2. Gyakorlat

2024.02.13.

Emlékeztető: Adottak az

$x_1, x_2, \ldots, x_N$ alappontok és a hozzájuk rendelt

$f_1, f_2, \ldots, f_N$ értékek.

- lineáris regressziós fv: $\boxed{y = a_0 + a_1 x}$

$$\begin{pmatrix} \sum_j 1 & \sum_j x_j \\ \sum_j x_j & \sum_j x_j^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j f_j \\ \sum_j x_j \cdot f_j \end{pmatrix}$$

a_0, a_1 ??

- kvadratikus regressziós fv: $\boxed{y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2}$

$$\begin{pmatrix} \sum_j 1 & \sum_j x_j & \sum_j x_j^2 \\ \sum_j x_j & \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j^3 \\ \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j^3 & \sum_j x_j^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j f_j \\ \sum_j x_j \cdot f_j \\ \sum_j x_j^2 \cdot f_j \end{pmatrix}$$

a_0, a_1, a_2

1. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő lineáris regressziós függvényt.

a) $x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 2$

$f_1 = 1 \quad f_2 = 3 \quad f_3 = 4 \quad f_4 = 6$

Mo: $(N=4)$ $\boxed{y = a_0 + a_1 \cdot x}$

	1	x_j	x_j^2	f_j	$x_j \cdot f_j$
	1	−2	4	1	−2
	1	0	0	3	0
	1	1	1	4	4
	1	2	4	6	12
Σ	4	1	9	14	14

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 14 \\ 1 & 9 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} 4a_0 + a_1 = 14 \\ 1 \cdot a_0 + 9a_1 = 14 \end{array}\right] - 4 \cdot \mathrm{II}$$

$$-35a_1 = -42$$

$$a_1 = \frac{42}{35} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$$a_0 = 14 - 9a_1 = 14 - 9 \cdot 1{,}2 = 3{,}2$$

$$\boxed{y = 3{,}2 + 1{,}2 \cdot x}$$

b) $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$ $x_4 = 4$

$f_1 = 6$ $f_2 = 3$ $f_3 = -1$ $f_4 = -10$

MQ : $N = 4$ $\boxed{y = a_0 + a_1 \cdot x}$

	1	x_j	x_j^2	f_j	$x_j \cdot f_j$
	1	0	0	6	0
	1	1	1	3	3
	1	2	4	-1	-2
	1	4	16	-10	-40
Σ	4	7	21	-2	-39

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & -2 \\ 7 & 21 & -39 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} 4a_0 + 7a_1 = -2 \\ 7a_0 + 21a_1 = -39 \end{array}\right] - 3 \cdot \mathrm{I}$$

