Matematika 0.

1–4. témakör

2024.09.06.

1. témakör

Hatványozás azonosságai, negatív egész kitevő, műveletek polinomokkal, polinomok szorzattá alakítása.

Algebrai törtek, műveletek algebrai törtekkel (egyszerűsítés, szorzás, osztás, összevonás)

Algebrai kifejezések

- algebrai kifejezések

x^4 , $3a^2b$, $\frac{1}{4}x^2 \cdot a$

- egynemű algebrai kifejezések

a^2b $\quad$ $4a^2b$

a^2b^2 $\quad$ a^2b

- algebrai törtek

$\frac{x^2}{a}$, $\frac{x^3ya}{b}$

Hatványozás azonosságai

- $a^n a^m = a^{n+m}$

$$2^3 \cdot 2^7 = 2^{10} \qquad x^4 \cdot x^9 = x^{13}$$

- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\frac{5^7}{5^3} = 5^4 \qquad \frac{y^{11}}{y^4} = y^7$$

- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$(4^3)^2 = 4^6 \qquad (x^4)^5 = x^{20}$$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$3^{-8} = \frac{1}{3^8} \qquad x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$(3 \cdot x)^5 = 3^5 \cdot x^5 \qquad (5 \cdot y^3)^2 = 5^2 \cdot (y^3)^2 = 5^2 \cdot y^6$$

$$(x^2 \cdot y)^3 = x^6 \cdot y^3 \qquad (2 \cdot x^3 \cdot y^2)^4 = 2^4 \cdot x^{12} \cdot y^8$$

Hatványozás azonosságai

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{2}{x}\right)^3 = \frac{2^3}{x^3}$$

$$\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^4 = \frac{x^8}{y^{12}}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-3} = \frac{x^{-6}}{y^{-3}} = \frac{\frac{1}{x^6}}{\frac{1}{y^3}}$$

$$\left(\frac{5xy^2}{4z^3}\right)^2 = \frac{5^2 \cdot x^2 \cdot y^4}{4^2 \cdot z^6}$$

Egyszerű azonosságok

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(x+3)^2 = x^2 + \underbrace{2\cdot 3x} + 9 = x^2 + 6x + 9$$

$$(2x+y)^2 = 4x^2 + 2\cdot 2x\cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(5-a)^2 = 25 - 10a + a^2$$

$$(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(5-2a)(5+2a) = 25 - 4a^2 = 5^2 - (2a)^2$$

$$(\underbrace{2x}_{a}+\underbrace{4y}_{b})(2x-4y) = 4x^2 - 16y^2 = (2x)^2 - (4y^2)$$

Teljes négyzetté alakítás:

Példák: (Hozzuk $(a+b)^2$ alakra.)

1) $x^2 + 8x + 16 =$

2) $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$ $\quad (x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 - 6^2)$ ✓

3) $4x^2 + 16x + 16 = (2x+4)^2$

Példák: (Hozzuk $(a+b)^2+c$ alakra.)

1) $x^2+2x+4 =$

2) $x^2-10x+29 = (x-5)^2+4$

$x^2-10x+25$

3) $x^2-6x+1 =$

Szorzattá alakítás:

1. tényezők kiemelésével

$$3x + 3y = 3 \cdot (x + y)$$

$$x^2 + x \cdot 1 = x \cdot (x + 1)$$

$$4x^2y^1 - 8x^2y^3 = 4 \cdot x^2 \cdot y \cdot (1 - 2y^2)$$

Szorzattá alakítás:

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

II. azonosságok alkalmazásával

$$x^2-\overset{3^2}{9} = (x+3)(x-3)$$

$$a^2-\underbrace{16b^4}_{(4\cdot b^2)^2} = (a+4\cdot b^2)\cdot(a-4b^2)$$

$$25-9x^2 =$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$x^2+12x+36 = (x+6)^2$$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$9x^2-\overset{9\cdot 2}{18}x+9 = 9\cdot(\underbrace{x^2-2x+1}) = 9\cdot(x-1)^2$$

$$(3x-3)^2$$

Szorzattá alakítás:

ax^2+bx+c

két valós gyök

$a(x-x_1)(x-x_2)$

III. gyökök segítségével

$$x^2-5x+6 = (x-2)\cdot(x-3)$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x_{12}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot 6}}{2} \quad \begin{matrix} 3 = x_1 \\ 2 = x_2 \end{matrix}$$

$$x^2+9x+20 =$$

$$3x^2+15x+18 =$$

1. feladat Végezzük el az alábbi műveletet a tört kifejezések összevonásával!

