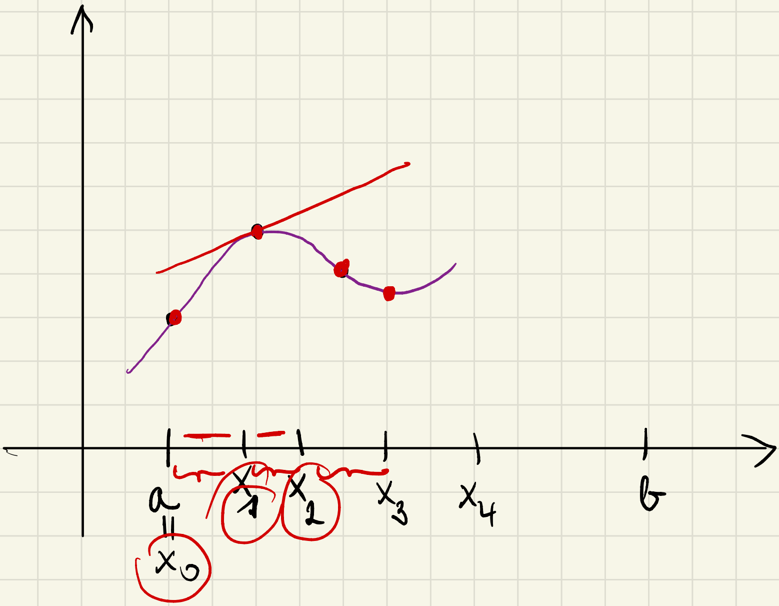
Konzultáció / Matematika 3

(e-learning)

2023. 11. 17.



$f(x)$ ←

$f(x_0)$ ←

$f(x_1)$ ←

$f(x_2)$ ←

$\vdots$

$f'(x_0)$?

$f''(x_1)$?

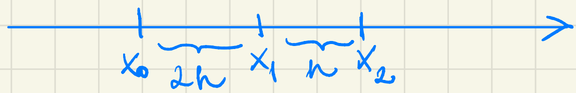
. . . .

1.

10. Legyen $h>0$ adott lépésköz, x_0, x_1, x_2 alappontok, ahol $x_1 = x_0+2h$, $x_2 = x_0+3h$, és legyen $f(x)$ egy elég sima függvény az $[x_0, x_2]$ intervallumon. Konstruáljunk

a) $f'(x_0)$ b) $f''(x_0)$ deriváltat közelítő sémát. h-szerint hányadrendű a közelítés?

Mo:



$\boxed{\text{1. lépés}}$ (Taylor-sor)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot(x-x_0)^3}$$

$\boxed{\text{2. lépés}}$ (helyettesítünk a Taylor-sor)

• $x = x_1$ $\qquad x_1 - x_0 = (x_0+2h) - x_0 = 2h$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x_1-x_0)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{6}(x_1-x_0)^3}$$

$$(1.)\ f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 2h + \frac{f''(x_0)}{2}\, 4\cdot h^2 + \underbrace{\cancel{\frac{f'''(\xi)}{6}\cdot 8h^3}}_{O(h^3)}$$

- $x = x_2 \qquad x_2 - x_0 = (x_0 + 3h) - x_0 = 3h$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x_2 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x_2 - x_0)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\eta)}{6}(x_2 - x_0)^3}$$

$$\text{(II)}\ f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 3h + \frac{f''(x_0)}{2}\, 9h^2 + \underbrace{\cancel{\frac{f'''(\eta)}{6}\cdot 27h^3}}\ O(h^3)$$

3\. lépés (a keresett derivált kifejezése)

$$\text{(I)}\ \ f(x_1) = f(x_0) + 2h\cdot f'(x_0) + 4h^2\cdot\frac{f''(x_0)}{2} + 8h^3\,\frac{f'''(\xi)}{6} \qquad \cdot 9$$

$$\text{(II)}\ \ f(x_2) = f(x_0) + 3h\cdot f'(x_0) + 9h^2\cdot\frac{f''(x_0)}{2} + \underbrace{27h^3\,\frac{f'''(\eta)}{6}} \qquad \cdot 4$$

a) (kiejtjük $f''(x_0)$)

