3. Gyakorlat

2024. 02. 21.

Interpoláció:

- Lagrange-interpoláció

$$\boxed{L_N(x_j) = f_j} \qquad j = 0,1,2,\dots,N$$

$$\left[\begin{array}{l} x_0, x_1, \dots, x_N \\ f_0, f_1, \dots, f_N \end{array}\right.$$

$$\underbrace{(N+1)}$$

- Hermite-interpoláció

$$H(x_j) = f_j$$
$$H^{(k)}(x_j) = f_j^{(k)}$$

$x_0, x_1, \dots, x_N$

$f_0, f_1, \dots, f_N$

$f_0^{(n)}, f_1^{(k)}, \dots, f_N^{(\dots)}$

kétpontos Hermite

1. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot.

a) $x_0=-2$ $\quad x_1=1$ $\quad x_2=2$ $\quad x_3=4$

$f_0=-20$ $\quad f_1=-2$ $\quad f_2=12$ $\quad f_3=7$

Határozzuk meg az interpolációs polinom helyettesítési értéket az $x=0$ helyen.

Mo: (osztott differenciák módszere)

Fokszám? max. $(4-1)=3$ $\qquad n=4$

$$L_3(x) = a_0 + a_1\cdot(x-x_0) + a_2\cdot(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ a_3\cdot(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

! $\cancel{x_3}$?? a_0, a_1, a_2, a_3

x_j	f_j			
-2	$\boxed{-20} = a_0$	$\frac{-2-(-20)}{1-(-2)} = \boxed{6} = a_1$	$\frac{14-6}{2-(-2)} = \boxed{2} = a_2$	$\frac{-\frac{11}{2}-2}{4-(-2)} = \boxed{-\frac{5}{4}} = a_3$
1	-2	$\frac{12-(-2)}{2-1} = 14$	$\frac{-\frac{5}{2}-14}{4-1} = -\frac{11}{2}$	
2	12	$\frac{7-12}{4-2} = -\frac{5}{2}$		
4	7			

$$\boxed{L_3(x) = -20 + 6\cdot(x-(-2)) + 2\cdot(x+2)\cdot(x-1) - \frac{5}{4}(x+2)(x-1)(x-2)}$$

$$L_3(0) = -20 + 6\cdot(0+2) + 2\cdot(0+2)(0-1) - \frac{5}{4}(0+2)(0-1)(0-2) = \underline{\underline{-17}}$$

b) $x_0 = -1 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 5$ $\quad x = 3$

$f_0 = -4 \qquad f_1 = 2 \qquad f_2 = 0 \qquad f_3 = 12$

Határozzuk meg az interpolációs polinom helyettesítési értékét az $\underline{x = 3}$ helyen.

Mo: 4 db alappont $\Rightarrow$ max. $(4-1) = 3$-adfokú pol.

Osztott differenciák módszere:

$$L_3(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + a_3 \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

a_0, a_1, a_2, a_3 ?? $\quad \cancel{x_3}$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_j & f_j = a_0 & & & & & & \\
-1 & \boxed{-4} & & & & & & \\
 & & \dfrac{2-(-4)}{0-(-1)} = \boxed{6} = a_1 & & & & & \\
0 & 2 & & & \dfrac{-1-6}{2-(-1)} = \boxed{-\frac{7}{3}} = a_2 & & & \\
 & & \dfrac{0-2}{2-0} = -1 & & & & \dfrac{1-\left(-\frac{7}{3}\right)}{5-(-1)} = \boxed{\frac{5}{9}} = a_3 & \\
2 & 0 & & & \dfrac{4-(-1)}{5-0} = 1 & & & \\
 & & \dfrac{12-0}{5-2} = 4 & & & & & \\
5 & 12 & & & & & &
\end{array}$$

$$\boxed{L_3(x) = -4 + 6(x - (-1)) - \frac{7}{3}(x+1)(x-0) + \frac{5}{9}(x+1)x \cdot (x-2)}$$

$x = 3 \quad L_3(3) = -4 + 6(3+1) - \frac{7}{3}(3+1) \cdot 3 + \frac{5}{9}(3+1) \cdot 3(3-1) = -\frac{4}{3}$

c) $x_0 = -4 \qquad x_1 = -2 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1$

$f_0 = 0 \qquad f_1 = 3 \qquad f_2 = 5 \qquad f_3 = 8$

<u>Mo:</u>

1. 2. 3.

