Matematika 3. próbavizsga (e-learning)

A feladatsor végén megoldási segédlet található.

1. Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó. Tudjuk, hogy $P(X < a) = 0{,}7734$. $a =$? (1p)

2. Legyenek $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_3 = 3$, és $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 4$. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő $y = a_0 + a_1 x$ elsőfokú regressziós polinomot! (1p)

3. Legyenek $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ és $f_0 = 0$, $f_0' = -1$, $f_1 = 0$, $f_1' = 2$, $f_2 = 2$, $f_2' = 0$, $f_3 = 0$, $f_3' = 2$, $f_3'' = -1$. Legfeljebb hányadfokú az adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinom? (1p)

4. Egy normális eloszlású valószínűségi változó megfigyelésére $n = 25$ mérést végeztünk. A feltételezésünk az, hogy a valószínűségi változó várható értéke nagyobb, mint 100. Hogyan mondjuk ki a null- és az ellenhipotézist? (1p)

5. Az X exponenciália eloszlású valószínűségi változó várható értéke 1000. Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke a várható értéktől kevesebb, mint egy szórással tér el? (2p)

6. Legfeljebb hányadfokú polinomokra pontos az $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ integrál értékét közelítő

   $I(f) = \dfrac{f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)}{4}$ kvadratúra? (2p)

7. Egy útszakaszon a burkolathibák száma Poisson-eloszlást követ, 1 km-en átlagosan 8 burkolathibával. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 200 m-es szakaszon a burkolathibák száma kettőnél több? (2p)

8. Legyen $h > 0$ adott lépésköz, x_0, x_1, x_2 adott alappontok, ahol $x_1 = x_0 + 2h$, $x_2 = x_0 + 3h$, és legyen f egy elég sima függvény az $[x_0, x_2]$ intervallumon. Melyik séma közelíti $f''(x_0)$-t elsőrendben (azaz $O(h)$ pontossággal)? (2p)

9. Adott 200 darab független, azonos eloszlású valószínűségi változó, melyek várható értéke rendre 50, szórása rendre 4. Mekkora lehet annak a valószínűsége, hogy átlaguk 49,9 és 50,2 közé esik? (2p)

10. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{30} & \text{ha } 2 < x < 8 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

   $E(X) =$? (2p)

11. Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix LU-felbontását! (2p)

12. Egy konténerben 50 hibás és 150 hibátlan alkatrész van. Visszatevéssel kihúzunk közülük 8-at. Mi a valószínűsége annak, hogy közülük legfeljebb kettő hibás? (2p)

Matematika 3. próbavizsga (e-learning)

Megoldások:

1. **a=0.75**

   A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékei táblázatban a $\Phi(x)$ függvény értékei között (tehát a táblázat 'belsejében') megkeressük a 0,7734 értékét. A hozzá tartozó sorból és oszlopból leolvassuk az a értékét.

2. **y=2.25++0.65 x**

   $\sum_{j=1}^{4} 1 = 4$, $\sum_{j=1}^{4} x_j = 0$, $\sum_{j=1}^{4} x_j^2 = 20$, $\sum_{j=1}^{4} y_j = 9$, $\sum_{j=1}^{4} x_j y_j = 13$, így az a_0 és a_1 együtthatók meghatározásához a $4a_0 + 0a_1 = 9$ és $0a_0 + 20a_1 = 13$ lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk.

3. **Legfeljebb 8-adfokú**

   Az egyes alapponti értékekhez megadott függvény- és deriváltértékek száma: x_0-hoz 2, x_1-hez 2, x_2-höz 2, x_3-hoz 3. Így az Hermite-interpolációs polinom maximális fokszáma: (2+2+2+3)-1=8.

4. $H_0: E(X) \leq 100$ (A várható érték legfejebb 100.)
   $H_1: E(X) > 100$ (A várható érték nagyobb, mint 100.)

   Vagy:
   $H_0: E(X) = 100$ (A várható érték legfejebb 100.)
   $H_1: E(X) > 100$ (A várható érték nagyobb, mint 100.)
   Mindkét megoldás helyes.

5. **0.8647**

   A kérdés az, hogy a valószínűségi változó értéke milyen valószínűséggel esik $E(X) - D(X)$ és $E(X)+D(X)$ közé. $E(X) = 1000$ adott, exponenciális eloszlás esetén pedig $E(X) = \frac{1}{\lambda} = D(X)$, így $\lambda = \frac{1}{1000} = 0{,}001$, az eloszlásfüggvény:

   $$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}001x} & \text{ha } 0 < x \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

   .

   $P(1000-1000 < X < 1000+1000) = P(0 < X < 2000) = F(2000) - F(0) = (1 - e^{-0{,}001\cdot 2000}) - 0 = 1 - e^{-2} = 0{,}8647$

6. **Legfeljebb elsőfokúra**

   Az $f(x) = x^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ alappolinomok esetén $k = 0$-tól kezdve számoljuk ki az integrál és a kvadratúra értékét, egészen addig, míg a két érték el nem tér:

   $k = 0$ esetén $f(x) = x^0 = 1$. Ekkor $\displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}x = 1$, $I(f) = \dfrac{1 + 2\cdot 1 + 1}{4} = 1$, tehát megegyeznek.

