

Megbízhatóság-elmélet

2. rész

Rendszerek megbízhatósági vizsgálata

Boole modell szerint

Megbízhatóság szempontjából jellegzetes rendszerstruktúrák

- Redundancia mentes rendszer - bármely rendszerelem meghibásodása a rendszer üzemképtelenségét eredményezi (soros rendszer)
- Redundáns rendszer - a megbízhatóság növelésére rendelkezik a rendszer bizonyos tartalékokkal

Redundancia formái (1)

- Hardver redundancia
 - strukturális redundancia - a minimálisnál több egységet használnak a funkció ellátására
 - igénybevételi redundancia - a stressz modellben definiált gyorsítási tényező $\alpha < 1$ (derating)
 - tolerancia redundancia - szűkebb toleranciájú alkatrészek alkalmazása

Redundancia formái (2)

- Szoftver redundancia
 - paritás vizsgálat,
 - „kontroll szumma” képzés,
 - watch dog alkalmazása
 - műveletek megismétlése,
 - eredmények összehasonlítása,
 - eredmények hihetőségvizsgálata

Redundancia formái (3)

- Diverzitás
 - alkalmazási feltételek különbözősége
 - fizikai diverzitás,
 - implementációs diverzitás,
 - funkcionális diverzitás.

Megbízhatóság vizsgálat strukturális modell alapján

- Megbízhatósági modell felállítása
 - funkcionális struktúra alapján
 - konstrukciós struktúra alapján
- Az egyes elemek megbízhatósági paramétereiből határozzuk meg a rendszer jellemzőit
- Alkatrész (elem) állapotfüggvénye: $X^T(x_i)$
- Rendszer állapotfüggvénye: $Y^T(x_i)$.

Rendszerek megbízhatóságának vizsgálata

- Boole modell alapján – ha a rendszernek csupán két állapotát elegendő figyelembe venni
- Markov modell alapján – ha a rendszernek több lehetséges állapotát vesszük figyelembe

Boole modell alkalmazásának feltételei

- A rendszer elemeinek száma véges legyen
- Elemei csak két állapotot vegyenek fel
 - up: $x = 1$, down: $x = 0$.
 - az állapotváltozó egyben logikai értéket is képvisel: 1 = igen , 0 = nem
 - Az x indikátorok bináris vektort alkotnak:
- Strukturája kanonikus legyen

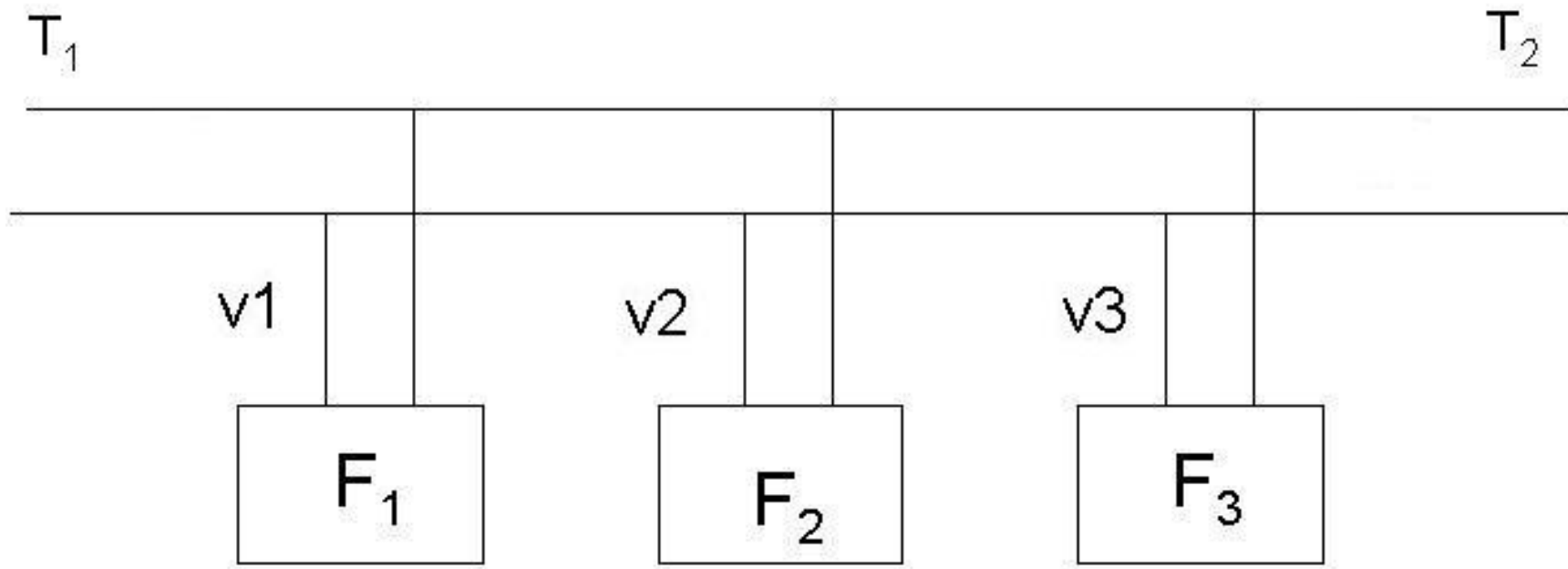
$$\underline{X}^T = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_N]$$

- Teljesüljenek az ún. monotonia feltételek

Boole rendszerre vonatkozó monotonitási feltételek

- $Y=1$, ha $\forall k\text{-ra} : x_k = 1 \Rightarrow$ rendszer jó, ha minden eleme jó
- $Y=0$, ha $\forall k : x_k = 0. \Rightarrow$ rendszer rossz, ha minden eleme rossz
- Üzemképtelen rendszer további meghibásodás hatására nem válhat üzemképesé
- Üzemképes rendszerben hibás elem javítására nem válhat a rendszer üzemképtelenné

Példa nem monoton rendszerre



- Három felhasználót (F_i) táplálunk két betáplálásról (T_i) a v_i vezetékeken keresztül
- A tápfeszültségre vonatkozó hibafeltétel:

$$U_{tényl} = U_{névl} \pm 10\%$$

Példa nem monoton rendszerre (2)

- Az F1 fogyasztót vizsgálva a T1 betáplálás hibája esetén az összes fogyasztót a T2 betáplálásról táplálva a nagy fogyasztás miatt a feszültség F1-nél hibásan túl kicsi lesz
- Újabb hibaként megszakad a v3 vezeték, emiatt az összes fogyasztás és a feszültség-esés kisebb lesz, az F1-nél a tápfeszültség ismét a toleranciasávon belül kerül
- Eszerint egy hibás állapotban lévő elem az újabb hiba hatására ismét jó lett

Soros rendszer definíciója (1)

- Kétféle definíció lehetősége
 - a jó működés feltételének megadása
 - a rossz működés feltételének megadása
- Megbízhatóság szempontjából soros a rendszer,
 - ha akkor (és csak akkor) működőképes, ha minden eleme jó
 - ha akkor működésképtelen, ha van legalább egy működésképtelen eleme

Soros rendszer definíciója (2)

- Matematikailag megfogalmazva:

$$Y_S = 1, \text{ ha } \forall k : x_k = 1$$

$$Y_S = 0, \text{ ha } \exists k : x_k = 0$$

- Az állapotindexekkel kifejezve

$$Y_S = 1, \text{ ha } (x_1 = 1) \wedge (x_2 = 1) \wedge \dots \wedge (x_n = 1)$$

$$Y_S = 0, \text{ ha } (x_1 = 0) \vee (x_2 = 0) \vee \dots \vee (x_n = 0)$$

Soros rendszer megbízhatósági függvénye

- a soros rendszer megbízhatósági függvénye

$$R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_n(t)$$

- vagy rövidebb írásmóddal

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) < \min[R_i(t)]$$

- hasonlóan javítható rendszerre vonatkozó üzemképességi függvény

$$d_S(t) = \prod_{i=1}^n d_i(t)$$

Soros rendszer meghibásodási függvénye (1)

- a soros rendszerre vonatkozó meghibásodási függvény meghatározását nehezíti, hogy az egyes alkatrészek rossz működése nem egymást kizáró események (nem lehet a valószínűségeket egyszerűen összegezni)
- célszerű ezt is a megbízhatóságra vonatkozó összefüggéssel meghatározni (az 1-es komplementens tulajdonság felhasználásával)

Soros rendszer meghibásodási függvénye (2)

- 2 tagú soros rendszerre

$$1 - F_S^{(2)} = 1 - (1 - F_1) \cdot (1 - F_2) = 1 - (1 - F_1 - F_2 + F_1 \cdot F_2) = \\ = 1 - (F_1 + F_2 - F_1 \cdot F_2)$$

- A két oldal összevetéséből

$$F_S^{(2)} = F_1 + F_2 - F_1 \cdot F_2$$

- Hasonlóan 3 tagú rendszerre (csak a végeredmény)

$$F_S^{(3)} = F_1 + F_2 + F_3 - F_1 \cdot F_2 - F_1 \cdot F_3 - F_2 \cdot F_3 + F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$$

Soros rendszer meghibásodási függvénye (3)

- Egyforma elemeket feltételezve, ha

$$F_1 = F_2 = F$$

- akkor $F_S^{(2)} = 2 \cdot F - F^2$ adódik

- Hasonlóan 3 tagú rendszerre

$$F_S^{(3)} = 3 \cdot F - 3 \cdot F^2 + F^3$$

- Vagy tetszőleges n-re

$$F_S^{(n)} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \binom{n}{i} \cdot F^i$$

Soros rendszer meghibásodási tényezője és élettartama (1)

- A definíció alapján
$$R_S(t) = e^{-\int_0^t \lambda_S(\tau) \cdot d\tau}$$
- A soros rendszer megbízhatósági függvénye alapján:
$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau) \cdot d\tau} = e^{-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(\tau) \cdot d\tau} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^n \lambda_i(\tau) \cdot d\tau}$$
- a kettő összevetésével
$$\lambda_S(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) > \max[\lambda_i(t)]$$

Soros rendszer meghibásodási tényezője és élettartama (1)

- Az elemek nem öregedő tulajdonsága soros rendszerre megmarad
- Az élettartamra kapott összefüggés szerint

$$T_{F,S} = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Párhuzamos rendszer definíciója (1)

- Megbízhatóság szempontjából párhuzamos a rendszer,
 - ha akkor működőképes, ha van legalább egy olyan eleme, ami működőképes, és
 - akkor működésképtelen, ha minden eleme működésképtelen
- A definíciót a soros rendszerével összevetve a logikai kapcsolatok alapján értelemszerűen adódnak a megbízhatósági jellemzők

Párhuzamos rendszer definíciója (2)

- Matematikailag megfogalmazva:

$$Y_P = 0, \text{ ha } \forall k : x_k = 0$$

$$Y_P = 1, \text{ ha } \exists k : x_k = 1$$

- Az állapotindexekkel kifejezve

$$Y_P = 0, \text{ ha } (x_1 = 0) \wedge (x_2 = 0) \wedge \dots \wedge (x_n = 0)$$

$$Y_P = 1, \text{ ha } (x_1 = 1) \vee (x_2 = 1) \vee \dots \vee (x_n = 1)$$

Párhuzamos rendszer meghibásodási függvénye

- Párhuzamos rendszer meghibásodási függvénye $F_P(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \dots \cdot F_n(t)$
- Rövidebb írásmóddal

$$F_P(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t) < \min[F_i(t)]$$

vagyis a párhuzamos kialakítású rendszer kedvezőbben viselkedik

Párhuzamos rendszer megbízhatósági függvénye (1)

- A soros rendszerre vonatkozó összefüggés gondolatmenetéhez hasonlóan

- 2 tagú párhuzamos rendszerre

$$R_P^{(2)} = R_1 + R_2 - R_1 \cdot R_2 \Rightarrow \binom{2}{P} = 2 \cdot R - R^2$$

