Konzultáció / numerikus analízis (e-learning)

2023. 11. 04.

1. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$ mátrix LU-felbontását!

Mo: $A = L \cdot U$ $\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\frac{1}{2} \cdot \mathrm{I} \quad = -\frac{-1}{2} \cdot \mathrm{I} \\ -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{I} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +1 \cdot \mathrm{II} \end{matrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ell: mátrix szorzása

② Legyenek $x_1=-2$; $x_2=-1$; $x_3=1$; $x_4=2$ és $y_1=-1$; $y_2=5$; $y_3=0$; $y_4=-5$. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő

a) lineáris   b) kvadratikus

regressziós függvényt!

Mo:

a) $\Rightarrow y = a_0 + a_1 \cdot x$ a_0, a_1 ?

	1	x_j	x_j^2	y_j	$x_j \cdot y_j$
	1	-2	4	-1	2
	1	-1	1	5	-5
	1	1	1	0	0
	1	2	4	-5	-10
Σ	4	0	10	-1	-13

$$\boxed{y = -\frac{1}{4} - \frac{13}{10}x}$$

$$\left.\begin{aligned} 4a_0 + 0 \cdot a_1 &= -1 \\ 0 \cdot a_0 + 10 \cdot a &= -13 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 4a_0 &= -1 \Rightarrow a_0 = \frac{-1}{4} \\ 10a_1 &= -13 \Rightarrow a_1 = \frac{-13}{10} \end{aligned}$$

b) $\Rightarrow y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ $\quad \Rightarrow \quad a_0, a_1, a_2 \ ?$

1	x_j	x_j^2	x_j^3	x_j^4	y_j	$x_j \cdot y_j$	$x_j^2 \cdot y_j$
1	-2	4	-8	16	-1	2	-4
1	-1	1	-1	1	5	-5	5
1	1	1	1	1	0	0	0
1	2	4	8	16	-5	-10	-20
Σ: 4	0	10	0	34	-1	-13	-19

$$\left.\begin{aligned} 4 \cdot a_0 + 0 \cdot a_1 + 10 \cdot a_2 &= -1 \\ 0 \cdot a_0 + 10\, a_1 + 0 \cdot a_2 &= -13 \\ 10 \cdot a_0 + 0\, a_1 + 34\, a_2 &= -19 \end{aligned}\right\}$$

14. gép $\Rightarrow$ $a_0 = \frac{13}{3}$

$a_1 = -\frac{13}{10}$

$a_2 = -\frac{11}{6}$

$$\boxed{y = \frac{13}{3} - \frac{13}{10} x - \frac{11}{6} x^2}$$

$$A \cdot \underline{a} = \underline{b} \implies A^{-1} \cdot \underline{b} \implies \underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

③ Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 2}$; $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az $Ax = b$ egyenletrendszer legkisebb négyzetes megoldását.

<u>Mo:</u>

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x + 4y &= 3 \\ 1\cdot x + 2y &= 1 \\ 1\cdot x + 3y &= 3 \\ 1\cdot x + 1\cdot y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$4 > 2$

túlhatározott egyenletrendszer $\Rightarrow$

$$\underbrace{A^T \cdot A}\cdot x = \underbrace{A^T \cdot b}$$

$A^T \cdot A$

				1	4
				1	2
				1	3
				1	1
1	1	1	1	4	10
4	2	3	1	10	30

$A^T \cdot b$

				3
				1
				3
				0
1	1	1	1	7
4	2	3	1	23

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 7 \\ 10 & 30 & 23 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 10y &= 7 \\ 10x + 30y &= 23 \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1{,}1 \end{aligned}}$$

4. Legyenek $x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$ és $f_0 = -2$; $f_1 = 0$; $f_2 = 8$; $f_3 = 2$. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot és annak helyettesítési értékét az $x = 4$ helyen.

Mo: $N = 4 \Rightarrow \max (4-1) = 3$-adfokú pol.

