# Matematika 3.

## 5. hét
## Deriváltak közelítése
## Feladatok

Szalay Krisztina

2020

# Emlékeztető

## Taylor-sorfejtés

Ha az $f(x)$ függvény végtelen sokszor differenciálható az $x_0$ pont valamely $\delta$ sugarú környezetében, akkor az $f(x)$ függvény minden $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esetén előáll:

# Emlékeztető

## Taylor-sorfejtés

Ha az $f(x)$ függvény végtelen sokszor differenciálható az $x_0$ pont valamely $\delta$ sugarú környezetében, akkor az $f(x)$ függvény minden $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esetén előáll:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

alakban,

# Emlékeztető

## Taylor-sorfejtés

Ha az $f(x)$ függvény végtelen sokszor differenciálható az $x_0$ pont valamely $\delta$ sugarú környezetében, akkor az $f(x)$ függvény minden $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esetén előáll:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

alakban, alkalmas $\xi \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mellett.

# Emlékeztető

## Lagrange-maradéktag

Az összeg utolsó tagja, a Lagrange-maradéktag, azaz

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

# Emlékeztető

## Lagrange-maradéktag

Az összeg utolsó tagja, a Lagrange-maradéktag, azaz

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\mathcal{O}(\mid h \mid^{(n+1)})$ nagyságrendű, ahol $x - x_0 = h$.

# Emlékeztető

## Lagrange-maradéktag

Az összeg utolsó tagja, a Lagrange-maradéktag, azaz

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\mathcal{O}(\mid h \mid^{(n+1)})$ nagyságrendű, ahol $x - x_0 = h$.

## Ötlet

Használjuk ki az $f(x)$ Taylor-sorfejtését az $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, stb. értékének becslésére!

# 1. feladat

Konstruáljunk egy, az $f'(x_0)$ deriváltat az $x_0$, $x_1 = x_0 + 2h$, $x_2 = x_0 + 3h$ alappontrendszeren $h$ szerint másodrendben közelítő differenciasémát!

# 1. feladat megoldása

Ismerjük

# 1. feladat megoldása

Ismerjük az alappontokat:

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2$$

# 1. feladat megoldása

Ismerjük az alappontokat:

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2$$

és az alappontokhoz rendelt értékeket a szokásos jelöléssel:

$$f(x_0) = f_0, \quad f(x_1) = f_1, \quad f(x_2) = f_2$$

# 1. feladat megoldása

Mivel az $f(x)$ függvény első deriváltjának az $x_0$ pontbeli értékét akarjuk közelíteni, ezért az $x_0$ pont körüli másodfokú Taylor polinomot írjuk fel a Lagrange-maradéktaggal:

# 1. feladat megoldása

Mivel az $f(x)$ függvény első deriváltjának az $x_0$ pontbeli értékét akarjuk közelíteni, ezért az $x_0$ pont körüli másodfokú Taylor polinomot írjuk fel a Lagrange-maradéktaggal:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}_{\text{másodfokú Taylor polinom}} + \underbrace{+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3}_{\text{Lagrange-maradéktag}}$$

# 1. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

# 1. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_0)^3$$

# 1. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_0)^3$$

Kihasználva, hogy $x_1 - x_0 = (x_0 + 2h) - x_0 = 2h$,

# 1. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_0)^3$$

Kihasználva, hogy $x_1 - x_0 = (x_0 + 2h) - x_0 = 2h$,
és $f(x_0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$,

# 1. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_0)^3$$

Kihasználva, hogy $x_1 - x_0 = (x_0 + 2h) - x_0 = 2h$,
és $f(x_0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$,
a fenti egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

# 1. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_0)^3$$

Kihasználva, hogy $x_1 - x_0 = (x_0 + 2h) - x_0 = 2h$,
és $f(x_0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$,
a fenti egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\text{(I)} \quad f_1 = f_0 + f'(x_0)(2h) + \frac{f''(x_0)}{2}(2h)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(2h)^3$$

# 1. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_2)$ értékét a Taylor-sorral:

# 1. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_2)$ értékét a Taylor-sorral:

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_2 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_2 - x_0)^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x_2 - x_0)^3$$

# 1. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_2)$ értékét a Taylor-sorral:

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_2 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_2 - x_0)^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x_2 - x_0)^3$$

Most $x_2 - x_0 = (x_0 + 3h) - x_0 = 3h$, és

# 1. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_2)$ értékét a Taylor-sorral:

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_2 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_2 - x_0)^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x_2 - x_0)^3$$

Most $x_2 - x_0 = (x_0 + 3h) - x_0 = 3h$, és $f(x_0) = f_0$, $f(x_2) = f_2$,

# 1. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_2)$ értékét a Taylor-sorral:

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_2 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_2 - x_0)^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x_2 - x_0)^3$$