- 3 tagú párhuzamos rendszerre

$$R_P^{(3)} = R_1 + R_2 + R_3 - R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$$

$$\Rightarrow 3 \cdot R - 3 \cdot R^2 + R^3$$

- és tetszőleges n-re

$$R_P^{(n)} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \binom{n}{i} \cdot R^i$$

Párhuzamos rendszer megbízhatósági függvénye (2)

- A görbék mindig vízszintes érintővel indulnak – az R csökkenése viszonylag lassú:

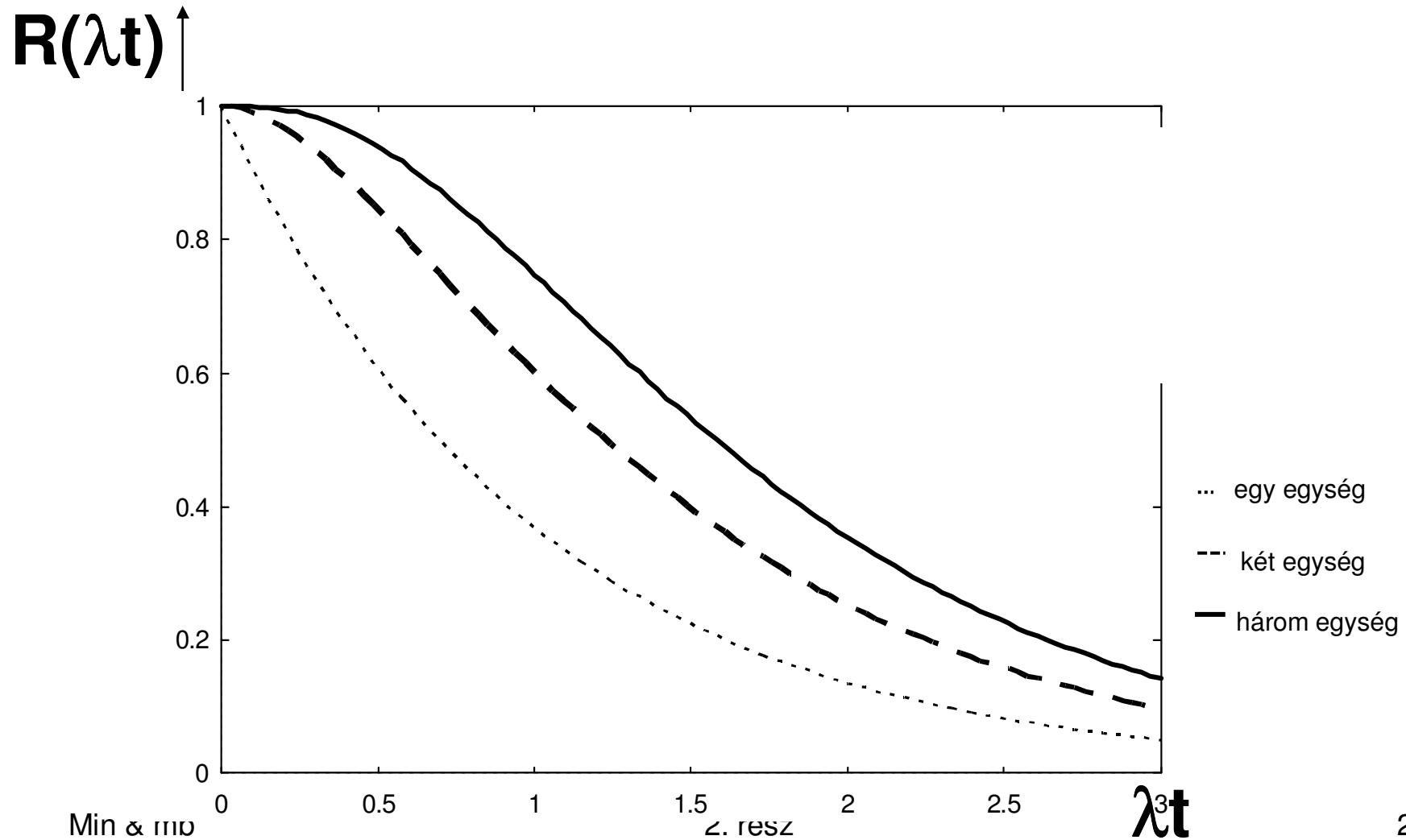
$$n = 2 \quad \text{esetén} \quad R(t)^{(2)} = 2R - R^2$$

$$R'_{t=0} = 2 - 2R = 2 - 2 = 0$$

$$n = 3 \quad \text{esetén} \quad R(t)^{(3)} = 3R - 3R^2 + R^3$$

$$R'_{t=0} = 3 - 6R + 3R^2 = 0$$

Párhuzamos rendszer megbízhatósági függvénye (2)



Párhuzamos rendszer meghibásodási tényezője (1)

- A paraméterek közt fennálló matematikai kapcsolat alapján

$$\lambda_P(t) = -\frac{R'_P(t)}{R_P(t)}$$

- Az R_P bonyolultabb összefüggése miatt levezetés nélkül az eredmény:

$$\lambda_P(t) = -\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot (\alpha_i - 1)}{\prod_{i=1}^n \alpha_i^{i-1}} \quad \text{ahol} \quad \alpha_i = \frac{1}{1 - e^{-\lambda_i(t) \cdot t}}$$

Párhuzamos rendszer meghibásodási tényezője (2)

- Az egyforma és állandó λ tényezőjű elemekből felépített redundáns rendszerre:

$$\lambda_p(t) = -\frac{n \cdot \lambda}{\sum_{i=1}^n \alpha^{i-1}} \quad \text{ahol} \quad \alpha = \frac{1}{1 - e^{-\lambda \cdot t}}$$

vagyis a λ tényező ilyen esetben is függ az időtől - nem öregedő elemekből is öregedő jellegű rendszert kapunk

Párhuzamos rendszerek meghibásodási tényezőjének alakulása

Párhuzamos rendszer élettartama

- N egyforma λ paraméterű egységből felépített párhuzamos rendszer esetén az első meghibásodásig várható élettartam

$$T_F = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

vagy rövidebb írásmóddal

$$T_F = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

Igazolás (1)

$$\bar{T}_p = \int_0^{\infty} R_p(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} [1 - F_p(t)] \cdot dt = \int_0^{\infty} [1 - F^n(t)] \cdot dt$$

$$\text{de } R(t) = e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{és} \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\begin{aligned} \text{így } \frac{dF}{dt} &= -(\lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \\ &= \lambda \cdot R(t) = \lambda \cdot [1 - F(t)] \end{aligned}$$

$$\text{ami alapján: } dt = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{dF}{1 - F}$$

Igazolás (2)

$$\begin{aligned}\bar{T}_p &= \int_0^1 (1 - F^n) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - F} \cdot dF = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^1 \frac{1 - F^n}{1 - F} \cdot dF = \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^1 (1 + F + F^2 + \dots + F^{n-1}) \cdot dF = \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \left[F + \frac{F^2}{2} + \dots + \frac{F^n}{n} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)\end{aligned}$$

Párhuzamos rendszer realizálása (1)

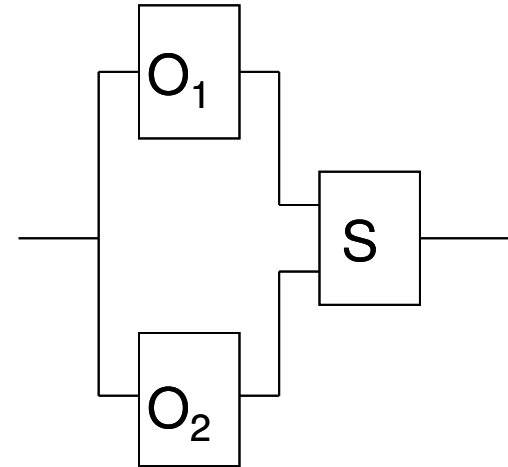
- Önmagában csak kivételes esetben lehet megvalósítani (pl. alkatrész szintű redundancia esetén)
- Az esetek többségében soros tagok is szerepelnek a rendszerben
 - A redundáns rendszerekben szükség van olyan közös egységre, ami érzékeli az egyes egységek meghibásodását (átkapcsolás)
 - Gyakran az energiaellátó tápegység is közös

Párhuzamos rendszer realizálása (2)

- A közös egységet tartalmazó redundáns rendszerek megvalósítási módjai:
 - Forró tartalékolt
 - Csökkentett terheléssel működő tartalékolású (más szóhasználatul meleg tartalékolt vagy stand-by rendszerek)
 - Hideg tartalékolt
- Az egységek függetlensége csak a forró tartalékolt rendszereknél biztosított – ezeket tekinthetjük csak kanonikus rendszereknek

Stand-by rendszerek (1)

- Általános felépítés
- Helyettesítő kép



Stand-by rendszer (2)

$$R_{\text{stand-by}}(t) = R_P(t) \cdot R_S(t)$$

Például kétegységes stand-by esetén

$$R_P(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t)$$

a két operatív egységből felépülő párhuzamos
részrendszer megbízhatósága,

$R_S(t)$ pedig a közös (soros) egység(ek)
eredő megbízhatósága

Stand-by rendszer (3)

$$R_{\text{stand-by}}(t) = R_P(t) \cdot R_S(t)$$

Például kétegységes stand-by esetén

$$R_P(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t)$$

a két operatív egységből felépülő párhuzamos
részrendszer megbízhatósága,

$R_S(t)$ pedig a közös (soros) egység(ek)
eredő megbízhatósága

Stand-by rendszer (3)

- A teljes stand-by rendszer megbízhatósága

$$R_{\text{stand-by}}(t) = [2 \cdot R(t) - R^2(t)] \cdot R_s(t)$$

- A redundancia alkalmazása akkor ésszerű, ha az eredő megbízhatóság nagyobb, mint az operatív egységeké, ennek feltétele, hogy

Speciális kanonikus struktúrák

$$R_1(t) = R_2(t) = R_3(t) = \dots = R_N(t) = R(t)$$

Annak a valószínűsége, hogy az N-ből éppen h hibás (Bernoulli képlet alapján)

$$P_{N,h}(t) = \binom{N}{h} \cdot [1 - R(t)]^h \cdot [R(t)]^{N-h}$$

ahol

$$\binom{N}{h} = \frac{N!}{(N-h)! \cdot h!}$$

(folyt.)

