2. Gyakorlat

2023. 02. 23.

1. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő lineáris regressziós függvényt!.
   (a) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,$ és $f_1 = -10,\ f_2 = -3,\ f_3 = 0,\ f_4 = 8$
   (b) $x_1 = -3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2,$ és $f_1 = -8,\ f_2 = -4,\ f_3 = 1,\ f_4 = -1$
   (c) $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,$ és $f_1 = -5,\ f_2 = 1,\ f_3 = 4,\ f_4 = 9$

2. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő kvadratikus regressziós függvényt!
   (a) $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4,\ x_3 = 5,$ és $f_1 = 2,\ f_2 = 4,\ f_3 = 0,\ f_4 = 5$
   (b) $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,$ és $f_1 = -6,\ f_2 = -2,\ f_3 = 0,\ f_4 = 8$

   $a_0 = -3,2$ $a_1 = 1,7$ $a_2 = 0,25$

3. Adottak az $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$ alappontok és a hozzájuk rendelt $f_j = cos(\frac{\pi}{2}x_j)$ értékek $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$. Határozzuk meg a fenti adatokhoz tartozó kvadratikus regressziós függvényt!

4. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek legkisebb négyzetes megoldását!

   (a)
   $$x - y = 2$$
   $$2x + y = 1$$
   $$x + 2y = 0$$

   (b)
   $$x_1 + x_2 = 1$$
   $$2x_1 + 2x_2 = 1$$
   $$3x_1 + 4x_2 = 1$$

   (c)
   $$x + y = 1$$
   $$x + 2y = 2$$
   $$x + 3y = 4$$

   (d)
   $$2x_1 + 3x_2 = 1$$
   $$4x_1 + 5x_2 = 3$$
   $$3x_1 + 4x_2 = 4$$
   $$x_1 - 3x_2 = 4$$

1. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő lineáris regressziós függvényt!

c) $x_1 = -2$, $y_1 = -5$ $\quad$ $x_2 = -1$, $y_2 = 1$ $\quad$ $x_3 = 1$, $y_3 = 4$ $\quad$ $x_4 = 2$, $y_4 = 9$

Mo:

$$\boxed{y = a_0 + a_1 \cdot x} \qquad a_0, a_1 \; ??$$

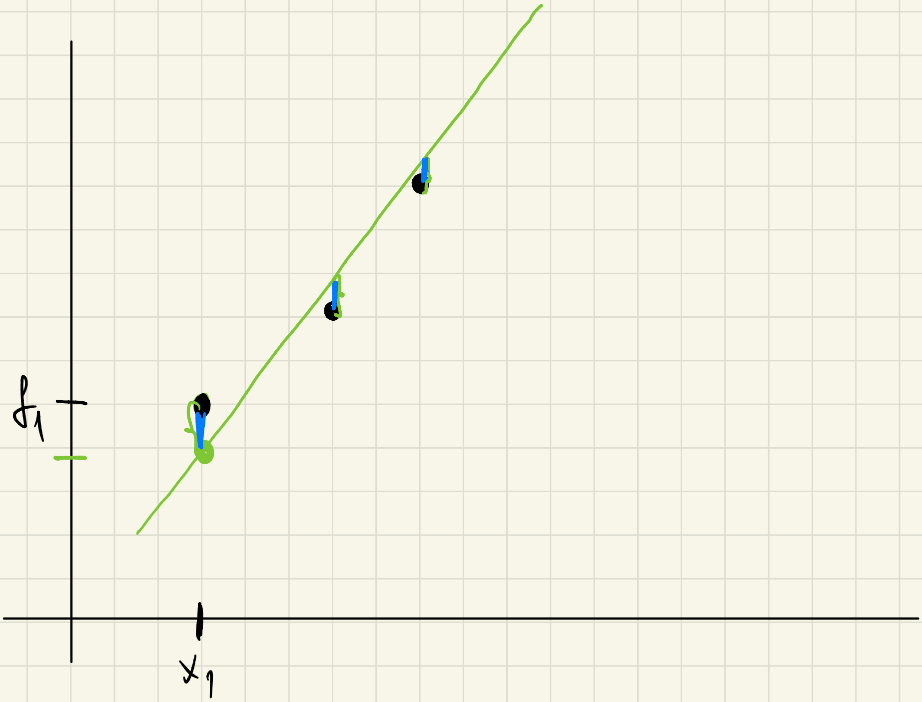
$$\begin{pmatrix} \sum_j 1 & \sum_j x_j \\ \sum_j x_j & \sum_j x_j^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j y_j \\ \sum_j x_j \cdot y_j \end{pmatrix}$$