Most $x_2 - x_0 = (x_0 + 3h) - x_0 = 3h$, és $f(x_0) = f_0$, $f(x_2) = f_2$, ezért a fenti egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

# 1. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_2)$ értékét a Taylor-sorral:

$$f(x_2) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_2 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_2 - x_0)^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x_2 - x_0)^3$$

Most $x_2 - x_0 = (x_0 + 3h) - x_0 = 3h$, és $f(x_0) = f_0$, $f(x_2) = f_2$, ezért a fenti egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\text{(II)} \quad f_2 = f_0 + f'(x_0)(3h) + \frac{f''(x_0)}{2}(3h)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}(3h)^3$$

# 1. feladat megoldása

Tekintsük a kapott két egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek: $f'(x_0)$ és $f''(x_0)$):

# 1. feladat megoldása

Tekintsük a kapott két egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek: $f'(x_0)$ és $f''(x_0)$):

$$\text{(I)} \quad f_1 = f_0 + 2hf'(x_0) + 4h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + 8h^3 \frac{f'''(\xi)}{6}$$

# 1. feladat megoldása

Tekintsük a kapott két egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek: $f'(x_0)$ és $f''(x_0)$):

$$\text{(I)} \quad f_1 = f_0 + 2hf'(x_0) + 4h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + 8h^3 \frac{f'''(\xi)}{6}$$

$$\text{(II)} \quad f_2 = f_0 + 3hf'(x_0) + 9h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + 27h^3 \frac{f'''(\eta)}{6}$$

# 1. feladat megoldása

Tekintsük a kapott két egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek: $f'(x_0)$ és $f''(x_0)$):

$$\text{(I)} \quad f_1 = f_0 + 2hf'(x_0) + 4h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + 8h^3 \frac{f'''(\xi)}{6}$$

$$\text{(II)} \quad f_2 = f_0 + 3hf'(x_0) + 9h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + 27h^3 \frac{f'''(\eta)}{6}$$

$f'(x_0)$-at akarjuk kifejezni az egyenletrendszerből. Ehhez az (I) egyenletet 9-cel, a (II) egyenletet 4-gyel szorozzuk. (Vagy azonnal kivonjuk az (I) egyenlet 9-szereséből a (II) egyenlet 4-szeresét.)

# 1. feladat megoldása

$$\text{(I)} \quad 9f_1 = 9f_0 + 18hf'(x_0) + \frac{36}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{72}{6}h^3 f'''(\xi)$$

# 1. feladat megoldása

$$\text{(I)} \quad 9f_1 = 9f_0 + 18hf'(x_0) + \frac{36}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{72}{6}h^3 f'''(\xi)$$

$$\text{(II)} \quad 4f_2 = 4f_0 + 12hf'(x_0) + \frac{36}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{108}{6}h^3 f'''(\eta)$$

# 1. feladat megoldása

$$\text{(I)} \quad 9f_1 = 9f_0 + 18hf'(x_0) + \frac{36}{2}h^2f''(x_0) + \frac{72}{6}h^3f'''(\xi)$$

$$\text{(II)} \quad 4f_2 = 4f_0 + 12hf'(x_0) + \frac{36}{2}h^2f''(x_0) + \frac{108}{6}h^3f'''(\eta)$$

Vonjuk ki az (I) egyenletből a (II) egyenletet:

# 1. feladat megoldása

$$\text{(I)}\quad 9f_1 = 9f_0 + 18hf'(x_0) + \frac{36}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{72}{6}h^3 f'''(\xi)$$

$$\text{(II)}\quad 4f_2 = 4f_0 + 12hf'(x_0) + \frac{36}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{108}{6}h^3 f'''(\eta)$$

Vonjuk ki az (I) egyenletből a (II) egyenletet:

$$9f_1 - 4f_2 = 5f_0 + 6hf'(x_0) + \underbrace{\frac{72}{6}h^3 f'''(\xi) - \frac{108}{6}h^3 f'''(\eta)}_{\mathcal{O}\left(h^3\right)}$$

# 1. feladat megoldása

Rendezés után:

$$9f_1 - 4f_2 - 5f_0 = 6hf'(x_0) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

# 1. feladat megoldása

Rendezés után:

$$9f_1 - 4f_2 - 5f_0 = 6hf'(x_0) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

$$\frac{9f_1 - 4f_2 - 5f_0}{6h} = f'(x_0) + \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

# 1. feladat megoldása

Rendezés után:

$$9f_1 - 4f_2 - 5f_0 = 6hf'(x_0) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$\frac{9f_1 - 4f_2 - 5f_0}{6h} = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

Azaz:

$$f'(x_0) \approx \frac{9f_1 - 4f_2 - 5f_0}{6h}$$

A hiba $h$ szerint másodrendű.

