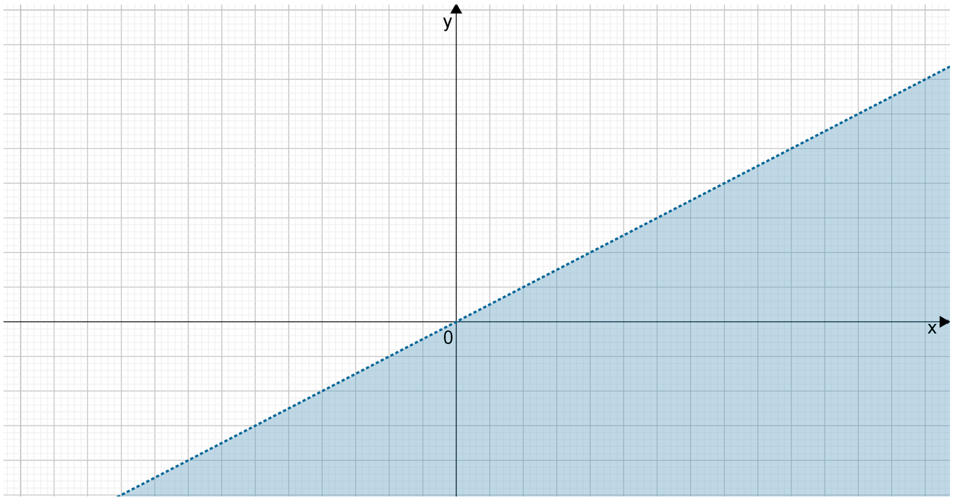
Többváltozós függvények

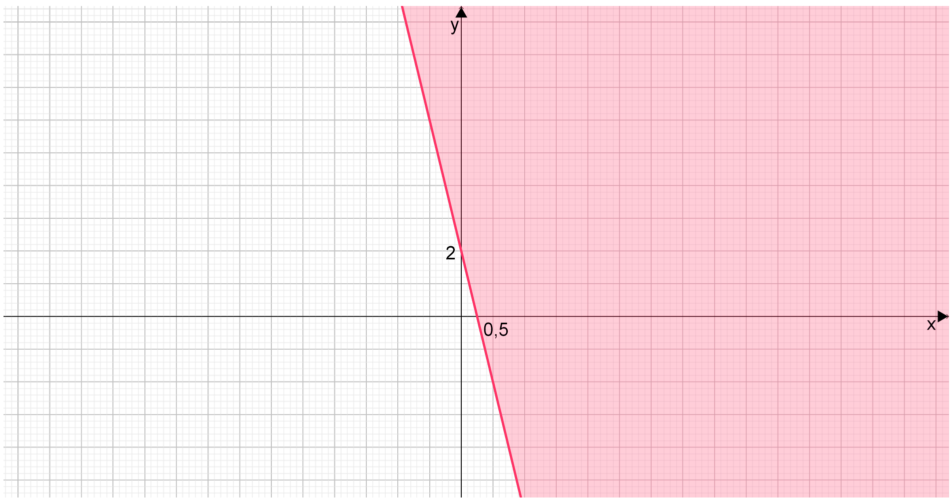
1. B Tekintsük a következő kétváltozós függvényt: $f(x, y) = x^2y - x + 2y$. Számítsa ki az $f(1, 2), f(2, 1), f(3, 3)$ helyettesítési értékeket!
Megoldás: $f(1, 2) = 5, f(2, 1) = 4, f(3, 3) = 30$

2. B Tekintsük a következő kétváltozós függvényt: $f(x, y) = x \ln y$. Számítsa ki az $f(-1, 1), f(1, -1)$ helyettesítési értékeket!
Megoldás: $f(-1, 1) = 0$, a függvény a $(1, -1)$ pontban nincs értelmezve

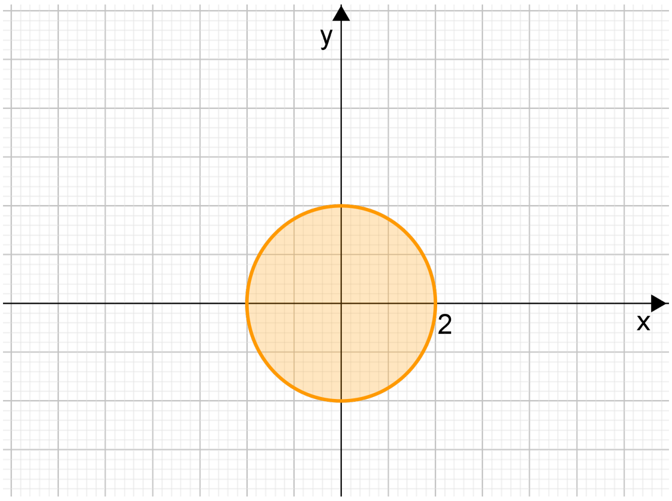
3. B Határozza meg az $f(x, y) = \ln(x - 2y)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x - 2y > 0$



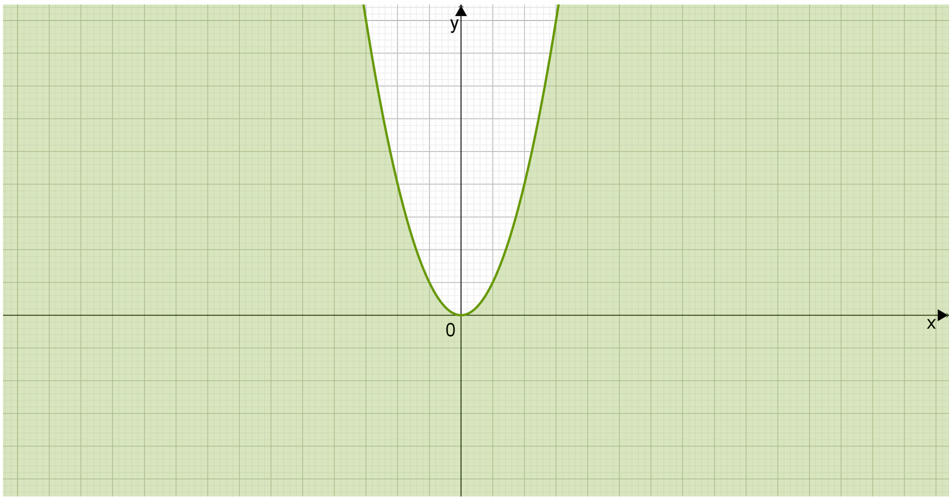
4. B Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt{4x + y - 2}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $4x + y - 2 \geq 0$



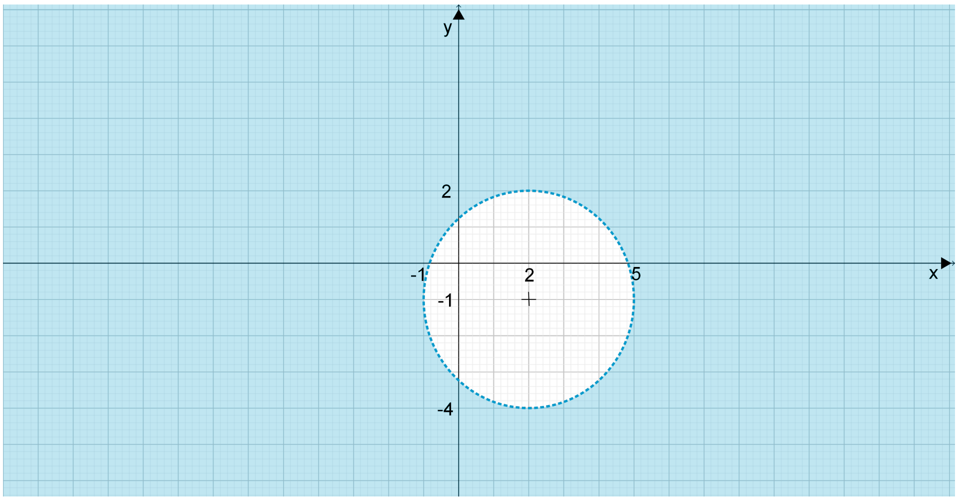
5. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $4 - x^2 - y^2 \geq 0$