$$-5a_0 = -33 \qquad \underline{a_0 = 6{,}6}$$

$$7a_1 = -2 - 4 \cdot 6{,}6$$

$$\underline{a_1} = \frac{-2 - 26{,}4}{7} = -4{,}0571$$

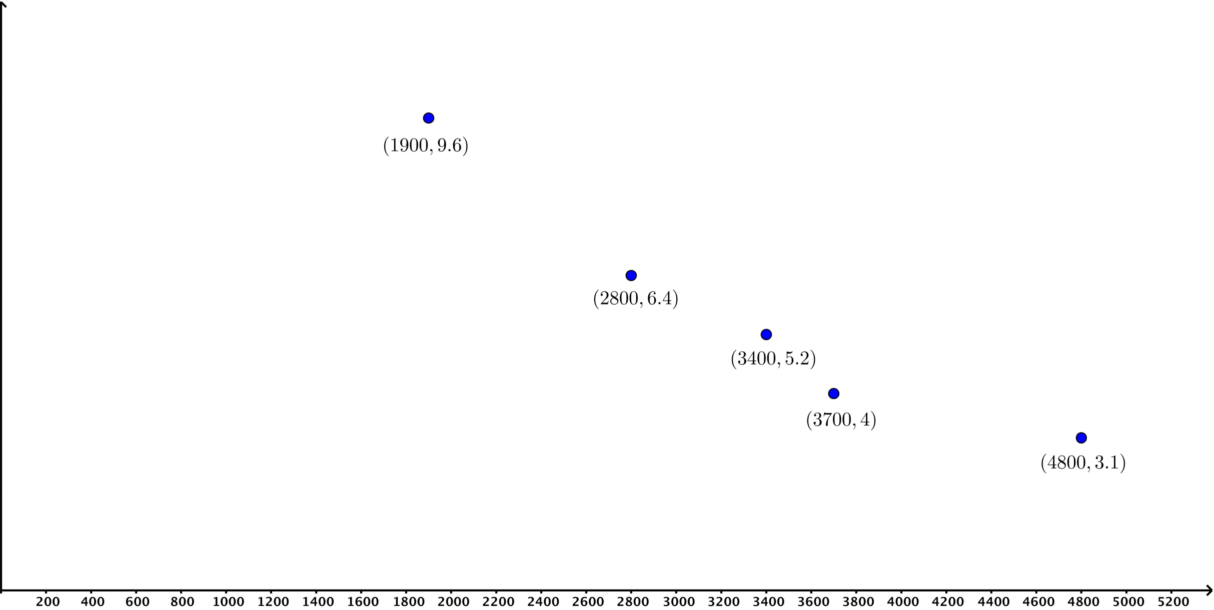
$$y = 6{,}6 - 4{,}0571 \cdot x$$

2. hf.

Az alábbi adatok a különféle osztályú autók túlélési jellemzőit tartalmazzák ütközés esetén. (Az alábbi táblázat a balesetek közül azok százalékos arányát tartalmazza, amelyekben a sérülés súlyos vagy végzetes volt.) (USA)

Típus	Átlagos súly (lb)	Százalék
Belföldi luxus	4800	3,1
Belföldi középkat.	3700	4,0
Belföldi economy	3400	5,2
Belföldi kompakt	2800	6,4
Külföldi kompakt	1900	9,6
	x_j	d_j

Határozzuk meg az adatokra illeszkedő lineáris regressziós függvényt!


(1900, 9.6)
(2800, 6.4)
(3400, 5.2)
(3700, 4)
(4800, 3.1)
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
2800
3000
3200
3400
3600
3800
4000
4200
4400
4600
4800
5000
5200

③ Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő kvadratikus regressziós függvényt.

a) $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$ $x_4 = 3$

$y_1 = -15$ $y_2 = -5$ $y_3 = -5$ $y_4 = -12$

Mo: $N = 4$ $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2$

	1	x_j	x_j^2	x_j^3	x_j^4	y_j	$x_j \cdot y_j$	$x_j^2 \cdot y_j$
	1	0	0	0	0	−15	0	0
	1	1	1	1	1	−5	−5	−5
	1	2	4	8	16	−5	−10	−20
	1	3	9	27	81	−12	−36	−108
Σ	4	6	14	36	98	−37	−51	−133

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & -37 \\ 6 & 14 & 36 & -51 \\ 14 & 36 & 98 & -133 \end{array}\right) \xRightarrow{\text{12. gép}} \begin{array}{l} a_0 = -14{,}85 \\ a_1 = 13{,}65 \\ a_2 = -4{,}25 \end{array}$$

$$\boxed{y = -14{,}85 + 13{,}65 \cdot x - 4{,}25 \cdot x^2}$$

Megjegyzés:

Lineáris regressziós fv? $y = a_0 + a_1 x$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & -37 \\ 6 & 14 & -51 \end{array}\right) \Rightarrow$$

---

b) $x_1 = -1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 2$ $x_4 = 3$

$f_1 = 15$ $f_2 = 5$ $f_3 = 5$ $f_4 = 12$

Mo: $N = 4$ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

	1	x_j	x_j^2	x_j^3	x_j^4	f_j	$x_j \cdot f_j$	$x_j^2 \cdot f_j$
	1	-1	1	-1	1	15	-15	15
	1	0	0	0	0	5	0	0
	1	2	4	8	16	5	10	20
	1	3	9	27	81	12	36	108
Σ	4	4	14	34	98	37	31	143

