Matematika 3 konzultáció

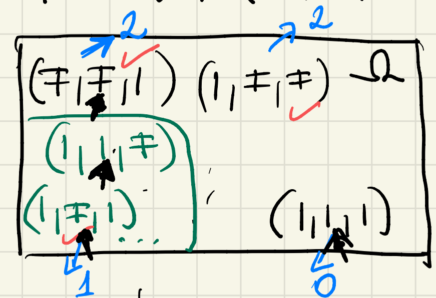
(e-learning)

1. rész

2023. 11. 10.

1. Egymás után feldobunk 3-szor egy szabályos pénzérmét.

a) elemi események: pl. (F, F, F); (F, F, I); (I, F, F); ......



Hány elemű Ω?

$\underbrace{2}_{\text{és}} \cdot \underbrace{2}_{\text{és}} \cdot 2 = \boxed{8}$

b) események: pl.

A: egy fejet dobunk

B: van fej a dobások

C: 2. dobás fej

c) műveletek

$\overline{A}$: nem egy fejet dobunk

$A \cap B$ $(A \cdot B)$: egy fejet dobunk és van fej $\Rightarrow$ egy fejet dobunk

$A \cup B$ $(A + B)$: legalább egy dobunk

d) elemi események $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ száma véges} \\ \bullet \text{ valószínűsége azonos} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{\text{kedvező el. száma}}{\text{összes el. száma}}$$

$$P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \underline{\underline{0,5}}$$

2. dobás fej: $\underset{\smile}{2} \cdot \underset{\smile}{1} \cdot \underset{\smile}{2} = 4$

$$\boxed{P(B) = 1 - P(\overline{B})} = 1 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{8} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$

$$\to P(A) = P(\overbrace{\{\text{csak az 1. fej}\}}^{A_1} \cup \overbrace{\{\text{csak a 2. fej}\}}^{A_2} \cup$$

$$\cup \underbrace{\{\text{csak a 3. fej}\}}_{A_3}) \underset{\text{kizáró}}{=} \underline{P(A_1)} + \underline{P(A_2)} + \underline{P(A_3)}$$

$$= \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{8} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{8} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{8} = \frac{1^1 \cdot 1^2 \cdot \binom{3}{1}}{8}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

e) valószínűségi változó: $X : \Omega \to \mathbb{R}$

pl. X : dobott fejek száma (lehetséges értékei 0, 1, 2, 3)

$$X_2 : \begin{cases} 1 & \text{ha a 2. dobás fej} \\ 0 & \text{— " — " — írás} \end{cases}$$

$\boxed{\text{diszkrét val. változó}}$ (lehetséges értékei megszámlálhatóak)

f) Hat. meg az X val. változó (a dobott fejek száma) várható értékét!

Diszkrét val. változóra:

- X eloszlása

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & \leftarrow x_j \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \leftarrow p_j \end{cases}$$

$$\sum_j p_j = 1$$

diszkrét

$$E(X) = \sum_j x_j \cdot p_j = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{1{,}5}}$$

(2.) Egy dobozban 120 alkatrészből 30 hibás. Visszatevés nélkül kihúzunk 8-at a dobozból. Mi a vszg-e annak, hogy közülük

a) pontosan 3

b) legalább 2 hibás?

Mo: X: kihúzott hibások száma ←

a) $$P(\underbrace{X=3}_{A}) = \frac{\binom{30}{3}\cdot\binom{90}{5}}{\binom{120}{8}} = \underline{\underline{0{,}2124}}$$

$$\left[\binom{120}{8} \text{ sz. gép: } 120 \text{ nCr } 8 \Rightarrow \right]$$

b) $$P(\underbrace{X \geq 2}_{2\cup 3\cup \dots \cup 8}) = 1 - P(\underbrace{X<2}_{0\cup 1}) =$$

kizáró!

$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{90}{8}}{\binom{120}{8}} + \frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{90}{7}}{\binom{120}{8}}\right] = \underline{\underline{0{,}6400}}$$

3. Egy dobozban 120 alkatrészből 30 hibás. Visszatevéssel kihúzunk 8-at a dobozból. Mi a vszg-e annak, hogy közülük

a) pontosan 3

b) legalább 2 hibás?

