Matematika 3 konzultáció

(e-learning)

2. rész

2023. 11. 10.

X exp. eo., $\lambda > 0$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda} = D(X)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$$

9. Egy fénycső élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó, 15 000 óra várható élettartammal. Mi a val.-e annak, hogy egy ilyen fénycső élettartama

a) kevesebb, mint 10 000 óra?

b) legalább a várható érték?

c) legalább még 25 000 óra, feltéve, hogy már 10000 órája hiba nélkül működik?

d) a várható értéktől kevesebb, mint 2-szer szórással tér el?

Mo: X: fénycső élettartama (exp. eo.)

$$\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{15\,000}$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{15000} \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$$

a) $P(X < 10\,000) = F(10000) =$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{15000}\cdot 10\,000} = 1 - e^{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{0{,}4866}}$$

b) $P(X \geq E(X)) = P(X \overset{!}{\geq} 15000) =$

$$= 1 - P(X < \underline{15000}) = 1 - F(15000) =$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{\underline{15000}}\cdot 15\underline{000}}\right) = e^{-1} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}3679}}$$

c) $P(X \geq \cancel{10\,000 +}\, 25000 \mid \cancel{X \overset{!}{\geq} 10\,000}) =$

$$= P(X \overset{!}{\geq} 25000) = 1 - P(X < 25000) =$$

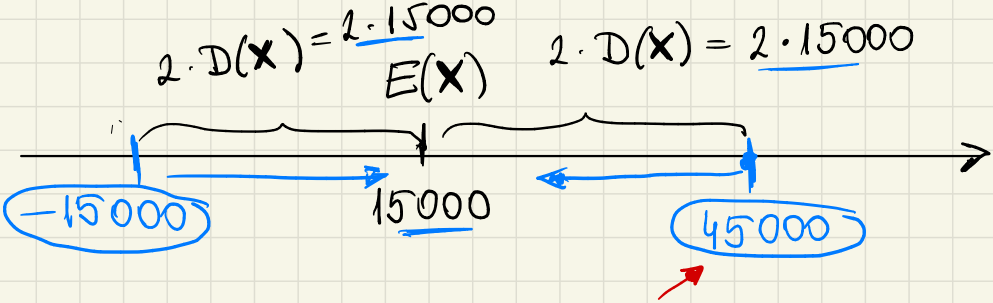
„emlékezet nélküli" „örökifjú"

$$= 1 - F(25000) =$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{15000}\cdot 25000}\right) = e^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}1889}}$$

d)



$$D(X) = \frac{1}{\lambda} = E(X) = 15000$$

$$P(-15000 < X < 45000) =$$

$$= F(45000) - F(-15000) =$$

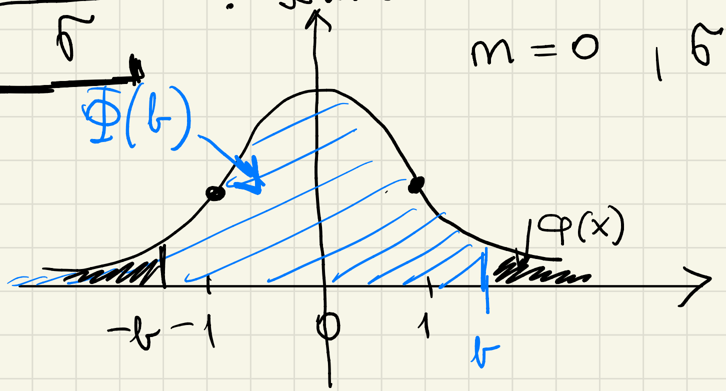
$$= \left(1 - e^{-\frac{1}{15000} 45000}\right) - 0 =$$

$$= 1 - e^{-3} = \underline{\underline{0{,}9502}}$$

X : norm. v.o. , $\underset{E(X)}{m} \in \mathbb{R}$, $\underset{D(X)}{\sigma} \in \mathbb{R}^+$

(I) $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$: standard norm. v.o.

$m = 0$, $\sigma = 1$



$$P(X^* < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,dx \overset{\text{II.}}{=} \Phi(b)$$

III. table.

$$\boxed{\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)}$$

(10.) Egy X normális eloszlású való-színűségi változó várható értéke 40, szórása 4. Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke

a) 45-nél kisebb?

b) több, mint 37?

c) 32 és 39 közé esik?

Hf. d) a várható értéknél kisebb?

Mo: X: norm. eo. $\longrightarrow$ $m = 40$

$\sigma = 4$

a) $$P(X<45) \overset{\text{I.}}{=} P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{45-40}{4}\right) =$$

$$= P(X^* < 1{,}25) \overset{\text{II.}}{=} \Phi(1{,}25) \overset{\text{III.}}{=} \underline{\underline{0{,}8944}}$$

b) $P(X > 37) = 1 - P(X < 37) =$

!