(osztott differenciák módszere)

$$L_3(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + $$
$$+ a_3 \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \qquad a_0, a_1, a_2, a_3\ ?$$

x_j	f_j			
1	$-2 = a_0$	$\frac{0-(-2)}{2-1} = 2 = a_1$	$\frac{8-2}{3-1} = 3 = a_2$	$\frac{-\frac{11}{3} - 3}{5-1} = -\frac{5}{3} = a_3$
2	0	$\frac{8-0}{3-2} = 8$	$\frac{-3-8}{5-2} = -\frac{11}{3}$	
3	8	$\frac{2-8}{5-3} = -3$		
5	2			

$$L_3(x) = -2 + 2\cdot(x-1) + 3\cdot(x-1)(x-2) + \left(-\frac{5}{3}\right)(x-1)(x-2)(x-3) = \ldots$$

$$L_3(4) = -2 + 2(4-1) + 3(4-1)(4-2) + \left(-\frac{5}{3}\right)(4-1)(4-2)(4-3) = \underline{\underline{12}}$$

5. Legyenek $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$ i $f_0 = 0$ i $f_1 = 1$ i $f'_0 = 2$ i $f'_1 = -1$. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot.

Mo: $x_0 = 1$ $x_1 = 2$ $h = x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1$

$$\boxed{\begin{matrix} f_0 = 0 \\ f'_0 = 2 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} f_1 = 1 \\ f'_1 = -1 \end{matrix}}$$

Max. $(2+2)-1 = 3$-adfokú polinom.

$$H_3(x) = A + B \cdot \frac{(x-x_0)}{h} + C \cdot \frac{(x-x_0)^2}{h^2} + D \cdot \frac{(x-x_0)^3}{h^3}$$

A, B, C, D ?

$$\boxed{\begin{aligned} A &= f_0 &&= 0 \\ A + B + C + D &= f_1 &&= 1 \\ B &= h \cdot f'_0 &&= 1 \cdot 2 \\ B + 2C + 3D &= h \cdot f'_1 &&= 1 \cdot (-1) \end{aligned}} \quad \left.\begin{aligned} A &= 0 \\ C &= 0 \\ B &= 2 \\ D &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

(12. gép)

$$H_3(x) = 0 + 2 \cdot \frac{(x-1)}{1} + 0 \cdot \frac{(x-1)^2}{1^2} + (-1) \cdot \frac{(x-1)^3}{1^3} =$$

$$= 2 \cdot (x-1) - 1(x-1)^3 = -x^3 + 3x^2 - x - 1$$

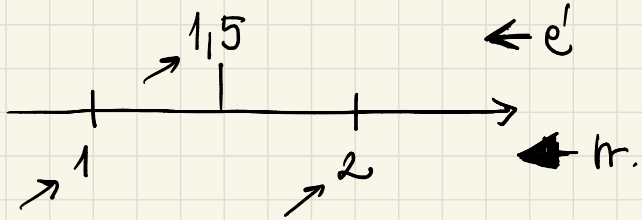
$\cancel{H(1{,}5)}$!

$H(1{,}4) = 0{,}736$

(6.) Közelítsük az $\int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx$ értékét az **egyszerű** a) érintő-; b) trapéz-; c) Simpson formulával. (Milyen értéket ad a kvadratúra?)

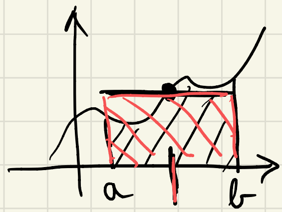
(Mekkora a kvadratúra relatív hibája a pontos integrálhoz képest?)