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
x_j & f_j & & & \\
\hline
-4 & \boxed{0} = a_0 & & & \\
 & & \dfrac{3-0}{-2-(-4)} = \boxed{\dfrac{3}{2}} = a_1 & & \\
-2 & 3 & & \dfrac{1-\frac{3}{2}}{0-(-4)} = \boxed{\dfrac{-1}{8}} = a_2 & \\
 & & \dfrac{5-3}{0-(-2)} = 1 & & \dfrac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{8}\right)}{1-(-4)} = \boxed{\dfrac{19}{120}} = a_3 \\
0 & 5 & & \dfrac{3-1}{1-(-2)} = \dfrac{2}{3} & \\
 & & \dfrac{8-5}{1-0} = 3 & & \\
1 & 8 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = 0 + \frac{3}{2}\big(x-(-4)\big) - \frac{1}{8}(x+4)\big(x-(-2)\big) +$$

$$+ \frac{19}{120}(x+4)(x+2)(x-0)$$

d) $x_0 = 0$ $\quad x_1 = 2$ $\quad x_2 = 4$ $\quad x_3 = 5$

$f_0 = -4$ $\quad f_1 = 0$ $\quad f_2 = 8$ $\quad f_3 = 17$

Mo:

x_j	$f_j = a_0$	1.	2.	3.
0	$\boxed{-4}$			
		$\frac{0-(-4)}{2-0} = \boxed{2} = a_1$		
2	0		$\frac{4-2}{4-0} = \boxed{\frac{1}{2}} = a_2$	
		$\frac{8-0}{4-2} = 4$		$\frac{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}}{5-0} = \boxed{\frac{7}{30}} = a_3$
4	8		$\frac{9-4}{5-2} = \frac{5}{3}$	
		$\frac{17-8}{5-4} = 9$		
5	17			

$$L_3(x) = -4 + 2\cdot(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-2) + \frac{7}{30}(x-0)(x-2)(x-4)$$

(2.)

a) Adott az $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$ függvény. Adottak az $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_j:=f(x_j)$ $(j=0,1,2,3)$ értékek. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot és közelítsük $f(1,5)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével. Mekkora a közelítés hibája?

Mo:

$$j=0:\ f_0=f(x_0)=f(0)=\frac{0^2}{2\cdot 0-1}=0$$

$$j=1:\ f_1=f(x_1)=f(1)=\frac{1^2}{2\cdot 1-1}=1$$

$$f_2=f(x_2)=f(2)=\frac{2^2}{2\cdot 2-1}=\frac{4}{3}$$

$$f_3=f(x_3)=f(3)=\frac{3^2}{2\cdot 3-1}=\frac{9}{5}$$

x_j f_j

$$
\begin{array}{ll}
x_j & f_j \\
0 & \boxed{0} = a_0 \\
1 & 1 \\
2 & \frac{4}{3} \\
3 & \frac{9}{5}
\end{array}
$$

$$\frac{1-0}{1-0} = \boxed{1} = a_1$$

$$\frac{\frac{4}{3}-1}{2-1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{9}{5}-\frac{4}{3}}{3-2} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{\frac{1}{3}-1}{2-0} = \boxed{-\frac{1}{3}} = a_2$$

$$\frac{\frac{7}{15}-\frac{1}{3}}{3-1} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{\frac{1}{15}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{3-0} = \boxed{\frac{2}{15}} = a_3$$

$$\boxed{L_3(x) = 0 + 1\cdot(x-0) - \frac{1}{3}x\cdot(x-1) + \frac{2}{15}x\cdot(x-1)(x-2)}$$

$x = 1{,}5$

$$L_3(1{,}5) = 1{,}5 - \frac{1}{3}1{,}5(1{,}5-1) + \frac{2}{15}\cdot 1{,}5\cdot(1{,}5-1)(1{,}5-2) =$$

$$= \underline{\underline{1{,}5}}$$

pontos: $f(1{,}5) = \frac{1{,}5^2}{2\cdot 1{,}5-1} = \underline{1{,}125}$

Hiba: $|1{,}125 - 1{,}5| = 0{,}375$

$\left(\begin{array}{l} x = 0{,}5 \\ \text{szak. hely!} \end{array}\right)$

(2)

b) Adott az $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ függvény. Adottak az $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_j=f(x_j)$ $(j=0,1,2,3,4)$ értékek. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot és közelítsük $f(1,2)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével. Mekkora a közelítés hibája?

