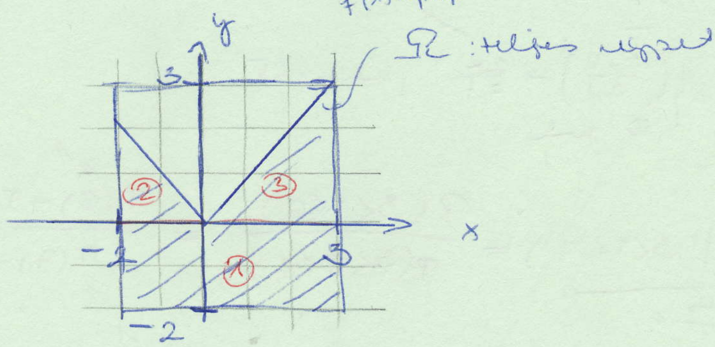
Mintavizsga 1.

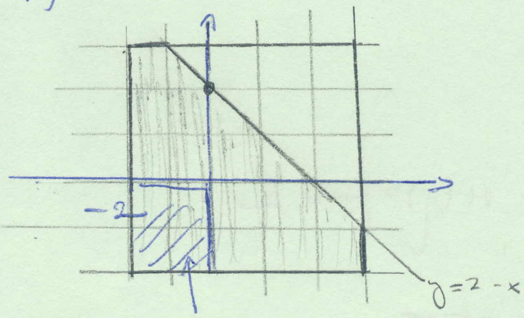
1. $x, y \in [2,3]$

a) $P(\underbrace{|x| > y}_{A}) = ?$



$$P(A) = \frac{T_{kedv.}}{T_{össz}} = \frac{T_{⊠}}{T_{□}} = \frac{10 + \frac{4}{2} + \frac{9}{2}}{25} = \frac{33}{60} \approx \underline{\underline{0,66}}$$

b)



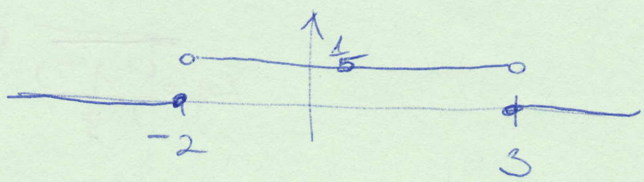
feltéve, h. $x + y < 2$

$y < 2 - x$

$$P(B) = \frac{4}{25 - \frac{16}{2}} = \frac{4}{17} \approx \underline{\underline{0,2353}}$$

c) ξ: y értéke

$f(x)$



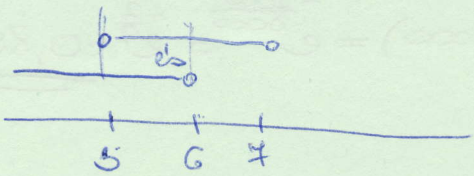
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & -2 < x < 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

II

(2.) a) $M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_2^5 x^2 \cdot \frac{2x}{21}\,dx = \left[\frac{\cancel{2}}{21} \cdot \frac{x^4}{\cancel{4}_2}\right]_2^5 = \frac{5^4}{42} - \frac{2^4}{42} = \underline{\underline{14,5}}$

$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2-4}{21}\right)' = \frac{2x}{21}, & \text{ha } 2<x<5 \\ 0 & \text{ekk.} \end{cases}$

b) $P(\xi<6 \mid 3<\xi<7) = \frac{P(3<\xi<6)}{P(3<\xi<7)} = \frac{\overset{=1}{F(6)} - F(3)}{\underset{1}{F(7)} - F(3)} = \underline{\underline{1}}$



c) $M(\xi) = \int_5^2 x \cdot \frac{2x}{21}\,dx = \left[\frac{2}{21} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \left(\frac{2}{21} \cdot \frac{5^3}{3} - \frac{2}{21} \cdot \frac{2^3}{3}\right) = \frac{26}{7}$

$M(\eta) = 7 \cdot M(\xi) + 3 = \frac{26}{\cancel{7}} \cdot \cancel{7} + 3 = \underline{\underline{29}}$

(3.) $\eta = \overset{1.\ \text{dobás}}{\xi_1} + \overset{2.\ \text{dobás}}{\xi_2} = 10$ $\qquad$ η eloszlása geometriai eloszlás,

Jó dobások	
4	6
6	4
5	5

$p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\qquad$ $M(\eta) = \frac{1}{p} = 12$

a) $P(\xi = 6) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^5 \cdot \frac{1}{12} = \underline{\underline{0,0539}}$

b) $P(\xi < 12) = \sum_{i=1}^{11} P(\xi = i) = p + (1-p)p + \ldots + (1-p)^{10} \cdot p = p\left(1 + (1-p) + \ldots + (1-p)^{10}\right)$

$= \cancel{p} \cdot \frac{1-(1-p)^{11}}{\underbrace{1-(1-p)}_{\cancel{p}}} = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{11} = \underline{\underline{0,616005}}$

$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Helyett kombinatorikai meggondolás.