a) $\frac{1}{9x+8y} - \frac{5}{9x-8y} =$

$= \frac{1}{9x+8y} \cdot \frac{9x-8y}{9x-8y} - \frac{5}{9x-8y} \cdot \frac{9x+8y}{9x+8y}$

$= \frac{9x-8y}{(\underbrace{9x}_{a}+\underbrace{8y}_{b}) \cdot (\underbrace{9x}_{a}-\underbrace{8y}_{b})} - \frac{5\cdot(9x+8y)}{(9x-8y)(9x+8y)} =$

$= \frac{(9x-8y)-(45x+40y)}{81x^2-64y^2} = \frac{9x-8y-45x-40y}{81x^2-64y^2}$

$= \frac{-36x-48y}{81x^2-64y^2}$

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

b) $$\frac{7x-3}{x+5} - \frac{3x+5}{x-5} =$$

$$= \frac{7x-3}{x+5} \cdot \frac{x-5}{x-5} - \frac{3x+5}{x-5} \cdot \frac{x+5}{x+5} =$$

$$= \frac{(7x-3)(x-5)}{(x+5)(x-5)} - \frac{(3x+5)(x+5)}{(x+5)(x-5)} =$$

$$= \frac{[7x^2 - 35x - 3x + 15] - [3x^2 + \underbrace{15x + 5x} + 25]}{x^2 - 25}$$

$$= \frac{7x^2 - 38x + 15 - 3x^2 - 20x - 25}{x^2 - 25} =$$

$$= \frac{4x^2 - 58x - 10}{x^2 - 25}$$

2. feladat Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést!

a) $\dfrac{x^2+4x}{x^2+8x+16} = \dfrac{x\cdot\cancel{(x+4)}}{(x+4)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x}{x+4}$

$\cancel{x \neq \pm 6}$

b) $$\frac{x^2 - 15x + 54}{x^2 - 36} = \frac{\cancel{(x-6)} \cdot (x-9)}{\cancel{(x-6)}(x+6)} = \frac{x-9}{x+6}$$

$(a^2 - b^2)$

$$x^2 - 15x + 54 = 0$$

$$x_{12} = \ldots = \left\langle \begin{matrix} 6 \\ 9 \end{matrix} \right.$$

$$x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

2. témakör

Egyismeretlenes egyenletek.

Elsőfokú egyenletek, mérlegelv.

Másodfokú egyenletek, másodfokúra vezető magasabb fokú egyenletek, törtes egyenletek.

Egyenletek megoldása:

Átalakítások az egyenletek megoldása során:

- ekvivalens átalakítások
  - számok, mennyiségek +, – az egy. mindkét old.
  - 〃 〃 $\cdot$, $\div$ ($\neq 0$) 〃
- nem ekvivalens átalakítások

gyökvesztés

- 0-val osztás
- gyökvonás

$$\sqrt{A^2} = \pm A = |A|$$

pl. $\sqrt{9} = \pm 3$

hamis gyök

- 0-val szorzás
- négyzetre emelés

3. feladat Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

a) $-1-7\cdot\left(\frac{x}{6}+2\right)=-5x-8$

$$-1-\frac{7x}{6}-14=-5x-8$$

$$-\frac{7x}{6}-15=-5x-8 \quad /\cdot 6$$

$$-7\cdot x-90=-30x-48 \quad /+30x+90$$

$$23x=42 \quad /:23$$

$$x=\frac{42}{23}$$

b)

$$7 - \frac{4x+434}{6} = 7x-4 \qquad /-7$$

$$-\frac{4x+434}{6} = 7x-11 \qquad /\cdot 6$$

$$-(4x+434) = 42x-66$$

$$-4x-434 = 42x-66$$

$$-368 = 46x$$

$$\boxed{-8 = x}$$

c) $-3-9\left(1-\frac{x}{2}\right)=3-4x$

hj.

$\left(x=\frac{30}{17}\right)$

d) $-3-\frac{9x+144}{2}=9x+6$ Ny. $x=-6$

Másodfokú egyenletek

$$\underset{\neq 0}{a}x^2+bx+c=0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

- megoldóképlet

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x_1$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=x_2$$

- gyökök és együtthatók kapcsolata

$D=b^2-4ac$

- ha $D<0 \Rightarrow$ nincs mo.
- ha $D=0 \Rightarrow$ egy mo.
- ha $D>0 \Rightarrow$ két kül. mo.