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 14 & 37 \\ 4 & 14 & 34 & 31 \\ 14 & 34 & 98 & 143 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{12. gép}} \begin{array}{l} a_0 = 5{,}6 \\ a_1 = -6{,}2667 \\ a_2 = 2{,}8333 \end{array}$$

$$\boxed{y = 5{,}6 - 6{,}2667x + 2{,}8333 \cdot x^2}$$

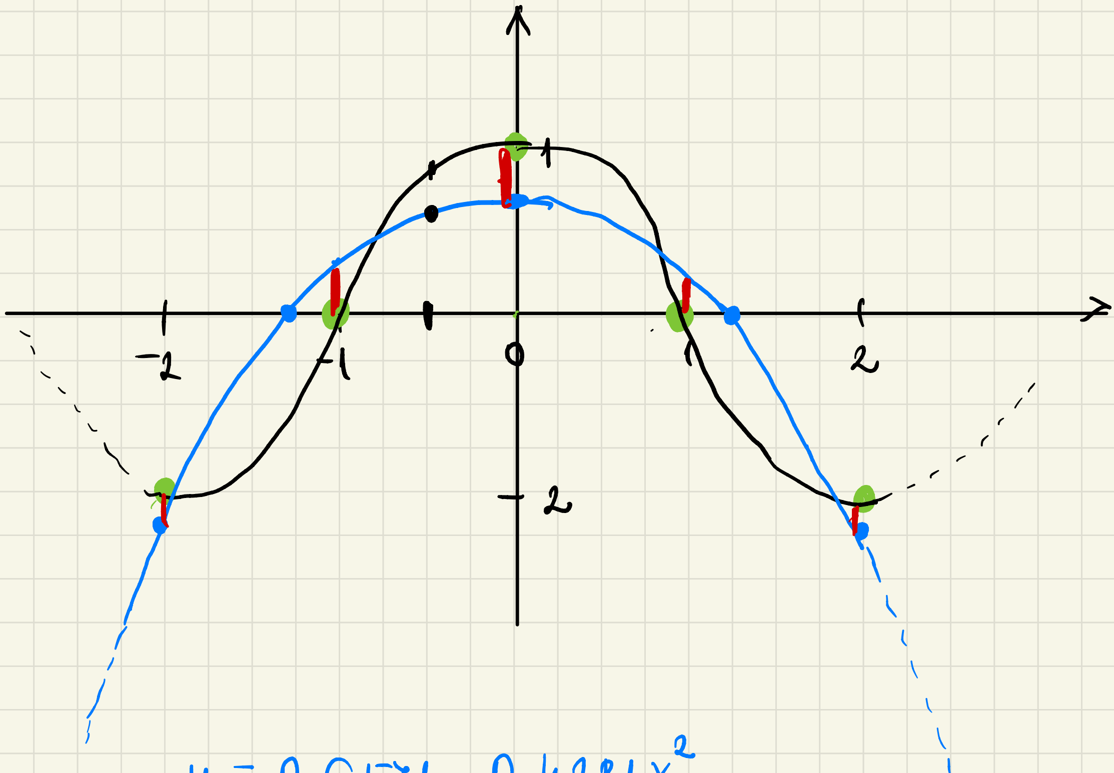
(Megjegyzés: lineáris regr. fv.?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 37 \\ 4 & 14 & 31 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = \\ a_1 = \end{array}$$

)

4. Adottak az $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = 2$ alappontok és a hozzájuk rendelt $f_j = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x_j\right)$ $(j = 1, 2, \ldots, 5)$ értékek.
Határozzuk meg az adatokhoz tartozó kvadratikus regressziós függvényt.

Mo: $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$



$y = 0{,}6571 - 0{,}4281x^2$

$x_1 = -2$ $\quad x_2 = -1$ $\quad x_3 = 0$ $\quad x_4 = 1$ $\quad x_5 = 2$

$f_1 = -1$ $\quad f_2 = 0$ $\quad f_3 = 1$ $\quad f_4 = 0$ $\quad f_5 = -1$

$$f_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (-2)\right) = -1$$

$$f_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot (-1)\right) = 0$$

$$f_3 = \ldots\ldots = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = 1$$

$$f_4 = \ldots\ldots = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) = 0$$

$N=5$

$$f_5 = \ldots\ldots = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) = -1$$

