4. Gyakorlat

2024. 02. 28.

$x_0 , x_1 , \ldots , x_N$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} L_N(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot f(x_j) = I(f)$$

① a) legfeljebb hányadfokú polinomokra

pontos az $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ integrál értékét

közelítő $\boxed{J(f) = \dfrac{f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}$ kvadratúra?

Mo: $f(x) = x^k$ $k = 0, 1, 2, \dots$

- $k = 0$ $f(x) = x^0 = 1$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dx = \Big[x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1 = J(f) = \frac{1+1}{2} = 1$$

- $k = 1$ $f(x) = x^1 = x$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0 = J(f) = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1}{2} = 0$$

- $k = 2$ $f(x) = x^2$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} \neq J(f) = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} = \frac{1}{16}$$

max. elsőfokúra pontos

Megj: $\quad f(x) = e^{x^2}$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{x^2}\,dx \approx \frac{e^{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} + e^{\left(\frac{1}{4}\right)^2}}{2}$$

hf.

① b) Legfeljebb hányadfokú polinomokra pontos az $\int_0^1 f(x)\,dx$ integrál értékét közelítő $J(f) = \dfrac{f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{5}{6}\right)}{2}$ kvadratúra?

Mo: $f(x) = x^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

- $k=0 \qquad f(x) = x^0 = 1$

$$\int_0^1 1\,dx = \left[x\right]_0^1 = 1 = J(f) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^0+\left(\frac{5}{6}\right)^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

- $k=1 \qquad f(x) = x^1 = x$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = J(f) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^1+\left(\frac{5}{6}\right)^1}{2} = \frac{1}{2}$$

- $k=2 \qquad f(x) = x^2$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq J(f) = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2} = \frac{13}{36}$$

max. elsőfokúra pontos

2.

a) Mekkora legyen 'c' értéke, hogy az $\int_0^2 f(x)\,dx$ integrál értékét közelítő

$$I(f) = \frac{f(0) + 2c\,f(1) + f(2)}{c+1} \qquad (c \neq -1)$$

kvadratúra a lehető legmagasabb fokszámú polinomokra pontos legyen?

→ Mekkora ez a fokszám?

Mo: $f(x) = x^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

• $k = 0 \quad \underbrace{f(x)} = x^0 = \underbrace{1}$

$$\int_0^2 1\,dx = \Big[x\Big]_0^2 = 2 \overset{\checkmark}{=} I(f) = \frac{1 + 2c \cdot 1 + 1}{c+1} = \frac{\overset{2(c+1)}{2c+2}}{c+1} = 2$$

• $k = 1 \quad f(x) = \underbrace{x^1}$

$$\int_0^2 x\,dx = 2 \overset{\checkmark}{=} I(f) = \frac{0^1 + 2 \cdot c \cdot 1^1 + 2^1}{c+1} = \frac{2c+2}{c+1} = 2$$

- $k=2 \qquad f(x)=x^2$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3} = I(f) = \frac{0^2+2c\cdot 1^2+2^2}{c+1} = \frac{2c+4}{c+1}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{2c+4}{c+1}$$

$$8c+8 = 6c+12$$

$$2c = 4$$

$$\boxed{c=2}$$

- $k=3 \qquad f(x)=x^3$

$$\int_0^2 x^3\,dx = 4 = I(f) = \frac{0^3+2\cdot 2\cdot 1^3+2^3}{2+1} = 4$$

- $k=4 \qquad f(x)=x^4$

$$\int_0^2 x^4\,dx = \frac{32}{5} = 6{,}4 \neq I(f) = \frac{0^4+2\cdot 2\cdot 1^4+2^4}{2+1} = \frac{20}{3} = 6{,}67$$

$c=2$ esetén pontos max. fokszámú polinomokra

a max. fokszám: 3-adfok

2.

b) Mekkora legyen 'c' értéke, hogy az

$\int_0^2 f(x)\,dx$ integrál értékét közelítő

$$I(f) = \frac{f(0) + c \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) + c \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) + f(2)}{c+1} \qquad (c \neq -1)$$

kvadratúra a lehető legmagasabb fokszámú polinomokra pontos legyen?

$\Longrightarrow$ Mekkora ez a fokszám?