Ha a hibahatárt úgy szabjuk meg, hogy a rendszer üzemképes $h < M$ esetén

$$R_{N,M}(t) = \sum_{i=0}^{M-1} P_{N,i}(t)$$

Az ilyen struktúrák speciális eseteiként adódnak az eddigi kanonikus rendszerek is:

(folyt.)

az N egyforma elemből felépített
soros rendszer esetén $M=1$

az N egyforma elemből felépített
párhuzamos rendszer esetén $M=N$

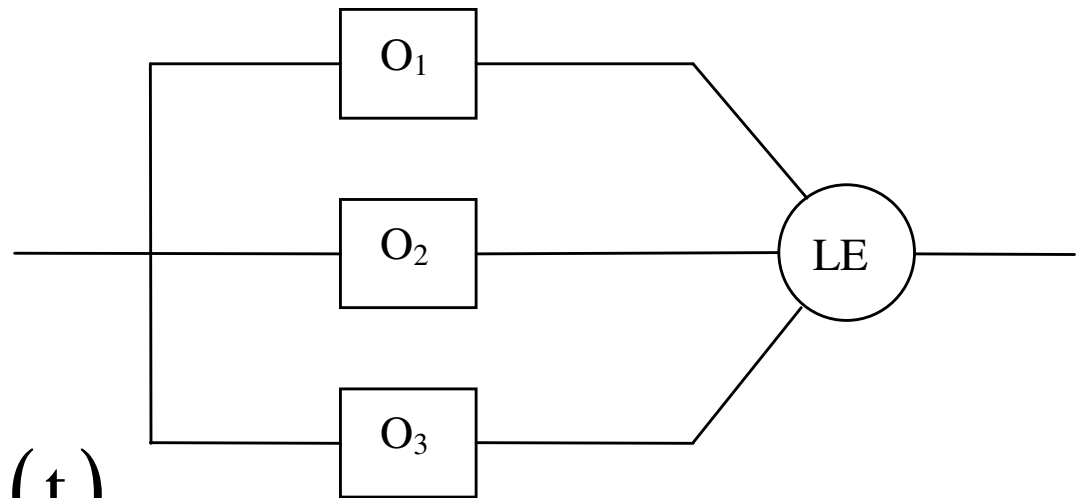
az N egyforma elemből felépített majoritásos
(többségi szavazati elv) rendszer esetén
(tetszőleges páratlan N esetére):

$$M = \frac{N + 1}{2}$$

Majoritásos rendszer általános struktúrája

$$M = \frac{N + 1}{2}$$

$$R_{\text{majoritás}}(t) = \sum_{K=0}^{\frac{N-1}{2}} P_{N,K}(t)$$



$$R_{\text{rendszer}}(t) = R_{LE}(t) \cdot R_{\text{majoritás}}(t)$$

A majoritász rendszer megbízhatósága

- A legegyszerűbb majoritász logika a 3-ból 2 rendszer ($N=3$, $M=2$, $h_{\max}=1$)
- A rendszer 0 és 1 hiba esetén működőképes
- A rendszer megbízhatósága:

$$\begin{aligned} P_{N,h} &= \sum_{h=0}^1 \binom{N}{h} \cdot [1 - R(t)]^h \cdot R^{N-h}(t) = R^3(t) + 3 \cdot [1 - R(t)] \cdot R^2(t) = \\ &= 3 \cdot R^2(t) - 2 \cdot R^3(t) \end{aligned}$$

Nem kanonikus struktúrák

- Bonyolultabb rendszereket nem lehet kanonikus struktúrákkal modellezni:
 - Nem soros/párhuzamos struktúrájú részek nem soros/párhuzamos kombinációja
 - Kettőnél több állapot fordul elő a rendszerben, vagy a rendszerelemeknél
 - Ha az elemek meghibásodásai nem függetlenek egymástól
 - Eseménykövető javítás fordul elő

A teljes valószínűség tétele

$$\Pr \{A\} = \sum_{i=1}^n \Pr \{A | B_i\} \cdot \Pr \{B_i\}$$

$\Pr\{A|B_i\}$ az A eseménynek a B_i feltétel eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűsége,
és $\Pr\{B_i\}$ a feltétel valószínűség.

Az összefüggés érvényes, ha

$$\sum \Pr\{B_i\} = 1, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ ha } i \neq j.$$

A Boole-modell alkalmazásának gyakorlati eljárásai

- Hibafa elemzés (Fault Tree Analysis – FTA)
 - Kiinduló pontja a rendszer meghibásodása
 - Ebből kiindulva kell megállapítani, hogy mely alkatrészek milyen meghibásodása okozta ezt
- Hibahatás elemzés (Failure Modes and Effects Analysis – FMEA)
 - Kiinduló pontja az alkatrészek lehetséges meghibásodása
 - Ebből kiindulva kell megállapítani, hogy ennek milyen hatása lesz a teljes rendszerre vonatkozóan

A hibafa elemzés (FTA) (1)

- Nagy rendszereknél a hibafa manuális felállítása munkaigényes feladat
- A hibafa felállításához a rendszer működésének, hibamechanizmusainak alapos ismerete kell
- A hibafa felállítása után következik a szükséges számítások elvégzése – meghatározandó, hogy a rendszerre vonatkozó meghibásodási tényező az alkatrészek milyen paraméter értékével érhető el

A hibafa elemzés (FTA) (2)

- A hibafában szereplő logikai kapcsolatok:
 - VAGY-tag esetén akkor következik be meghibásodás, ha valamelyik alkatrész meghibásodik (ez soros megbízhatósági modell esetén jellemző), ebben az esetben a meghibásodási tényezők összegzésével kapjuk meg az eredményt
 - ÉS-tag esetén a meghibásodás feltétele az összes

A hibahatás elemzés (FMEA)

- A hibahatás elemzés során az alkatrészek meghibásodásaiból indulunk ki
- Vizsgáljuk, hogy ezek a meghibásodások milyen hatással vannak a teljes rendszerre

Rendszerek megbízhatósági vizsgálata

Markov modell szerint

Az állapottéren alapuló Markov modell

- Az általunk vizsgált állapottéren alapuló Markov modell általános jellemzői
 - véges, diszkrét állapotterű
 - folytonos idejű,
 - sztochasztikus
- Fentiek ugyan bizonyos korlátozásokat jelentenek, de a modellel a rendszerek legfontosabb jellemzői meghatározhatók

A Markov modellel meghatározható rendszerjellemzők

- karbantartott (javított) redundáns rendszerek állapotvalószínűségeinek stacioner eloszlása
- rendszer készenléti tényezője (tartós üzemkészége)
- a rendszer egyes állapotokban való tartózkodásának várható időtartama
- nem javítható rendszerek esetében a működésképtelenségig várható időtartam

A Markov-modell sztochasztikus jellege

- Sztochasztikus folyamat esetén a vizsgálat véletlen eseményekre vonatkozik - véletlen változók függvényeit kell elemezni
- Valamely sztochasztikus folyamat jelölése

$$\{Z(t), t \geq 0\}$$

vagyis egy bizonyos időpont után vizsgáljuk a $Z(t)$ rendszerállapotot az idő függvényében

- A rendszert az állapotai és a köztük bekövetkező átmenetek jellemzik

Folytonos idejű és diszkrét állapotter

- A sztochasztikus folyamat a lehetséges

$$Z_1(t), Z_2(t), \dots Z_i(t), \dots Z_m(t)$$

állapotok valamelyikét tetszőleges időpontban veheti fel

- Diszkrét állapotter eseményei egymástól elhatároltak, és egymást kizáróak (diszjunktak)
- Az állapotok száma véges (m), és a rendszer valamennyi állapotát figyelembe kell venni

$$\sum_{i=1}^m P_i(t) = 1$$

Markov folyamatok ábrázolása

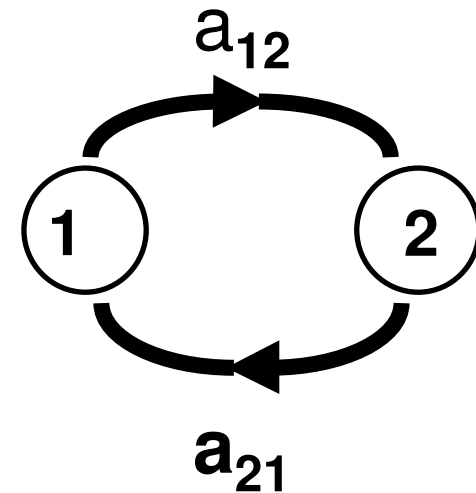
- A Markov folyamatok lehetséges állapotait és a közöttük fellépő átmeneteket az ún. Markov (vagy állapot-) gráf tünteti fel
- A gráf csomópontjai jelentik az állapotokat
- A gráf élei az állapotátmeneteket
- Átmenetet okozó események lehetnek
 - az elem meghibásodása,
 - a meghibásodás felismerése,
 - javítása, stb.

Állapotgráf (1)

- A többállapotú rendszerek áttekinthető ábrázolása az ún. Markov-gráf
- Az állapotgráffal kapcsolatos adatok
 - tetszőleges i csomóponthoz a hozzá tartozó $P_i(t)$ állapotvalószínűséget,
 - éleihez az i és j állapotok közti állapotátmenet valószínűségét rendeljük
- A Markov modell célja a fenti állapot- és állapotátmeneti valószínűségek meghatározása

Állapotgráf (2)

- Pl.: Két állapotú javítható rendszer állapotgráfja
- A meghatározandó állapotvalószínűségek [$P_1(t)$ és $P_2(t)$]
- Az állapotátmenetek valószínűsége: $P_{ij} = a_{ij} \cdot \Delta t \cdot P_i(t)$



A gyakorlatban az ábrában csak az $a_{12} = \lambda$, $a_{21} = \mu$ átmenet intenzitásokat szokás feltüntetni

Markov-folyamatok emlékezetmentessége

- Az állapotátmenet valószínűségét az átmenet intenzitása, és az induló állapotban való tartózkodás valószínűsége szabja meg
- Emlékezetmentes (ún. markovi) a folyamat, ha a változást nem befolyásolják a korábbi állapotok, csak a közvetlenül megelőző állapot

Az emlékezetmentesség matematikai megfogalmazása

- A feltételes valószínűségek felhasználásával úgy fogalmazható, hogy a rendszer korábbi állapotaira vonatkozó pótlólagos információ nem befolyásolja a t_{n+1} és t_n időpontok közötti állapotátmenet valószínűségét:

$$\begin{aligned}\Pr\{Z(t_{n+1}) = Z_{n+1} | Z(t_n) = Z_n, Z(t_{n-1}) = Z_{n-1}, \dots, Z(t_1) = Z_1\} = \\ = \Pr\{Z(t_{n+1}) = Z_{n+1} | Z(t_n) = Z_n\}\end{aligned}$$

- Ez a feltételes valószínűség tekinthető az állapotátmenet valószínűségének

Az állapotátmenetek valószínűsége

- A $Z_i \Rightarrow Z_j$ állapotátmenet feltételes valószínűsége:

$$\Pr\{x(t + \Delta t) = j | x(t) = i\} = a_{ij}(t) \cdot \Delta t$$

- Ezt a feltételes valószínűséget a feltétel $P_i(t)$ valószínűségével szorozva kapjuk együttes valószínűségre, hogy

$$\Pr\{x(t) = i \wedge x(t + \Delta t) = j\} = P_i(t) \cdot a_{ij}(t) \cdot \Delta t$$

- Ez annak a valószínűsége, hogy a rendszer a t időt követően a Δt idő alatt a Z_i ből Z_j -be jut

Homogén Markov folyamat

- Ha az állapotátmenet $a_{ij}(t)$ intenzitása állandó, vagyis $a_{ij}(t) = a_{ij}$, akkor a folyamatot időben homogénnek nevezzük.
- Ez a nem-öregedő tulajdonságot jelenti, az átmenetekhez ezért az exponenciális eloszlás tartozik. Ekkor az állapotátmenet valószínűsége

$$P_{ij}(t) = \Pr\{x(t) = i \wedge x(t + \Delta t) = j\} = P_i(t) \cdot a_{ij} \cdot \Delta t$$

Az állapotvalószínűségek meghatározása (1)

- Az állapotok száma véges, a fenti egyenleteket valamennyi állapotra felírva egy differenciálegyenlet-rendszert kapunk

$$P_j(t + \Delta t) = \sum_{\forall x \neq j} P_x(t) \cdot a_{xj} \cdot \Delta t + P_j(t) \cdot \left[1 - \sum_{\forall x \neq j} a_{jx} \cdot \Delta t \right]$$

Az állapotvalószínűségek meghatározása (2)

- A kifejezés első tagja annak a valószínűsége, hogy a rendszer a t időpontban valamelyik $Z_x(t) \neq Z_j(t)$ állapotban van, és Δt idő alatt a $Z_j(t)$ állapotba jut
- A második tag pedig annak a valószínűsége, hogy a rendszer a t időpontban a $Z_j(t)$ állapotban van, és a Δt idő alatt ott is marad, nem megy semelyik $Z_x(t) \neq Z_j(t)$ állapotba

Az állapotvalószínűségek meghatározása (3)

