V Írja fel a $c(t) = (t^2 + t, t^3 - 3t),\ t \in [0; 3]$ paraméterezésű görbe $P(6; 2)$ ponton átmenő érintőjét!
Megoldás
$y' = \dfrac{3t^2 - 3}{2t + 1}$; $y = \dfrac{9}{5}x - \dfrac{44}{5}$

14. V Írja fel a $c(t) = (\mathrm{e}^t, 2\mathrm{e}^{-t} - 1),\ t \in [-1; 2]$ paraméterezésű görbe $P(1; 1)$ ponton átmenő érintőjét!
Megoldás
$y' = \dfrac{-2\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t}$; $y = -2x + 3$

15. V Írja fel a $c(t) = ((1 + \cos t)\cos t, (1 + \cos t)\sin t),\ t \in [0; \pi]$ paraméterezésű görbe $P(0; 1)$ ponton átmenő érintőjét!
Megoldás
$(1 + \cos t)\cos t = 0$ és $(1 + \cos t)\sin t = 1$ egyenletrendszert kell megoldani. Az első egyenletből

$t = \pi$ és $t = \dfrac{\pi}{2}$. A második egyenletnek viszont $t = \pi$ nem megoldása.
$y' = \dfrac{-\sin^2 t + \cos^2 t + \cos t}{-\sin t(1 + 2\cos t)}$; $y = x + 1$

16. V Írja fel a $c(t) = (2t - 1, t^3),\ t \in [-2; 2]$ paraméterezésű görbe $m = \dfrac{3}{2}$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
Megoldás
$y' = \dfrac{3t^2}{2}$; $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$; $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$

17. V Írja fel a $c(t) = (t^3, t^2 + t),\ t \in [-2; 2]$ paraméterezésű görbe $m = 1$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
Megoldás
$y' = \dfrac{2t + 1}{3t^2}$; $y = x - \dfrac{5}{27}$; $y = x + 1$

18. V Írja fel a $c(t) = (3t^2 - 2t, t^3 - 6t),\ t \in [0; 6]$ paraméterezésű görbe $m = 3$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
Megoldás
$y' = \dfrac{3t^2 - 6}{6t - 2}$; $y = 3x$; $y = 3x - 108$

19. B,V Határozza meg, hogy a $c(t) = (\cos(t^2), 6t^2 - 5t),\ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában van függőleges érintője!
Megoldás
$y' = \dfrac{12t - 5}{-2t\sin(t^2)}$
vízszintes érintő: $t = 0$ paraméterhez tartozó $(1; 0)$ pontban

20. B,V Határozza meg, hogy a $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\ t \in [0; 2\pi]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában van vízszintes érintője!
Megoldás
$y' = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$
$t = 0$ és $t = 2\pi$ esetén a nevező nulla.
vízszintes érintő: $t = \pi$ paraméterhez tartozó $(\pi; 2)$ pontban

21. B,V Határozza meg, hogy a $c(t) = (t^3 - 6t^2 + 1, t^3 - 4t),\ t \in [-1; 5]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában van függőleges érintője!
Megoldás
$y' = \dfrac{3t^2 - 4}{3t^2 - 12t}$
függőleges érintő: $t = 0$ paraméterhez tartozó $(1; 0)$ pontban, $t = 4$ paraméterhez tartozó $(-31; 48)$ pontban

22. B,V Határozza meg, hogy a $c(t) = (t^2 - 4, t^3 - 3t),\ t \in [-2; 2]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában van vízszintes, és melyik pontjában függőleges érintője!

Megoldás
$y' = \dfrac{3t^2-3}{2t}$
vízszintes érintő: $(-3;2), (-3,-2)$
függőleges érintő: $(-4;0)$

23. B,V Határozza meg, hogy a $c(t) = (2t^3-3t^2-12t, 2t^3+3t^2-12t),\ t \in [-3;3]$ paraméterezésű görbe melyik pontjában van vízszintes, és melyik pontjában függőleges érintője!
Megoldás
$y' = \dfrac{t^2+t-2}{t^2-t-2}$
vízszintes érintő: $(-13;-7), (-4,20)$
függőleges érintő: $(-20;4), (7;13)$

24. B,V Határozza meg a $c(t) = (1-t, 2t-1),\ t \in [0;2]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!
Megoldás
$s = 2\sqrt{5}$

25. B,V Határozza meg a $c(t) = (t^2+1, 2t^2-1),\ t \in [0;1]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!
Megoldás
$\sqrt{20t^2} = \sqrt{20}|t|;$ t nemnegatív $t \in [0;1]$ esetén $\Rightarrow |t| = t$
$s = \sqrt{5}$

26. B,V Határozza meg a $c(t) = (2t^2, 3t^3),\ t \in [0;1]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!
Megoldás
$s \approx 3,668$

27. V Határozza meg a $c(t) = \left(-\dfrac{2}{t}; \dfrac{1}{2t}\right),\ t \in [2;3]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!
Megoldás
$$\int_2^3 \sqrt{\frac{4}{t^2}+\frac{1}{4t^2}}\,dt = \int_2^3 \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{1}{|t|}\,dt = \int_2^3 \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \left[\frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\ln|t|\right]_2^3$$
$s \approx 0,8359$

28. V Határozza meg a $c(t) = \left(\sqrt{2t}, -\sqrt{t}\right),\ t \in [1;2]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!
Megoldás
$$\int_1^2 \sqrt{\frac{1}{2t}+\frac{1}{4t}}\,dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \left[\sqrt{3}\sqrt{t}\right]_1^2$$
$s \approx 0,7174$

29. V Határozza meg a $c(t) = (\sqrt[3]{t}+2, 2t),\ t \in [0;1]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!
Megoldás
$$\left[\frac{8}{27}\left(\frac{9}{4}x+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$s = \dfrac{61}{27} \approx 2,2593$

30. V Határozza meg a $c(t)=\left(\frac{t^3}{3}-1,\frac{t^2}{2}+1\right)$, $t\in[0;1]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!

Megoldás

$\left[\frac{1}{3}\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$s\approx 0,60948$

31. V Határozza meg a $c(t)=(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t},1-2t)$, $t\in[0;1]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!

Megoldás

$(\mathrm{e}^t)^2+2+(\mathrm{e}^{-t})^2=(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2$

$\sqrt{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}=|\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}|$; $\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}$ pozitív $t\in[0;1]$ esetén $\Rightarrow |\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}|=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}$

$s=\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 2,35$

32. V Határozza meg a $c(t)=(t-\sin t,1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$ paraméterezésű görbe ívhosszát!

Megoldás

$\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1-\cos t}{2}\Rightarrow 1-\cos t=2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$\sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}=2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$; $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ nemnegatív $t\in[0;2\pi]$ esetén $\Rightarrow \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|=\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

$s=8$