Mo: $f(x) = x^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

- $k = 0 \qquad f(x) = x^0 = 1$

$$\int_0^2 1\,dx = [x]_0^2 = 2 \stackrel{!}{=} I(f) = \frac{1 + c \cdot 1 + c \cdot 1 + 1}{c+1} = \frac{2c+2}{c+1} = 2$$

$2(c+1)$

- $k = 1 \qquad f(x) = x^1 = x$

$$\int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \stackrel{!}{=} I(f) = \frac{0 + c \cdot \frac{2}{3} + c \cdot \frac{4}{3} + 2}{c+1} = \frac{2c+2}{c+1} = 2$$

- $k=2 \qquad f(x)=x^2$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{8}{3} = I(f) = \frac{0^2 + c\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + c\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2^2}{c+1} =$$

$$= \frac{\frac{20}{9}\cdot c + 4}{c+1}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{\frac{20}{9}c+4}{c+1}$$

$$8c+8 = \frac{20}{3}c+12$$

$$\frac{4}{3}c = 4$$

$$\boxed{c=3} \quad \checkmark$$

- $k=3 \qquad f(x)=\underline{x^3}$

$$\int_0^2 x^3\,dx = 4 \ \checkmark = \ I(f) = \frac{0^3 + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2^3}{3+1} = \frac{8+8}{4} = 4$$

- $k=4 \qquad f(x)=x^4$

$\boxed{\text{hf.}}$ (nem pontos)

$c=3$ esetén max. elsó

3. Közelítsük az alábbi integrálok értékét az egyszerű (i) érintő-, (ii) trapéz-, (iii) simpson-formulával!

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \, dx$

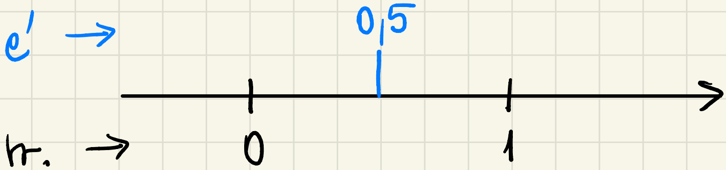
b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-3} \, dx$

c) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx$

d) $\displaystyle\int_0^2 e^x - 1 \, dx$

Mo:

a) $\int_0^1 x^3\,dx$ $\qquad f(x)=x^3$, $a=0$, $b=1$



(i) érintőf.

$$\int_0^1 x^3\,dx \approx f(0{,}5)\cdot(1-0) = 0{,}5^3\cdot 1 = \underline{\underline{0{,}125}} = \frac{1}{8}$$

(ii) trapézf.

$$\int_0^1 x^3\,dx \approx \frac{f(0)+f(1)}{2}\cdot(1-0) = \frac{0^3+1^3}{2}\cdot 1 = \underline{\underline{0{,}5}} = \frac{1}{8}$$

(iii) Simpson-f

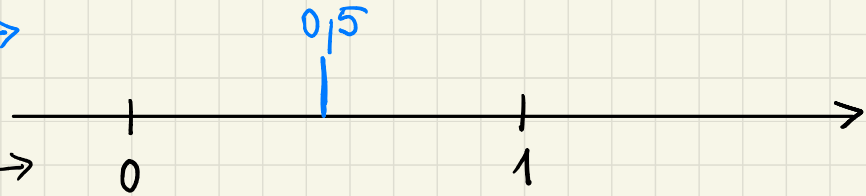
$$\int_0^1 x^3\,dx \approx \frac{f(0)+4\cdot f(0{,}5)+f(1)}{6}\cdot(1-0) = \underline{\underline{0{,}25}} = \frac{1}{4} \checkmark$$

$$\left(\text{Pontos: } \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}\right)$$

b) $\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x-3}}\,dx =$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x-3}$

e' →

h. →



(i) érintő:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx \approx f(0{,}5)\cdot(1-0) = \frac{1}{0{,}5-3}\cdot 1 = \underline{\underline{-0{,}4}}$$

(ii) trapéz:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx \approx \frac{f(0)+f(1)}{2}\cdot(1-0) = \frac{\frac{1}{0-3}+\frac{1}{1-3}}{2}\cdot 1 = \underline{\underline{-0{,}4167}}$$