# Megjegyzés

Ha az előző feladatban $f'(x_0)$ helyett $f'(x_1)$-et közelítő sémát akarunk felírni, akkor a megoldás első lépésében az $x_1$ körüli Taylor-polinomot írjuk fel:

# Megjegyzés

Ha az előző feladatban $f'(x_0)$ helyett $f'(x_1)$-et közelítő sémát akarunk felírni, akkor a megoldás első lépésében az $x_1$ körüli Taylor-polinomot írjuk fel:

$$f(x) = \underbrace{f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2}_{\text{másodfokú Taylor polinom}} +$$

$$\underbrace{+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_1)^3}_{\text{Lagrange-maradéktag}}$$

# Megjegyzés

Majd helyettesítsünk $x$ helyére először $x_0$-at, majd $x$ helyére $x_2$-t.

# Megjegyzés

Majd helyettesítsünk $x$ helyére először $x_0$-at, majd $x$ helyére $x_2$-t.

Ne feledjük, hogy most

$$x_0 - x_1 = x_0 - (x_0 + 2h) = -2h$$

és

$$x_2 - x_1 = (x_0 + 3h) - (x_0 + 2h) = h$$

!

# Megjegyzés

Majd helyettesítsünk $x$ helyére először $x_0$-at, majd $x$ helyére $x_2$-t.

Ne feledjük, hogy most

$$x_0 - x_1 = x_0 - (x_0 + 2h) = -2h$$

és

$$x_2 - x_1 = (x_0 + 3h) - (x_0 + 2h) = h$$

!

A kapott egyenletrendszerből fejezzük ki $f'(x_1)$-et!

# Megjegyzés

Majd helyettesítsünk $x$ helyére először $x_0$-at, majd $x$ helyére $x_2$-t.

Ne feledjük, hogy most

$$x_0 - x_1 = x_0 - (x_0 + 2h) = -2h$$

és

$$x_2 - x_1 = (x_0 + 3h) - (x_0 + 2h) = h$$

!

A kapott egyenletrendszerből fejezzük ki $f'(x_1)$-et!

*Ez egy remek otthoni gyakorló feladat!!*
*Eredmény*:

$$f'(x_1) \approx \frac{-f_0 - 3f_1 + 4f_2}{6h}, \ \ \mathcal{O}(h^2)$$

# 2. feladat

Konstruáljunk egy, az $f''(x_2)$ deriváltat az $x_1$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + 2h$ alappontrendszeren $h$ szerint elsőrendben közelítő differenciasémát!

# 2. feladat megoldása

Ismertek:

# 2. feladat megoldása

Ismertek:

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2$$

# 2. feladat megoldása

Ismertek:

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2$$

és

$$f(x_1) = f_1, \quad f(x_2) = f_2, \quad f(x_3) = f_3$$

# 2. feladat megoldása

Mivel az $f(x)$ függvény második deriváltjának az $x_2$ pontbeli értékét akarjuk közelíteni, ezért az $x_2$ pont körüli másodfokú Taylor polinomot írjuk fel a Lagrange-maradéktaggal:

# 2. feladat megoldása

Mivel az $f(x)$ függvény második deriváltjának az $x_2$ pontbeli értékét akarjuk közelíteni, ezért az $x_2$ pont körüli másodfokú Taylor polinomot írjuk fel a Lagrange-maradéktaggal:

$$f(x) = \underbrace{f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x - x_2)^2}_{\text{másodfokú Taylor polinom}} +$$

$$\underbrace{+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_2)^3}_{\text{Lagrange-maradéktag}}$$

# 2. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

# 2. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

$$f(x_1) = f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x_1 - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x_1 - x_2)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_2)^3$$

# 2. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

$$f(x_1) = f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x_1 - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x_1 - x_2)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_2)^3$$

Kihasználva, hogy $x_1 - x_2 = x_1 - (x_1 + h) = -h$, és hogy $f(x_1) = f_1$, $f(x_2) = f_2$, a fenti egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

# 2. feladat megoldása

Írjuk fel $f(x_1)$ értékét a Taylor-sorral (azaz helyettesítsünk $x$ helyére $x_1$-et):

$$f(x_1) = f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x_1 - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x_1 - x_2)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_2)^3$$

Kihasználva, hogy $x_1 - x_2 = x_1 - (x_1 + h) = -h$, és hogy $f(x_1) = f_1$, $f(x_2) = f_2$, a fenti egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\text{(I)} \quad f_1 = f_2 + f'(x_2)(-h) + \frac{f''(x_2)}{2}(-h)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(-h)^3$$

# 2. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_3)$ értékét a Taylor-sorral:

# 2. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_3)$ értékét a Taylor-sorral:

$$f(x_3) = f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x_3 - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x_3 - x_2)^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x_3 - x_2)^3$$