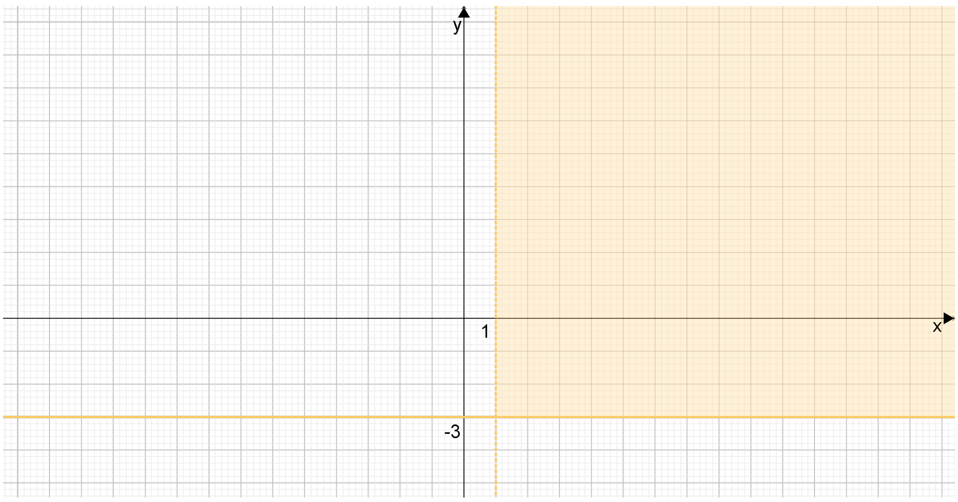
6. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2 - y \geq 0$



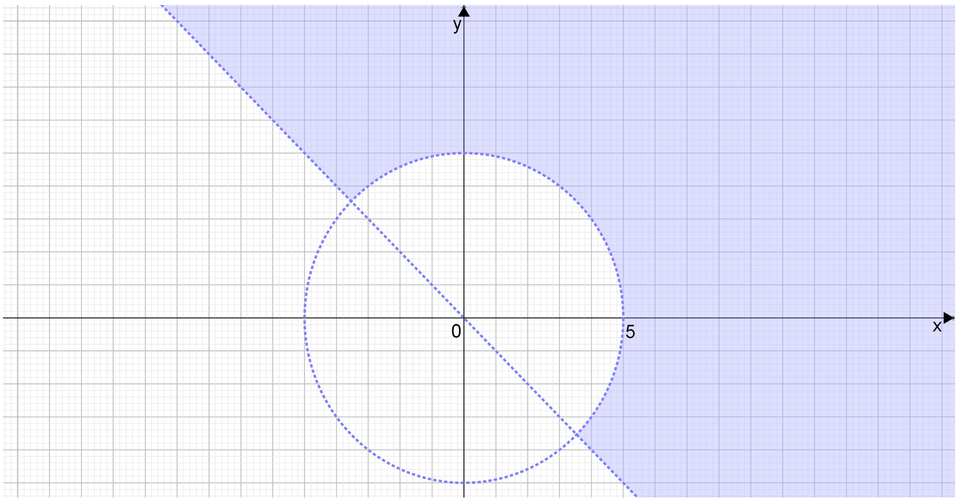
7. B Határozza meg az $f(x,y) = \ln(x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 > 0 \rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 > 9$;kör középpontja: $(2;-1)$, sugara: $r = 3$



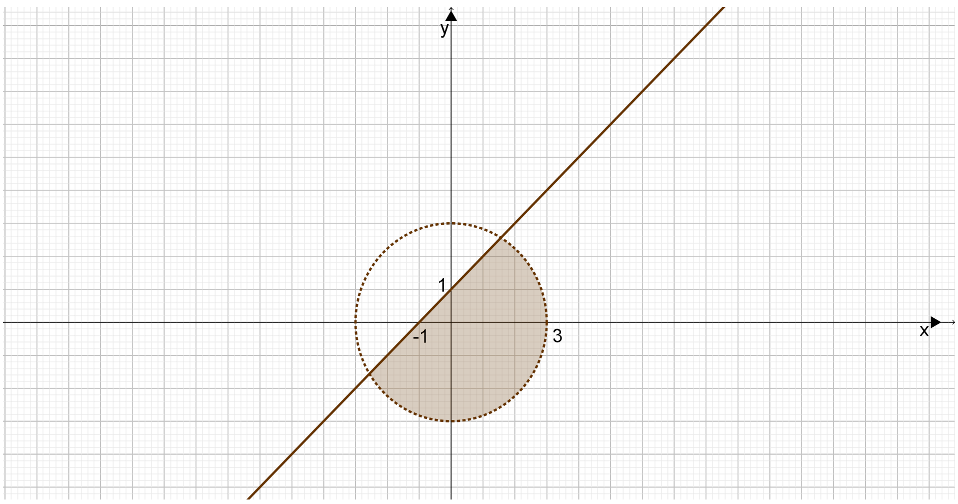
8. B,V Határozza meg az $f(x, y) = e^{\sqrt{y+3}} + \ln(x-1)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $y + 3 \geq 0, x - 1 > 0$



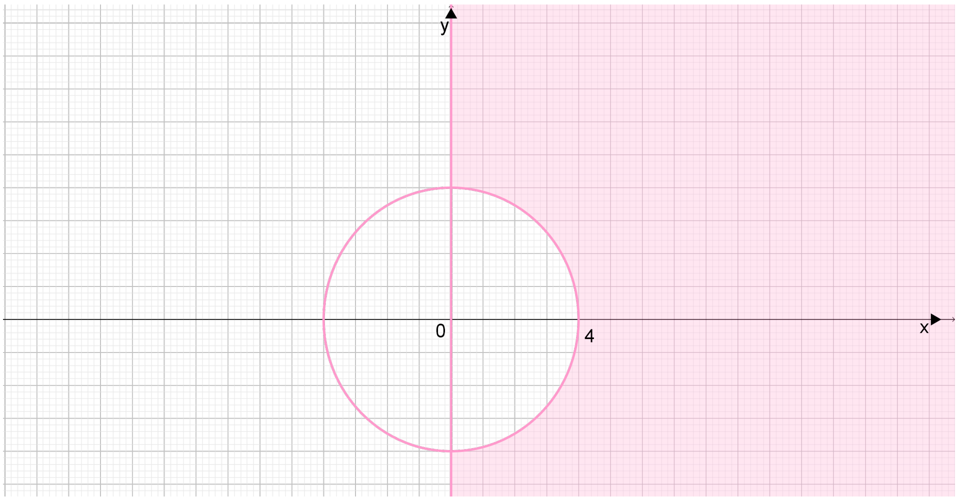
9. B,V Határozza meg az $f(x, y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 - 25)}{\sqrt{x+y}}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2 + y^2 - 25 > 0, x + y > 0 \ (\sqrt{x+y} \neq 0, x + y \geq 0)$