$$9\cdot(\text{I}) - 4\cdot(\text{II})$$

$$9\cdot(\text{I}):\ 9\cdot f(x_1) = 9\cdot f(x_0) + 18h\cdot f'(x_0) + 36h^2\cdot\frac{f''(x_0)}{2} + \underbrace{72\cdot h^3\cdot\frac{f'''(\xi)}{6}}$$

$$4\cdot(\text{II}):\ 4\cdot f(x_2) = 4\cdot f(x_0) + 12h\cdot f'(x_0) + 36h^2\cdot\frac{f''(x_0)}{2} + \underbrace{108h^3\cdot\frac{f'''(\eta)}{6}}$$

$$\boxed{9f(x_1) - 4f(x_2) = 5f(x_0) + 6h\cdot f'(x_0)} + \underbrace{\left(72\cdot\frac{f'''(\xi)}{6} - 108\,\frac{f'''(\eta)}{6}\right)\cdot h^3}_{O(h^3)}$$

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{-5f(x_0) + 9f(x_1) - 4f(x_2)}{6h}} \qquad O(h^2)$$

h-szerint másodrendű

b) $3\cdot(\mathrm{I}) - 2(\mathrm{II})$

$$\boxed{3f(x_1) - 2f(x_2) = f(x_0) - 3h^2 \cdot f''(x_0)} + \sigma(\underline{h^3})$$

$$\boxed{f''(x_0) \approx \frac{f(x_0) - 3f(x_1) + 2f(x_2)}{3\underline{h^2}}}$$

$\sigma(h)$

h - szerint elsőrendű

$e^{-\lambda}$

$e - \lambda$

(11) Az X normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 6, szórása 3.

a) $0{,}95 = P(X < b)$ $\quad b = ?$

b) $0{,}05 = P(X < b)$ $\quad b = ?$

c) $0{,}98 = P(X > a)$ $\quad a = ?$

d) $0{,}95 = P(m - c < X < m + c)$ $\quad c = ?$

Mo: X : norm. eo. $\rightarrow$ $m = 6$

$\sigma = 3$

a) $\underline{0{,}95} = P(X < b) \overset{I.}{=} P\left(X^* < \frac{b-6}{3}\right) \overset{II.}{=}$

$= \underline{\Phi\left(\frac{b-6}{3}\right)}$

$0{,}95 = \Phi\left(\frac{b-6}{3}\right)$

$1{,}645 = \frac{b-6}{3}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{b}} = 6 + 3 \cdot 1{,}645 =$

$= \underline{\underline{10{,}935}}$

$(-\infty; 10{,}935)$

(15.) Az X valószínűségi változóra $n = 40$ megfigyelést végeztek. A mintaátlagra 25,1 ; a korrigált tapasztalati szórásra 0,32 adódott.
95%-os szignifikancia-szinten elfogadható-e, hogy a valószínűségi változó várható értéke

a) $(=)$ 25 ?

b) $(>)$ több, mint 25 ?

Mo: X :

Adatok: $n = 40$ ←

$\hat{m}_{40} = 25{,}1$

$\hat{s}_{40} = 0{,}32$

a)

1. → $H_0: E(X) = 25 \quad (= m_0)$

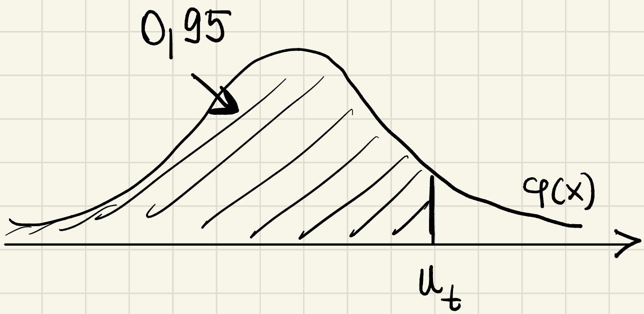
$H_1: E(X) \neq 25$ (kétoldali próba)

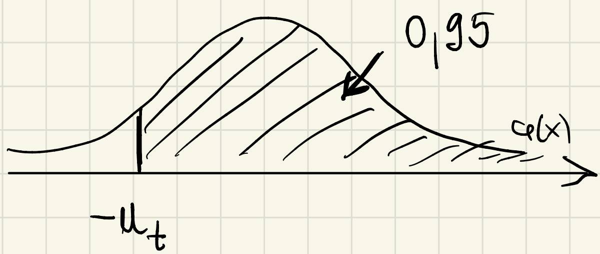
$H_0: E(X) = m_0$ (X norm. eo.)

nem norm.