   $k = 1$ esetén $f(x) = x^1 = x$. Ekkor $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $I(f) = \dfrac{0 + 2\cdot\frac{1}{2} + 1}{4} = \dfrac{1}{2}$, tehát megegyeznek.

   $k = 2$ esetén $f(x) = x^2$. Ekkor $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, $I(f) = \dfrac{0^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}{4} = \dfrac{3}{8}$, NEM egyeznek meg így a kvadratúra másodfokú polinomokra már nem pontos.

7. **0.2166**

A Poisson-eloszlás a 200 m-es résztartományon is megmarad, de a várható érték (és a vele megegyező λ paraméter) tartomány-arányos. Így az X: burkolathibák száma (200 m-en) valószínűségi változó Poisson-eloszlású, $\lambda = \frac{8}{5} = 1{,}6$ paraméterrel.
$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \Big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\Big) = 1 - (\frac{1{,}6^0}{0!} + \frac{1{,}6^1}{1!} +$
$+ \frac{1{,}6^2}{2!}) \cdot e^{-1{,}6} = 0{,}2166$

8. $\dfrac{f(x_0) - 3f(x_1) + 2f(x_2)}{3h^2}$

Írjuk fel az $f(x)$ függvény x_0 pont körüli másodfokú Taylor-sorát (itt másodfokú Taylor-polinom+hibatag, majd ebbe helyettesítva az x_1 és x_2 alappontokat, a kapott kétismeretlenes ($f'(x_0)$, $f''(x_0)$) lineáris egyenletrendszerből fejezzük ki $f''(x_0)$-t.
1. Taylor-sorfejtés: $f(x) = f'(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dfrac{f'''(\eta)}{3!}(x - x_0)^3$
2. x_1 és x_2 helyettesítése a Taylor-sorba.
$x = x_1$ esetén: $f(x_1) = f'(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \dfrac{f'''(\eta_1)}{3!}(x_1 - x_0)^3$
Mivel $x_1 - x_0 = (x_0 + 2h) - x_0 = 2h$, így az egyenlet a következő alakba írható:
$f(x_1) = f'(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}2h + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2 + \dfrac{f'''(\eta_1)}{3!}(2h)^3$
Azaz:
(I) $f(x_1) = f'(x_0) + 2hf'(x_0) + 4h^2\dfrac{f''(x_0)}{2} + O(h^3)$
$x = x_2$ esetén: $f(x_2) = f'(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x_2 - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x_2 - x_0)^2 + \dfrac{f'''(\eta_2)}{3!}(x_2 - x_0)^3$
Mivel $x_2 - x_0 = (x_0 + 3h) - x_0 = 3h$, így az egyenlet a következő alakba írható:
$f(x_2) = f'(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}3h + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(3h)^2 + \dfrac{f'''(\eta_2)}{3!}(3h)^3$
Azaz:
(II) $f(x_2) = f'(x_0) + 3hf'(x_0) + 9h^2\dfrac{f''(x_0)}{2} + O(h^3)$
3. Fejezzük ki az (I),(II) egyenletrendszerből $f''(x)$-et. Ehhez vonjuk ki az (I) egyenlet 3-szorosából a (II) egyenletet, majd rendezzük a kapott egyenletet. ($\frac{O(h^3)}{3h^2}$-ből kapjuk a közelítés hibáját: $O(h)$)
(*Megjegyzés: Amennyiben a helyes megoldást megadott differenciasémák közül kell kiválasztani, nem feltétlenül szükséges végigszámolni a teljes megoldást.*)

9. Kb. **0.3979**

A központi határeloszlás tétele alapján a valószínűségi változók átlaga normális eloszlással közelíthető. A valószínűségi változók átlagának várható értéke 50, szórása $\dfrac{4}{\sqrt{200}} = 0{,}2828$. A normális eloszlás szerint számolunk, ügyelve arra, hogy az átlagot transzformáljuk, ezért az átlag várható értékét vonjuk ki és az átlag szórásával osztunk.
$P(49{,}9 < \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{200}}{200} < 50{,}2) = P\Big(\dfrac{49{,}9 - 50}{0{,}2828} < X^* < \dfrac{50{,}2 - 50}{0{,}2828}\Big) =$
$= P(-0{,}35 < X^* < 0{,}71) \approx \Phi(0{,}71) - \Phi(-0{,}35) = \Phi(0{,}71) - \Big(1 - \Phi(0{,}35)\Big) = 0{,}7611 - 0 - 0{,}6368 =$
$0{,}3979$

10. **5.6**

A folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értékének definíciója alapján számolunk.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_{2}^{8} x \cdot \frac{x}{30}\mathrm{d}x = \ldots = 5{,}6$$

11. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A Gauss-elimináció LU-felbontáshoz megengedett lépéseit hajtjuk végre az A mátrixon.

12. **0.6785**

Visszatevéses mintavétel, az X valószínűségi változó a kihúzott hibás alkatrészek száma.

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{50^0 \cdot 150^8 \cdot \binom{8}{0}}{200^8} + \frac{50^1 \cdot 150^7 \cdot \binom{8}{1}}{200^8} +$$

$$+ \frac{50^2 \cdot 150^6 \cdot \binom{8}{2}}{200^8} = 0{,}6785$$