- gyöktényezős alak:

$$ax^2+bx+c=0$$

ha két különböző valós gyök van (x_1, x_2)

$$a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$$

[ha $x_1=x_2$

$$a\cdot(x-x_1)^2=0$$
]

Példa: $x^2 - 6x + 5 = 0$

3. témakör

Egyenletrendszerek (első-, és másodfokú)

Kétismeretlenes lineáris egyenlet-rendszerek megoldása:

Általános alak:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + a_2 \cdot y &= c_1 \\ b_1 \cdot x + b_2 \cdot y &= c_2 \end{aligned}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Példa

$$\left.\begin{aligned} &(I) \quad 3x + 2y = 7 \\ &(II) \quad x - 5y = 8 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

x, y ??

$$\boxed{x = 8 + 5y}$$

$$3 \cdot (8 + 5y) + 2y = 7$$

$$24 + \underline{15y + 2y} = 7$$

$$17y + 24 = 7$$

$$17y = -17$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$x = 8 + 5 \cdot (-1) = 3$$

$$\boxed{x = 3}$$

Kétismeretlenes nemlineáris egyenlet-
rendszer megoldása

4. feladat Határozzuk meg a következő egyenletrendszer megoldásait!

(I) $-2x = 22 - 5y$

(II) $xy = 72$

$x = \frac{22-5y}{-2}$

$\boxed{x = \frac{72}{y}}$ $(y \neq 0)$

$$-2 \cdot \left(\frac{72}{y}\right) = 22 - 5y$$

$$\frac{-144}{y} = 22 - 5y \quad / \cdot y$$

$$-144 = 22y - 5y^2$$

$$5y^2 - 22y - 144 = 0$$

$$y_{12} = \frac{22 \pm \sqrt{\overset{58}{22^2 + 4 \cdot 5 \cdot 144}}}{10}$$

$\boxed{8 = y_1}$

$\boxed{-3{,}6 = y_2}$

$x_1 = \frac{72}{8} = 9$

$x_2 = \frac{72}{-3{,}6} = -20$

Mo: $x = 9$ és $y = 8$

vagy

$x = -20$ és $y = -3{,}6$

5. feladat

Egy büfében az italok árát deciliterenként adják meg. Tudjuk, hogy 5 dl almalé és 2 dl barackslé összesen 1770 Ft-ba, 3 dl almalé és 6 dl barackslé pedig 2310 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül egy dl almalé és egy dl barackslé?

Mo:

x: almalé ára / dl

y: barackslé ára / dl

$$\left.\begin{aligned} 5\cdot x + 2\cdot y &= 1770 \\ 3\cdot x + 6\cdot y &= 2310 \end{aligned}\right\} \quad :3 \quad \xRightarrow{\text{hf.}} \quad \begin{pmatrix} x = 250 \\ y = 260 \end{pmatrix}$$

$$x + 2y = 770$$

6. feladat Egy (a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolt) lineáris függvény grafikonja átmegy a $(-4;6)$ és $(1;-2)$ pontokon. Adja meg a lineáris függvény hozzárendelési szabályát $y = mx + b$ alakban!

$x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2$

Mo:

$$y = m \cdot x + b \qquad m = ?\,,\ b = ?$$

$$P_1(\underset{x}{-4};\underset{y}{6}): \quad 6 = m \cdot (-4) + b \qquad 6 = -4m + b$$

$$P_2(\underset{x}{1};\underset{y}{-2}): \quad -2 = m \cdot 1 + b \qquad -2 = m + b$$

Ny. $m = -1{,}6$

$b = -0{,}4$

4. témakör

Egyenlőtlenségek (elsőfokú, másod-fokú, törtes), egyenlőtlenség rendszerek

Törtes egyenlőtlenségek:

$b \neq 0$

$$\frac{a}{b} > 0 \qquad \frac{+}{+} \text{ vagy } \frac{-}{-}$$

$b \neq 0$

$$\frac{a}{b} < 0 \qquad \frac{+}{-} \text{ vagy } \frac{-}{+}$$

$+$

$$\boxed{\frac{3}{7} \quad \frac{-3}{-7}} \qquad \boxed{\frac{-3}{7} \quad \frac{3}{-7}}$$

$$\frac{-}{-} \text{ v. } \frac{+}{+} \qquad \frac{-}{+} \qquad \frac{+}{-}$$

7. feladat Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán és a választ adjuk meg intervallumos alakban!

$$-\frac{2}{7x+1} \ge 0$$

$$\frac{-2}{7x+1} \Longrightarrow \frac{-2}{7x+1} \ge 0 \qquad \cancel{\frac{+}{+}} \text{ v. } \frac{-}{-} \checkmark$$

$$7x+1<0$$

$$7x<-1$$

$$x<-\frac{1}{7} \qquad \left]-\infty; -\frac{1}{7}\right[$$

8. feladat Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán és a választ adjuk meg intervallumos alakban!

$$\frac{7}{-8x+5} \leq 0$$

$\frac{+}{-}$ v. $\cancel{\frac{-}{+}}$

$$-8x+5 < 0$$!