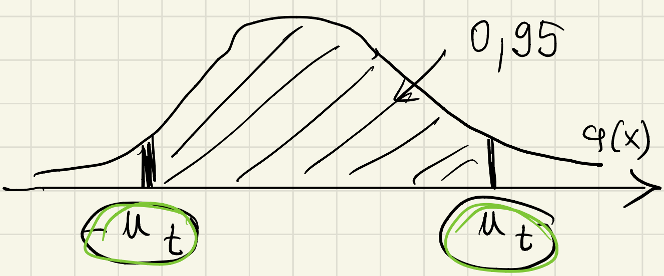
$n > 30$

$n \backslash \sigma$	ismert	nem ismert
$n < 30$	u-	t-
$n \geq 30$	u-	~~t-~~ u-





egyoldali próba



kétoldali

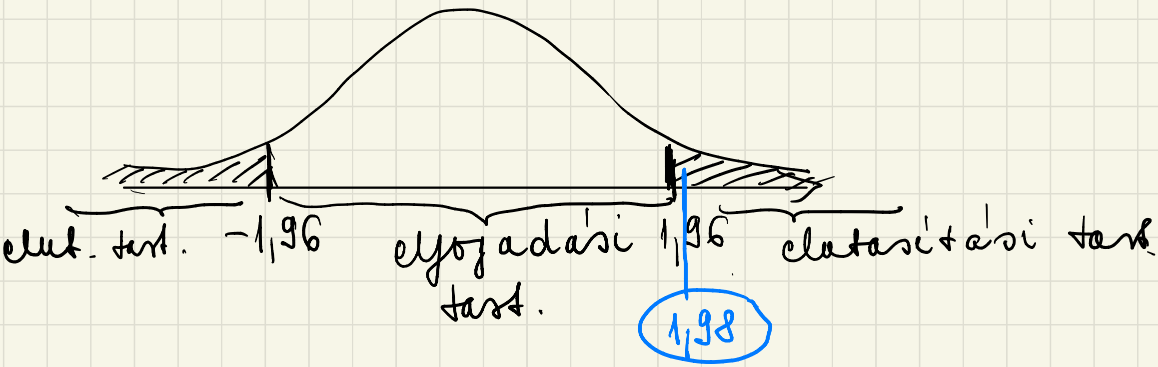
II. u-próba $(n > 30)$

$$\hat{u}_p = \underbrace{\frac{\hat{m}_n - m_0}{\hat{s}_n/\sqrt{n}}}_{\approx \text{ standard normális}} = \frac{25{,}1 - 25}{0{,}32/\sqrt{40}} = 1{,}98$$

kétoldali próba

III. $\Phi(u_t) = \dfrac{0{,}95 + 1}{2} = 0{,}975$

$u_{kr} = u_t = \pm 1{,}96$



IV. H_0-t elutasítjuk, nem fogadható el, hogy a v.é. 25.

DE: 1,98 és 1,96 túl közel van $\Longrightarrow$ ismételt mérés!!!

b) I. $H_0: \; E(X) \le 25 \quad (= m_0)$

$\rightarrow H_1: \; E(X) > 25$ (egyoldali)

