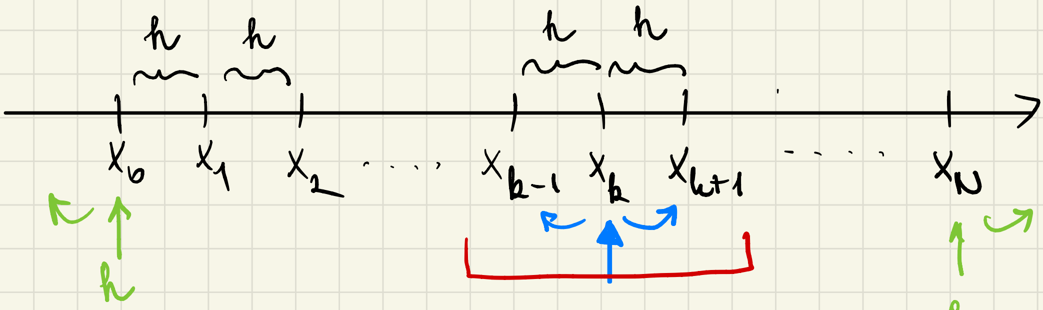
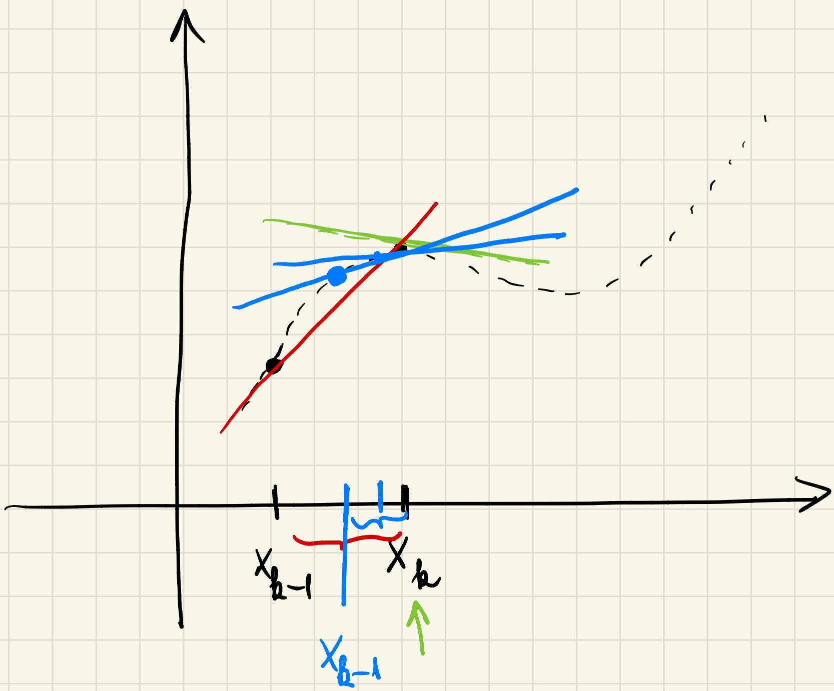
Deriváltak közelítése

2024.03.05.



(2)

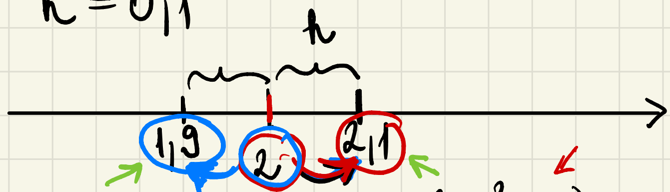


① Közelítsük az $\boxed{f(x) = \ln(x^2+2)}$ függvény deriváltjának az értékét az $\underline{x=2}$ helyen az (i) előrelépő-, (ii) hátralépő-, (iii) centrális sémával

a) $h=0{,}1$ b) $h=0{,}05$ c) $h=0{,}01$

lépésköz esetén.

<u>Mo:</u> a) $h=0{,}1$



előrelépő:

(i) $$f'(2) \approx \frac{f(2{,}1)-f(2)}{0{,}1} = \frac{\ln(2{,}1^2+2)-\ln(2^2+2)}{0{,}1} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}6609}} \qquad \mathcal{O}(h)$$

(ii) hátralépő:

$$f'(2) \approx \frac{f(2)-f(1{,}9)}{0{,}1} = \frac{\ln(2^2+2)-\ln(1{,}9^2+2)}{0{,}1} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}6720}} \qquad \mathcal{O}(h)$$