Mo: $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, $a = 1$, $b = 2$



$$\frac{b+a}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

a) érintőf:



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{b+a}{2}\right)\cdot(b-a)$$

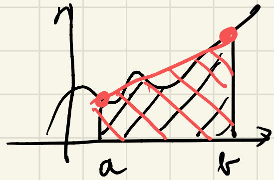
$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx f(1,5)\cdot(2-1) = \underbrace{1,5^2 \cdot \ln 1,5}\cdot 1 =$$

$$= \underline{0,9123}$$

Rel. hiba: $\left|\frac{0,9123-1,0706}{1,0706}\right| = 0,1479$

14,79 %

b) trapéz:



$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$$

$$\int_1^2 x^2\cdot \ln x\,dx \approx \underbrace{\frac{f(1)+f(2)}{2}\cdot(2-1)}=$$

$$=\frac{1^2\cdot \ln 1 + 2^2\cdot \ln 2}{2}\cdot 1 = \underline{\underline{1{,}3863}}$$

Relatív hiba? (%)

(Pontos: $\int_1^2 x^2\cdot \ln x\,dx = 1{,}0706$)

$$\left|\frac{\overset{\text{közel.}}{1{,}3863} - \overset{\text{pont}}{1{,}0706}}{\underset{\text{pont.}}{1{,}0706}}\right| = 0{,}2949 \Rightarrow \underline{\underline{29{,}49\%}}$$

c)
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+4\cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right)+f(b)}{6}\cdot(b-a)$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx \frac{f(1)+4\cdot f(1{,}5)+f(2)}{6}\cdot(2-1)$$

$$= \underline{\underline{1{,}0703}}$$

Rel. hiba: $\left|\dfrac{1{,}0703-1{,}0706}{1{,}0706}\right| = 0{,}0003$

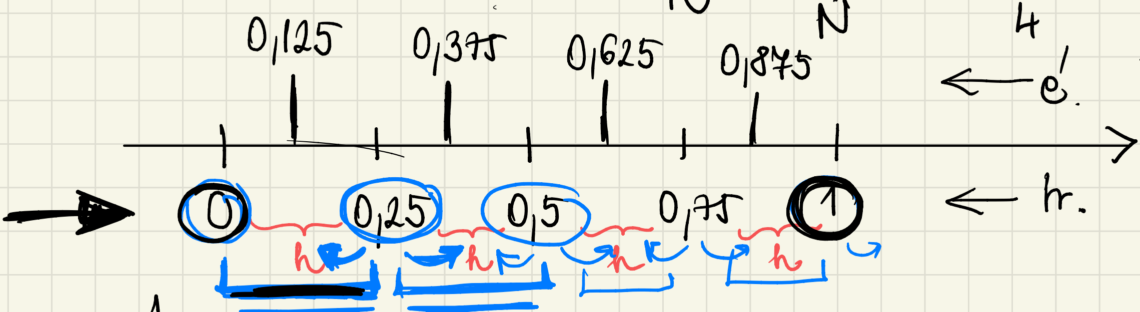
$\Rightarrow 0{,}03\,\%$

Ötlet: $f(x)=x^3$-ra (Simpson-formula pontos,
megoldani a érintő-, trapéz nem.)
feladatot

7. Közelítsük az $\int_0^1 \sqrt{e^x+1}\,dx$ értékét az összetett a) érintő-; b) trapéz-formulával a $[0,1]$ intervallumot $N=4$ egyenlő részre osztva.