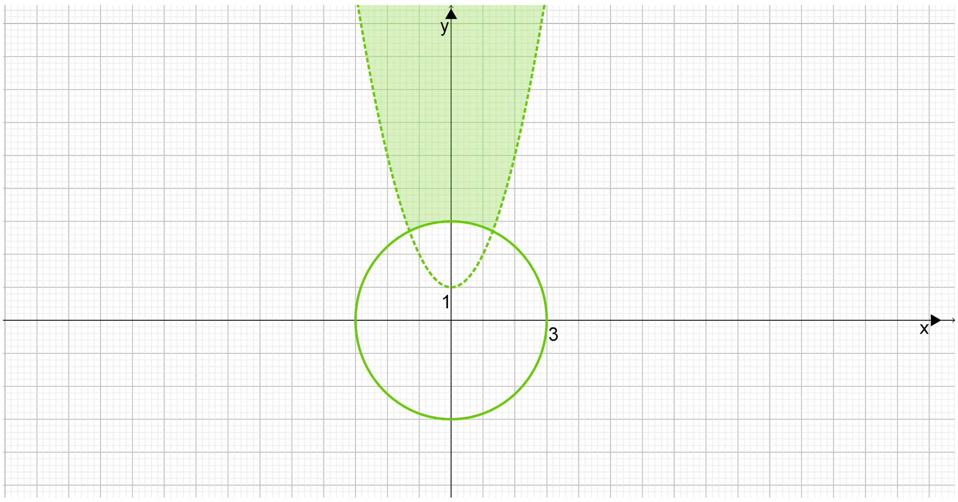
10. B,V Határozza meg az $f(x,y) = \lg(9-x^2-y^2)+\sqrt{x+1-y}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $9 - x^2 - y^2 > 0, x + 1 - y \geq 0$



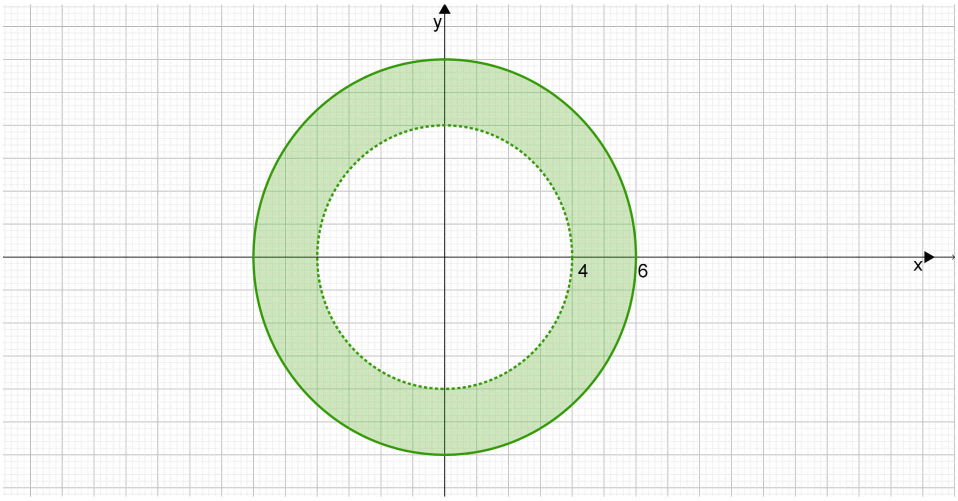
11. B,V Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-16} + \sqrt{2x}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2 + y^2 - 16 \geq 0, 2x \geq 0$



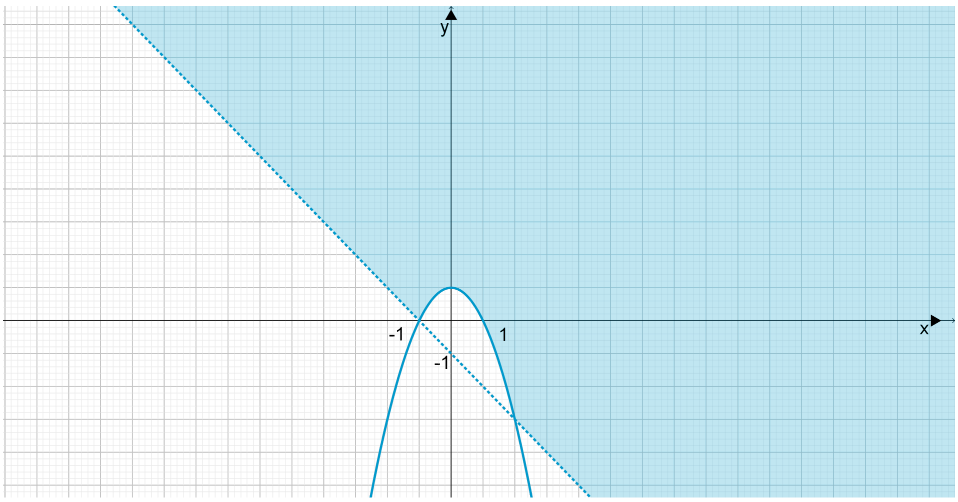
12. V Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2-9} - \ln(y-x^2-1)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2+y^2-9 \geq 0, y-x^2-1 > 0$



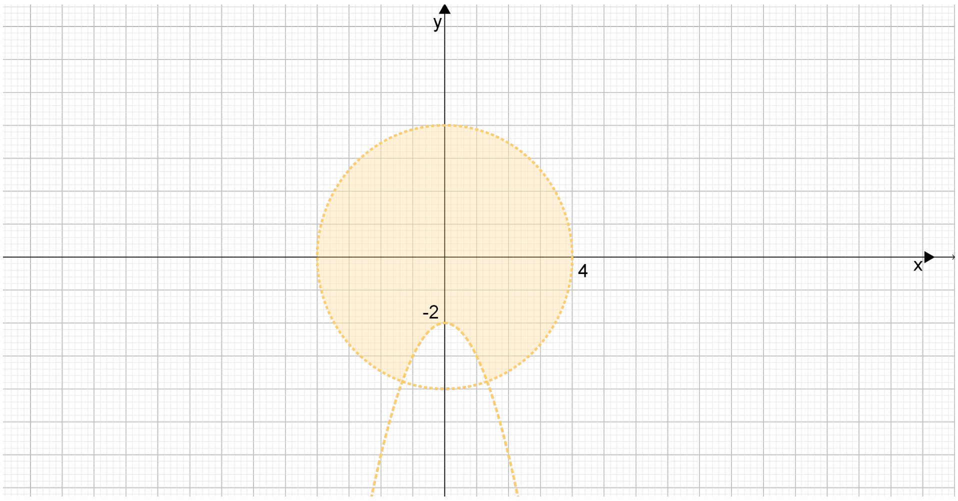
13. V Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{7}{\sqrt{x^2+y^2-16}} + \sqrt{36-x^2-y^2}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2+y^2-16 > 0, 36-x^2-y^2 \geq 0$



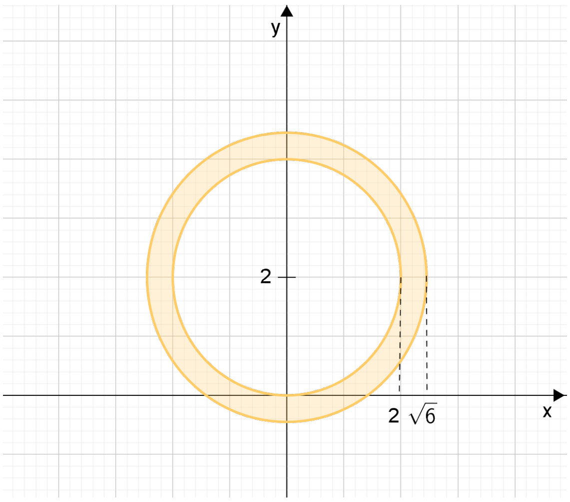
14. V Határozza meg az $f(x,y) = \ln(x+y+1) + \sqrt{x^2+y-1}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x+y+1 > 0, x^2+y-1 \geq 0$