A $P(\xi<12) = 1 - P(\xi \geq 12) = 1 - P(\xi > 11)$

A $(\xi > 11)$ esemény azt jelenti, hogy 11-szer nem sikerül 10 összeget dobni, ennek valószínűsége $\left(\frac{11}{12}\right)^{11}$.

c) Negatív binomiális eloszlás: addig ismétlünk egy kísérletet, míg p val. A esemény r-szer be nem következik. $r=1$ esetén visszakapjuk a geometriai elo.

4. 6 gép exponenciális elo. élettartam $D(\xi_i) = 9000 = M(\xi_i) = \frac{1}{\lambda}$

$i = 1, 2, \ldots, 6$

mind a 6 üzemben addig

a) $P(\eta \le 12000) = P(\xi_1 \le 12000 \text{ és } \xi_2 \le 12000 \text{ és } \ldots \xi_6 \le 12000) \overset{\xi_i\text{-k függetlenek}}{=} \prod_{i=1}^{6} P(\xi_i \le 12000)$

$= \left(1 - e^{-\frac{12000}{9000}}\right)^6 = \left(1 - e^{-\frac{4}{3}}\right)^6 \approx \underline{\underline{0{,}1595}}$

b) $P(\xi_1 \ge 8000 + 2000 \mid \xi_1 > 8000) \overset{\text{örökifjú tul.}}{=} P(\xi \ge 2000) = e^{-\frac{2000}{9000}} = e^{-\frac{2}{9}} \approx \underline{\underline{0{,}8007}}$

c) Örökifjú tulajdonság: nem öregszik, azaz ha már t ideig működött, akkor annak a valószínűsége, h. még s ideig megy, nem függ t-től; $P(\xi \ge t + s \mid \xi \ge t) = P(\xi \ge s)$

5. 80 hely

$p = 0{,}8$

$n = 90$ ember

η: hányan jönnek el (binomiális eloszlású)

a) $P(\text{nem mindenkinek jut hely}) = 1 - P(\eta \le 80) \underset{\text{de Moivre–Laplace tétel}}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{80 + 0{,}5 - 90 \cdot 0{,}8}{\sqrt{90 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$

$= 1 - \Phi(2{,}23) = 1 - 0{,}9871 = \underline{\underline{0{,}0129}}$

b) $P(2 < \nu < 5) = P(75 < \eta < 78) \approx \Phi\left(\frac{77{,}5 - 90 \cdot 0{,}8}{\sqrt{90 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{75{,}5 - 90 \cdot 0{,}8}{\sqrt{90 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$

üres hely

$P(76 \le \eta \le 77)$

$\approx \Phi(1{,}45) - \Phi(0{,}92) = 0{,}9265 - 0{,}8212 = \underline{\underline{0{,}1053}}$

c) – Binomiális elo. közelíthető Poisson-eloszlással, ha p elég kicsi és n elég nagy.

– Normális eloszlással v.é. $n \cdot p$ és szórás $\sqrt{n p (1-p)}$, ha $n > 30$ (de Moivre–Laplace-tétel szerint)

6. a) $\boxed{1.}$ $H_0: m = 25$, $H_1: m \neq 25$ } => kétoldali próba

$\boxed{2}$ σ nem ismert, $n < 30$ } = t-próba

$\hat{m}_{10} = 24{,}85$

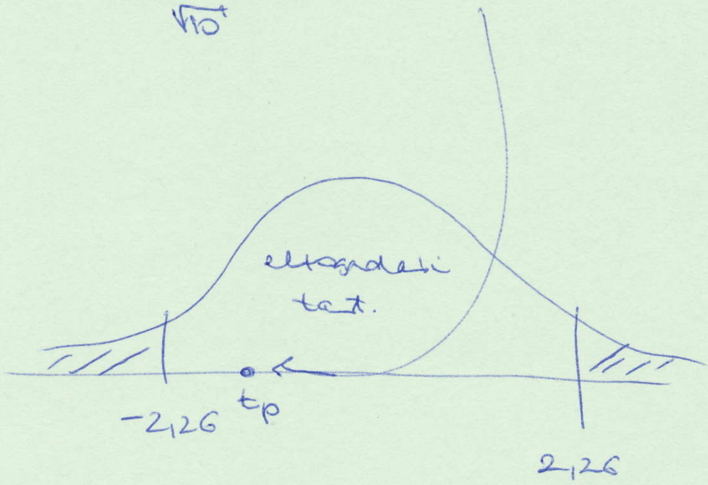
$\hat{s}_{10} = 0{,}368932$

$$t_p = \frac{24{,}85 - 25}{\frac{0{,}3689}{\sqrt{10}}} = -1{,}2857$$

$\boxed{3}$ $t_{kr} = 2{,}26$

$f = 10 - 1 = 9$

$$\frac{1+p}{2} = 0{,}975$$



$\boxed{4.}$ $t_p \in (-t_{kr}; t_{kr})$ => H_0-t elfogadjuk

Azaz 95%-os megb. szinten tekinthetjük 25 kg-nak a v. értéket.

b) Másodfajú hiba: akkor lép fel, ha H_0-t elfogadjuk, de hamis. A mintaszám növelésével csökkenthet