

6. gyakorlat

Sűrűségfüggvény, várható érték és szórás

1. Adja meg, és ábrázolja a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, ha eloszlásfüggvénye

$$(a) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{8}, & \text{ha } 1 < x \leq 3 \\ 1, & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

$$(b) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 5 \\ 1 - \frac{125}{x^3}, & \text{ha } 5 < x \end{cases}$$

$$(c) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \cos x, & \text{ha } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \\ 1, & \text{ha } 2\pi < x \end{cases}$$

$$(d) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -1 \\ 1 - \frac{1}{\pi} \arccos x, & \text{ha } -1 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

2. Adott a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 3\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right), & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Számítsa ki az alábbiakat!

(a) $P(\xi > 1)$

(b) $P(\xi > 3)$

(c) $P(\xi \leq 1,5)$

(d) $P(1 < \xi < 1,5)$

(e) $P(0 < \xi < 5)$

(f) $P(\xi < 1 | -1 < \xi < 5)$

(g) $M(\xi)$

(h) $D(\xi)$

(i) $M(-5\xi+2)$

(j) $D(-5\xi+2)$

3. Adott a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$. Határozza meg ξ eloszlásfüggvényét!

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{192}{x^4}, & \text{ha } 4 < x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

4. Egy dobozban 8 piros, 10 narancssárga és 2 fehér LED van. Véletlenszerűen kihúzzunk közülük egyet. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke -3, ha pirosat, 0, ha narancssárgát, 3, ha fehéret húztunk. Mekkora ξ várható értéke és szórása?
5. Egy urnában 10 piros és 6 kék golyó van. Kiveszünk találmra 4 golyót. Mekkora a kivett piros golyók számának várható értéke és szórása, ha
- (a) visszatevés nélkül húzzunk,
- (b) visszatevéssel húzzunk.

6. Egy pénzérmét egymás után háromszor feldobok. Tekintsük azt a számot, amelynek értéke 0, ha az első dobás fej, egyébként a fej→0, írás→1 leképezéssel kapott bináris szám. Mekkora az így generálandó számok várható értéke és szórása?
7. Aladár egy pénzérmét négyszer feldob. Ha a fejek száma páratlan, akkor fizet Bélának 100 forintot. Egyébként Béla fizet 100 forintot Aladárnak. Melyikük jár jobban? Mekkora Aladár nyereményének a szórása?
8. Egy lottószelvény ára 225 Ft. Mekkora főnyeremény esetén érdemes megjátszani az összes kombinációt (azaz a meghirdetett összeg elnyerése fedezze a kiadásainkat, feltéve, hogy másnak nem lesz 5 találat, a telitalálatról különböző nyereményeket nem tekintve)?
9. Egy jól kevert pakli magyar kártyából visszatevéssel addig húzunk, míg ászt nem kapunk. Adjuk meg a szükséges húzások számának eloszlását és várható értékét! Mekkora a valószínűsége, hogy pont az 5. húzásra kapunk ászt?
10. Adja meg a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását, ha eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{25}, & \text{ha } 0 < x \leq 5 \\ 1, & \text{ha } 5 < x \end{cases}$$

11. Mekkora a sűrűségfüggvényekkel megadott alábbi valószínűségi változók várható értéke és szórása?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{8}{x^3}, & \text{ha } 2 < x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2}{9}, & \text{ha } 0 < x < 3, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{ha } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \end{aligned}$$

12. Számítsa ki az alábbiakat, ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x(x-1)}{57}, & \text{ha } 2 < x < 5, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

- (a) $P(\xi < 4)$ (b) $P(\xi > 3)$ (c) $P(0 < \xi < 3)$ (d) $P(\xi < 5 | \xi > 3)$
 (e) $M(\xi)$ (f) $D(\xi)$

13. Mennyi legyen a c paraméter értéke, hogy sűrűségfüggvény legyen az alábbi függvény?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3}, & \text{ha } 8 < x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

14. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az alábbi függvény.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^4}, & \text{ha } 1 < x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

- (a) Mekkora a várható értéke és a szórása?

- (b) Számítsa ki az alábbiakat!

- (i) $P(\xi > 3)$ (ii) $P(\xi \leq 6)$ (iii) $P(3 < \xi \leq 4)$ (iv) $P(1 < \xi < 5 | 2 < \xi < 3)$
 (v) $M(-2\xi + 5)$ (vi) $D(-2\xi + 5)$

- (c) Határozza meg ξ eloszlásfüggvényét!