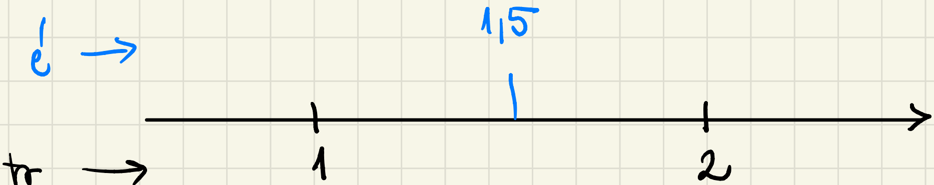
(iii) Simpson:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx \approx \frac{f(0)+4\cdot f(0{,}5)+f(1)}{6}\cdot(1-0) = \underline{\underline{-0{,}4056}}\ \checkmark$$

(Pontos: $\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx = -0{,}4055$)

c) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx$

<u>Mo:</u> $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, $a=1$, $b=2$



(i) érintő $\left[\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{b+a}{2}\right)\cdot(b-a) \right]$

$$\int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx \approx f(1{,}5)\cdot(2-1) = \left(1{,}5^2 \cdot \ln 1{,}5\right)\cdot 1 =$$

$$= \underline{\underline{0{,}9123}}$$

(ii) trapéz $\left[\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a) \right]$

$$\int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx \approx \frac{f(1)+f(2)}{2}\cdot(2-1) =$$

$$= \frac{1^2 \cdot \ln 1 + 2^2 \cdot \ln 2}{2}\cdot 1 = \underline{\underline{1{,}3863}}$$

(iii) Simpson $\left[\int_a^b f(x)\,dx \approx \dfrac{f(a)+4f\left(\frac{b+a}{2}\right)+f(b)}{6} \cdot (b-a) \right]$

$$\int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx \approx \frac{f(1)+4\cdot f(1{,}5)+f(2)}{6} \cdot (2-1) =$$

$$= \underline{\underline{1{,}0703}} \quad \checkmark$$

(Pontos : 1,0706)

d) $\int_0^2 e^x - 1 \, dx$ $f(x) = e^x - 1$, $a = 0$, $b = 2$

(i) érintő-f : $\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{b+a}{2}\right)\cdot(b-a)$

$$\int_0^2 e^x - 1 \, dx \approx f(1)\cdot(2-0) = (e^1 - 1)\cdot 2 = \underline{\underline{3{,}4366}}$$

(ii) trapéz-f : $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$

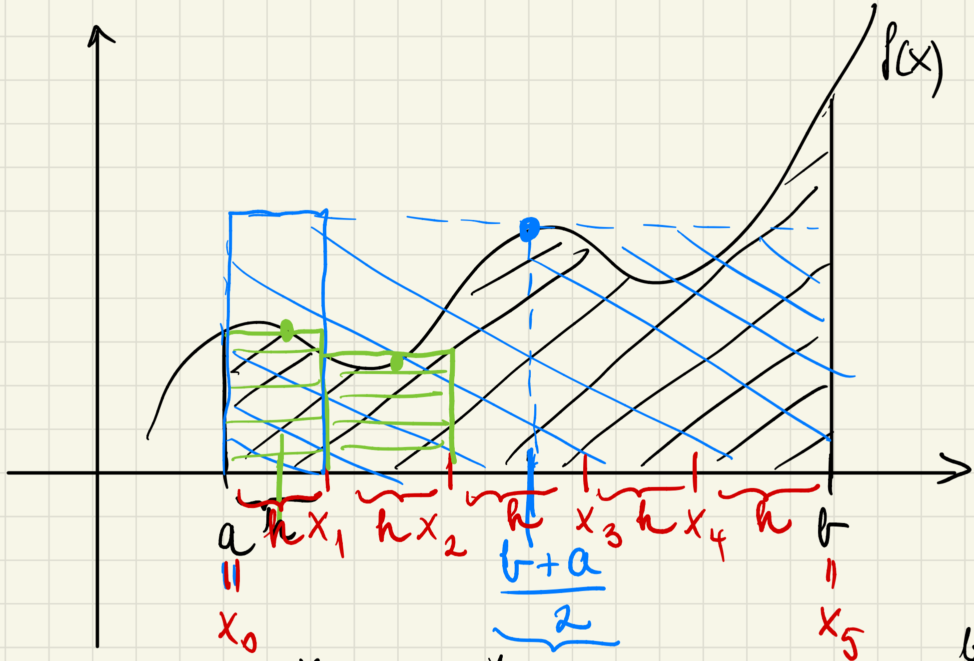
$$\int_0^2 e^x - 1 \, dx \approx \frac{f(0)+f(2)}{2}\cdot(2-0) = \frac{(e^0-1)+(e^2-1)}{2}\cdot 2$$