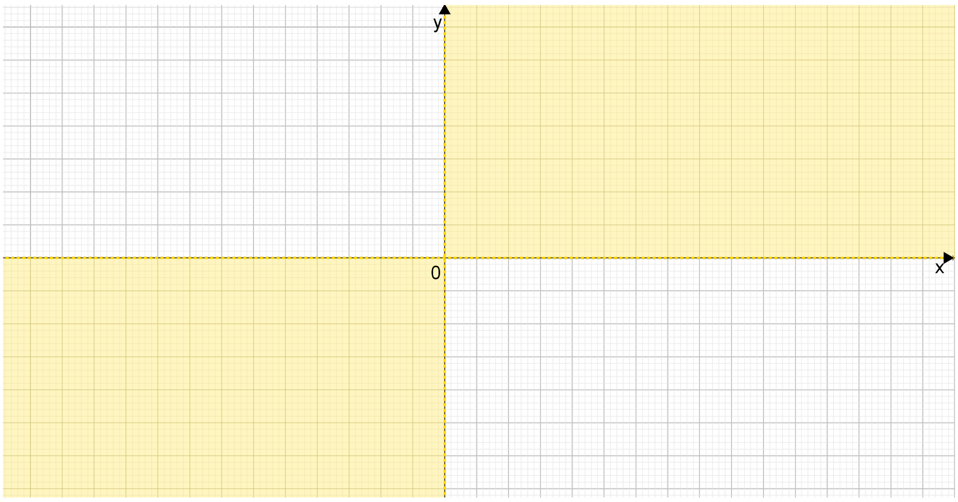
15. V Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{\ln(y+x^2+2)}{\sqrt{-x^2-y^2+16}}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $y+x^2+2 > 0, -x^2-y^2+16 > 0$



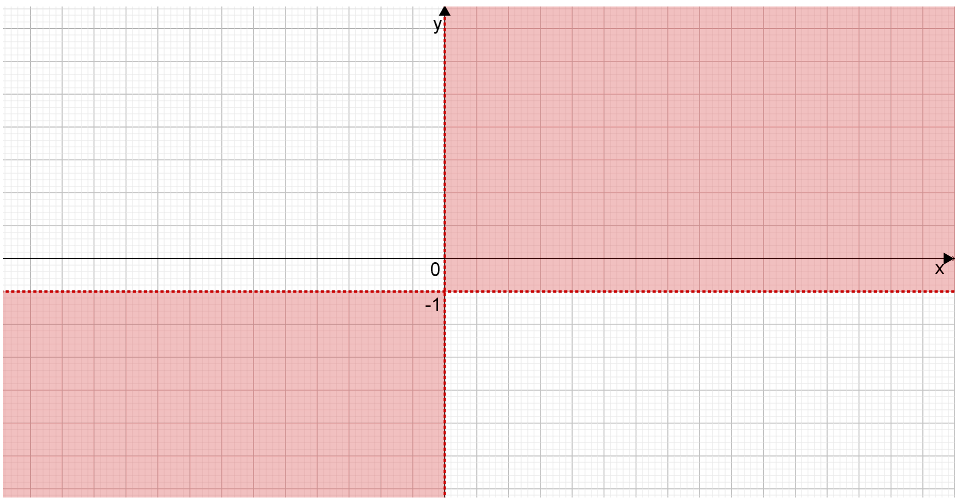
16. V Határozza meg az $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 4y - 1)$ függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $-1 \leq x^2 + y^2 - 4y - 1 \leq 1 \rightarrow x^2 + (y-2)^2 \geq 4$ és $x^2 + (y-2)^2 \leq 6$



17. V Határozza meg az $f(x, y) = \log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $\frac{x}{y} > 0$



18. V Határozza meg az $f(x,y) = \ln(xy + x)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $xy + x > 0$, azaz $x(y+1) > 0$



PARCIÁLIS DERIVÁLÁS

19. B Határozza meg az $f(x,y) = x^2 \sin y$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 2x \cdot \sin y$; $f_y(x,y) = x^2 \cdot \cos y$

20. B Határozza meg az $f(x,y) = x^2y - xy^3$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 2x \cdot y - 1 \cdot y^3 = 2xy - y^3$; $f_y(x,y) = x^2 \cdot 1 - x \cdot y^3 = x^2 - 3xy^2$

21. B,V Vegyük az alábbi kétváltozós függvényt:

$$f : R^2 \to R, f(x,y) = x^2y - xy^3 + x$$

Számítsa ki $f_x\,(1,2)$ és $f_y\,(1,2)$ értékeit! Majd képezze az összes másodrendű parciális deriváltat!

Megoldás:

$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^3 + 1$, $f_x(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2^3 + 1 = -3$

$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3xy^2 + 0$, $f_y(1,2) = 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = -11$

$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2y$, $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - 3y^2$, $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - 3y^2$, $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -6xy$

22. B Vegyük az alábbi kétváltozós függvényt:

$$f : R^2 \to R, f(x,y) = 3x^3y^2 - 4xy^3 + x + 1$$

Számítsa ki $f_x\,(1,-1)$ és $f_y\,(1,-1)$ értékeit! Majd képezze az összes másodrendű parciális deriváltat!

Megoldás:

$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 4y^3 + 1$, $f_x(1,-1) = 14$

$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y - 12xy^2$, $f_y(1,-1) = -18$

$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 18xy^2$, $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18x^2y - 12y^2$, $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18x^2y - 12y^2$, $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 6x^3 - 24xy$

23. B Vegyük az alábbi kétváltozós függvényt:

$$f : R^2 \to R, f(x,y) = \frac{4}{x} + x^2y + \frac{y^2}{4}$$

Határozza meg a függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4}{x^2} + 2xy$; $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{1}{2}y$

$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{8}{x^3} + 2y$; $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$; $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$; $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{1}{2}$

24. B Határozza meg az $f(x,y,z) = xy^2z^3 + 2x - 3y^2 + 4\sqrt{z}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

$f_x(x,y,z) = y^2z^3 + 2$; $f_y(x,y,z) = 2xyz^3 - 6y$; $f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2 + \frac{2}{\sqrt{z}}$

25. B Határozza meg az $f(x,y) = x^2\mathrm{e}^{2y}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

$f_x(x,y) = 2x \cdot \mathrm{e}^{2y} = 2x\mathrm{e}^{2y}$; $f_y(x,y) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{2y} \cdot 2 = 2x^2\mathrm{e}^{2y}$

26. B Határozza meg az $f(x,y) = y^3e^{6x-4}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

$f_x(x,y) = 6y^3e^{6x-4}$; $f_y(x,y) = 3y^2e^{6x-4}$

27. B Határozza meg az $f(x,y) = e^{2x^2+4y-xy}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

$f_x(x,y) = e^{2x^2+4y-xy}(4x - y)$; $f_y(x,y) = e^{2x^2+4y-xy}(4 - x)$

28. B Határozza meg az $f(x,y) = (2xy - y^4)^3$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 3(2xy - y^4)^2 \cdot (1 \cdot 2y - 0) = 6y(2xy - y^4)^2$;
$f_y(x,y) = 3(2xy - y^4)^2 \cdot (2x \cdot 1 - 4y^3) = 3(2xy - y^4)^2(2x - 4y^3)$