$\overset{\text{I.}}{=} 1 - P\left(X^* < \underbrace{\frac{37-40}{4}}_{-0{,}75}\right) \overset{\text{II.}}{=} 1 - \Phi(-0{,}75) =$

$= \cancel{1} - \left[\cancel{1} - \Phi(0{,}75)\right] = \Phi(0{,}75) \overset{\text{III.}}{=} \underline{\underline{0{,}7734}}$

c) $P(32 < X < 39) \overset{\text{I.}}{=} P\left(\underbrace{\frac{32-40}{4}}_{-2} < X^* < \underbrace{\frac{39-40}{4}}_{-0{,}25}\right) =$

$\overset{\text{II.}}{=} \Phi(-0{,}25) - \Phi(-2) =$

$= \left[1 - \Phi(0{,}25)\right] - \left[1 - \Phi(2)\right] =$

$= \Phi(2) - \Phi(0{,}25) \overset{\text{III.}}{=} 0{,}9772 - 0{,}5987 =$

$= \ldots\ldots$

hf. d) 0,5

(11) Az X normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 6, szórása 3.

a) $0{,}95 = P(X < b)$ $\quad b = ?$

b) $0{,}05 = P(X < b)$ $\quad b = ?$

c) $0{,}98 = P(X > a)$ $\quad a = ?$

d) $0{,}95 = P(m - c < X < m + c)$ $\quad c = ?$

Mo: X: norm. eo. $\rightarrow$ $m = 6$, $\sigma = 3$

a) $\underline{0{,}95} = P(X < b) \overset{\text{I.}}{=} P\left(X^* < \frac{b-6}{3}\right) \overset{\text{II.}}{=}$

$$= \underline{\Phi\left(\frac{b-6}{3}\right)}$$

$$0{,}95 = \Phi\left(\frac{b-6}{3}\right)$$

$$1{,}645 = \frac{b-6}{3} \Rightarrow \underline{\underline{b}} = 6 + 3 \cdot 1{,}645 = \underline{\underline{10{,}935}}$$

$(-\infty; 10{,}935)$

(12.) Egy termék jellemző mérete normális eloszlást követ, 100 mm várható értékkel és 1,8 mm szórással. Mi a valószínűsége annak, hogy a termék jellemző mérete

a) legalább 101 mm?

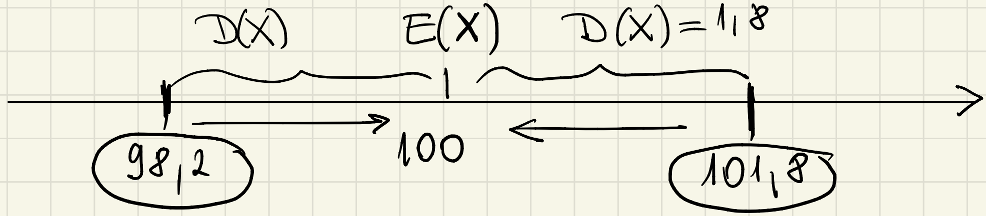
b) a várható értéktől a szórásnál kevesebbel tér el?

Mo: X : termék jellemző mérete (norm.)

$$m = 100$$
$$\sigma = 1{,}8$$

a) $P(X < 101) =$ ld. 10/a

b)



$$P(98{,}2 < X < 101{,}8) \overset{\text{I.}}{=}$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{98{,}2-100}{1{,}8}}_{-1} < X^* < \underbrace{\frac{101{,}8-100}{1{,}8}}_{1}\right) =$$

$$\overset{\text{II.}}{=} \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 \overset{\text{III}}{=} 2\cdot 0{,}8413 - 1 = \underline{\underline{0{,}6826}}$$

[Megj:

2x szórásnál kisebb elt: $2\Phi(2)-1 =$

$$= 2\cdot 0{,}9772 - 1 = \underline{\underline{0{,}9544}}$$

3x —"— $2\cdot\Phi(3)-1 = \ldots = \underline{\underline{0{,}9974}}$]

13. Adott $n=16$ normális eloszlású fgtl. valószínűségi változó, melyek várható értéke rendre 24,8 szórása rendre 1,6. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változók

a) összege kisebb, mint 420?

b) átlaga nagyobb, mint 24?

