Integrálok közelítése

---

1. Legfeljebb hányadfokú polinomokra pontos az

   (a) $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ integrál értékét közelítő $I(f) = \dfrac{f\Big(-\frac{1}{4}\Big) + f\Big(\frac{1}{4}\Big)}{2}$ kvadratúra?

   (b) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ intergált közelítő $I(f) = f\Big(\frac{-\sqrt{3}}{3}\Big) + f\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)$ kvadratúra?

   (c) $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ integrál értékét közelítő $I(f) = \dfrac{f\Big(\frac{1}{4}\Big) + f\Big(\frac{1}{2}\Big) + f\Big(\frac{3}{4}\Big)}{3}$ kvadratúra?

2. Mekkora legyen $'c'$ értéke, hogy az

   (a) $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ integrál értékét közelítő $I(f) = \dfrac{f\Big(\frac{1}{5}\Big) + c \cdot f\Big(\frac{4}{5}\Big)}{1+c}$

   (b) $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ integrál értékét közelítő $I(f) = \dfrac{f(0) + c \cdot f(\frac{1}{2}) + f(1)}{2+c}$

   (c) $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ integrál értékét közelítő $I(f) = \dfrac{f(0) + 4c \cdot f(1) + f(2)}{2c+1}$

   kvadratúra a lehető legmagasabb fokszámú polinomokra pontos legyen? Mekkora ez a fokszám?

3. Közelítsük az alábbi integrálok értékét az egyszerű (i) érintő-, (ii) trapéz-, (iii) Simpson-formulával. Milyen értéket ad a kvadratúra?

   (a) $\int_{0}^{1} x^4\mathrm{d}x$

   (b) $\int_{0}^{1} \dfrac{1}{x-3}\mathrm{d}x$

   (c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin(x)\mathrm{d}x$

   (d) $\int_{1}^{2} x^2 ln(x)\mathrm{d}x$

   (e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x cos(x)\mathrm{d}x$

   (f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sin^2(x)\mathrm{d}x$

4. Közelítsük az $\int_{1}^{2} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ értékét az egyszerű (i) érintő-, (ii) trapézformulával. Mekkora a kvadratúra relatív hibája a pontos integrál értékéhez képest?

5. Közelítsük az alábbi integrálok értékét az összetett (i) érintő-, (ii) trapéz-, (iii) Simpson-formulával, ekvidisztáns alappontok, és N részintervallum esetén.

   (a) $\int_{0}^{1} e^{3x}\mathrm{d}x$, $(N = 5)$

   (b) $\int_{1}^{1{,}6} \dfrac{2x}{x^2-4}\mathrm{d}x$, $(N = 3)$

   (c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos^2(x)\mathrm{d}x$, $(N = 4)$

   (d) $\int_{1}^{2} x^2 ln(x)\mathrm{d}x$, $(N = 4)$, $(N = 8)$

Integrálok közelítése

Eredmények

1. (a) legfeljebb elsőfokú
   (b) legfeljebb harmadfokú
   (c) legfeljebb elsőfokú

2. (a) c=1, legfeljebb elsőfokú
   (b) c=4, legfeljebb harmadfokú
   (c) c=1, legfeljebb harmadfokú

3. (a) (i) $\approx 0,0625$; $(ii) \approx 0,5$; $(iii) \approx 0,2083$; (Pontos: 0,2)
   (b) (i) $\approx -0,4$; $(ii) \approx -0{,}4167$; $(iii) \approx -0{,}4056$; (Pontos: -0.4055)
   (c) (i) $\approx 1{,}1107$; $(ii) \approx 0,7854$; $(iii) \approx 1{,}0023$; (Pontos: 1)
   (d) (i) $\approx 0,9123$; $(ii) \approx 1,3863$; $(iii) \approx 1,0703$; (Pontos: 1,0706)
   (e) (i) $\approx 2{,}4361$; $(ii) \approx 0{,}7854$; $(iii) \approx 1,8859$; (Pontos: 1,9052)
   (f) (i) $\approx 0,1150$; $(ii) \approx 0{,}1963$; $(iii) \approx 0{,}1421$; (Pontos: 0.1427)

4. (i) a kvadratúra értéke:$\approx 1{,}2247$; az integrál értéke 1,2190, a relatív hiba: $\dfrac{\mid 1{,}2247 - 1{,}2190 \mid}{1{,}2190} = 0{,}0048, 0{,}48\%$;
   (i) a kvadratúra értéke:$\approx 1{,}2071$; az integrál értéke 1,2190, a relatív hiba: $\dfrac{\mid 1{,}2071 - 1{,}2190 \mid}{1{,}2190} = 0{,}0097, 0{,}97\%$;

5. (a) (i) $\approx 6,2674$; $(ii) \approx 6,5516$; $(iii) \approx 6,3621$ (Pontos: 6,3618)
   (b) (i) $\approx -0,7257$; $(ii) \approx -0{,}7509$; $(iii) \approx -0,7341$ (Pontos: -0.7340)
   (c) (i) $\approx 0{,}6443$; $(ii) \approx 0{,}6395$; $(iii) \approx 0{,}64270116$ (Pontos: 0.64269908)
   (d) (N=4):(i) $\approx 1{,}0608$; $(ii) \approx 1{,}0903$; $(iii) \approx 1,07061336$ (Pontos: 1.07061470),
   (N=8):(i) $\approx 1{,}0682$; $(ii) \approx 1,0755$; $(iii) \approx 1,07061462$