Feladatok

Az alábbi feladatsor nem helyettesíti az elekronikus jegyzet feladatait!

1. Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

   (a)
$$\begin{aligned} x_1+4x_2-3x_3&=-9\\ 2x_1-3x_2-x_3&=2\\ 3x_1+x_2+x_3&=13 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} 2x_1+5x_2-3x_3&=10\\ x_1-3x_2-2x_3&=-3\\ -x_1+14x_2+3x_3&=1 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+x_3&=-2\\ 3x_1+x_2-2x_3&=-3\\ -4x_1+2x_2+x_3&=4 \end{aligned}$$

   (d)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-x_4&=6\\ 3x_1+x_2-5x_3-x_4&=-8\\ 2x_1+x_2-4x_3+4x_4&=-2\\ 3x_1-3x_3+x_4&=3 \end{aligned}$$

2. Milyen x érték esetén nem létezik inverze az alábbi mátrixoknak?

   (a)
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & x\\ 4 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 1 & x \end{pmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét (ha létezik) Gauss-eliminációval!

   (a)
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$B=\begin{pmatrix} -1,5 & 0,5 & 0,2\\ 0 & -1 & 0,2\\ 0 & 0 & -0,6 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 4 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

   (d)
$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi mátrixok LU-felbontását! Számítsuk ki a mátrixok determinánsának értékét az LU-felbontás segítségével!

   (a)
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6\\ 1 & 6 & 9\\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & 9 \end{pmatrix}$$

   (d)
$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Feladatok

Eredmények:

1. (a) $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$
   (b) *Nincs megoldás.*
   (c) $x_1 = \frac{1}{2}t - 1$, $x_2 = \frac{1}{2}t$, $x_3 = t$
   (d) *Nincs megoldás.*

2. (a) $x = 0{,}5$
   (b) $x = -6$

3. (a)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
   (b)
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$
   (c)
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ -0{,}7 & -0{,}2 & 0{,}5 \\ -2{,}2 & -0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (d)
$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

4. (a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{14}{5} \end{pmatrix}$, $det(A) = -14$
   (b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$, $det(B) = -8$
   (c) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $det(C) = 64$
   (d) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $det(D) = 3$