$$= \underline{\underline{6{,}3891}}$$

(iii) Simpson-f : $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+4f\left(\frac{b+a}{2}\right)+f(b)}{6}(b-a)$

$$\int_0^2 e^x - 1 \, dx \approx \frac{f(0)+4\cdot f(1)+f(2)}{6}\cdot(2-0) = \underline{\underline{4{,}4207}}$$

(Pontos: 4,3891)

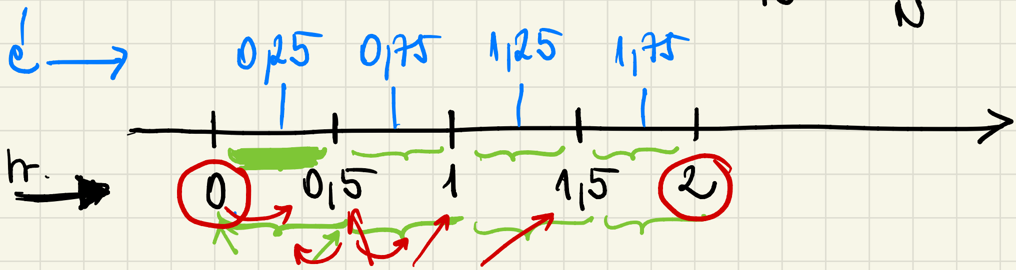


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int^{b} f(x)\,dx$$

4. Közelítsük az $\displaystyle\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{8}x^2\right) dx$ értékét az összetett (i) érintő-; (ii) trapézformulával, ekvidisztáns alappontok és $N=4$ részintervallum esetén!

Mo: $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{8}x^2\right)$; $a=0$, $b=2$; $N=4$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$



(i) érintő:

$$\int_0^2 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{8}x^2\right)}_{f(x)} dx \approx f(0,25)\cdot\frac{1}{2} + f(0,75)\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ f(1,25)\cdot\frac{1}{2} + f(1,75)\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \left[f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75)\right]\cdot\frac{1}{2} \overset{\text{gép}}{=}$$

$$= \underline{\underline{0,8762}}$$

trapéz: 2

ii) $$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{8}x^2\right)dx \approx \frac{f(0)+f(0{,}5)}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad h!!! \quad +$$

$$+\frac{f(0{,}5)+f(1)}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{f(1)+f(1{,}5)}{2}\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{f(1{,}5)+f(2)}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$h!!!$$

$$=\left[\frac{1}{2}f(0)+f(0{,}5)+f(1)+f(1{,}5)+\frac{1}{2}f(2)\right]\cdot\frac{1}{2}=$$

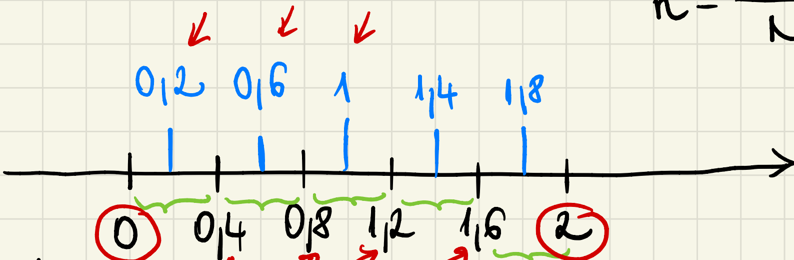
számgép
$$=\underline{\underline{0{,}8769}}$$

megjegyzés:

(iii) összetett Simpson-formulával, $N=5$ esetén

Mo: $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{8}x^2\right)$; $a=0$, $b=2$, $\boxed{N=5}$

$$h=\frac{b-a}{N}=\frac{2-0}{5}=0{,}4$$



$$\int_0^2 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{8}x^2\right)}_{f(x)}dx \approx \frac{f(0)+4\cdot f(0{,}2)+f(0{,}4)}{6}\cdot 0{,}4+$$

$$+\frac{f(0{,}4)+4\cdot f(0{,}6)+f(0{,}8)}{6}\cdot 0{,}4+\frac{f(0{,}8)+4f(1)+f(1{,}2)}{6}\cdot 0{,}4+$$

$$\ldots+\frac{f(1{,}6)+4\cdot f(1{,}8)+f(2)}{6}\cdot 0{,}4=$$

$$=\Big[\frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f(0{,}2)+\frac{1}{3}f(0{,}4)+\frac{2}{3}f(0{,}6)+\frac{1}{3}f(0{,}8)+$$

$$\ldots+\frac{1}{3}f(1{,}6)+\frac{2}{3}f(1{,}8)+\frac{1}{6}f(2)\Big]\cdot 0{,}4=$$

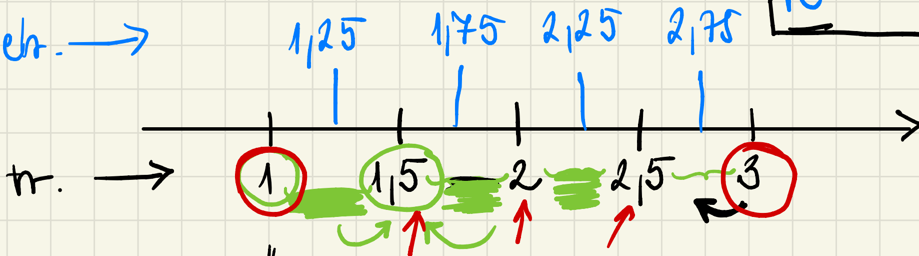
12 gép $0{,}8765$

[pontos: $0{,}8765$]

5. Közelítsük az $\int_1^3 \ln(x^2+2)\,dx$ értékét az összetett (i) érintő-, (ii) trapéz-, Simpson-formulával ekvidisztáns alappontok és $N=4$ részintervallum esetén.

Megoldás: $f(x)=\ln(x^2+2)$; $a=1$, $b=3$; $N=4$

$$\boxed{h=\frac{b-a}{N}}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$$



(i) érintőformula:

$$\int_1^3 \underbrace{\ln(x^2+2)}_{f(x)}\,dx \approx f(1,25)\cdot\frac{1}{2}+f(1,75)\cdot\frac{1}{2}+f(2,25)\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+f(2,75)\cdot\frac{1}{2}=\left[f(1,25)+f(1,75)+f(2,25)+f(2,75)\right]\cdot\frac{1}{2}$$

sz. gép $\underline{3,5525}$

(ii) trapézformula:

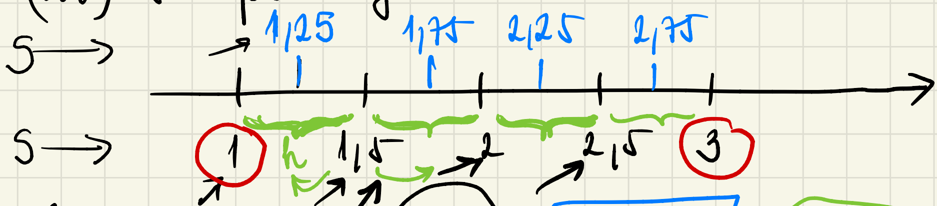
$$\int_1^3 \ln(x^2+2)\,dx \approx \frac{f(1)+f(1{,}5)}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{f(1{,}5)+f(2)}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{f(2)+f(2{,}5)}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{f(2{,}5)+f(3)}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot f(1)+f(1{,}5)+f(2)+f(2{,}5)+\frac{1}{2}f(3)\right]\cdot\frac{1}{2}=$$

$$\overset{\text{számológép}}{=} \underline{\underline{3{,}5486}}$$

(iii) Simpson-formula



$$\int_1^3 \underbrace{\ln(x^2+2)}\,dx \approx \frac{f(1)+4\cdot f(1{,}25)+f(1{,}5)}{6}\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+\frac{f(1{,}5)+4\cdot f(1{,}75)+f(2)}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{f(2)+4\cdot f(2{,}25)+f(2{,}5)}{6}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{f(2{,}5)+4\cdot f(2{,}75)+f(3)}{6}\cdot\frac{1}{2}\overset{*}{=}$$