Mo: X: kihúzott hibásak száma

a) $$P(X=3) = \frac{30\cdot 30\cdot 30\cdot 90\cdot \ldots \cdot 90\cdot \binom{8}{3}}{120\cdot 120\cdot \ldots \cdot 120}$$

$$= \frac{30^3\cdot 90^5\cdot \binom{8}{3}}{120^8} = \underline{\underline{0{,}2076}}$$

b) $$P(X\geq 2) = 1-P(X<2) =$$

0 v 1

$$= 1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right] =$$

$$= 1-\left[\frac{\cancel{30^0}\cdot 90^8\cdot \cancel{\binom{8}{0}}}{120^8} + \frac{30^1\cdot 90^7\cdot \binom{8}{1}}{120^8}\right] =$$

$$= \underline{\underline{0{,}6329}}$$

Megj:

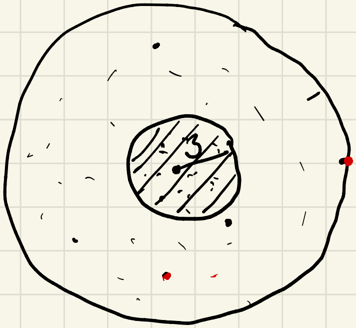
$$P(X=3) = \frac{30^3 \cdot 90^5 \cdot \binom{8}{3}}{120^{3+5}} = \left(\frac{30}{120}\right)^3 \cdot \left(\frac{90}{120}\right)^5 \cdot \binom{8}{3} =$$

$$= 0{,}25^{3} \cdot 0{,}75^{5} \cdot \binom{8}{3}$$

10 cm sugarú,

(4.) Egy céltáblára lövünk. A találat biztos, de helye véletlenszerű.

a)



Ω : nem megszámlálható halmaz

X : tal. helye és kp távolsága

leh. értékei : $[0, 10)$

lehetséges

$\boxed{\text{folytonos val. változó}}$: értékei egy (vagy több) intervallumba esnek

b)

$$P(\underbrace{X < 3}_{r}) = ? = \frac{3^2 \cdot \pi}{10^2 \cdot \pi} = \underline{\underline{0{,}09}}$$

$\Rightarrow$ eszköz ???

eloszlásfv: (diszkrét és folyt.)

$$F(x) = P(\mathbf{X} < x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Megjegyzés: X eloszlásfv-e:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{100} & \text{ha } 0 < x \leq 10 \\ 1 & \text{ha } 10 < x \end{cases}$$

c)

$$P(\mathbf{X} < 7) = F(7) = \frac{7^2}{100} = \underline{\underline{0{,}49}}$$

$$P(\mathbf{X} \geq 5) = 1 - P(\mathbf{X} < 5) = 1 - F(5) =$$

!

$$= 1 - \frac{5^2}{100} = \underline{\underline{0{,}75}}$$

5. Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{25}{x^2} & \text{ha } x > 5 \\ 0 & \text{küл.} \end{cases}$$

← 3!!

a) $P(X < 10) = ?$

b) $P(X \geq 6) = ?$

c) $P(3 < X < 8) = ?$

d) $E(X) = ?$

hf. e) $D(X) = ? = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{\quad - 10^2}$

Mo:

a) $P(X < 10) = F(10) = 1 - \frac{25}{100} = \underline{\underline{0{,}75}}$

b) $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) =$

$= 1 - \left(1 - \frac{25}{6^2}\right) = \underline{\underline{\frac{25}{36}}}$

Megj: $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - P(X < 6) = \underline{\underline{\frac{25}{36}}}$

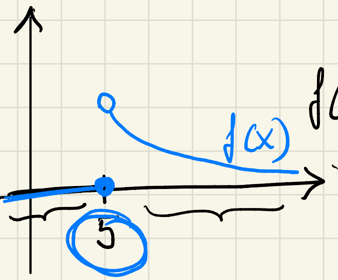
$P(X = 6) = 0$ folyt.

c) $P(3 < X < 8) = F(8) - F(3) =$

$$= \left(1 - \frac{25}{8^2}\right) - 0 = 1 - \frac{25}{64} = \underline{\underline{\frac{39}{64}}}$$

d) $E(X) = ?$ $\Leftarrow$ eloszlásfv. nem elég!!

sűrűségfv: $f(x)$ szükséges:



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{50}{x^3} & \text{ha } \boxed{x > 5} \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$$

folytonos eloszlású val. változó:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx =$$

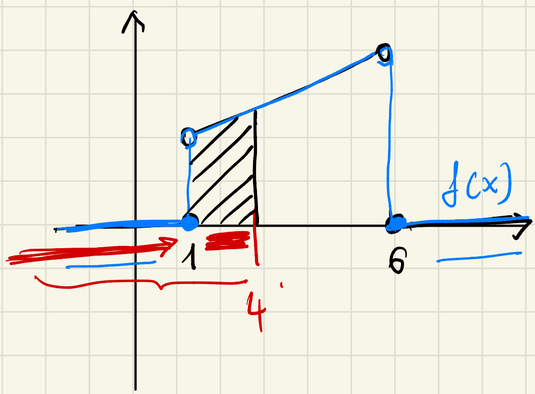
$$= \cancel{\int_{-\infty}^{5} x \cdot 0\,dx} + \int_{5}^{\infty} x \cdot \frac{50}{x^3}\,dx = \int_{5}^{\infty} \frac{50}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_{5}^{b} \frac{50}{x^2}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{50}{x}\right]_{5}^{b} =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-\frac{50}{b}} - \frac{-50}{5} \right) = \underline{\underline{10}}$$