- Fenti egyenletet átrendezve

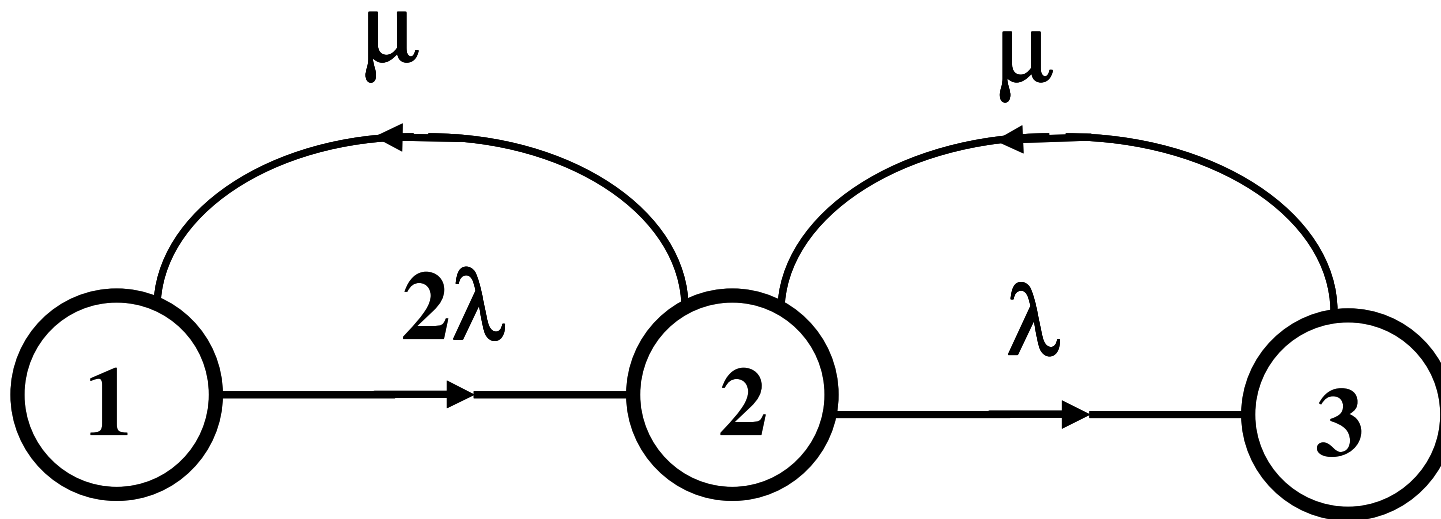
$$P_j'(t) = \frac{dP_j(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_j(t) - P_j(t)}{\Delta t} = \sum_{\forall x \neq j} P_x(t) \cdot a_{xj} - P_j(t) \cdot \sum_{\forall x \neq j} a_{jx}$$

- Ha az egyenletrendszernek $t \rightarrow \infty$ esetén létezik egy stacioner megoldása, akkor a rendszer **ergodikus**, és valamennyi Z_j állapotra:
$$\frac{dP_j}{dt} = 0$$

(vagyis az állapotvalószínűség konstans érték)

Példa a rendszer differenciálegyenlet-rendszerének előállítására (1)

- Tekintsük a következő forró tartalékolt kettős redundáns javítható rendszert:



Állapotvalószínűségek alakulása

- Az állapotból elmenő nyilak csökkentik az állapotban tartózkodás valószínűségét
- Az oda érkező nyilak növelik az állapotban tartózkodás valószínűségét

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t) - P_1(t) \cdot 2\lambda \cdot \Delta t + P_2(t) \cdot \mu \cdot \Delta t$$

$$P_2(t + \Delta t) = P_2(t) - P_2(t) \cdot (\lambda + \mu) \cdot \Delta t + P_1(t) \cdot 2\lambda \cdot \Delta t + \\ + P_3(t) \cdot \mu \cdot \Delta t$$

$$P_3(t + \Delta t) = P_3(t) - P_3(t) \cdot \mu \cdot \Delta t + P_2(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t$$

A differenciál egyenlet-rendszer (1)

- A fenti egyenletekből átrendezés után kapjuk a rendszerre vonatkozó differencia hányadosokat, melyek határértékeként adódnak a differenciál egyenletek

$$P_1'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -P_1(t) \cdot 2\lambda + P_2(t) \cdot \mu$$

- hasonlóan a többi állapotfüggvényre

$$P_2'(t) = -P_2(t) \cdot (\lambda + \mu) + P_1(t) \cdot 2\lambda + P_3(t) \cdot \mu$$

$$P_3'(t) = -P_3(t) \cdot \mu + P_2(t) \cdot \lambda$$

A differenciál egyenlet-rendszer (2)

- A differenciál egyenletrendszert tömörebb mátrixos írásmóddal a következő alakra hozhatjuk:

$$\overline{P}' = \overline{A} \cdot \overline{P}$$

ahol

$\overline{P}'$ az állapotvalószínűségek deriváltjaiból képzett oszlopvektor

$\overline{P}$ az állapot valószínűségekből képzett oszlopvektor, és

$\overline{A}$ az ún. állapotmátrix

$$\overline{P}' = \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix}$$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

A differenciál egyenlet-rendszer (3)

- Az állapotmátrix képzési szabálya a mátrix felépítése alapján követhető:
 - főátlóbeli a_{ii} elemek az adott i állapotból elmenő nyilak intenzitásösszege minusz előjellel
 - tetszőleges a_{ij} elem a j -ből i -be vezető nyilak intenzitásösszege

$$= \bar{A} = \begin{bmatrix} -2\lambda & \lambda & 0 \\ 2\lambda & -(\lambda + \mu) & \mu \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

A differenciál egyenlet-rendszer megoldása

- A mátrix szabályszerűsége is kiolvasható az adódott mátrixból: az oszlopösszegek mindig 0-t adnak
- Ez alapján pl. Laplace transzformációval viszonylag egyszerűen, algebrai egyenletrendszer megoldásával oldható meg a feladat

Ergodikus Markov-folyamat (1)

- A fentiek szerint meghatározott ergodicitás esetén
$$\sum_{\forall x \neq j} P_x \cdot a_{xj} = P_j \cdot \sum_{\forall x \neq j} a_{jx}$$

ahol $\lim_{t \rightarrow \infty} P_x(t) = P_x$

- P_x az x állapot stacioner állapoteloszláshoz tartozó, időben állandó valószínűsége

Ergodikus Markov-folyamat (2)

- Az ergodikus struktúrák az állapottér modellek egy szűkebb osztályát alkotják,
 - a módszer alkalmazásának vannak ugyan korlátai, de számítási módszere lényegesen egyszerűbb
 - segítségükkel a gyakorlatban adódó problémák általában megoldhatók
- Az ergodicitási feltétel teljesülése
 - a rendszer minden hibáját reális időn belül kijavítják
 - az állapottér minden állapotából minden állapot legalább közvetve elérhető

Ergodikus Markov-folyamat (3)

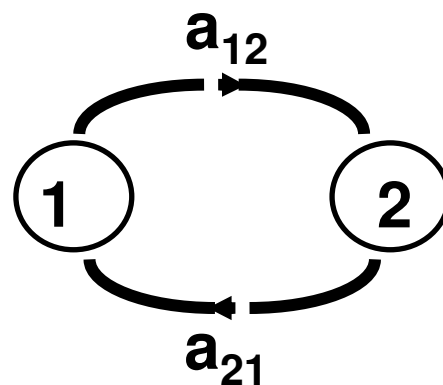
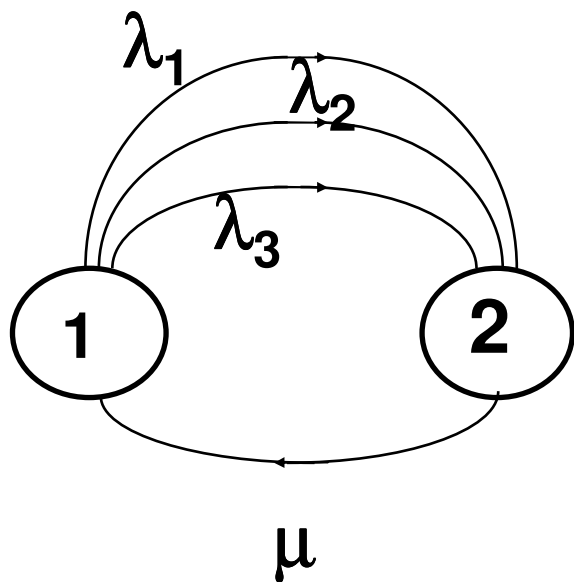
- A fenti ergodicitási feltételek teljesülése esetén a rendszer állapotterében nincs olyan zárt állapotcsoport, ami
 - az állapotoknak csak egy részét tartalmazza és
 - nincs ebből a zárt állapotcsoportból kilépés
- Ilyenkor a rendszer gráfja
 - összefüggő,
 - csak tranziens állapotokat tartalmaz
 - nem tartalmaz forrást, nyelőt, ill. olyan állapotcsoportot, amibe csak belépés van, kilépés nincs

Javított soros rendszer

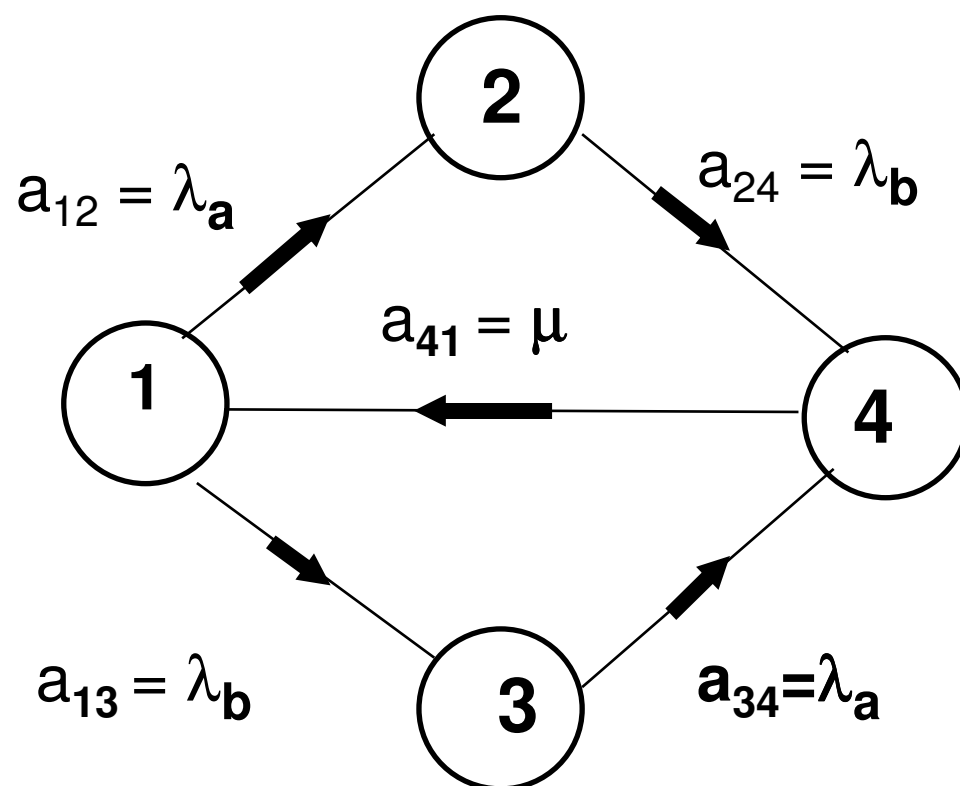
Az állapotátmenetek
intenzitásai:

$$a_{12} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$a_{21} = \mu$$

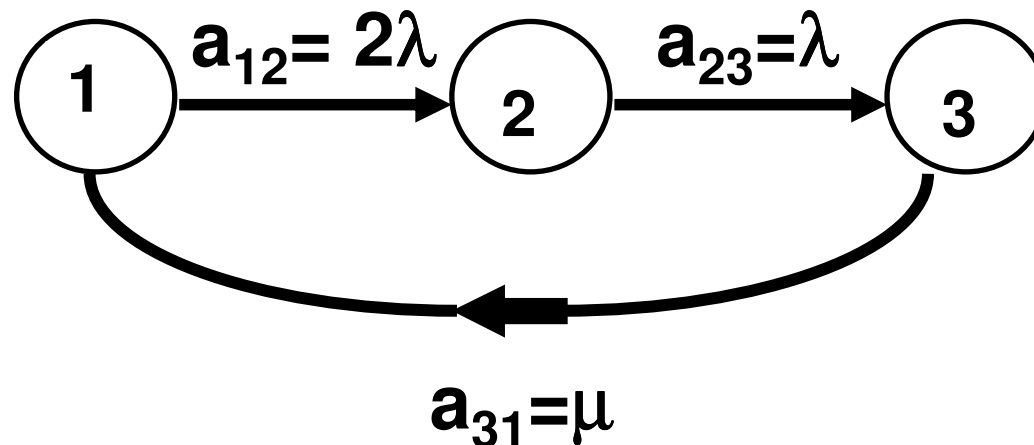


Párhuzamos (redundáns) rendszer két különböző egységből

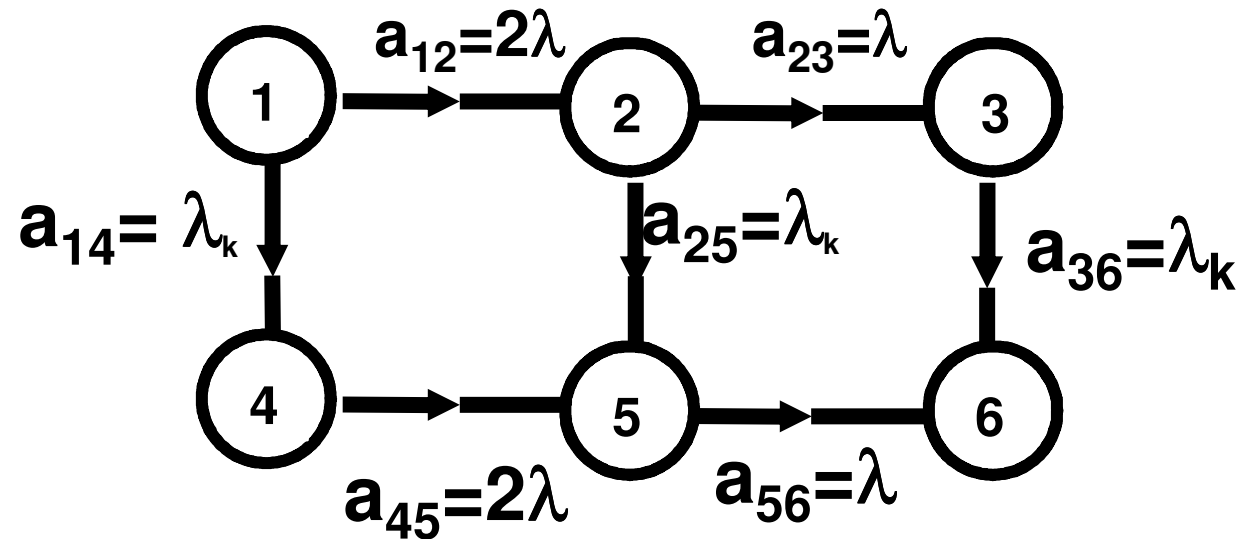


Párhuzamos (redundáns) rendszer két egyforma egységből

- A forró tartalékolt párhuzamos rendszer két egységének egyenlő a meghibásodási tényezője: $\lambda_a = \lambda_b = \lambda$



Stand-by rendszer Markov gráfja



Javítás nincs

Operatív egység meghibásodási tényezője λ ,

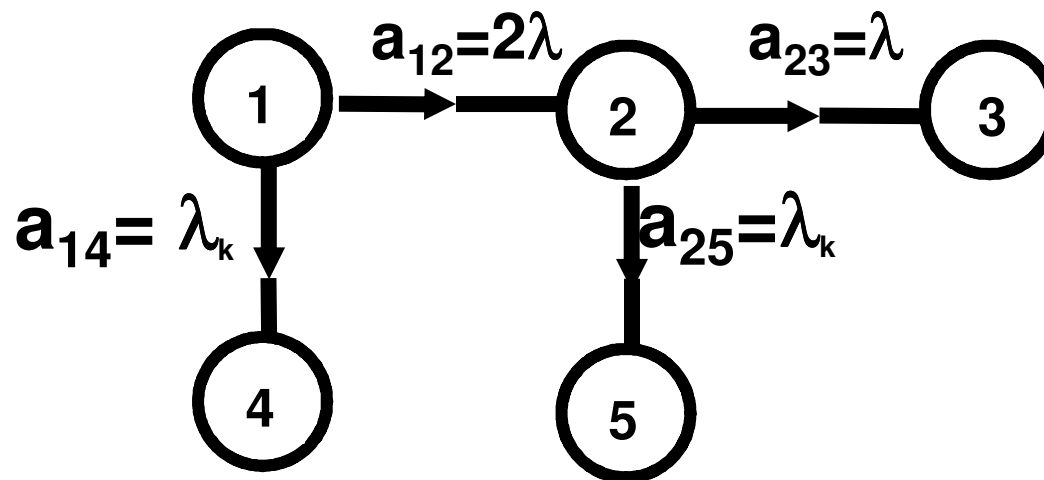
Közös egység meghibásodási tényezője λ_k .

$X = 1$ - a tökéletes jó állapot,

$X = 2$ - még üzemképes,

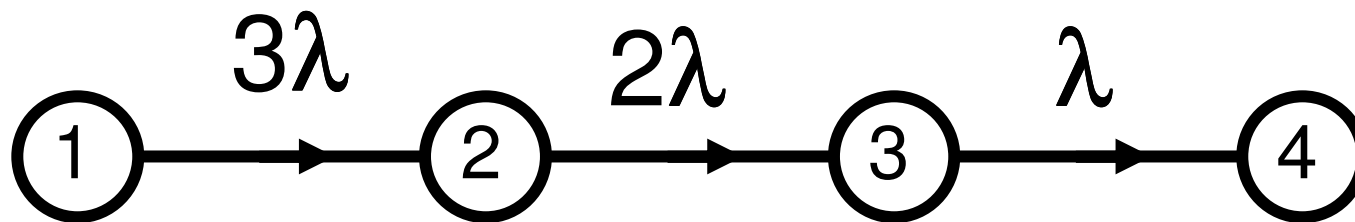
$X = 3, 4, 5$ és 6 -ban a rendszer üzemképtelen.

Ha az előző rendszert üzemképtelenség esetén azonnal kikapcsolják



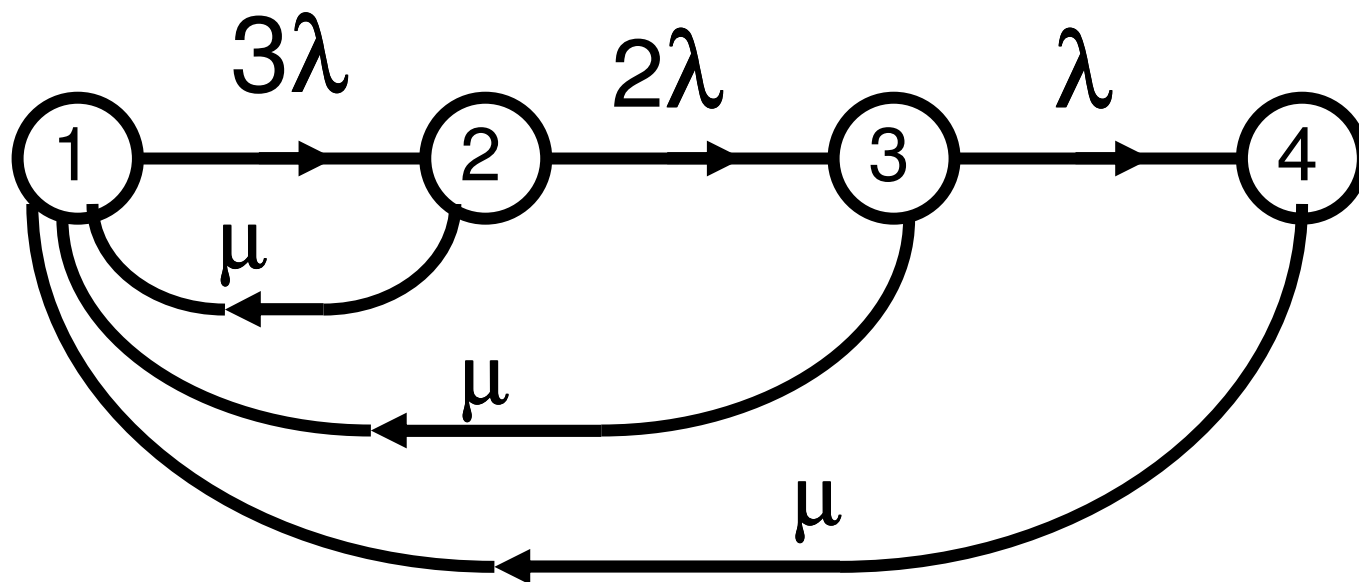
Háromegységes forrótartalékolt rendszer állapot-gráfja (1)

- Javítás nélkül (még Boole-modellel kezelhető)
- Állapotok
 - 1 - teljesen jó állapot
 - 2 - egy részrendszer rossz (üzemképes)
 - 3 - két részrendszer rossz (üzemképes)
 - 4 - mindhárom részrendszer rossz (üzemképtelen)



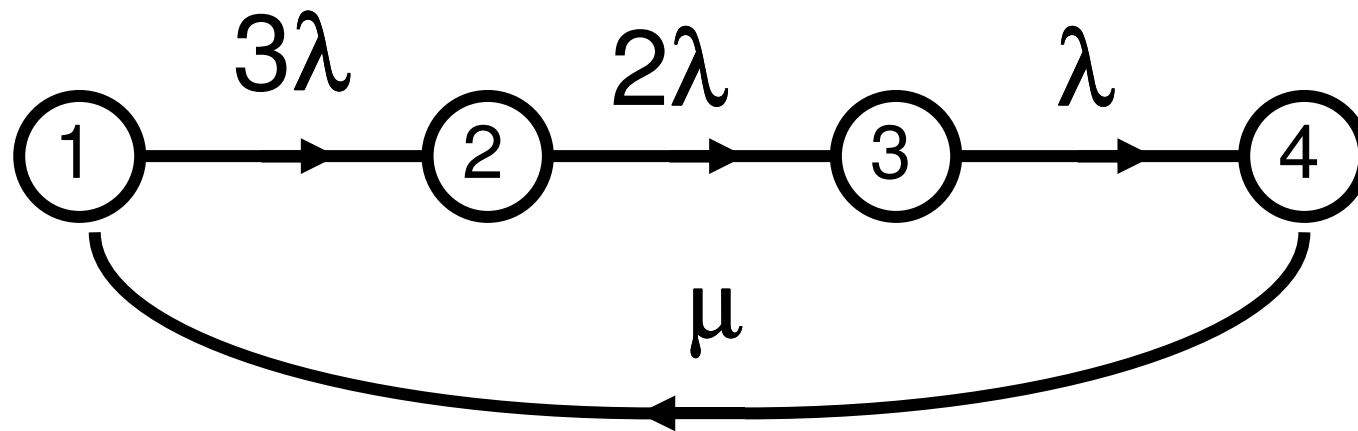
Háromegységes forrótartalékolt rendszer állapot-gráfja (2)