	1	x_j	x_j^2	x_j^3	x_j^4	f_j	$x_j \cdot f_j$	$x_j^2 \cdot f_j$
	1	-2	4	-8	16	-1	2	-4
	1	-1	1	-1	1	0	0	0
	1	0	0	0	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	0	0
	1	2	4	8	16	-1	-2	-4
Σ	5	0	10	0	34	-1	0	-8

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & \underline{10} & 0 & \underline{0} \\ 10 & 0 & 34 & -8 \end{array}\right) \xRightarrow{\text{zz. gép}} \begin{array}{l} a_0 = 0{,}6571 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -0{,}4281 \end{array}$$

$$\boxed{y = 0{,}6571 - 0{,}4281 \cdot x^2}$$

5. Határozzuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer legkisebb négyzetes (általánosított) megoldását.
(Mit jelent a kapott eredmény?)

a)
$$x - y = 2$$
$$2x + y = 1$$
$$x + 2y = 0$$

Mo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \; ; \; \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1} \; , \; \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$3 > 2 \Rightarrow$ túlhatározott egy. rdsz.

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underbrace{A^T \cdot A}_{} \cdot \underline{\hat{x}} = \underbrace{A^T \cdot \underline{b}}_{} \Leftarrow$$

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 1 & -1 \\
 & A^T \cdot A & & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 2 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 6 & 3 \\
-1 & 1 & 2 & 3 & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
 & & & 2 \\
 & A^T \cdot \underline{b} & & 1 \\
 & & & 0 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 4 \\
-1 & 1 & 2 & -1
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -1 \end{array}\right)
\qquad
\left[\begin{array}{l} 6x + 3y = 4 \\ 3x + 6y = -1 \end{array}\right] - 2 \cdot \underline{II}
$$

$$-9y = 6$$

$$y = \frac{-2}{3}$$

$$x = \frac{-1 - 6 \cdot \frac{-2}{3}}{3} = 1$$

Ált mo: $x = 1$

$y = -\frac{2}{3}$

(nem pontos mo!)

Mit jelent?

$\hat{x} = 1$, $\hat{y} = -\frac{2}{3}$ } helyettesítem az eredeti egy. rdsz. bal oldalába:

$$1 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \neq 2$$

$$2 \cdot 1 + \frac{-2}{3} = \frac{4}{3} \neq 1$$

$$1 + 2 \cdot \frac{-2}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0$$

$$A \cdot \underline{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\| A\underline{\hat{x}} - \underline{b} \|^2$ minimális!

$$\left(\frac{5}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 0\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

b)
$$x + y = 1 \quad \checkmark$$
$$x + 2y = 2 \quad \checkmark$$
$$x + 3y = 4 \quad \checkmark$$

Mo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{3\times 1}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$3 > 2$

$\Downarrow$

túlhatározott egyenlet

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underbrace{A^T \cdot A}_{2\times 2} \cdot \underline{x} = \underbrace{A^T \cdot \underline{b}}_{2\times 1}$$

$\leftarrow$ Gauss-féle normálalak

$$
\begin{array}{c|cc}
A^T \cdot A & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{matrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
A^T \cdot \underline{b} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 \\ 17 \end{matrix}
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 7 \\ 6 & 14 & 17 \end{array}\right)
\qquad
\left[\begin{array}{l} 3x + 6y = 7 \\ 6x + 14y = 17 \end{array}\right] -2\cdot \mathrm{I}
$$

sz. gép $\Longrightarrow$

$$
\boxed{\begin{array}{l} \hat{x} = -\dfrac{2}{3} \\ \hat{y} = \dfrac{3}{2} \end{array}}
$$

Mit jelent?

Helyettesítünk az eredeti egy. rdsz. bal old:

$$
\begin{array}{lll}
-\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{6} & \neq & 1 \\
-\dfrac{2}{3} + 2\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{3} & \neq & 2 \\
-\dfrac{2}{3} + 3\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{6} & \neq & 4
\end{array}
\qquad
A\cdot\hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{23}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{b}
$$

$\| A\hat{x} - \underline{b} \|^2$ minimális!

c) $x_1 + x_2 = 1$

$2x_1 + 2x_2 = 1$

$3x_1 + 4x_2 = 1$

-d) $x - 2y = 5$

$2x + 3y = 7$

Uf. $x + 2y = 1$

$x + y = 0$