Mo:

$j=0$: $f_0=f(x_0)=f(0)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)=1$

$j=1$: $f_1=f(x_1)=f(1)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f_2=\ldots=f(2)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)=0$

$f_3=\ldots=f(3)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f_4=\ldots=f(4)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)=-1$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
x_j & f_j & & & & \\
\hline
0 & \boxed{1} = a_0 & & & & \\
 & & \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{1-0} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} = a_1 & & & \\
1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}{2-0} = \boxed{\frac{1-\sqrt{2}}{2}} = a_2 & & \\
 & & \dfrac{0-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \dfrac{0-\frac{1-\sqrt{2}}{2}}{3-0} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-1}{6}} = a_3 & \\
2 & 0 & & \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3-1} = 0 & & \dfrac{\frac{\sqrt{2}-1}{6}-\frac{\sqrt{2}-1}{6}}{4-0} = \boxed{0} = a_4 \\
 & & \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{3-2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \dfrac{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}-0}{4-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{6} & \\
3 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \dfrac{\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4-2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} & & \\
 & & \dfrac{-1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4-3} = -1+\frac{\sqrt{2}}{2} & & & \\
4 & -1 & & & &
\end{array}
$$

$$
L_4(x) = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\cdot(x-0) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(x-0)(x-1) +
$$

$$
+ \frac{\sqrt{2}-1}{6}\cdot(x-0)(x-1)(x-2) + \cancel{0\cdot(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}
$$

$x = 1{,}2 \qquad L_4(1{,}2) = \underline{\underline{0{,}5856}}$

pontos: $f(1{,}2) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 1{,}2\right) = \underline{0{,}5878}$

Hiba: $\left| 0{,}5878 - 0{,}5856 \right| = 0{,}0022$

3. Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot.

a)

$x_0 = 0{,}5$	$x_1 = 1$
$f_0 = -1$	$f_1 = 1$
$f_0' = 2$	$f_1' = 2$

$h = x_1 - x_0 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Mo: fokszám? max: $(2+2)-1 = 3$

$$H_3(x) = A + B\cdot\frac{(x-x_0)}{h} + C\,\frac{(x-x_0)^2}{h^2} + D\,\frac{(x-x_0)^3}{h^3}$$

A, B, C, D ???

$$\begin{aligned} A &= f_0 \\ A + B + C + D &= f_1 \\ B &= f_0' \cdot h \\ B + 2C + 3D &= f_1' \cdot h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ A + B + C + D &= 1 \\ B &= 2 \cdot 0{,}5 \\ B + 2C + 3D &= 2 \cdot 0{,}5 \end{aligned}$$

$\boxed{A = -1}$

$\boxed{B = 1}$

(1) $C + D = 1 - (-1) - (1) = 1$

(2) $2C + 3D = 1 - (1) = 0$

(2) − 2·(1)

$\boxed{D = -2}$ $\boxed{C = 3}$

$$\boxed{H_3(x) = -1 + 1 \cdot \frac{(x-0{,}5)}{0{,}5} + 3 \cdot \frac{(x-0{,}5)^2}{0{,}5^2} - 2 \cdot \frac{(x-0{,}5)^3}{0{,}5^3}}$$

b) $x_0 = 1$ $\quad x_1 = 1,5$

$f_0 = 0 \quad f_1 = 2$

$f_0' = 2 \quad f_1' = 1$

$h = x_1 - x_0 = 1,5 - 1 = 0,5$

Mo: fokszám? max. $(2+2)-1 = 3$

$$\boxed{H_3(x) = A + B\cdot\frac{(x-x_0)}{h} + C\cdot\frac{(x-x_0)^2}{h^2} + D\cdot\frac{(x-x_0)^3}{h^3}}$$

A, B, C, D ???

$$\boxed{\begin{aligned} A &= f_0 \\ A+B+C+D &= f_1 \\ B &= f_0'\cdot h \\ B+2C+3D &= f_1'\cdot h \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \underbrace{A+B}+C+D &= 2 \\ B &= 2\cdot 0,5 \\ \underbrace{B}+2C+3D &= 1\cdot 0,5 \end{aligned}$$

$\boxed{A=0}$, $\boxed{B=1}$

(1) $C + D = 2 - 0 - 1 = 1$

(2) $2C + 3D = -0,5$

(2) − 2·(1) $\boxed{D = -2,5}$

$\boxed{C = 3,5}$

$$\boxed{H_3(x) = 0 + 1 \cdot \frac{x-1}{0,5} + 3,5\,\frac{(x-1)^2}{0,5^2} - 2,5\,\frac{(x-1)^3}{0,5^3}}$$

4. a) Adott az $f(x) = e^{x^2+1}$ függvény. Adottak az $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}4$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_j = f(x_j)$ és $f_j' = f'(x_j)$ $(j = 0,1)$ értékek. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot. Közelítsük $f(0{,}1)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével. Mekkora a közelítés hibája?