Mo: $f(x)=\sqrt{e^x+1}$, $a=0$, $b=1$, $N=4$

$$h=\frac{b-a}{N}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$$

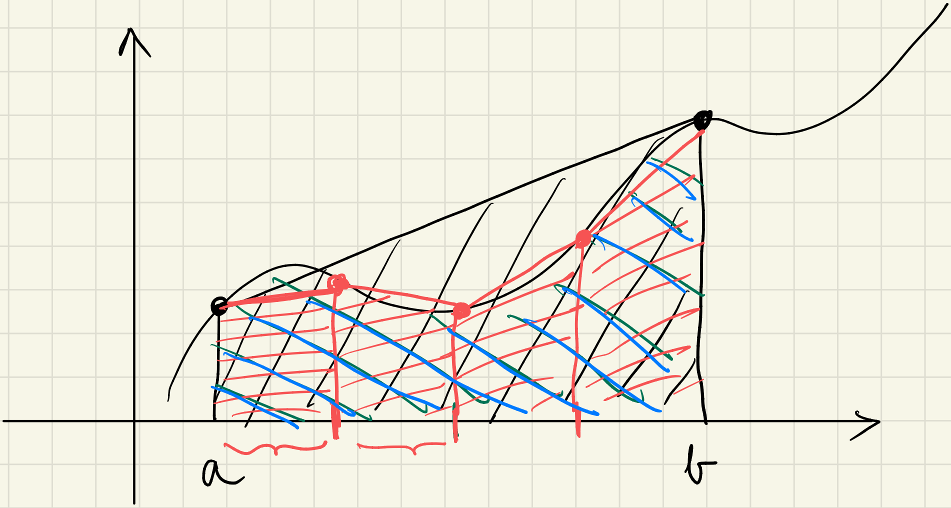


a) $$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \left[f(0{,}125)+f(0{,}375)+f(0{,}625)+f(0{,}875)\right]\cdot \overset{\frac{1}{4}}{h} =$$

$$=\underline{1{,}6411}$$

b) $$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \left[\frac{1}{2}f(0) + f(0{,}25) + f(0{,}5) + f(0{,}75) + \frac{1}{2}f(1)\right]\cdot h = \underline{\underline{1{,}6439}}$$

$$\left(\text{pontos: } \int_0^1 \sqrt{e^x+1}\,dx = 1{,}6421\right)$$


a
b

(8.) Legfeljebb hányadfokú polinomokra pontos az $\int_0^1 f(x)\,dx$ értékét közelítő

$$\Longrightarrow \quad I(f) = \frac{f\left(\frac{1}{4}\right) + 2\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)}{4}$$

kvadratúra-formula?

Mo: $\quad f(x) = x^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

- $k = 0 \qquad f(x) = x^0 = 1$

$$\int_0^1 1\,dx = \Big[x\Big]_0^1 = 1 = I(f) = \frac{1 + 2\cdot 1 + 1}{4} = 1$$

- $k = 1 \qquad f(x) = x^1 = x$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = I(f) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^1}{4} = \frac{1}{2}$$

- $k = 2 \qquad f(x) = x^2$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq I(f) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{18}{64}$$

max elsőfokúra

(9.) A 'c' paraméter mely értékénél pontos az $\int_0^2 f(x)\,dx$ értékét közelítő

$$I(f)=\frac{f(0)+2c\,f(1)+f(2)}{c+1}$$

kvadratúra-formula legfeljebb hanyadfokú polinomokra?

<u>Mo.:</u> $(c\neq -1)$

$f(x)=x^k \qquad (k=0,1,2,\dots)$

• $f(x)=x^0=1$

$$\int_0^2 1\,dx=\big[x\big]_0^2=2=I(f)=\frac{1+2\cdot c\cdot 1+1}{c+1}=\frac{2c+2}{c+1}=$$

$$=\frac{2\cancel{(c+1)}}{\cancel{c+1}}=2$$

• $f(x)=x^1=x$

$$\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2=I(f)=\frac{0^1+2c\cdot 1^1+2^1}{c+1}=$$

$$=\frac{2c+2}{c+1}=2$$

• $f(x) = x^2$ ✓

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$J(f) = \frac{0^2 + 2c\cdot 1^2 + 2^2}{c+1} = \frac{2c+4}{c+1}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{2c+4}{c+1} \qquad 8(c+1) = 3(2c+4)$$

$$8c+8 = 6c+12$$

$$2c = 4 \qquad \boxed{c=2}$$

• $f(x) = x^3$ $\boxed{c=2}$

$$\int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4 \ ✓ = J(f) = \frac{0^3 + 2\cdot 2\cdot 1^3 + 2^3}{2+1} = 4$$

• $f(x) = x^4$ hf. (nem telj.)

10. Legyen $h > 0$ adott lépésköz, x_0, x_1, x_2 alappontok, ahol $x_1 = x_0 + 2h$, $x_2 = x_0 + 3h$, és legyen $f(x)$ egy elég sima függvény az $[x_0, x_2]$ intervallumon. Konstruáljunk

a) $f'(x_0)$ b) $f''(x_0)$ deriváltat közelítő sémát. h-szerint hányadrendű a közelítés?