29. B Határozza meg az $f(x,y) = \left(4x^2y - y^3 + 5x\right)^7$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 7\left(4x^2y - y^3 + 5x\right)^6(8xy + 5)$; $f_y(x,y) = 7\left(4x^2y - y^3 + 5x\right)^6(4x^2 - 3y^2)$

30. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{x^2y^2 + x^7}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2y^2 + x^7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x \cdot y^2 + 7x^6) = \frac{2xy^2 + 7x^6}{2\sqrt{x^2y^2 + x^7}};$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2y^2 + x^7)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 \cdot 2y + 0) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2y^2 + x^7}}$$

31. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt[5]{3 - xy + y^3}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{1}{5}(3 - xy + y^3)^{-\frac{4}{5}}(-y)$; $f_y(x,y) = \frac{1}{5}(3 - xy + y^3)^{-\frac{4}{5}}(-x + 3y^2)$

32. B Határozza meg az $f(x,y) = \ln\left(3x + 7x^4y\right)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{1}{3x + 7x^4y} \cdot (3 + 28x^3y)$; $f_y(x,y) = \frac{1}{3x + 7x^4y} \cdot 7x^4$

33. B Határozza meg az $f(x,y) = \ln(2x^2 + xy^5)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y) = \frac{1}{2x^2 + xy^5} \cdot (2 \cdot 2x + 1 \cdot y^5) = \frac{4x + y^5}{2x^2 + xy^5};$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2x^2 + xy^5} \cdot (0 + x \cdot 5y^4) = \frac{5xy^4}{2x^2 + xy^5}$$

34. B Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{3x + y^2}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \dfrac{3x^2y \cdot (3x + y^2) - x^3y \cdot 3}{(3x + y^2)^2}$; $f_y(x,y) = \dfrac{x^3 \cdot (3x + y^2) - x^3y \cdot 2y}{(3x + y^2)^2}$

35. B,V Határozza meg az $f(x,y) = x^2\sin(xy)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 2x \cdot \sin(xy) + x^2 \cdot \cos(xy) \cdot y = 2x\sin(xy) + x^2y\cos(xy)$; $f_y(x,y) = x^2 \cdot \cos(xy) \cdot x = x^3\cos(xy)$

36. B,V Határozza meg az $f(x,y) = y^3\cos(2x + 4y)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = y^3 \cdot (-\sin(2x + 4y)) \cdot 2 = -2y^3\sin(2x + 4y)$; $f_y(x,y) = 3y^2 \cdot \cos(2x + 4y) + y^3 \cdot (-\sin(2x + 4y)) \cdot 4 = 3y^2\cos(2x + 4y) - 4y^3\sin(2x + 4y)$

37. B,V Határozza meg az $f(x,y)=x^y$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y)=yx^{y-1}$, ("x^3"); $f_y(x,y)=x^y\ln(x)$, ("3^y")

38. B,V Határozza meg az $f(x,y)=(4x^2y-3^x)\ln(2x^2-5y)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y)=(8xy-3^x\ln 3)\cdot\ln(2x^2-5y)+(4x^2y-3^x)\cdot\frac{1}{2x^2-5y}\cdot 4x$$
$$f_y(x,y)=4x^2\cdot\ln(2x^2-5y)+(4x^2y-3^x)\cdot\frac{1}{2x^2-5y}\cdot(-5)$$

39. V Határozza meg az $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{2x-3y^2}}{x^2y^4+2}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y)=\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-3y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot 1-0)\cdot(x^2y^4+2)-(2x-3y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2x\cdot y^4+0)}{(x^2y^4+2)^2}=$$
$$\frac{\frac{x^2y^4+2}{\sqrt{2x-3y^2}}-2xy^4\sqrt{2x-3y^2}}{(x^2y^4+2)^2};$$
$$f_y(x,y)=\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-3y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(0-3\cdot 2y)\cdot(x^2y^4+2)-(2x-3y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(x^2\cdot 4y^3+0)}{(x^2y^4+2)^2}=$$
$$\frac{\frac{-3y(x^2y^4+2)}{\sqrt{2x-3y^2}}-4x^2y^3\sqrt{2x-3y^2}}{(x^2y^4+2)^2}$$

40. B, V Határozza meg az $f(x,y)=x^5y^3\cdot e^{2x-y}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y)=5x^4y^3e^{2x-y}+2x^5y^3e^{2x-y}$; $f_y(x,y)=3x^5y^2e^{2x-y}-x^5y^3e^{2x-y}$

41. B,V Határozza meg az $f:R^2\to R: f(x,y)=e^{x^2y}\cdot\ln(xy)$ függvény elsőrendű derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y)=e^{x^2y}\left(2xy\ln(xy)+\frac{1}{x}\right)$; $f_y(x,y)=e^{x^2y}\left(x^2\ln(xy)+\frac{1}{y}\right)$

42. B, V Határozza meg az $f:R^2\to R: f(x,y)=x\sin(2x+5y)+y\cos(x-y)$ függvény elsőrendű derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y)=\sin(2x+5y)+2x\cos(2x+5y)-y\sin(x-y)$; $f_y(x,y)=5x\cos(2x+5y)+\cos(x-y)+y\sin(x-y)$

43. B,V Határozza meg az $f:R^2\to R: f(x,y)=e^{4x}\sin(2y)$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:

44. B,V Határozza meg az $f:R^2\to R: f(x,y)=x^2e^{xy^2}$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:
$f_x(x,y) = 2x\mathrm{e}^{xy^2} + x^2y^2\mathrm{e}^{xy^2} = (2x + x^2y^2)\cdot \mathrm{e}^{xy^2}$; $f_y(x,y) = 2x^3y \cdot \mathrm{e}^{xy^2}$
$f_{xx}(x,y) = (2+2xy^2)\mathrm{e}^{xy^2} + (2x+x^2y^2)\mathrm{e}^{xy^2}y^2$; $f_{xy}(x,y) = (2x^2y)\mathrm{e}^{xy^2} + (2x+x^2y^2)\mathrm{e}^{xy^2}2xy$
$f_{yx}(x,y) = 6x^2y\mathrm{e}^{xy^2} + 2x^3y^3\mathrm{e}^{xy^2}$; $f_{yy}(x,y) = 2x^3\mathrm{e}^{xy^2} + 4x^4y^2\mathrm{e}^{xy^2}$

45. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \sin(2x+3y)$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 2\cos(2x+3y)$; $f_y(x,y) = 3\cos(2x+3y)$
$f_{xx}(x,y) = -4\sin(2x+3y)$; $f_{xy}(x,y) = -6\sin(2x+3y)$
$f_{yx}(x,y) = -6\sin(2x+3y)$; $f_{yy}(x,y) = -9\sin(2x+3y)$

46. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-2y^3}$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 2x\mathrm{e}^{x^2-2y^3}$; $f_y(x,y) = -6y^2\mathrm{e}^{x^2-2y^3}$
$f_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-2y^3}(2+4x^2)$; $f_{xy}(x,y) = -12xy^2\mathrm{e}^{x^2-2y^3}$
$f_{yx}(x,y) = -12xy^2\mathrm{e}^{x^2-2y^3}$; $f_{yy}(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-2y^3}(-12y+36y^4)$

47. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \ln(2xy + 3y^4)$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{2y}{2xy+3y^4}$; $f_y(x,y) = \frac{2x+12y^3}{2xy+3y^4}$
$f_{xx}(x,y) = \frac{-4y^2}{(2xy+3y^4)^2}$; $f_{xy}(x,y) = \frac{-18y^4}{(2xy+3y^4)^2}$
$f_{yx}(x,y) = \frac{-18y^4}{(2xy+3y^4)^2}$; $f_{yy}(x,y) = \frac{24xy^3-36y^6-4x^2}{(2xy+3y^4)^2}$