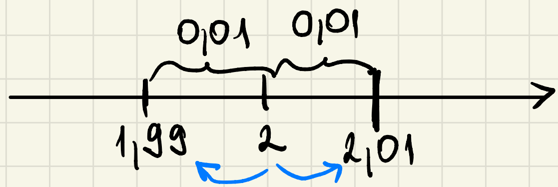
(iii) centrais

$$f'(2) \approx \frac{f(2{,}1)-f(1{,}9)}{2\cdot 0{,}1} = \frac{\ln(2{,}1^2+2)-\ln(1{,}9^2+2)}{2\cdot 0{,}1} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}6665}} \qquad O(h^2)$$

(pontos : 0,$\underline{6667}$) (pontos : 0,$\underline{66666666}$)

c) $h = 0{,}01$



(iii) centrais :

$$f'(2) \approx \frac{f(2{,}01)-f(1{,}99)}{2\cdot 0{,}01} = \dots = 0{,}6667$$

$$(= 0{,}\underline{66666543})$$

$h = 0{,}1 \qquad h^2 = 0{,}01 \Rightarrow O(h^2)$

$h = 0{,}01 \qquad h^2 = 0{,}0001 \Rightarrow O(h^2)$

Megjegyzés:

h	Hiba
0.1	0.000417292784913
0.01	0.000004166729162
0.001	0.000000041666615
0.0001	0.000000000416834
0.00001	0.000000000008827
0.000001	0.000000000014378
0.0000001	0.000000000263178
0.00000001	0.000000003038735

Az $f(x) = \ln x$ függvény deriváltjának $x = 2$ helyen vett értékét közelítettük centrális sémával $h = 0{,}1$ esetén az 1/a/iii; $h = 0{,}01$ esetén az 1/c/iii feladatban. A fenti táblázat a közelítés hibáját (azaz a közelítő érték és a derivált pontos értékének eltérését) mutatja, különböző 'h' lépésközök esetén (15-tizedesjegyig).

Azt várjuk, hogy a 'h' lépésköz csökkentésével a közelítés hibája is csökken. Ehelyett azt látjuk, hogy a hiba várt csökkenése egy 'h' értéknél nemcsak megáll, hanem megfordul. Vagyis nem tudjuk a derivált értékét tetszőleges pontossággal közelíteni a gyakorlatban. Ennek oka a számítások kerekítési hibájában keresendő.

(2) Közelítsük $f''(2)$ értékét a hárompontos centrális sémával, ha

$f(x) = \ln(x^2+2)$, $h = 0{,}1$.

3.) Legyen $h>0$ adott lépésköz, x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 3h$, $f_j = f(x_j)$ $(j = 0,1,2)$, ahol $f(x)$ adott, elegendően sokszor folytonosan differenciálható függvény.

Konstruáljunk

a) $f'(x_0)$ közelítésére egy h-szerint legalább másodrendű sémát.

b) $f''(x_0)$ közelítésére egy h-szerint legalább elsőrendű sémát.

$\cancel{f'''(x_0)}$?

Mo:

1. lépés (Taylor-sor)

$$(*)\quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3}_{\text{Lagrange-mar.-tag}}$$

2. lépés (helyettesítés: (*)-ba a mér. alappontokat)

- $x = x_1$: $\underline{x_1 - x_0} = (x_0 + h) - x_0 = \underline{h}$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\underbrace{(x_1 - x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot\underbrace{(x_1 - x_0)}^2 + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{6}(\underbrace{x_1 - x_0}_{h})^3}$$

(I) $$f_1 = f_0 + h\, f'(x_0) + h^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2} + o(h^3)$$

- $x = x_2$: $\underline{x_2 - x_0} = (x_0 + 3h) - x_0 = \underline{3h}$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x_2 - x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2}\underbrace{(x_2 - x_0)}^2 + \underbrace{\frac{f'''(\eta)}{6}(\underbrace{x_2 - x_0})^3}$$

(II) $$f_2 = f_0 + 3h\, f'(x_0) + 9h^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2} + o(h^3)$$

3. lépés (egyenletrendszer)

b) $f''(x_0)$

$3\cdot\text{(I)} - \text{(II)}$

$$3f_1 - f_2 = 2f_0 - \cancel{6}^{\,3}h^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{\cancel{2}} + o(h^3)$$

$$3h^2 \cdot f''(x_0) = 2f_0 - 3f_1 + f_2 + o(h^3)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 3f_1 + f_2}{3h^2}$$; $o(h)$

a) $f'(x_0)$

$9 \cdot (I) - (II) \Rightarrow$

4. Legyen $h>0$ adott lépésköz, x_0, $x_1 = x_0 + 2h$, $x_2 = x_0 + 5h$, $f_j = f(x_j)$ $(j = 0,1,2)$, ahol $f(x)$ adott, elegendően sokszor folytonosan differenciálható függvény.

Konstruáljunk

a) $f'(x_1)$ közelítésére egy h-szerint legalább másodrendű sémát.

b) $f''(x_2)$ közelítésére egy h-szerint legalább elsőrendű sémát.