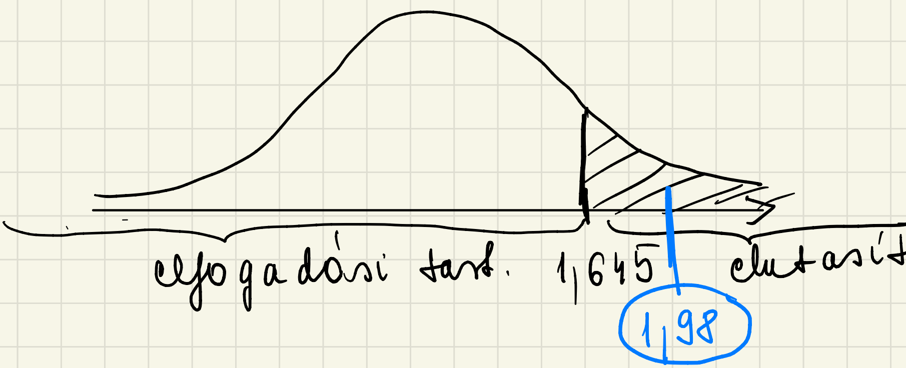
II. u-próba $(n > 30)$

$$\hat{u}_p = \underbrace{\frac{\hat{m}_n - m_0}{\hat{s}_n / \sqrt{n}}}_{\approx \text{ standard norm. eo.}} = \ldots\ldots = 1{,}98$$

$\longrightarrow$ ≈ standard norm. eo.

III. $\Phi(u_t) = 0{,}95$ ← egyoldali

$u_t = +1{,}645$



IV. H_0-t elutasítom → H_1-et elfogadom: elfog. ható, hogy a v. é. > 25.

(16.) Egy konzerv töltőtömegének vizsgálatára $n = 9$ mérést végeztek. A kapott eredmények (g): $\hat{m}_n = 98{,}6$ $\hat{s}_n = 3{,}6$. (Feltételezzük, hogy az adatok normális eloszlásból származnak.) 95%-os szignifikancia-szinten elfogadható-e, hogy a töltőtömeg várható értéke (=) 100 g?

Hogyan változik a döntésünk, ha a szignifikancia-szint 90%?

Mo: X: töltőtömeg (norm. eo.)

Adatok: $n = 9$

$\hat{m}_n = 98{,}6$

$\hat{s}_n = 3{,}6$

1. $H_0:\ E(X) = 100 \quad (= m_0)$

$H_1:\ E(X) \neq 100$ (kétoldali)

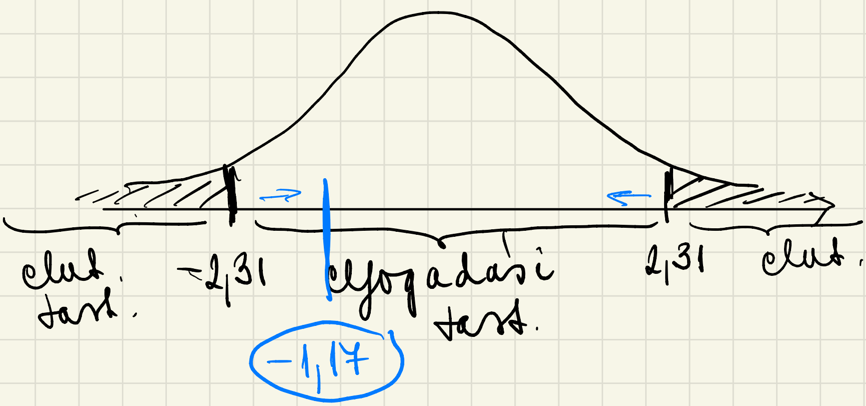
$<$

II. $\boxed{\text{t-próba}}$ ($n < 30$ és σ nem ismert)

$$\hat{t}_p = \underbrace{\frac{\hat{m}_n - m_0}{\hat{s}_n/\sqrt{n}}}_{\substack{\text{t-eloszlású} \\ (n-1) \text{ szab. fokkal}}} = \frac{98,6-100}{\left(3,6/\sqrt{9}\right)} = -1,17$$

kétoldali próba

III. $t_t = \pm 2,31 \leftarrow$ tábl. $\begin{cases} \frac{0,95+1}{2} = 0,975 & 0,95 \\ \text{szab. fok: } 9-1 = 8 \end{cases}$



IV. H_0-t elfogadom: hihető, hogy a v.é. 100 g.

17. Oldjuk meg a 16. feladatot, ha az adatok $n = 100$ mérésből származnak!

(18.) Egy termék hosszának vizsgálatára $n=40$ mérést végeztek. A mintaátlagra 24,3 mm, a korrigált tapasztalati szórásra 1,9 mm adódott. 95%-os szignifikancia-szinten elfogadható-e, hogy a termék hosszának várható értéke kisebb, mint 25 mm?