Mo:

$$\left\{ X_j \quad j=1,2,\dots 16 \right\} : \begin{cases} \text{norm. eo.} \\ \text{fgtl.} \\ \text{azonos v. é: } m=24,8 \\ \text{azonos sz: } \sigma=1,6 \end{cases}$$

$$\boxed{n=16}$$

(A)

a) $\Rightarrow$ $X_1+X_2+\dots+X_{16}$: norm. eo.

v. érték: $\boxed{n \cdot m} = 16 \cdot 24,8 = 396,8$

szórás: $\boxed{\sigma \cdot \sqrt{n}} = 1,6 \cdot \sqrt{16} = 6,4$

$$P(X_1+X_2+\dots+X_{16}<420)\overset{\text{I.}}{=}$$

$$=P\left(X^*<\underbrace{\frac{420-396{,}8}{6{,}4}}_{3{,}63}\right)\overset{\text{II.}}{=}$$

$$=\Phi(3{,}63)\overset{\text{III.}}{=}\underline{\underline{0{,}9999}}$$

b) (*) $\Rightarrow$ $\frac{X_1+X_2+\dots+X_{16}}{16}$: $\underline{\text{norm. eo.}}$

várható érték : $m=\underline{24{,}8}$

szórás : $\sigma/\sqrt{n}=\frac{1{,}6}{\sqrt{16}}=\underline{0{,}4}$

$$P\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_{16}}{16}>24\right)\overset{\text{I.}}{=}$$

!

$$1-P\left(X^*<\underbrace{\frac{24-24{,}8}{0{,}4}}_{-2}\right)\overset{\text{II.}}{=}$$

$$=1-\Phi(-2)=1-[1-\Phi(2)]=\Phi(2)\overset{\text{III.}}{=}$$

$$=\underline{\underline{0{,}9772}}$$

14. Adott $\boxed{n=100}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változó, melyek várható értéke rendre 25, szórása rendre 2. Mi a valószínűsége annak, hogy

a) összegük 2450 és 2550 közé esik?

b) átlaguk 24,5 és 24,8 közé esik?

Mo:

X : összeg (??)

$$\left\{ X_j : \quad (j=1,2,\dots,100) \quad \boxed{n=100} \geq 30 \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \text{azonos eo.} \\ \text{fgtl.} \\ \text{azonos v.é.}: m = 25 \\ \text{azonos sz}: \sigma = 2 \end{array} \right\}$$

CHT

a) $\Rightarrow \quad X_1 + X_2 + \dots + X_{100} \approx$ normális eo.

várható ért: $n \cdot m = 2500$

szórás: $\sigma \cdot \sqrt{n} = 20$

$$P(2450 < X_1 + X_2 + \dots + X_{100} < 2550) \overset{\mathrm{I.}}{=}$$

$$= P\Big(\underbrace{\frac{2450 - 2500}{20}}_{-2{,}5} < X^* < \underbrace{\frac{2550 - 2500}{20}}_{2{,}5}\Big) \approx$$

$$\overset{\mathrm{II.}}{\approx} \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(2{,}5) - [1 - \Phi(2{,}5)] =$$

$$= 2\Phi(2{,}5) - 1 \overset{\mathrm{III.}}{=} 2 \cdot 0{,}9938 - 1 = \underline{\underline{0{,}9876}}$$

$$\boxed{\approx 0{,}9876}$$

b) $(*) \overset{\mathrm{CHT}}{\Longrightarrow} \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100} \approx$ norm. eo.

várható érték: $m = 25$

szórás: $\sigma/\sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{100}} = 0{,}2$

$$P\Big(24{,}5 < \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100} < 24{,}8\Big) \overset{\mathrm{I.}}{=}$$

$$= P\Big(\underbrace{\frac{24{,}5 - 25}{0{,}2}}_{-2{,}5} < X^* < \underbrace{\frac{24{,}8 - 25}{0{,}2}}_{-1}\Big) \approx$$

$$\approx \Phi(-1) - \Phi(-2{,}5) = \dots = \Phi(2{,}5) - \Phi(1) =$$

$$= 0,9938 - 0,8413 = \_ \_ \_ \_ \_$$

15. Az X valószínűségi változóra $n = 40$ megfigyelést végeztek. A mintaátlagra 25,1 ; a korrigált tapasztalati szórásra 0,32 adódott. 95%-os szignifikancia-szinten elfogadható-e, hogy a valószínűségi változó várható értéke

a) 25 ?

b) több, mint 25 ?

16. Egy konzerv töltőtömegének vizsgálatára $n = 9$ mérést végeztek. A kapott eredmények (g): $\hat{m}_n = 98{,}6$ $\hat{s}_n = 3{,}6$. (Feltételezzük, hogy az adatok normális eloszlásból származnak.) 95%-os szignifikancia-szinten elfogadható-e, hogy a töltőtömeg várható értéke 100 g? Hogyan változik a döntésünk, ha a szignifikancia-szint 90%?

17. Oldjuk meg a 16. feladatot, ha az adatok $n=100$ mérésből származnak!