GRADIENS VEKTOR, IRÁNYMENTI DERIVÁLT, ÉRINTŐSÍK

48. B Határozza meg az $f : \mathbf{R^2} \to R, f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ függvény gradiensét a $(-1,2)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(-1,2) = grad\ f(-1,2) = (0,3)$

49. B Határozza meg az $f : \mathbf{R^2} \to R, f(x,y) = 2x + x^3y - y$ függvény gradiensét a $(2,-2)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(2,-2) = grad\ f(2,-2) = (-22;7)$

50. B Határozza meg az $f : \mathbf{R^2} \to R, f(x,y) = \sin(3xy^2)$ függvény gradiensét a $(2,1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(2,1) = grad\ f(2,1) = (2,88;11,52)$

51. B Határozza meg az $f : \mathbf{R^2} \to R, f(x,y) = \cos(xy+x^2)$ függvény gradiensét a $(3,1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(3,1) = grad\ f(3,1) = (3,76;1,61)$

52. B, V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = 2\sqrt[3]{xy} + \dfrac{3y}{x} + 4$ kétváltozós függvény gradiensét a $(8,1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(8,1) = grad\ f(8,1) = \left(\frac{23}{192}; \frac{35}{8}\right)$

53. B, V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = y \cdot e^{x+2y}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(2,-1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(2,-1) = grad\ f(2,-1) = (-1;-1)$

54. B, V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x \cdot \ln(x+y)$ függvény gradiensét a $(3;-2)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(3,-2) = grad\ f(3,-2) = (3,3)$

55. B, V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = x^3 \cdot (xy^2 - 1)^4$ kétváltozós függvény gradiensét a $(2,-1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(2,-1) = grad\ f(2,-1) = (44;-128)$

56. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = y^2 \cdot \sqrt{x^2+y}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(2,-3)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(2,-3) = grad\ f(2,-3) = \left(18; -\frac{3}{2}\right)$

57. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \dfrac{xy^4}{2x^3+y^2}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(-1,1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(-1,1) = grad\ f(-1,1) = (5;6)$

58. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \dfrac{2x^3-4y}{x^2+3y^3}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(-1,1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(-1,1) = grad\ f(-1,1) = \left(\frac{3}{4}; \frac{19}{8}\right)$

59. B, V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$ kétváltozós függvény gradiensét a $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = grad\ f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \left(-1; -\frac{\pi}{2}\right)$

60. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ függvény gradiensét a $(3;4)$ pontban!
Megoldás:
$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}; f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$
$\triangledown f(3,4) = grad\ f(3,4) = \left(\frac{3}{25}; \frac{4}{25}\right)$

61. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = 2xy^2 - y$ függvény $\underline{u}(1;2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(1;-1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1,-1) = -\frac{8}{\sqrt{5}}$

62. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x, y) = (x^3y)^2$ függvény $\underline{u} = (-1, 1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1, -1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1, -1) = -\frac{8}{\sqrt{2}}$

63. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x, y) = (x^2y^4)^3$ függvény $\underline{u} = (3, -2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(-1, 1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(-1, 1) = -\frac{42}{\sqrt{13}}$

64. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x, y) = x^2e^y - ye^x + 1$ függvény $\underline{u} = (2, -2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(0, 0)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(0; 0) = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

65. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x, y) = xe^{2x} + ye^{-2y} + 1$ függvény $\underline{u} = (5, 12)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1, 2)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1, 2) = \frac{15}{13}e^2 - \frac{36}{13}e^{-4} \approx 8,475$

66. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = (x + 2y)^3$ függvény $\underline{u}(2; 1)$ irányú iránymenti deriváltját a $P(1; 1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1, 1) = \frac{108}{\sqrt{5}}$

67. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x, y) = (2x^2 + y^5)^3$ függvény $\underline{u} = (2, -3)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1, -1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1, -1) = -\frac{21}{\sqrt{13}}$

68. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x, y) = \dfrac{2x - 3y}{4y - 3x}$ függvény $\underline{u} = (-3, 4)$ irányú iránymenti deriváltját az $(2, 1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(2, 1) = \frac{11}{20}$

69. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x, y) = \dfrac{3x - 2y^2}{x^2 + y}$ függvény $\underline{u} = (3, 1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(-1, 0)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(-1, 0) = -\frac{6}{\sqrt{10}}$

70. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x, y) = \sqrt{4x + 3y^2}$ függvény $\underline{u} = (1, -1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1, 1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

71. B Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(1; -1)$ pontban!
Megoldás:
$f_x(x, y) = 2x - y; f_y(x, y) = -x + 4y;$
érintősík egyenlete: $3x - 5y - z - 4 = 0$

72. B,V Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x, y) = \sqrt{x} - 3x\sqrt{y}$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(1; 1)$ pontban!

Megoldás:
érintősík egyenlete:$-\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y - z + 2 = 0 \to 5x + 3y + 2z - 4 = 0$

73. B,V Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - 4y}$ függvény érintősíkjának egyenletét a $(6; 3)$ pontban!
Megoldás:
$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{64-x^2-4y}}$; $f_y(x, y) = -\frac{2}{\sqrt{64-x^2-4y}}$
érintősík egyenlete:$-\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - z + \frac{29}{2} = 0$

74. B,V Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x, y) = 2\ln\left(\frac{y}{x} + x^2\right)$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(1; 1)$ pontban!
Megoldás:
érintősík egyenlete:$x + y - z + 2\ln(2) - 2 = 0 \to x + y - z + 2\ln(\frac{2}{\mathrm{e}}) = 0$

75. B,V Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ pontban!
Megoldás:
$f_x(x, y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$; $f_x(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}$
$f_y(x, y) = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$;
$f_y(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}$
érintősík egyenlete:$-\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}x - \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}y - z + \frac{3}{\mathrm{e}} = 0 \to \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \mathrm{e}z - 3 = 0$

76. B,V Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x, y) = \dfrac{2x + y}{x - 2y}$ függvény érintősíkjának egyenletét az $(-1; 1)$ pontban!
Megoldás:
érintősík egyenlete:$-\frac{5}{9}x - \frac{5}{9}y - z + \frac{1}{3} = 0 \to 5x + 5y + 9z - 3 = 0$

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK

77. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y + 1$ kétváltozós függvény stacionárius pontjait!
Megoldás:$(-1, 1)$

78. B Az $f : R^2 \to R : f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y + 1$ kétváltozós függvény stacionárius pontja $(-1, 1)$. Döntse el, hogy ez a pont lokális szélsőérték-e és ha igen, milyen jellegű!
Megoldás:lokális minimum hely

79. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 4x - 5y + 7$ kétváltozós függvény stacionárius pontjait!
Megoldás:$(-\frac{3}{7}, \frac{16}{7})$

80. B Az $f : R^2 \to R : f(x,y) = -2x^2 - xy + 4x - 3y^2 - 5y + 3$ kétváltozós függvény stacionárius pontja $\left(\frac{29}{23}, -\frac{24}{23}\right)$. Döntse el, hogy ez a pont lokális szélsőérték-e és ha igen, milyen jellegű!
Megoldás:lokális maximum hely

81. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x^2 + xy + 2x + 3y - 1$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!
Megoldás:
Csak stacionárius pontja van $(-3, 4)$, ami nem lokális szélsőérték.

82. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!
Megoldás:
Stacionárius pontok:$(0; 0)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$
Lokális szélsőérték:$\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$

83. B,V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = 4x + 2y; f_y(x,y) = 2x + 8y$
stacionárius pontok:$(0; 0)$
$f_{xx}(x,y) = 4; f_{xy}(x,y) = 2; f_{yx}(x,y) = 2; f_{yy}(x,y) = 8$
$(0; 0)$-lokális minimum hely, $f(0; 0) = 6$

84. B, V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 3(x+2)^2 + 4(y-1)^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = 6x + 12; f_y(x,y) = 8y - 8$
stacionárius pontok:$(-2; 1)$
$f_{xx}(x,y) = 6; f_{xy}(x,y) = 0; f_{yx}(x,y) = 0; f_{yy}(x,y) = 8$
$(-2; 1)$-lokális minimum hely, $f(-2; 1) = 0$

85. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = y - 3x^2; f_y(x,y) = x - 2y$
stacionárius pontok:$(0; 0)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$
$f_{xx}(x,y) = -6x; f_{xy}(x,y) = 1; f_{yx}(x,y) = 1; f_{yy}(x,y) = -2$
$(0; 0)$- nem szélsőérték hely
$\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$-lokális maximum hely, $f\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{432}$

86. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás:
$D(f) = R^2$
$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y; f_y(x, y) = -3x - 3y^2$
stacionárius pontok:$(0; 0), (-1; 1)$
$f_{xx}(x, y) = 6x; f_{xy}(x, y) = -3; f_{yx}(x, y) = -3; f_{yy}(x, y) = -6y$
$(0; 0)$- nem szélsőérték hely
$(-1; 1)$-lokális maximum hely, $f(-1; 1) = 1$

87. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = x^3 - 8xy + y^3$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:

88. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = 3x^2 - 30x + y^3 - 6xy - 15y + 8$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x, y) = 6x - 30 - 6y; f_y(x, y) = 3y^2 - 6x - 15$
stacionárius pontok:$(10; 5), (2; -3)$
$f_{xx}(x, y) = 6; f_{xy}(x, y) = -6; f_{yx}(x, y) = -6; f_{yy}(x, y) = 6y$
$(10; 5)$-lokális minimum hely, $f(10; 5) = -242$
$(2; -3)$-nem szélsőérték hely

89. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
A függvény értelmezési tartománya az egész sík, kivéve a koordinátatengelyek pontjait, hiszen a nevező miatt sem x, sem y nem lehet nulla.
$f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy} = x^2 + y^2 + 2x^{-1}y^{-1}$
$f_x(x, y) = 2x - \frac{2}{x^2y}; f_y(x, y) = 2y - \frac{2}{xy^2}$
stacionárius pontok:$(-1; -1), (1; 1)$
$f_{xx}(x, y) = 2 + \frac{4}{x^3y}; f_{xy}(x, y) = \frac{2}{x^2y^2}; f_{yx}(x, y) = \frac{2}{x^2y^2}; f_{yy}(x, y) = 2 + \frac{4}{xy^3}$
$(-1; -1)$-lokális minimum hely, $f(-1; -1) = 4$
$(1; 1)$-lokális minimum hely, $f(1; 1) = 4$

90. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = -x^2 + 2y^3 - xy + 2x - 2y$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D(f) = R^2$
$f_x(x, y) =; f_y(x, y) =$
stacionárius pontok:$\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{11}{8}; -\frac{3}{4}\right)$
$f_{xx}(x, y) =; f_{xy}(x, y) =; f_{yx}(x, y) =; f_{yy}(x, y) =$
$\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$- nem szélsőérték hely
$\left(\frac{11}{8}; -\frac{3}{4}\right)$-lokális maximum hely, $f\left(\frac{11}{8}; -\frac{3}{4}\right) =$

91. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2 + y^4 - 12x - 2y^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$(-2,0)$- lokális maximum hely, $f(-2,0) = 16$
$(2,-1)$- lokális minimum hely, $f(2,-1) = -17$

92. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2y - xy - y^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:

93. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 6x - 12y^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:

94. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^3 - 8xy + y^3$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:

95. V Határozza meg az $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = 8xe^y - 8x^3$, $f_y(x,y) = 4x^2e^y - 4e^{4y}$
stacionárius pontok: $(1,0), (-1,0)$.
$f_{xx}(x,y) = 8e^y - 24x^2$, $f_{xy}(x,y) = 8xe^y$, $f_{yx}(x,y) = 8xe^y$, $f_{yy}(x,y) = 4x^2e^y - 16e^{4y}$
$(1,0)$- lokális maximum hely, $f(1,0) = 1$
$(-1,0)$- lokális maximum hely, $f(-1,0) = 1$

KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

96. B Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2}(x^2 - 3y - 1)dx\right)dy$$

Megoldás: $\frac{4}{3}$

97. B, V Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^{2}\left(\int_{-2}^{1}(2x + y)^2dy\right)dx$$

Megoldás: 36

98. B, V Határozza meg az $f(x,y) = xy(x^2y^2-1)$ függvény kettős integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 1 \le x \le 3; 0 \le y \le 2\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_0^2 \left(\int_1^3 (x^3y^3 - xy)\,dx \right) dy = \int_1^3 \left(\int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy \right) dx$$
$$\int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy = \left[x^3 \cdot \frac{y^4}{4} - x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{1}{4}x^3y^4 - \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^2 = 4x^3 - 2x$$
$$\int_1^3 \left(\int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy \right) dx = \int_1^3 (4x^3 - 2x)\,dx = \left[x^4 - x^2 \right]_1^3 = 72$$

99. V Számolja ki az $f : R^{\mathbf{2}} \to R$, $f(x,y) = e^{2x-y}$ függvény kettős integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le \ln 3; 0 \le y \le \ln 4\}$ tartományon!
Megoldás: 3

100. V Számolja ki az $f(x,y) = e^{2y-3x}$ függvény kettős integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le \ln 2; 0 \le y \le \ln 3\}$ tartományon!
Megoldás: $\frac{7}{6}$

101. V Határozza meg az $f(x,y) = (4x-y)^5$ függvény kettős integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : -1 \le x \le 1; 1 \le y \le 2\}$ tartományon!
Megoldás: -1189

102. V Határozza meg az $f(x,y) = (2x+4y)^3$ függvény kettős integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 1 \le x \le 2; -1 \le y \le 3\}$ tartományon!
Megoldás: 3192

103. V Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^4}$ függvény kettős integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 3 \le x \le 7; -2 \le y \le -1\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_3^7 \left(\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+y)^4}\,dy \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx \right) dy$$
$$\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx = \int_3^7 (x+y)^{-4}\,dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+y)^3} \right]_3^7 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3}$$
$$\int_{-2}^{-1} \left(\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx \right) dy = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3} \right) dy =$$
$$\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{3} \cdot (7+y)^{-3} + \frac{1}{3} \cdot (3+y)^{-3} \right) dy = \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(7+y)^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(3+y)^2} \right]_{-2}^{-1} = \frac{83}{675}$$

104. V Számolja ki az $f(x,y) = x\cos(xy)$ függvény kettős integrálját a $\left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le \frac{1}{2}; 0 \le y \le \pi\right\}$ tartományon!

Megoldás:

Az x szerinti integrál elvégzése nagyon nehéz és hosszadalmas lenne, míg az y szerinti integrál gond nélkül elvégezhető.

$$\int_0^{\pi} x\cos(xy)\,dy = [\sin(xy)]_0^{\pi} = \sin(\pi x)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi} x\cos(xy)\,dy\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

105. V Számolja ki az $f(x,y) = y\sin(xy)$ függvény kettős integrálját a $\left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le \frac{1}{2}; 0 \le y \le \pi\right\}$ tartományon!