$$=\Big[\frac{1}{6}f(1)+\frac{2}{3}\cdot f(1{,}25)+\frac{1}{3}f(1{,}5)+\frac{2}{3}f(1{,}75)+\frac{1}{3}f(2)+$$

$$+\frac{2}{3}f(2{,}25)+\frac{1}{3}f(2{,}5)+\frac{2}{3}f(2{,}75)+\frac{1}{6}f(3)\Big]\cdot\frac{1}{2}=$$

$\overset{sz.gép}{=} \underline{\underline{3{,}5512}}$

$=3{,}55118$

(Pontos: $\underline{3{,}5512}$

$3{,}55116$)

Hiba : $\left| \text{pontos érték} - \text{közelítő érték} \right|$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{f(x_{j+\frac{1}{2}})\cdot h}_{*} \right|$$

ö. érintő

tö. trapéz

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}\cdot h$$

6.) Mekkora hibával közelíti az $\int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx$ értékét az összetett érintőformula $N=40$ részintervallum és ekvidisztáns alappontok esetén?

Megoldás: $f(x) = x^2 \cdot \ln x$; $a=1$, $b=2$; $N=40$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{2-1}{40} = \frac{1}{40}$$

$$\text{Hiba} \leq \frac{b-a}{24} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \cdot h^2$$

$$\text{Hiba} \leq \frac{2-1}{24} \cdot (2\ln 2 + 3) \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^2 = 0{,}0001$$

(*)

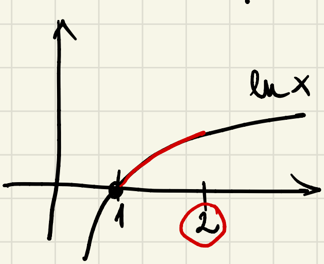
(*) $f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \cdot (2\ln x + 1)$

$f''(x) = 1 \cdot (2\ln x + 1) + x \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 2\ln x + 3$

$f''(x)$ $[1,2]$-on:
- folyt.
- nemneg. (poz.)
- mon nő

$\Rightarrow$ max-át $x=2$-nél veszi fel

értéke: $f''(2) = 2\ln 2 + 3$



7. Legalább hány ekvidisztáns részre kell osztani az $[1,3]$ intervallumot, hogy az összetett trapézformula legfeljebb 10^{-4} hibával közelítse az $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ integrált?

Mo: $f(x)=\frac{1}{x}$; $a=1$, $b=3$; $N=?$, $h=\frac{b-a}{N}=\frac{3-1}{N}$, $\boxed{h=\frac{2}{N}}$

$$\underbrace{\text{Hiba} \le \frac{b-a}{12}\cdot \max_{a\le x\le b}|f''(x)|\cdot h^2 \le 10^{-4}}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{3-1}{12}}\cdot \underset{(*)}{2}\cdot\left(\frac{2}{N}\right)^2 \le 10^{-4}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{N^2}\le 10^{-4}$$

$$\frac{4}{3}\cdot 10^{4}\le N^2$$

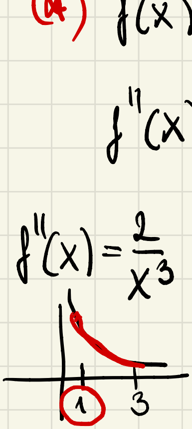
$$\boxed{115{,}47 \le N} \Rightarrow$$ Válasz: legalább 116 részre

(*) $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

$f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f''(x)=\frac{2}{x^3}$, $[1,3]$-on:
- folyt.
- pozitív ✓
- mon. csökk.

$\Rightarrow$ max-át $x=1$-nél veszi fel, értéke $f''(1)=\frac{2}{1^3}=2$



hf.

8. Legalább hány egybevágó (részintervallumra) egyenlő részre kell osztani az [1,2] intervallumot, hogy az összetett érintőformula legfeljebb 10^{-4} hibával közelítse az $\int_1^2 x^2 \cdot \ln x \, dx$ értékét?