ötlet: $5 < 8x$

$\frac{5}{8} < x$

$$-8x < -5 \quad /:-8$$

$$x > \frac{-5}{-8} \qquad x > \frac{5}{8}$$

$]\frac{5}{8}; \infty[$

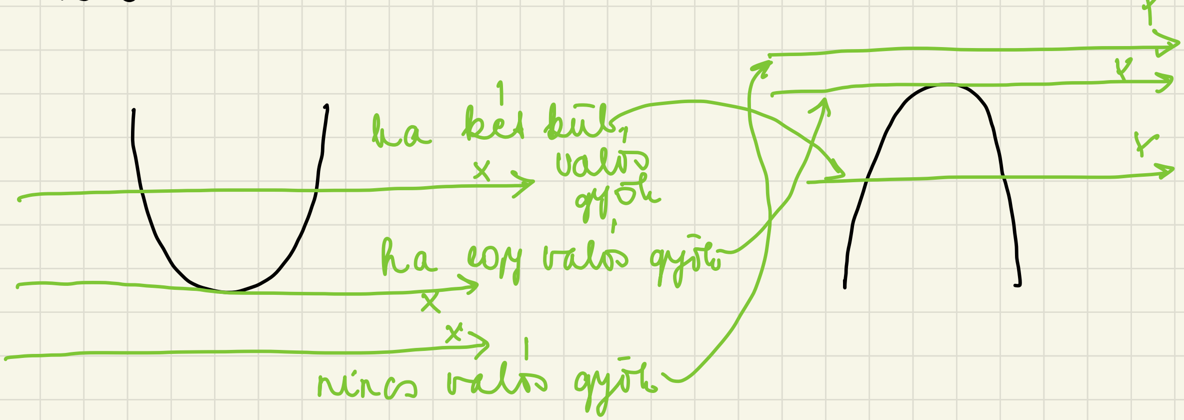
Másodfokú egyenlőtlenségek:

$$ax^2+bx+c \geq 0$$

$$ax^2+bx+c \leq 0$$

Az $f(x) = \boxed{a}x^2+bx+c$ függvény grafikonja

ha $a>0$ ha $a<0$

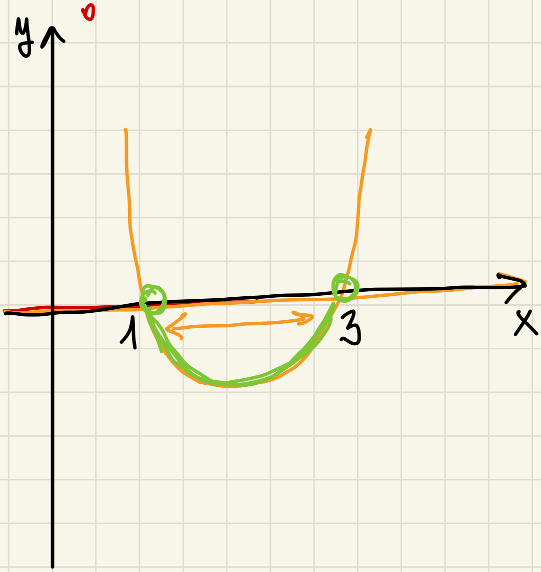


Példa:

$$\underbrace{x^2-4x+3}<0$$

$$1\cdot x^2-4x+3=0$$

$$x_{12}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot3}^{\,2}}{2} \begin{cases} 3=x_1 \\ 1=x_2 \end{cases}$$



$]1, 3[$

9. feladat

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát.