Megoldás:

Az y szerinti integrál elvégzése nagyon nehéz és hosszadalmas lenne, míg az x szerinti integrál gond nélkül elvégezhető.

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} y\sin(xy)\,dx\right) dy = 1,1416$$

106. B Határozza meg az $f(x,y) = 2xy$ függvény kettős integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; x \le y \le \sqrt{x}\}$ tartományon! Rajzolja fel a tartományt!

Megoldás:

$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy\right) dx$$

$$\int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy = \left[2x \cdot \frac{y^2}{2}\right]_x^{\sqrt{x}} = \left[xy^2\right]_x^{\sqrt{x}} = x^2 - x^3$$

$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy\right) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

107. B, V Határozza meg az $f(x,y) = 10x^2 + 8xy$ függvény kettős integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; -x \le y \le \sqrt{x}\}$ tartományon! Rajzolja fel a tartományt!

Megoldás:

$$\int_0^1 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\,dy\right) dx$$

$$\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\,dy = \left[10x^2 \cdot y + 8x \cdot \frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{\sqrt{x}} = \left[10x^2 y + 4xy^2\right]_{-x}^{\sqrt{x}} = 10x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + 6x^3$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\, dy \right) dx = \int_0^1 (10x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + 6x^3)\, dx = \left[\frac{20}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^4 \right]_0^1 = \frac{239}{42}$$

108. B, V Számolja ki az alábbi kettős integrált! Rajzolja fel a tartományt!

$$\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} (x - 2y) dy \right) dx$$

Megoldás:

$$\int_{x-1}^{-x+1} (x - 2y) dy = \left[xy - y^2 \right]_{x-1}^{-x+1} = -2x^2 + 2x$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} (x - 2y) dy \right) dx = \int_0^1 -2x^2 + 2x dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

109. V Határozza meg az $f(x, y) = yx^2 + 4$ függvény kettősintegrálját a $\{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; x \le y \le x^2 + 2\}$ tartományon! Rajzolja fel a tartományt!

Megoldás:

$$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+2} (yx^2 + 4)\, dy \right) dx$$

$$\int_x^{x^2+2} (yx^2 + 4)\, dy = \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2} + 4 \cdot y \right]_x^{x^2+2} = \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + 4y \right]_x^{x^2+2} = \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 4x + 8$$

$$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+2} (yx^2 + 4)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 4x + 8 \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{14}x^7 + \frac{3}{10}x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 8x \right]_0^1 = \frac{293}{35}$$

110. V Határozza meg az $f(x, y) = x^2 - y$ függvény kétszeres integrálját az $y = 3x - x^2$ és $y = x$ függvények által közrezárt tartományon! Rajzolja fel a tartományt!

Megoldás:

Tartomány=$\{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 2; x \le y \le 3x - x^2\}$

$$\int_0^2 \left(\int_x^{3x-x^2} (x^2 - y)\, dy \right) dx$$

$$\int_x^{3x-x^2} (x^2 - y)\, dy = \left[x^2 \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_x^{3x-x^2} = \left[x^2y - \frac{1}{2}y^2 \right]_x^{3x-x^2} = -\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2$$

$$\int_0^2 \left(\int_x^{3x-x^2} (x^2 - y)\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2 \right) dx = \left[-\frac{3}{10}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 = -\frac{4}{15}$$

111. V Határozza meg az $f(x, y) = 3xy + 4x^2$ függvény kétszeres integrálját az $y = x^2 - 5$ és $y = 4$ függvények által közrezárt tartományon! Rajzolja fel a tartományt!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x, y) \in R^2 : -3 \leq x \leq 3; x^2 - 5 \leq y \leq 4\}$

$$\int_{-3}^{3} \left(\int_{x^2-5}^{4} (3xy + 4x^2)\, dy \right) dx$$

$$\int_{x^2-5}^{4} (3xy + 4x^2)\, dy = \left[3x \cdot \frac{y^2}{2} + 4x^2 \cdot y \right]_{x^2-5}^{4} = \left[\frac{3}{2}xy^2 + 4x^2 y \right]_{x^2-5}^{4} = -\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + 15x^3 + 36x^2 - \frac{27}{2}x$$

$$\int_{-3}^{3} \left(\int_{x^2-5}^{4} (3xy + 4x^2)\, dy \right) dx = \int_{-3}^{3} \left(-\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + 15x^3 + 36x^2 - \frac{27}{2}x \right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{15}{4}x^4 + 12x^3 - \frac{27}{4}x^2 \right]_{-3}^{3} = \frac{1296}{5}$$

112. V Határozza meg az $f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x - y$ függvény kétszeres integrálját az $y = x^2 - 4$ és $y = 0$ függvények által közrezárt tartományon! Rajzolja fel a tartományt!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x, y) \in R^2 : -2 \leq x \leq 2; x^2 - 4 \leq y \leq 0\}$

$$\int_{-2}^{2} \left(\int_{x^2-4}^{0} (1 + \frac{1}{2}x - y)\, dy \right) dx$$

$$\int_{x^2-4}^{0} (1 + \frac{1}{2}x - y)\, dy = \left[y + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2-4}^{0} = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 2x + 12$$

$$\int_{-2}^{2} \left(\int_{x^2-4}^{0} (1 + \frac{1}{2}x - y)\, dy \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 2x + 12 \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 12x \right]_{-2}^{2} = 27,733$$

113. V Határozza meg az $f(x, y) = 4 - y^2$ függvény kétszeres integrálját az $y = 2 - x^2$ és $y = x^2 - 2$ függvények által közrezárt tartományon! Rajzolja fel a tartományt!
Megoldás:
Tartomány=$\left\{(x, y) \in R^2 : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}; x^2 - 2 \leq y \leq 2 - x^2\right\}$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-2}^{2-x^2} (4-y^2)\,dy \right) dx$$
$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$
$$\int_{x^2-2}^{2-x^2} (4-y^2)\,dy = \left[4y - \frac{1}{3}y^3\right]_{x^2-2}^{2-x^2} = \frac{2}{3}x^6 - 4x^4 + \frac{32}{3}$$
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-2}^{2-x^2} (4-y^2)\,dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}x^6 - 4x^4 + \frac{32}{3} \right) dx =$$
$$\left[\frac{2}{21}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{32}{3}x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 23,2739$$

114. V Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{5}{x^2+1}$ függvény kétszeres integrálját az $A(0;0), B(1;0)$ és $C(1;2)$ pontok által határolt háromszög felett! Rajzolja fel a tartományt!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2x\}$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{2x} \frac{5}{x^2+1}\,dy \right) dx$$
$$\int_0^{2x} \frac{5}{x^2+1}\,dy = \left[\frac{5}{x^2+1} \cdot y\right]_0^1 = \frac{10x}{x^2+1}$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{2x} \frac{5}{x^2+1}\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{10x}{x^2+1}\,dx = \left[5\ln|x^2+1|\right]_0^1 = 5\ln 2$$

115. V Határozza meg az $f(x) = x^2 - 1$ és $g(x) = x + 1$ függvények által határolt véges területű H síkidom súlypontjának koordinátáit! Rajzolja fel a tartományt!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x,y) \in R^2 : -1 \le x \le 2; x^2 - 1 \le y \le x + 1\}$
$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2-1}^{x+1} 1\,dy \right) dx = \frac{9}{2}$$
$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2-1}^{x+1} x\,dy \right) dx = \frac{9}{4}$$
$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2-1}^{x+1} y\,dy \right) dx = \frac{27}{10}$$

$$S_x = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}; S_y = \frac{\frac{27}{10}}{\frac{9}{2}} = \frac{3}{5}$$