Interpoláció

---

1. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot!
   (a) $x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$, és $f_0 = -4,\ f_1 = 2,\ f_2 = 8,\ f_3 = 24$
   (b) $x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$, és $f_0 = -1,\ f_1 = 3,\ f_2 = 2,\ f_3 = -9$
   (c) $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 6$, és $f_1 = -2,\ f_2 = 0,\ f_3 = 4,\ f_4 = 10$

2. Adott az $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ függvény. Adottak az $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1),\ f_2 = f(x_2),\ f_3 = f(x_3)$ értékek.
   (a) Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot!
   (b) Közelítsük $f(1{,}5)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével! (Mekkora a közelítés hibája?)

3. Adott az $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ függvény. Adottak az $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1),\ f_2 = f(x_2),\ f_3 = f(x_3)$ értékek.
   (a) Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot!
   (b) Közelítsük $f(1{,}5)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével! (Mekkora a közelítés hibája?)

4. Adott az $f(x) = sin(\dfrac{\pi}{8}x)$ függvény. Adottak az $x_0 = -4,\ x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2, x_4 = 4$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1),\ f_2 = f(x_2),\ f_3 = f(x_3)$, $f_4 = f(x_4)$ értékek.
   (a) Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot!
   (b) Közelítsük $f(1)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével! (Mekkora a közelítés hibája?)

5. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot!
   (a) $x_0 := 0, x_1 := 0,5, f_0 := 2, f_1 := -1, f_0' := -1, f_1' := 2.$
   (b) $x_0 := 1,\ x_1 := 1{,}5,\ f_0 := 0,\ f_1 := 0{,}8109,\ f_0' := 2,\ f_1' := \dfrac{4}{3}.$
   (c) $x_0 := 0,\ x_1 := 0{,}5,\ f_0 := 1,\ f_1 := 1{,}284,\ f_0' := 0,\ f_1' := 1{,}284.$

6. Adott az $f(x) = ln(x^2)$ függvény. Adottak az $x_0 = 0,5,\ x_1 = 1$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1),\ f_0' = f'(x_0),\ f_1' = f'(x_1)$ értékek.
   (a) Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot!
   (b) Közelítsük $f(0,72)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével! (Mekkora a közelítés hibája?)

7. Adott az $f(x) = e^{2x}$ függvény. Adottak az $x_0 = 0$ and $x_1 = 0{,}25$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1),\ f_0' = f'(x_0),\ f_1' = f'(x_1)$ értékek.
   (a) Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot!
   (b) Becsüljük $f(0{,}2)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével! (Mekkora a közelítés hibája?)

Interpoláció

---

8. Adott az $f(x) = cos(\pi x)$ függvény. Adottak az $x_0 = -0{,}5$ and $x_1 = 0$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $f'_0 = f'(x_0)$, $f'_1 = f'(x_1)$ értékek.
   (a) Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot!
   (b) Becsüljük $f(-0{,}2)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével! (Mekkora a közelítés hibája?)

9.* Adott az $f(x) = ln(2x-1)$ függvény. Adottak az $x_0 = 1$, $x_1 = 1,5$, and $x_2 = 2$, $x_3 = 2{,}5$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_3 = f(x_3)$, $f'_0 = f'(x_0)$, $f'_3 = f'(x_3)$ értékek. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő harmadfokú spline függvényt (az $f(x)$ függvény közelítésére)!

Eredmények: (*Az eredményeket nem (feltétlenül) a legegyszerűbb alakban adtam meg, hanem abban az alakban, amelyben a számítások részeredményei is ellenőrizhetőek.)*

1. (a) $L_3(x) = -4 + 3(x+1) + (x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)(x-2)$ $(= x^3 - x^2 + 2x)$
   (b) $L_3(x) = -1 + 2(x+1) - (x+1)(x-1) - (x+1)(x-1)(x-2)$ $(= -x^3 + x^2 + 3x)$
   (c) $L_3(x) = -2 + (x-1) + (x-1)(x-3) - \dfrac{4}{15}(x-1)(x-3)(x-4)$

2. (a) $L_3(x) = 0 + 2(x-0) - 1{,}2(x-0)(x-1) + 0{,}4(x-0)(x-1)(x-2) = \dfrac{2}{5}x^3 - \dfrac{12}{5}x^2 + 4x$
   (b) $f(1{,}5) \approx L_3(1{,}5) = 1{,}95$,

3. (a) $L_3(x) = 0 + (x-0) - \dfrac{1}{3}(x-0)(x-1) + \dfrac{4}{30}(x-0)(x-1)(x-2)$
   (b) $f(1{,}5) \approx L_3(1{,}5) = 1{,}2$,

4. (a) $L(x) = -1 + 0{,}1464(x+4) + 0{,}0518(x+4)(x+2) - 0{,}0086(x+4)(x+2)(x-0) + 0(x+4)(x+2)(x-0)(x-2)$
   (b) $f(1) \approx L(1) = 0{,}3794$,

5. (a) $H(x) = 2 - 0{,}5\dfrac{(x-0)}{0{,}5} - 9\dfrac{(x-0)^2}{0{,}5^2} + 6{,}5\dfrac{(x-0)^3}{0{,}5^3}$
   (b) $H(x) = 0 + 1\dfrac{(x-1)}{0{,}5} - 0{,}2339\dfrac{(x-1)^2}{0{,}5^2} + 0{,}0448\dfrac{(x-1)^3}{0{,}5^3}$
   (c) $H(x) = 1 + 0\dfrac{(x-0)}{0{,}5} + 0{,}2101\dfrac{(x-0)^2}{0{,}5^2} + 0{,}074\dfrac{(x-0)^3}{0{,}5^3}$

6. (a) $H(x) = -1{,}3863 + 2\dfrac{(x-0{,}5)}{0{,}5} - 0{,}8411\dfrac{(x-0{,}5)^2}{0{,}5^2} + 0{,}2274\dfrac{(x-0{,}5)^3}{0{,}5^3}$
   (b) $f(0{,}72) \approx H(0{,}72) = -0{,}6498$,

7. (a) $H(x) = 1 + 0{,}5\dfrac{(x-0)}{0{,}25} + 0{,}1218\dfrac{(x-0)^2}{0{,}25^2} + 0{,}0269\dfrac{(x-0)^3}{0{,}25^3}$
   (b) $f(0{,}2) \approx H(0{,}2) = 1{,}4917$,

8. (a) $H(x) = 0 + 1{,}5708\dfrac{(x+0{,}5)}{0{,}5} - 0{,}1416\dfrac{(x+0{,}5)^2}{0{,}5^2} - 0{,}4292\dfrac{(x+0{,}5)^3}{0{,}5^3}$
   (b) $f(-0{,}2) \approx H(-0{,}2) = 0{,}7988$,

9.