Mo:

0,1

$x_0 = 0$	$x_1 = 0{,}4$
$f_0 = 2{,}7183$	$f_1 = 3{,}1899$
$f_0' = 0$	$f_1' = 2{,}5519$

$h = 0{,}4 - 0 = 0{,}4$

$f'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x$

$$f_0 = f(x_0) = f(0) = e^{0^2+1} = 2{,}7183$$

$$f_1 = \ldots = f(0{,}4) = e^{0{,}4^2+1} = 3{,}1899$$

$$f_0' = f'(x_0) = f'(0) = e^{0^2+1} \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

$$f_1' = f'(x_1) = f'(0{,}4) = e^{0{,}4^2+1} \cdot 2 \cdot 0{,}4 = 2{,}5519$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 2{,}7183\\ A+B+C+D &= 3{,}1899\\ B &= 0\cdot 0{,}4 = 0\\ B+2C+3D &= 2{,}5519\cdot 0{,}4\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{sz. gép}} \begin{aligned} A&=2{,}7183\\ C&=0{,}3942\\ B&=0\\ D&=0{,}0775\end{aligned}$$

$$\boxed{H_3(x) = 2{,}7183 + 0\cdot\frac{(x-0)}{0{,}4} + 0{,}3942\,\frac{(x-0)^2}{0{,}4^2} + 0{,}0775\,\frac{(x-0)^3}{0{,}4^3}}$$

$x = 0{,}1$

$$H_3(0{,}1) = 2{,}7183 + 0{,}3942\,\frac{0{,}1^2}{0{,}4^2} + 0{,}0775\cdot\frac{0{,}1^3}{0{,}4^3} =$$

$$= \underline{\underline{2{,}7441}}$$

pontos: $f(0{,}1) = e^{0{,}1^2+1} = \underline{2{,}7456}$

hiba: $|2{,}7456 - 2{,}7441| = \underline{\underline{0{,}0015}}$

4.

b) Adott az $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ függvény. Adottak az $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_j = f(x_j)$ és $f'_j = f'(x_j)$ $(j = 0, 1)$ értékek. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot. Közelítsük $f(0{,}1)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével. Mekkora a közelítés hibája?

Mo:

$0{,}1$

$x_0 = 0$	$x_1 = 0{,}25$
$f_0 = 1$	$f_1 = \dfrac{2}{3}$
$f'_0 = -2$	$f'_1 = -\dfrac{8}{9}$

$h = 0{,}25 - 0 = 0{,}25$

$$f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} \cdot 2$$

$$f_0 = f(x_0) = f(0) = \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} = 1$$

$$f_1 = f(x_1) = f(0{,}25) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}25 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$f'_0 = f'(x_0) = f'(0) = \frac{-1}{(2 \cdot 0 + 1)^2} \cdot 2 = -2$$

$$f'_1 = f'(x_1) = f'(0{,}25) = \ldots = -\frac{8}{9}$$

$$\left.\begin{aligned} A \qquad\qquad\qquad &= 1 \\ A + B + C + D &= \frac{2}{3} \\ B &= \underline{-2\cdot 0{,}25} \\ B + 2C + 3D &= -\frac{8}{9}\cdot 0{,}25 \end{aligned}\right\} \overset{\text{sz. gép.}}{\Longrightarrow} \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -0{,}5 \\ C &= 0{,}2222 \\ D &= -0{,}0556 \end{aligned}$$

$$H_3(x) = 1 - 0{,}5\cdot\frac{x-0}{0{,}25} + 0{,}2222\cdot\frac{(x-0)^2}{0{,}25^2} - 0{,}0566\cdot\frac{(x-0)^3}{0{,}25^3}$$

$$x = 0{,}1 \qquad H_3(0{,}1) = 1 - 0{,}5\,\frac{0{,}1}{0{,}25} + 0{,}2222\,\frac{0{,}1^2}{0{,}25^2} - 0{,}0566\,\frac{0{,}1^3}{0{,}25^3}$$

$$= \underline{\underline{0{,}8333}} \qquad \left(\underline{f(0{,}1)} \approx H_3(0{,}1) = 0{,}8333\right)$$

pontos: $f(0{,}1) = \dfrac{1}{2\cdot 0{,}1 + 1} = \underline{0{,}832}$

Hiba: $|0{,}832 - 0{,}8333| = 0{,}0013$

5. Adott az $f(x) = \ln(x^2+1)$ függvény. Adottak az $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_j = f(x_j)$ $(j = 0, 1, 2)$ értékek. Legyenek $f_0' = f'(x_0)$, $f_2' = f'(x_2)$. Határozzuk meg az adatokra illeszkedő harmadfokú spline függvényt.