- Minden hiba esetén végzett teljes felújítás esetén



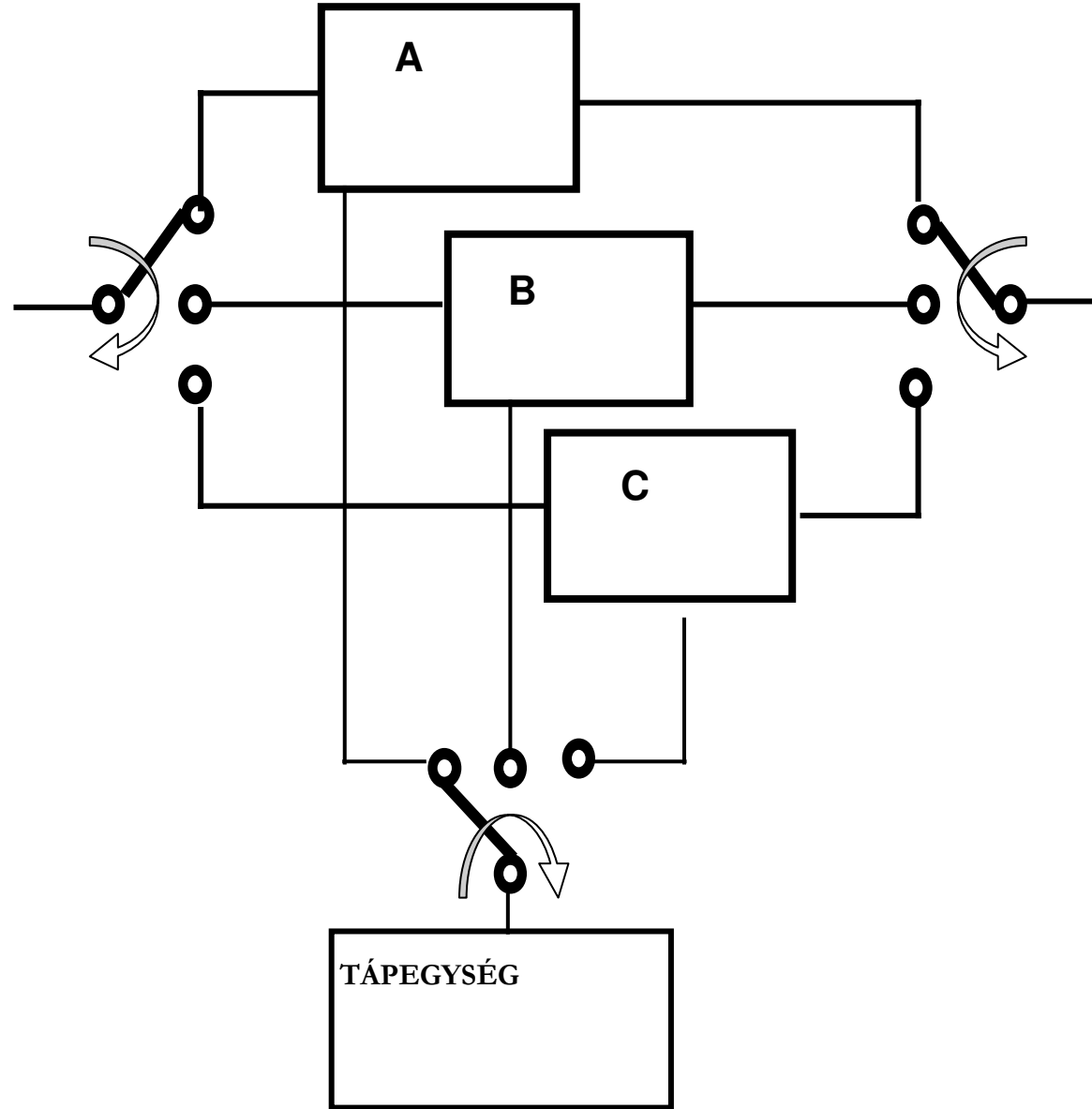
Háromegységes forrótartalékolt rendszer állapot-gráfja (3)

- Csak teljes rendszerhiba esetén végzett teljes felújítás esetén



Különböző tartalékolási módok

- Forró tartalék (Boole modellel csak ez kezelhető) - csak e tartalékolási módnál függetlenek egymástól az egyes egységek meghibásodásai
- További tartalékolási módok esetén az egységek meghibásodása függ a rendszerben betöltött szerepüktől
 - Hideg tartalék (a tartalék csak a fő egység meghibásodása után lép üzembe)
 - Csökkentett terhelésű (meleg) tartalék



Hideg tartalékolt rendszer (nem kanonikus)

- Operatív egységek A, B és C
- Közös egység a tápfeszültség

Háromegységes hidegtartalékolt rendszer állapotgráfja (1)

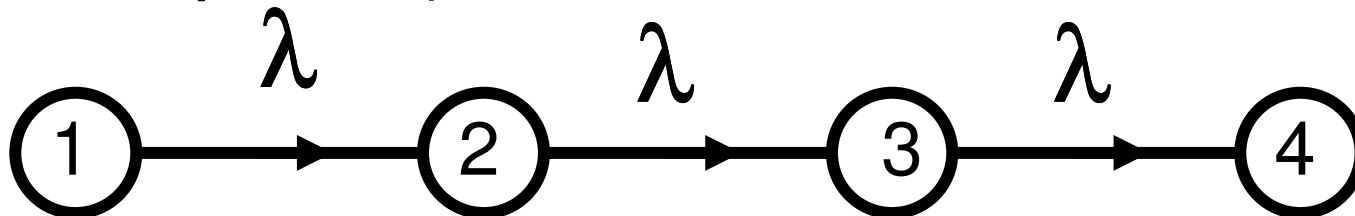
Javítás nélkül, egyforma egységek esetén
Állapotok

1 - teljesen jó állapot

2 - egy részrendszer rossz (üzemképes)

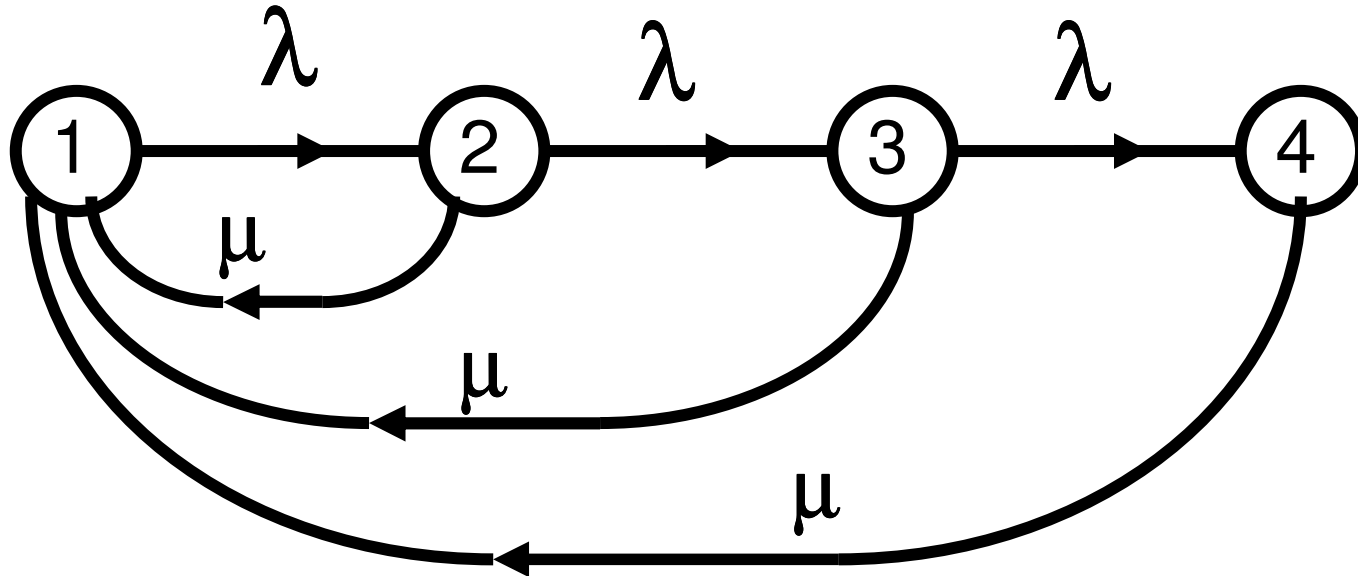
3 - két részrendszer rossz (üzemképes)

4 - mindhárom részrendszer rossz
(üzemképtelen)



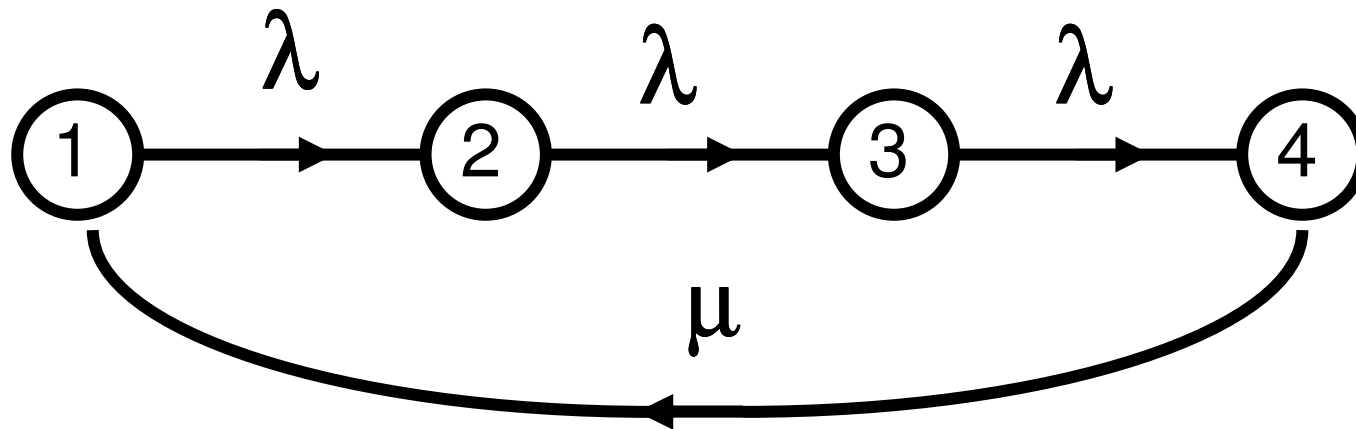
Háromegységes hidegtartalékolt rendszer állapotgráfja (2)

Minden hiba után elvégzett teljes felújítás esetén



Háromegységes hidegtartalékolt rendszer állapotgráfja (3)

Csak teljes rendszerhiba után elvégzett teljes felújítás esetén



$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda.$$

$$T_i = 1 / \lambda$$

$$T = 3 / \lambda$$

Hidegtartalékolt rendszer megbízhatósága (1)

- A hideg tartalékolt rendszer olyan redundáns rendszert jelent, melynél mindig csak egy egység működik (többi ki van kapcsolva – kizárt a meghibásodásuk)
- A megbízhatósági függvény ilyenkor a Poisson eloszlás szerint számítható
- Ezen eloszlás esetén annak a valószínűsége, hogy a $(0,t)$ időszakban éppen h hiba következik be:

$$P_h(t) = \left[\frac{(\lambda \cdot t)^h}{h!} \right] \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Hidegtartalékolt rendszer megbízhatósága (2)

- Ilyenkor definíció szerint addig működőképes a rendszer, amíg van legalább egy működő eleme - tehát amíg a hibák száma $h < n$, tehát

$$h_{\max} = n - 1$$

- A hideg tartalékolt rendszer megbízhatósági valószínűsége tehát:

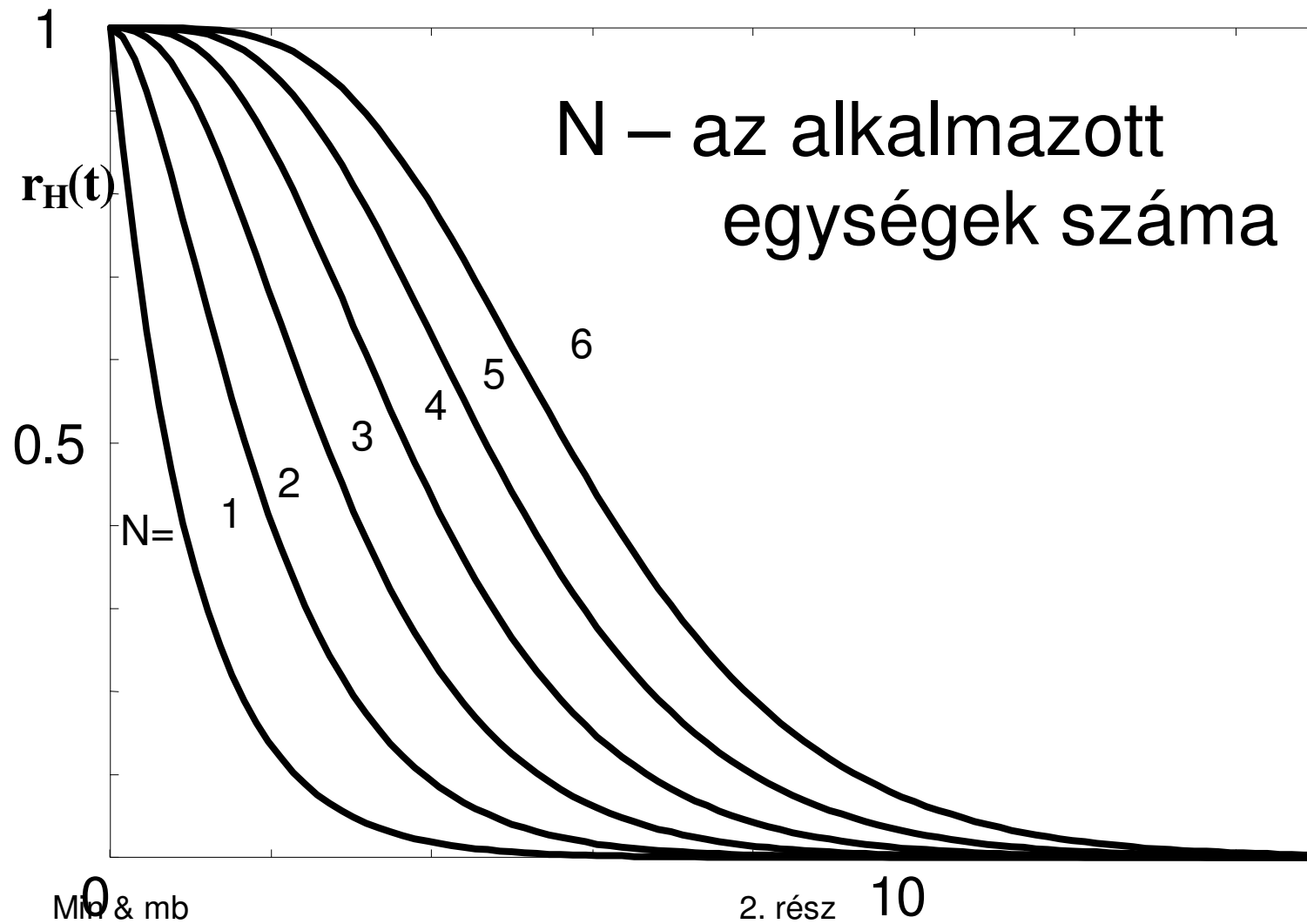
$$R_{\text{hideg}}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot i \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!}$$

- A meghibásodási valószínűség pedig

$$F_{\text{hideg}}(t) = 1 - R_{\text{hideg}}(t) = \sum_{i=\emptyset. \text{ rész}}^{\infty} P_i(t) - \sum_{i=0}^{n-1} P_k(t) = \sum_{k=n}^{\infty} P_i(t)$$

Min & mb

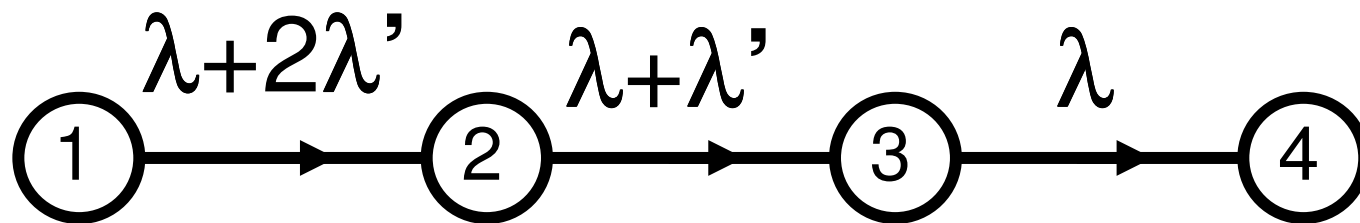
Hideg tartalékolt rendszer megbízhatósági függvényének alakulása



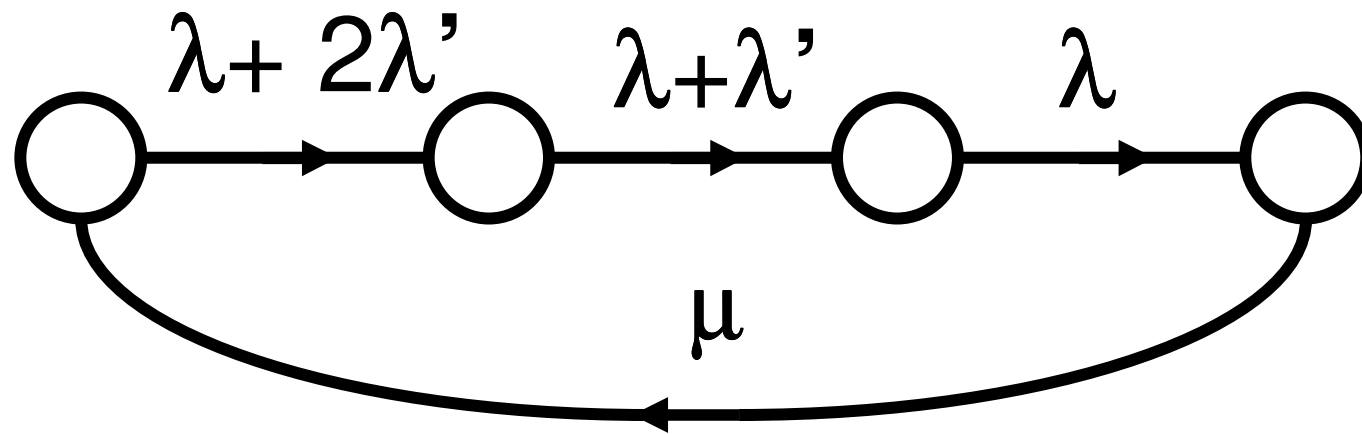
Csökkentett terhelésű tartalék

- A tartalékolt egység meghibásodása nem zárható ki, de a kisebb terhelésnek megfelelően kisebb gyakoriságú, mint a funkcionáló egységé
- A tartalékolt egység meghibásodási tényezője
$$\lambda' = c \cdot \lambda \quad \text{ahol} \quad 0 < c < 1$$
- E tartalékolási mód speciális eseteiként fogható fel a hideg és forró tartalékolás (hideg tartalékolásnál $c=0$, forró tartalékolásnál $c=1$)

Háromegységes csökkentett terhelésű tartalék

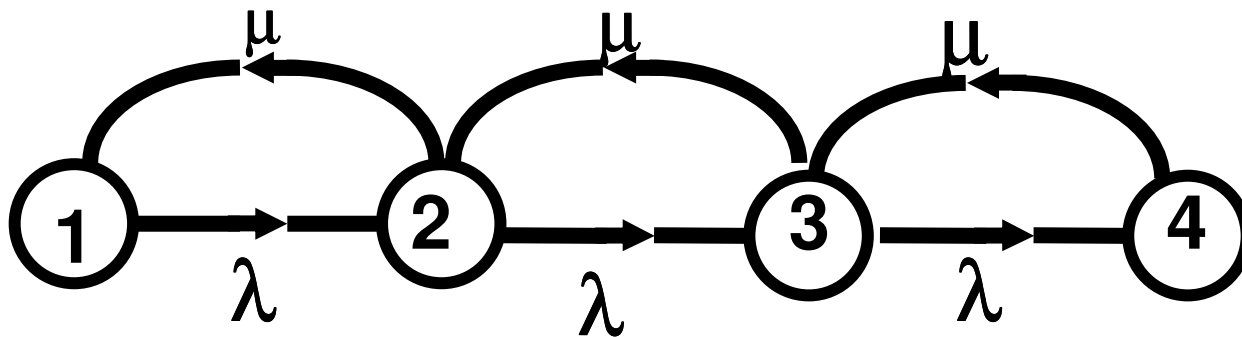


Háromegységes csökkentett terhelésű tartalék rendszerhiba esetén teljes felújítással



Születési-halálozási folyamat

- Ebben az esetben csak a szomszédos állapotokba van átmenet - a sztochasztikus folyamatok egy speciális osztályát képezik
- Ilyen folyamattal modellezhető a következő 3 egyforma tagból álló hideg tartalékolt rendszer „egyenkénti javítással”



Állapotidő

- Megbízhatóság az állapotvalószínűségen túl fontos kérdés, hogy mennyi ideig tartózkodik a rendszer az egyes állapotokban
- A Z_i állapotban való tartózkodás idejét T_i -vel jelöljük
- Ha a Z_i állapotból csak egyetlen Z_j állapotba van átmenet, akkor
$$T_i = \frac{1}{a_{ij}} \quad .$$
- Ha több állapotba van átmenet, akkor:
$$T_i = \frac{1}{\sum_j a_{ij}}$$

Megbízhatósági számítások a Markov modell segítségével

- A számítások szabályai a következőkben bizonyítás nélkül szerepelnek
- A rendszer állapotait $x=1,2,3, \dots h, \dots m$ indexek jelölik
- A szokásos jelöléssel a rendszer
 - üzemképes, ha $1 \leq x \leq h$
 - üzemképtelen, ha $h < x \leq m$

Általános számítási szabályok (1)

I.: Az $x=i$ állapotból $x=j$ állapotba való átmenet valószínűsége kis Δt idő alatt

$$P_{ij} = a_{ij} \cdot P_i(t) \cdot \Delta t$$

ahol a_{ij} az átmenet intenzitása és

$$P_i(t) = \Pr\{x(t) = i\}$$

II .: Az állapotvalószínűségek összege minden időpillanatban kiadja a teljes valószínűséget

$$\sum_i P_i(t) = 1$$

Általános számítási szabályok (2)

III .: Ergodikus rendszerben nem lehet sem forrás, sem nyelő, sőt ilyen jellegű állapotcsoport sem. Nem javítható rendszerek ezzel a model-lel úgy vizsgálhatók, hogy extrém paraméterű javítást feltételezünk és ezzel a rendszert ergodikussá tesszük

Ebben az esetben létezik az állapotoknak egy határeloszlása, ahol az állapotok stacioner valószínűsége:

$$P_x = \lim_{t \rightarrow \infty} P_x(t)$$

Egyensúlyi egyenletek (1)