# 2. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_3)$ értékét a Taylor-sorral:

$$f(x_3) = f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x_3 - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x_3 - x_2)^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x_3 - x_2)^3$$

Most $x_3 - x_2 = (x_2 + 2h) - x_2 = 2h$, és $f(x_2) = f_2$, $f(x_3) = f_3$, így a fenti egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

# 2. feladat megoldása

Az előzőhöz hasonlóan írjuk fel $f(x_3)$ értékét a Taylor-sorral:

$$f(x_3) = f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x_3 - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x_3 - x_2)^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}(x_3 - x_2)^3$$

Most $x_3 - x_2 = (x_2 + 2h) - x_2 = 2h$, és $f(x_2) = f_2$, $f(x_3) = f_3$, így a fenti egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\text{(II)} \quad f_3 = f_2 + f'(x_2)(2h) + \frac{f''(x_2)}{2}(2h)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}(2h)^3$$

# 2. feladat megoldása

Tekintsük a kapott két egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek: $f'(x_2)$ és $f''(x_2)$):

# 2. feladat megoldása

Tekintsük a kapott két egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek: $f'(x_2)$ és $f''(x_2)$):

$$\text{(I)} \quad f_1 = f_2 - hf'(x_2) + h^2 \frac{f''(x_2)}{2} - h^3 \frac{f'''(\xi)}{6}$$

# 2. feladat megoldása

Tekintsük a kapott két egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek: $f'(x_2)$ és $f''(x_2)$):

$$\text{(I)} \quad f_1 = f_2 - hf'(x_2) + h^2 \frac{f''(x_2)}{2} - h^3 \frac{f'''(\xi)}{6}$$

$$\text{(II)} \quad f_3 = f_2 + 2hf'(x_2) + 4h^2 \frac{f''(x_2)}{2} + 8h^3 \frac{f'''(\eta)}{6}$$

# 2. feladat megoldása

Tekintsük a kapott két egyenletből álló, kétismeretlenes egyenletrendszert (az ismeretlenek: $f'(x_2)$ és $f''(x_2)$):

$$\text{(I)} \quad f_1 = f_2 - hf'(x_2) + h^2 \frac{f''(x_2)}{2} - h^3 \frac{f'''(\xi)}{6}$$

$$\text{(II)} \quad f_3 = f_2 + 2hf'(x_2) + 4h^2 \frac{f''(x_2)}{2} + 8h^3 \frac{f'''(\eta)}{6}$$

$f''(x_2)$-t akarjuk kifejezni az egyenletrendszerből, ezért az (I) egyenlet 2-szeresét hozzáadjuk a (II) egyenlethez.

# 2. feladat megoldása

A kapott egyenletben már csak az $f''(x_2)$ az ismeretlen:

$$2f_1 + f_3 = 3f_2 + 3h^2 f''(x_2) - \underbrace{\frac{2}{6}h^3 f'''(\xi) + \frac{8}{6}h^3 f'''(\eta)}_{\mathcal{O}\left(h^3\right)}$$

# 2. feladat megoldása

Rendezés után:

$$2f_1 + f_3 - 3f_2 = 3h^2 f''(x_2) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

# 2. feladat megoldása

Rendezés után:

$$2f_1 + f_3 - 3f_2 = 3h^2 f''(x_2) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

$$\frac{2f_1 + f_3 - 3f_2}{3h^2} = f''(x_2) + \mathcal{O}\left(h\right)$$

# 2. feladat megoldása

Rendezés után:

$$2f_1 + f_3 - 3f_2 = 3h^2 f''(x_2) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

$$\frac{2f_1 + f_3 - 3f_2}{3h^2} = f''(x_2) + \mathcal{O}\left(h\right)$$

Azaz:

$$f''(x_2) \approx \frac{2f_1 - 3f_2 + f_3}{3h^2}$$

A hiba $h$ szerint elsőrendű.

# Otthoni feladat

Otthoni gyakorlásra:

a) A 2. feladatban konstruáljunk $f'(x_2)$-t $h$ szerint másodrendben közelítő differenciasémát! *Eredmény*:

$$f'(x_2) \approx \frac{-4f_1 + 3f_2 + f_3}{6h}, \quad \mathcal{O}(h^2)$$

b) A 2. feladatban konstruáljunk $f''(x_1)$-et $h$ szerint elsőrendben közelítő differenciasémát! *Eredmény*:

$$f''(x_1) \approx \frac{2f_1 - 3f_2 + f_3}{3h^2}, \quad \mathcal{O}(h)$$

c) A 1. feladatban konstruáljunk $f''(x_2)$-et $h$ szerint elsőrendben közelítő differenciasémát! *Eredmény*:

$$f''(x_2) \approx \frac{f_0 - 3f_1 + 2f_2}{3h^2}, \quad \mathcal{O}(h)$$