$h = 1$

Mo:

$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
$f_0 = 0$	$f_1 = \ln 2$	$f_2 = \ln 5$
$f_0' = 0$	$f_1' = ? = 1{,}0071$	$f_2' = 0{,}8$

$$f_0 = f(x_0) = f(0) = \ln(0^2+1) = 0$$

$$f_1 = f(x_1) = f(1) = \ldots = \ln 2$$

$$f_2 = f(x_2) = f(2) \ldots = \ln 5$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f_0' = f'(x_0) = f'(0) = \frac{2 \cdot 0}{0^2+1} = 0$$

$$f_2' = f'(x_2) = f'(2) = \ldots = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

1) harmadfokú spline fv. $\quad x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N$

$$\boxed{f'_{k-1} + 4\cdot f'_k + f'_{k+1} = \frac{-3f_{k-1}+3f_{k+1}}{h}} \qquad k = 1,2,3,\dots,N-1$$

f'_1 ??

• $k=1$

$$f'_0 + 4\cdot f'_1 + f'_2 = \frac{-3f_0+3f_2}{1}$$

$$0 + 4\cdot f'_1 + 0{,}8 = -3\cdot 0 + 3\cdot \ln 5$$

$$f'_1 = \frac{3\cdot\ln 5 - 0{,}8}{4} = 1{,}0071$$

2) 1. $\boxed{x_0, x_1}$-re Hermite-interpoláció

$$\left.\begin{aligned} A &= f_0 = 0 \\ A+B+C+D &= f_1 = \ln 2 \\ B &= f'_0\cdot h = 0\cdot 1 \\ B+2C+3D &= f'_1\cdot h = 1{,}0071\cdot 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{gép} \quad \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \\ C &= 1{,}0723 \\ D &= -0{,}3792 \end{aligned}$$

$$H_3(x) = 0 + 0\cdot\frac{(x-0)}{1} + 1{,}0723\,\frac{(x-0)^2}{1^2} - 0{,}3792\,\frac{(x-0)^3}{1^3}$$

$$\boxed{H_3^{(1)}(x) = 1{,}0723\cdot x^2 - 0{,}3792\cdot x^3}$$

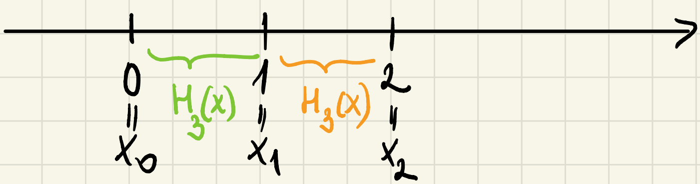
II. $\boxed{x_1, x_2}$ - re Hermite - interpoláció

$$\left.\begin{aligned}
A &= f_1 = \ln 2 \\
A + B + C + D &= f_2 = \ln 5 \\
B &= f_1' \cdot h = 1{,}0071 \cdot 1 \\
B + 2C + 3D &= f_2' \cdot h = 0{,}8 \cdot 1
\end{aligned}\right\} \underset{\Longrightarrow}{\text{számgép}} \quad \begin{aligned} A &= 0{,}6931 \\ B &= 1{,}0071 \\ C &= -0{,}0653 \\ D &= -0{,}0255 \end{aligned}$$

$$H_3(x) = 0{,}6931 + 1{,}0071 \cdot \frac{(x-1)}{1} - 0{,}0653 \frac{(x-1)^2}{1^2} - 0{,}0255 \frac{(x-1)^3}{1^3}$$

$$H_3^{(2)}(x) = 0{,}6931 + 1{,}0071 \cdot (x-1) - 0{,}0653 (x-1)^2 - 0{,}0255 (x-1)^3$$

3)



$$S_3(x) = \begin{cases} H_3^{(1)}(x) & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ H_3^{(2)}(x) & \text{ha } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$