III/a .: Valamennyi állapot stacioner valószínűségére igaz, hogy

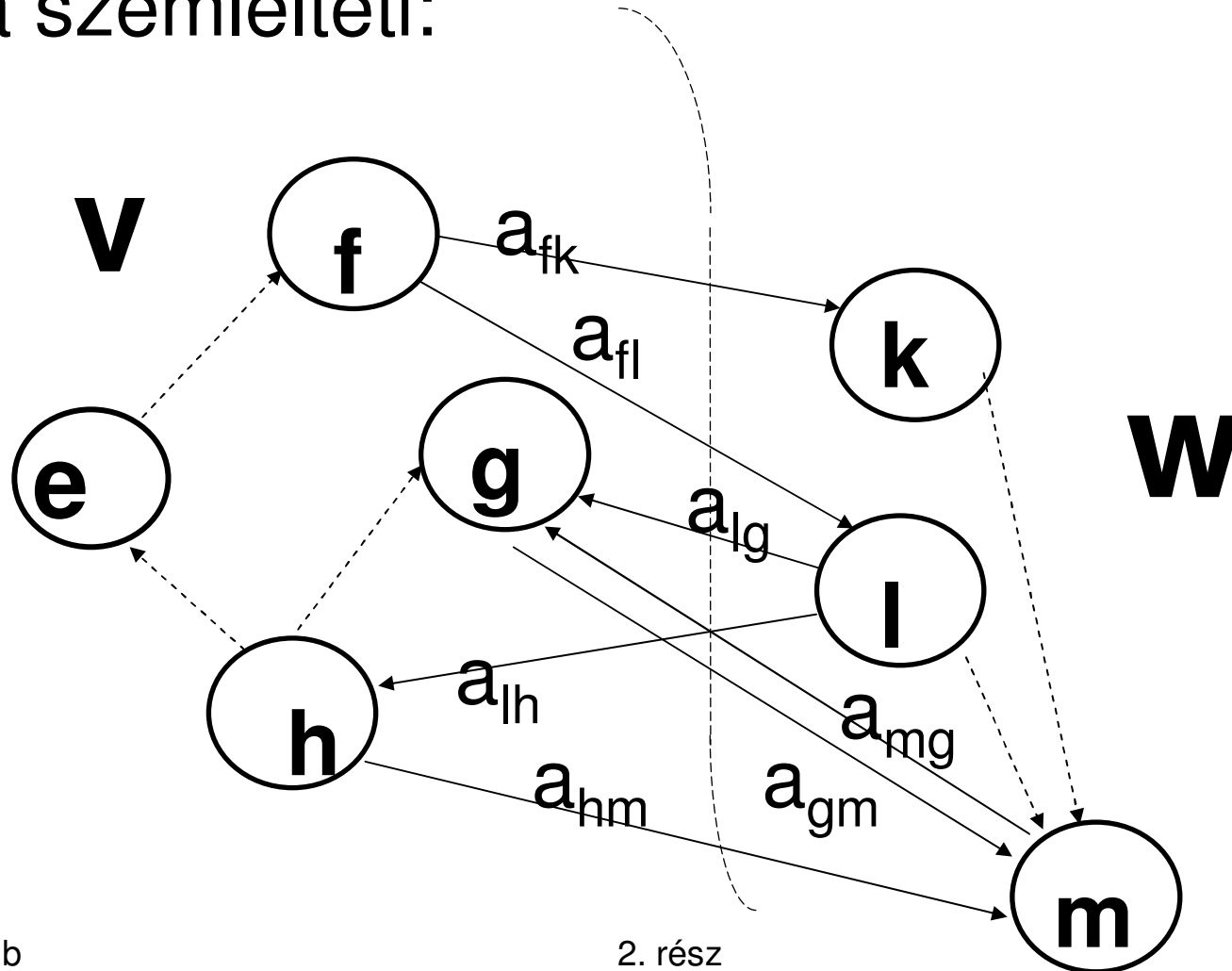
$$P_x > 0 \quad \forall x$$

III/b .: A Z_i állapot P_i stacioner valószínűsége az ún. egyensúlyi egyenletekből számítható.

E szerint az állapotba való belépéseknek egyensúlyt kell tartani az onnan való kilépésekkel (a gráfot átvágva a vágás helyét átmetsző intenzitások egyensúlyt tartanak)

Egyensúlyi egyenletek (2)

A stacioner állapotok egyensúlyát a következő ábra szemlélteti:



Egyensúlyi egyenletek (3)

- A vágás révén létrejött két diszjunkt állapot-csoporthoz tartozó indexek halmazát jelölje $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$, mely halmazokra igaz, hogy:

$$\{ \mathbf{v} \} \wedge \{ \mathbf{w} \} = \Phi \quad \text{és} \quad \{ \mathbf{v} \} \vee \{ \mathbf{w} \} = \Omega$$

- A balról jobbra haladó éleknél az állapotátmenet kezdőpontja a $\mathbf{v}$, végpontja a $\mathbf{w}$ halmazban
- A jobbról balra haladó éleknél az állapotátmenet kezdőpontja a $\mathbf{w}$, végpontja a $\mathbf{v}$ halmazban

Egyensúlyi egyenletek (4)

- Fentiek alapján az állapotok egyensúlyát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\sum_{\forall i \in v} \left[P_i \sum_{\forall j \in w} a_{ij} \right] = \sum_{\forall j \in w} \left[P_j \sum_{\forall i \in v} a_{ji} \right]$$

- Ebből az egyensúlyi egyenletből valamennyi állapot stacioner valószínűsége kiszámítható:

$$P_j = \frac{\sum_{\forall j \in w} \left[P_x \sum_{\forall x \neq j} a_{xj} \right]}{\sum_{\forall x \neq j} a_{jx}}$$

Egyensúlyi egyenletek (5)

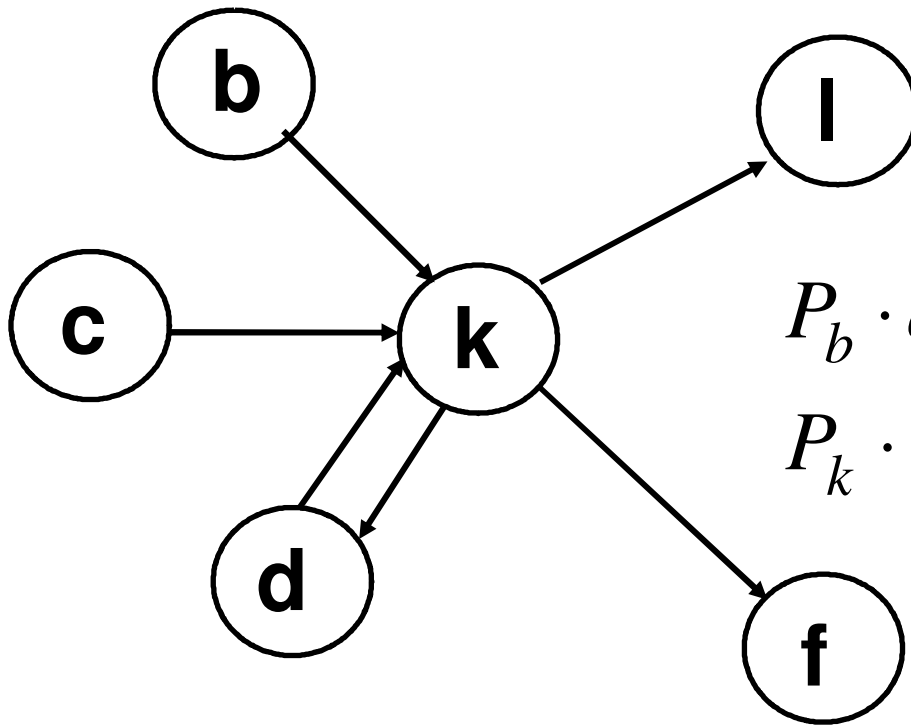
- III/c .: Az 1 és 3b szabályok alapján bármelyik állapotra felírható egy ilyen egyensúlyi egyenlet, ami azt jelenti, hogy az állapotból kimutató nyilak tartanak egyensúlyt a befelé mutató nyilakkal:

$$\sum_{\forall i \neq k} P_i \cdot a_{ik} = P_k \cdot \sum_{\forall i \neq k} a_{ki}$$

ahol $X=k$ a kérdéses állapot, és i jelenti a k -tól különböző összes többi állapotot

Egyensúlyi egyenletek (6)

- A III/c szabályt az ábra illusztrálja, a következő egyensúlyi egyenlettel:



$$P_b \cdot a_{bk} + P_c \cdot a_{ck} + P_d \cdot a_{bdk} = P_k \cdot (a_{kd} + a_{kl} + a_{kf})$$

Állapotokban tartózkodás ideje

- IV.: Valamely $X=i$ állapotban való tartózkodás ideje az állapotból kimutató nyilak intenzitásösszegével számítható

$$T_i = \frac{1}{\sum_{\forall j \neq i} a_{ij}}$$

- IV/a.: Egy adott v állapotcsoportban való tartózkodás ideje az állapotból kimutató nyilak intenzitásösszegével számítható

$$T_v = \frac{\sum_{\forall i \in v} P_i}{\sum_{\forall i \in v} \left[P_i \cdot \sum_{\forall j \notin v} a_{ij} \right]}$$

Üzemképességi mutatók számítása

- A rendszer tartós üzemképessége a jó állapotok összes valószínűsége:

$$K = \sum_{\forall i \leq h} P_i$$

- A rendszer üzemképes állapotban töltött idejének várható értéke a fentiek szerint:

ahol K a készenléti tényező
 h a hibakorlát

$$T_U = \frac{K}{\sum_{\forall i \leq h} \left[P_i \cdot \sum_{\forall j > h} a_{ij} \right]}$$

Csökkentett tartalékolás, mint általános tartalékolási mód (1)

- Háromegységes csökkentett terhelésű tartalékkal kialakított felújított rendszert (l. 43 sz. dia) a fenti számítási mód alapján vizsgálva a

$$P_1 \cdot (1 + 2c) \cdot \lambda = P_2 \cdot (1 + c) \cdot \lambda = P_3 \cdot \lambda = P_4 \cdot \mu$$

egyenletek alapján az állapotvalószínűségek meghatározhatók a

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 1$$

Csökkentett tartalékolás, mint általános tartalékolási mód (2)

- Ebből:

$$P_1 = \frac{1+c}{A}; \quad P_2 = \frac{1+2c}{A}; \quad P_3 = \frac{(1+2c) \cdot (1+c)}{A}; \quad P_4 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_3$$

$$\text{ahol } A = (2+3c) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot (1+3c+2c^2)$$

- vagyis a készenléti tényező

$$K = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{(2+3c) + (1+2c) \cdot (1+c)}{A}$$

Csökkentett tartalékolás, mint általános tartalékolási mód (3)

- és a meghibásodások között várható jó működési idő:

$$T_U = \frac{K}{P_3 \cdot \lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(2 + 3c) + (1 + 2c) \cdot (1 + c)}{(1 + 2c) \cdot (1 + c)}$$

- Az összefüggés alapján követhető, hogy $c=0$ esetén a hideg, $c=1$ esetén a forró tartalékolásra vonatkozó összefüggést kapjuk

$$(T_U)_{c=0} = \frac{3}{\lambda} \quad \text{illetve} \quad (T_U)_{c=1} = \frac{11}{6 \cdot \lambda}$$

Megbízhatóság szemléleti módjai

- Mérnöki szemlélet szerinti alapfeladat:
 - adott termék, rendszer megbízhatóságának meghatározása,
 - a megbízhatóság lehetőség szerinti számszerű jellemzése.
- Menedzser szemlélet szerinti alapfeladat:
az előírt megbízhatósági követelmények gazdaságos teljesítése az élelciklus különböző fázisaiban

Megbízhatóság-management területei

- Megbízhatóság tervezése,
- Megbízhatóság elemzése,
- Megbízhatóság optimalizálása, előre jelzése
- Alkalmazási területek
 - A nagy biztonságot igénylő alkalmazásokhoz feltétlenül szükséges, mint pl. nukleáris erőmű, űrkísérlet, energiaellátás, információs hálózat, nagy számítógépes rendszer, orvosi berendezés, közlekedés irányítás stb.)
 - A háztartási készülékek esetén is nagy a megbízhatóság gazdasági jelentősége az élettartam, a szerviz, alkatrész tartalékolás, stb. miatt.