Feladatok (Deriváltak közelítése)

Az alábbi feladatsor nem helyettesíti az elekronikus jegyzet feladatait!

1. Legyen x_0 adott, $h > 0$, $x_1 = x_0 + 2h$, $x_2 = x_0 + 3h$, $f_0 = f(x_0)$ $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, ahol $f(x)$ elegendően sokszor folytonosan differenciálható függvény. Konstruáljunk

   (a) $f'(x_0)$
   (b) $f''(x_0)$
   (c) $f'(x_1)$
   (d) $f''(x_1)$
   (e) $f'(x_2)$
   (f) $f''(x_2)$

   deriváltat közelítő differenciasémát! Hányadrendű közelítés érhető el h szerint?

2. Legyen x_1 adott, $h > 0$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + 2h$, $f_1 = f(x_1)$ $f_2 = f(x_2)$, $f_3 = f(x_3)$, ahol $f(x)$ elegendően sokszor folytonosan differenciálható függvény. Konstruáljunk

   (a) $f''(x_2)$
   (b) $f''(x_1)$
   (c) $f'(x_2)$

   deriváltat közelítő differenciasémát! Hányadrendű közelítés érhető el h szerint?

3. Legyen x_0 adott, $h > 0$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 5h$, $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$ $f_2 = f(x_2)$, ahol $f(x)$ elegendően sokszor folytonosan differenciálható függvény. Konstruáljunk

   (a) $f'(x_0)$
   (b) $f'(x_1)$
   (c) $f''(x_2)$

   deriváltat közelítő differenciasémát! Hányadrendű közelítés érhető el h szerint?

4. Az (i) előrelépő-, (ii) visszalépő-, (iii) centrális séma felhasználásával közelítsük az $f(x) = xe^x$ függvény deriváltjának értékét az $x_0 = 1{,}5$ helyen, ha

   (a) $h = 0{,}1$
   (b) $h = 0{,}05$
   (c) $h = 0{,}01$

5. Az (i) előrelépő-, (ii) visszalépő-, (iii) centrális séma felhasználásával közelítsük az $f(x) = x^2 ln(x)$ függvény deriváltjának értékét az $x_0 = 0{,}6$ helyen, ha

   (a) $h = 0{,}1$
   (b) $h = 0{,}02$
   (c) $h = 0{,}01$

6. A hárompontos centrális séma felhasználásával közelítsük az $f(x) = cos(x^2)$ függvény második deriváltjának értékét az $x_0 = \frac{\pi}{4}$ helyen, ha

   (a) $h = 0{,}1$
   (b) $h = 0{,}01$

Feladatok (Deriváltak közelítése)

Eredmények

1. (a) $f'(x_0) \approx \dfrac{-5f_0 + 9f_1 - 4f_2}{6h}, \quad \mathcal{O}(h^2)$
   (b) $f''(x_0) \approx \dfrac{f_0 - 3f_1 + 2f_2}{3h^2}, \quad \mathcal{O}(h)$
   (c) $f'(x_1) \approx \dfrac{-f_0 - 3f_1 + 4f_2}{6h}, \quad \mathcal{O}(h^2)$
   (d) $f''(x_1) \approx \dfrac{f_0 - 3f_1 + 2f_2}{3h^2}, \quad \mathcal{O}(h)$
   (e) $f'(x_2) \approx \dfrac{f_0 - 9f_1 + 8f_2}{6h}, \quad \mathcal{O}(h^2)$
   (f) $f''(x_2) \approx \dfrac{f_0 - 3f_1 + 2f_2}{3h^2}, \quad \mathcal{O}(h)$

2. (a) $f''(x_2) \approx \dfrac{2f_1 - 3f_2 + f_3}{3h^2}, \quad \mathcal{O}(h)$
   (b) $f''(x_1) \approx \dfrac{2f_1 - 3f_2 + f_3}{3h^2}, \quad \mathcal{O}(h)$
   (c) $f'(x_2) \approx \dfrac{-4f_1 + 3f_2 + f_3}{6h}, \quad \mathcal{O}(h^2)$

3. (a) $f'(x_0) \approx \dfrac{-24f_0 + 25f_1 - f_2}{20h}, \quad \mathcal{O}(h^2)$
   (b) $f'(x_1) \approx \dfrac{-16f_0 + 15f_1 + f_2}{20h}, \quad \mathcal{O}(h^2)$
   (c) $f''(x_2) \approx \dfrac{4f_0 - 5f_1 + f_2}{10h^2}, \quad \mathcal{O}(h)$

4. (a) (i) $\approx 12{,}0232$; $(ii) \approx 10{,}4525$; $(iii) \approx 11{,}2379$, (*Pontos:* 11.2042)
   (b) (i) $\approx 11{,}6049$; $(ii) \approx 10{,}8204$; $(iii) \approx 11{,}2126$
   (c) (i) $\approx 11{,}2830$; $(ii) \approx 11{,}1261$; $(iii) \approx 11{,}2046$

5. (a) (i)$\approx 0{,}0913$; $(ii) \approx -0{,}1061$; $(iii) \approx -0{,}0074$, (*Pontos:* -0.0130)
   (b) (i) $\approx 0{,}0070$; $(ii) \approx -0{,}0326$; $(iii) \approx -0{,}0128$
   (c) (i) $\approx -0{,}0030$; $(ii) \approx -0{,}0228$; $(iii) \approx -0{,}0129$)

6. (a) -3.1593, (*Pontos:* a = -3.1696)
   (b) -3.1695