$\frac{}{0}$, $\sqrt{\ }$, $\log(\ )$
$\neq 0$, ≥ 0 , > 0

a) $f(x) = \dfrac{1}{5x-2}$

$5x - 2 \neq 0$

$5x \neq 2$

$x \neq \frac{2}{5}$ $\quad D_f: \left]-\infty, \frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{2}{5}, \infty\right[$

b) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

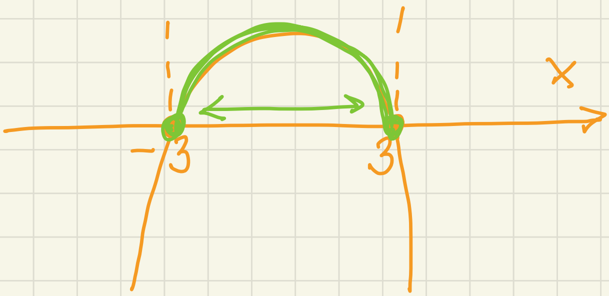
$9 - x^2 \geq 0$

$9 - x^2 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$f(x) = 9 - x^2$



$D_f : [-3; 3]$

c) $f(x) = \lg(x^2 - 3x + 4)$

$x^2 - 3x + 4 > 0$

$x^2 - 3x + 4 = 0 \qquad x_{12} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4}}{2}$ ↯

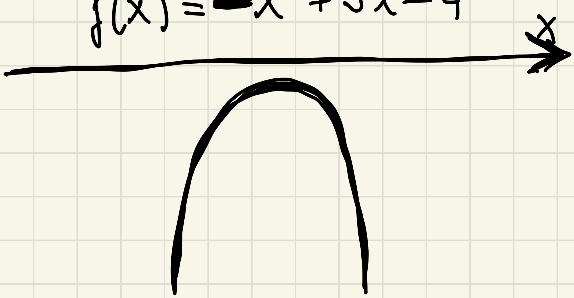
$f(x) = 1 \cdot x^2 - 3x + 4$

$D_f : \mathbb{R} :]-\infty, \infty[$

Vegyi: $\lg(-x^2 + 3x - 4)$ $\qquad -x^2 + 3x - 4 > 0$ $(\geq)$

nincs mo!

$f(x) = -x^2 + 3x - 4$



$D_f : \emptyset$

10. feladat Adja meg az alábbi képlettel megadott függvény legbővebb értelmezési tartományát intervallumos alakban!

a) $f(x) = \log_3 (\underbrace{-3x+5})$

$$-3x+5 > 0$$

$$5 > 3x$$

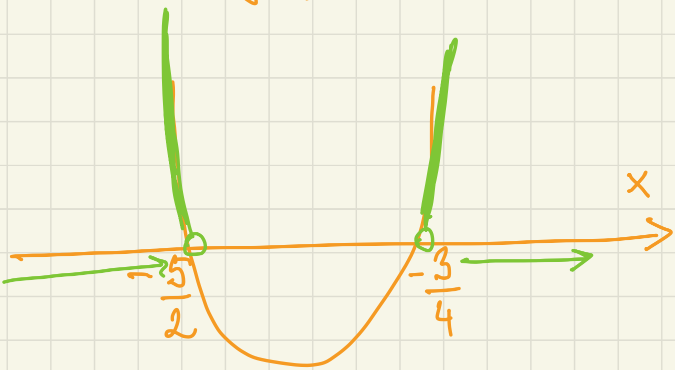
$$\frac{5}{3} > x$$

$D_f: \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[$

b) $f(x) = \log_7(8x^2+26x+15)$

$$8x^2+26x+15 > 0$$

$$\underbrace{8x^2+26x+15}_{f(x)} = 0 \qquad x_{1,2} \begin{cases} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$



$$D_f : \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{4}, \infty\right[$$

c) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x - 2}$

Ny.

$]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [2, \infty[$

$3x^2 - 5x - 2 \geq 0$

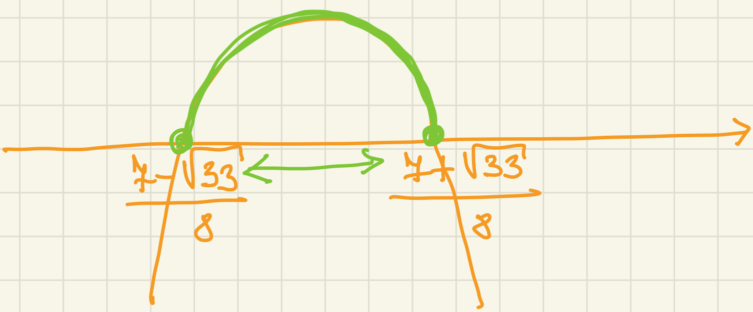
d) $f(x) = \sqrt{-4x^2+7x-1}$

$-4x^2+7x-1 \geq 0$

$-4x^2+7x-1 = 0$

$x_1 = \dfrac{-\sqrt{33}+7}{8}$

$x_2 = \dfrac{\sqrt{33}+7}{8}$



$D_f : \left[\dfrac{7-\sqrt{33}}{8} ; \dfrac{7+\sqrt{33}}{8}\right]$