	1	x_j	x_j^2	y_j	$x_j \cdot y_j$
	1	-2	4	-5	10
	1	-1	1	1	-1
	1	1	1	4	4
	1	2	4	9	18
$\sum$	4	0	10	9	31

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4a_0 + 0 \cdot a_1 &= 9 \\ 0a_0 + 10 \cdot a_1 &= 31 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} a_0 &= \frac{9}{4} = 2{,}25 \\ a_1 &= \frac{31}{10} = 3{,}1 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 2{,}25 + 3{,}1 \cdot x}$$


f_1
x_1

a) $x_1 = 0$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_3 = 2$ $\quad x_4 = 4$

$f_1 = -10$ $\quad f_2 = -3$ $\quad f_3 = 0$ $\quad f_4 = 8$

Mo: $\quad y = a_0 + a_1 \cdot x$

	1	x_j	x_j^2	f_j	$x_j \cdot f_j$
	1	0	0	-10	0
	1	1	1	-3	-3
	1	2	4	0	0
	1	4	16	8	32
Σ	4	7	21	-5	29

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{cases} 4a_0 + 7a_1 = -5 \\ 7a_0 + 21a_1 = 29 \end{cases}$$

$$-5a_0 = 44 \Rightarrow a_0 = -8{,}8$$

$$a_1 = \frac{-5 - 4(-8{,}8)}{7} = 4{,}3143$$

$$\boxed{y = -8{,}8 + 4{,}3143 \cdot x}$$

② Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő kvadratikus regressziós függvényt!

a) $x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 5$

$y_1 = 2 \quad y_2 = 4 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 5$

Mo: $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \qquad a_0, a_1, a_2$??

$$\begin{pmatrix} \sum_j 1 & \sum_j x_j & \sum_j x_j^2 \\ \sum_j x_j & \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j^3 \\ \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j^3 & \sum_j x_j^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j y_j \\ \sum_j x_j \cdot y_j \\ \sum_j x_j^2 \cdot y_j \end{pmatrix}$$

	1	x_j	x_j^2	x_j^3	x_j^4	d_j	$x_j \cdot d_j$	$x_j^2 \cdot d_j$
	1	0	0	0	0	2	0	0
	1	2	4	8	16	4	8	16
	1	4	16	64	256	0	0	0
	1	5	25	125	625	5	25	125
Σ	4	11	45	197	897	11	33	141

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 45 \\ 11 & 45 & 197 \\ 45 & 197 & 897 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \\ 141 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

12. gelp

$$\Longrightarrow \quad a_0 = 2{,}5578$$

$$a_1 = -0{,}4749$$

$$a_2 = 0{,}1332$$

$$\boxed{y = 2{,}5578 - 0{,}4749x + 0{,}1332 \cdot x^2}$$

③ Legyenek $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,$
$x_5 = 2$ és $\boxed{f_j = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x_j\right)}$ $(j = 1,2,3,4,5)$.

Határozzuk meg az adatokra illeszkedő kvadratikus regressziós függvényt!

$[-2, 2]$

<u>Mo:</u> $x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 2$

$f_1 = -1 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 1 \quad f_4 = 0 \quad f_5 = -1$

$$f_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (-2)\right) = -1$$

$$f_2 = \ldots\ldots\ldots = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (-1)\right) = 0$$

	1	x_j	x_j^2	x_j^3	x_j^4	f_j	$x_j \cdot f_j$	$x_j^2 \cdot f_j$
	1	−2	4	−8	16	−1	2	−4
	1	−1	1	−1	1	0	0	0
	1	0	0	0	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	0	0
	1	2	4	8	16	−1	−2	−4
Σ	5	0	10	0	34	−1	0	−8