6\. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{35} & \text{ha } \boxed{1 < x < 6} \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$$



a) $P(X < 4) = ?$

b) $P(2 < X < 7) = ?$

vf. c) $E(X) = ?$

vf. d) $D(X) = ?$

<u>Mo:</u> a) $P(X < 4) = \displaystyle\int_{-\infty}^{4} f(x)\,dx = \int_{1}^{4} \frac{2x}{35}\,dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{35}\right]_1^4 = \frac{16}{35} - \frac{1}{35} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

b) $P(2 < X < 7) = \displaystyle\int_{2}^{7} f(x)\,dx = \int_{2}^{6} \frac{2x}{35}\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{35}\right]_2^6 = \frac{36}{35} - \frac{4}{35} = \underline{\underline{\frac{32}{35}}}$$

(7.) Egy pékségben minden ötödik vásárló vesz kakaós csigát. Mi a vsz-e annak, hogy az első hat vásárlóból

a) pontosan kettő vesz kakaós csigát?

b) a várható értéknél többen vesznek kakaós csigát?

Mo: X : $\underbrace{\text{kakaós csigát vásárlók}}_{A}$ száma (binom. eo.)

$$n=6\,;\quad p=P(A)=0{,}2$$

a) $P(X=2) = 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot \binom{6}{2} =$

$$= 0{,}2^{2}\cdot 0{,}8^{4}\cdot\binom{6}{2} = \ldots\ldots$$

b) $P(X>E(X)) = P(\underset{2\,\cup\,3\ldots\cup\,6}{X>1{,}2}) = 1-P(\underset{0,\,1}{X\le 1{,}2})$

binomiális

$$\boxed{E(X)=n\cdot p} = 6\cdot 0{,}2 = 1{,}2$$

$$= 1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\cancel{0{,}2^0} \cdot 0{,}8^6 \cdot \cancel{\binom{6}{0}} + 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^5 \cdot \binom{6}{1} \right] =$$

$$= \underline{\underline{0{,}3446}}$$

rs1. szerhu /~ szalayk /

X : Poisson-eo, $\lambda > 0$:

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\boxed{E(X) = \lambda \quad ; \quad D(X) = \sqrt{\lambda}}$$

Pl. X Poisson-eo-t követ, $\lambda = 1{,}5$ paraméterrel,

$$P(X = \underset{k}{\underset{\shortparallel}{2}}) = \frac{1{,}5^2}{2!} \cdot e^{-1{,}5} = \underline{\underline{0{,}251}}$$

8. Egy pékség mazsolás kalácsában a mazsolák száma Poisson-eloszlást követ, 50 dkg-ban átlagosan 12,6 mazsolával. Mi a vsg-e annak, hogy a mazsolák száma

a) 50 dkg-ban pontosan 10?

b) 25 dkg-ban pontosan 4?

c) 10 dkg-ban 3-nál kevesebb?

d) 10 dkg-ban a várható értéknél több?

Mo: a) X: mazsolák száma (50 dkg) (Poisson)

$$\boxed{\lambda = E(X) = 12{,}6}$$

$$P(\underset{k}{X = 10}) = \frac{12{,}6^{10}}{10!} e^{-12{,}6} = \underline{\underline{0{,}0937}}$$

b) X: mazsolák száma (25 dkg) (Poisson)

$$\lambda = \frac{12{,}6}{2} = 6{,}3$$

$$P(\underset{k}{X = 4}) = \frac{6{,}3^4}{4!} e^{-6{,}3} = \underline{\underline{0{,}1205}}$$

c) X: mazsolák száma (10 dkg) (Poisson)

$$\lambda = \frac{12{,}6}{5} = 2{,}52 = E(X)$$

$$\underset{0 \vee 1 \vee 2}{P(X<3)} = P(X=\underset{\overset{\|}{k}}{0}) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \left[\frac{2{,}52^0}{0!} + \frac{2{,}52^1}{1!} + \frac{2{,}52^2}{2!} \right] \cdot e^{-2{,}52} = \underline{\underline{0{,}5387}}$$

d) $$P(X > \underset{\overset{\|}{2{,}52}}{E(X)}) = \underset{3 \vee 4 \vee \ldots\ldots}{P(X > 2{,}52)} =$$

$$= 1 - \underset{0,1,2}{P(X \leq 2{,}52)} = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \right] = \overset{c)}{\ldots} = 1 - 0{,}5387 =$$

$$= \underline{\underline{0{,}4613}}$$