

Feladatok (Közelítő integrálás)

Az alábbi feladatsor nem helyettesíti az elektronikus jegyzet feladatait!

1. Legfeljebb hányadfokú polinomokra pontos az

(a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ integrál értékét közelítő $I(f) = \frac{f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{2}$ kvadratura?

(b) $\int_{-1}^1 f(x)dx$ integrált közelítő $I(f) = f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ kvadratura?

(c) $\int_0^1 f(x)dx$ integrál értékét közelítő $I(f) = \frac{f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)}{3}$ kvadratura?

2. Mekkora legyen 'c' értéke, hogy az

(a) $\int_0^1 f(x)dx$ integrál értékét közelítő $I(f) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + c \cdot f\left(\frac{4}{5}\right)}{1 + c}$

(b) $\int_0^1 f(x)dx$ integrál értékét közelítő $I(f) = \frac{f(0) + c \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)}{2 + c}$

(c) $\int_0^2 f(x)dx$ integrál értékét közelítő $I(f) = \frac{f(0) + 4c \cdot f(1) + f(2)}{2c + 1}$

kvadratura a lehető legmagasabb fokszámú polinomokra pontos legyen? Mekkora ez a fokszám?

3. Közelítsük az alábbi integrálok értékét az egyszerű (i) érintő-, (ii) trapéz-, (iii) Simpson-formulával.

(a) $\int_0^1 x^4 dx$

(d) $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{x-3} dx$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x) dx$

4. Közelítsük az $\int_1^{1,3} \sqrt{x} dx$ értékét az egyszerű trapézformulával. Becsüljük a közelítés hibáját.

5. Közelítsük az alábbi integrálok értékét az összetett (i) érintő-, (ii) trapéz-, (iii) Simpson-formulával, ekvidisztáns alappontok, és N részintervallum esetén.

(a) $\int_0^1 e^{3x} dx, (N = 5)$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) dx, (N = 4)$

(b) $\int_1^{1,6} \frac{2x}{x^2-4} dx, (N = 3)$

(d) $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx, (N = 4), (N = 8)$

6. Az alábbi integrálok értékét az összetett (i) érintő-, (ii) trapézformulával közelítjük, ekvidisztáns alappontok, és N részintervallum esetén. Becsüljük a közelítés hibáját!

Feladatok (Közelítő integrálás)

(a) $\int_0^1 x^5 dx, (N = 4)$

(b) $\int_0^1 e^x dx, (N = 4)$

(c) $\int_1^3 \frac{x^2}{x+1} dx, (N = 10)$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx, (N = 20)$

7. Legalább hány ekvidisztáns részre kell osztani az $[1, 3]$ intervallumot, hogy az összetett trapézformula (legfeljebb 10^{-4} hibával közelítse az $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ integrál értékét?
8. Legalább hány ekvidisztáns részre kell osztani az $[1, 2]$ intervallumot, hogy az összetett érintőformula legfeljebb 10^{-3} hibával közelítse az $\int_1^2 x - 3\ln(x) dx$ integrál értékét?
9. Legalább hány ekvidisztáns részre kell osztani az $[1, 2]$ intervallumot, hogy az összetett érintőformula legfeljebb 10^{-4} hibával közelítse az $\int_1^2 x^2 \cdot \ln(x) dx$ integrál értékét?

Eredmények

- (a) legfeljebb elsőfokú

(b) legfeljebb harmadfokú

(c) legfeljebb elsőfokú
- (a) $c=1$, legfeljebb elsőfokú

(b) $c=4$, legfeljebb harmadfokú

(c) $c=1$, legfeljebb harmadfokú
- (a) (i) $\approx 0,0625$; (ii) $\approx 0,5$; (iii) $\approx 0,2083$; (Pontos: 0,2)

(b) (i) $\approx -0,4$; (ii) $\approx -0,4167$; (iii) $\approx -0,4056$; (Pontos: -0.4055)

(c) (i) $\approx 1,1107$; (ii) $\approx 0,7854$; (iii) $\approx 1,0023$; (Pontos: 1)

(d) (i) $\approx 0,9123$; (ii) $\approx 1,3863$; (iii) $\approx 1,0703$; (Pontos: 1,0706)

(e) (i) $\approx 2,4361$; (ii) $\approx 0,7854$; (iii) $\approx 1,8859$; (Pontos: 1,9052)

(f) (i) $\approx 0,1150$; (ii) $\approx 0,1963$; (iii) $\approx 0,1421$; (Pontos: 0.1427)
- $\approx 0,3210, \leq \frac{0,3}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,3^2 = 0,0006$

(Megjegyzés: $(\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, az $|f''(x)| = \frac{1}{4}x^{-3/2}$ függvény az $[1; 1,3]$ intervallumon monoton csökken, így az $[1; 1,3]$ intervallumon a maximumát $x = 1$ -nél veszi fel, maximumának értéke $f''(1) = \frac{1}{4}$.)
- (a) (i) $\approx 6,2674$; (ii) $\approx 6,5516$; (iii) $\approx 6,3621$ (Pontos: 6,3618)

(b) (i) $\approx -0,7257$; (ii) $\approx -0,7509$; (iii) $\approx -0,7341$ (Pontos: -0.7340)

(c) (i) $\approx 0,6443$; (ii) $\approx 0,6395$; (iii) $\approx 0,64270116$ (Pontos: 0.64269908)

(d) (N=4):(i) $\approx 1,0608$; (ii) $\approx 1,0903$; (iii) $\approx 1,07061336$ (Pontos: 1.07061470),
(N=8):(i) $\approx 1,0682$; (ii) $\approx 1,0755$; (iii) $\approx 1,07061462$

Feladatok (Közelítő integrálás)

6. (a) $(i) \leq 0,0521; (ii) \leq 0,1042$
(b) $(i) \leq 0,0071; (ii) \leq 0,0142$
(c) $(i) \leq 0,00083; (ii) \leq 0,00167$
(d) $(i) \leq 0,00005; (ii) \leq 0,0001;$
(Megjegyzés: $f''(x) = -\cos(x)$, így az $|f''(x)| = \cos(x)$ függvény a $[0, \pi/4]$ intervallumon monoton csökken, maximumát $x = 0$ -nál veszi fel, maximumának értéke a $[0, \pi/4]$ intervallumon $f''(0) = \cos(0) = 1$)

7. [Legalább 116](#)

8. [Legalább 12](#)

9. [Legalább 43](#)