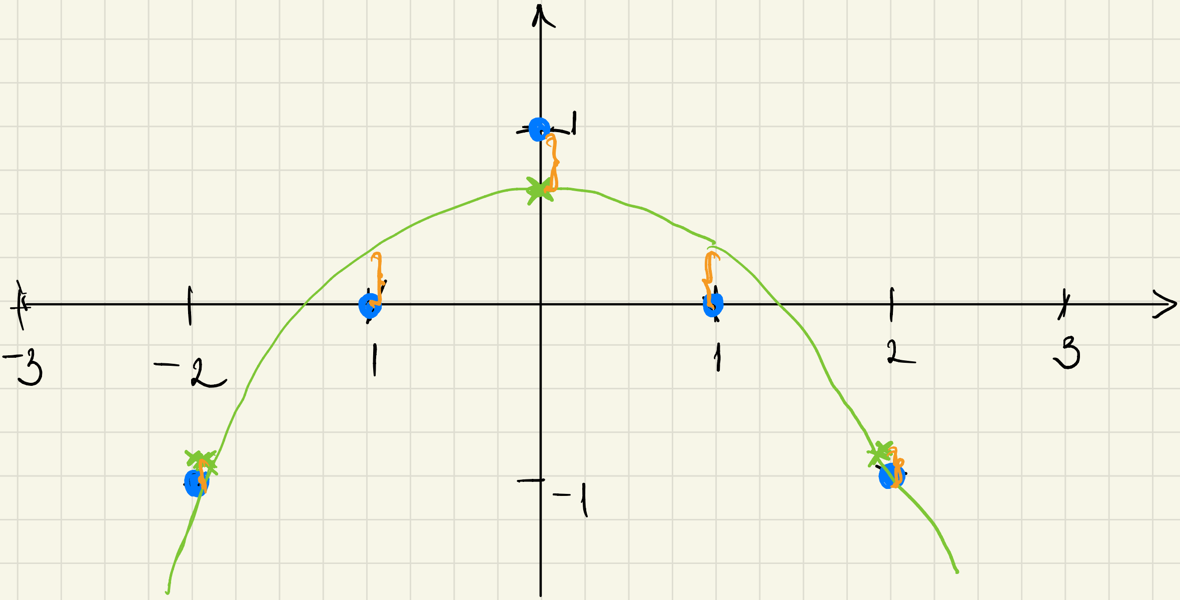
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \underbrace{0} \\ -8 \end{pmatrix} \quad a_1 = 0 \quad \xRightarrow{\text{sz. gép}}$$

$$a_0 = 0{,}6571$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = -0{,}4286$$

$$\boxed{y = 0{,}6571 \qquad -0{,}4286 \cdot x^2}$$



1
-3
-2
1
1
2
3
-1

4.) Határozzuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszerek általánosított (legkisebb négyzetes) megoldását!

a)
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

túlhatározott egy. rdsz.

Mo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} ; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} ; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A^T \cdot A \cdot \hat{\underline{x}} = A^T \cdot \underline{b} \quad \text{(Gauss-féle normálalak)}$$

$$
\begin{array}{ccc|cc}
\multicolumn{3}{c|}{A^T \cdot A} & 1 & -1 \\
 & & & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 6 & 3 \\
-1 & 1 & 2 & 3 & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
\multicolumn{3}{c|}{A^T \cdot b} & 2 \\
 & & & 1 \\
 & & & 0 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 4 \\
-1 & 1 & 2 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \left.\begin{array}{l} 6\hat{x} + 3\hat{y} = 4 \\ 3\hat{x} + 6\hat{y} = -1 \end{array}\right\} \cdot 2 \qquad -
$$

$$
9\hat{y} = -6 \qquad \boxed{\hat{y} = -\frac{2}{3}}
$$

$$
\hat{x}_1 = \frac{4 - 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{6} = 1
$$

$$
\boxed{\hat{x}_1 = 1}
$$

Alt. wo:

$$
\boxed{\begin{array}{l} \hat{x} = 1 \\ \hat{y} = -\frac{2}{3} \end{array}} \; \Big| \; \boxed{\underline{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}
$$

Mit jelent?

$$\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ helyett. az eredeti egy. rdsz. bal oldalába

$$1-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$2\cdot 1+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

$$1+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$

$$A\cdot\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \neq \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|A\cdot\hat{\underline{x}} - \underline{b}\|^{2} = \left(\frac{5}{3}-2\right)^2+\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2 = \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Vál. tetsz. $\tilde{\underline{x}}$ vektort: $\tilde{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad A\cdot\tilde{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\|A\tilde{\underline{x}} - \underline{b}\|^2 = (-3-2)^2+(0-1)^2+(3-0)^2 = 35 > \frac{1}{3}$$

b) $x_1 + x_2 = 1$

$2x_1 + 2x_2 = 1$

$3x_1 + 4x_2 = 1$

d)
$$2x_1 + 3x_2 = 1$$
$$4x_1 + 5x_2 = 3$$
$$3x_1 + 4x_2 = 4$$
$$x_1 - 3x_2 = 4$$

Mo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}_{4\times 2}$; $\underline{x} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A^T \cdot A$

$$\begin{array}{cccc|cc} & & & & 2 & 3 \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & 3 & 4 \\ & & & & 1 & -3 \\ \hline 2 & 4 & 3 & 1 & 30 & 35 \\ 3 & 5 & 4 & -3 & 35 & 59 \end{array}$$

$A^T \cdot \underline{b}$

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & 3 \\ & & & & 4 \\ & & & & 4 \\ \hline 2 & 4 & 3 & 1 & 30 \\ 3 & 5 & 4 & -3 & 22 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 35 & 59 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{12. gel'p}} \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1{,}8349 \\ x_2 &= -0{,}7156 \end{aligned}}$$