

Próba vizsga megoldással (2)



-
1. Adottak az $x_1 := 0$, $x_2 := 2$, $x_3 := 3$, $x_4 := 4$ pontok és a hozzájuk rendelt $f_1 := 3$, $f_2 := 5$, $f_3 := 6$, $f_4 := 9$ értékek.
- (a) Határozzuk meg a fenti adatokra illeszkedő lineáris regressziós függvényt. (4p)
- (b) Határozzuk meg a fenti adatokra illeszkedő kvadratikus regressziós függvényt. (4p)
2. Adott az $f(x) = \frac{12}{x+1}$ függvény. Adottak az $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_3 = f(x_3)$ értékek.
- (a) Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot! (7p)
- (b) Becsüljük $f(1,5)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével! (2p)
3. Legyen $h > 0$ adott lépésköz, $x_1 = x_0 - 2h$, x_0 , $x_2 = x_0 + h$, $f_1 = f(x_1)$, $f_0 = f(x_0)$, $f_2 = f(x_2)$, ahol $f(x)$ adott, legalább háromszor folytonosan differenciálható függvény.
- (a) Konstruáljunk $f'(x_0)$ közelítésére egy h szerint legalább másodrendű sémát. (4p)
- (b) Konstruáljunk $f''(x_2)$ közelítésére egy h szerint legalább elsőrendű sémát. (4p)
4. Egy ügyfélszolgálatnál az ügyfelek száma Poisson-eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. A tapasztalatok szerint 0,9 a valószínűsége annak, hogy egy óra alatt érkezik legalább egy ügyfél. Mekkora annak a valószínűsége, hogy
- (a) két óra alatt legalább 3 ügyfél érkezik? (6p)
- (b) 10 perc alatt nem érkezik ügyfél? (3p)
5. Egy munkadarab átmérője normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, 12 mm várható értékkel. A munkadarabok 22%-a rövidebb, mint 11,8 mm.
- (a) Mekkora a munkadarab átmérőjének szórása? (5p)
- (b) A munkadarabok hány százalékanak átmérője esik 11,9 és 12,1 mm közé? (3p)
- (c) Ábrázoljuk a feladatban megadott valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. (2p)
6. Egy műszer élettartama exponenciális eloszlást követ, 15 000 óra várható élettartammal. Veszünk 60 ilyen műszert és addig használjuk őket, míg tönkre nem mennek.
- (a) Mekkora a műszerek élettartamának átlagának várható értéke és szórása? (2p)
- (b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a műszerek élettartamának átlaga 14 000 és 15 500 óra közé esik? (6p)
7. Egy munkafolyamat elvégzésére a szintidő 30 perc. 18 munkás esetén megmértük a munkafolyamat elvégzésének időtartamát. A mintaátlagra 33,2 perc adódott, a korrigált tapasztalati szórásra pedig 4,8 perc adódott. (Feltételezzük, hogy az adatok normális eloszlásból származnak.)
- (a) 95%-os szignifikanciaszinten elfogadható-e, hogy munkafolyamat elvégzésének időtartamának várható értéke megegyezik a szintidővel? (6p)
- (b) Milyen próbát alkalmazunk, ha az adatok 50 elemű mintából származnak? (Válaszát indokolja!) (2p)

①

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

$x_4 = 4$

$d_1 = 3$

$d_2 = 5$

$d_3 = 6$

$d_4 = 9$

	x_j	x_j^2	x_j^3	x_j^4	d_j	$x_j \cdot d_j$	$x_j^2 \cdot d_j$
1	0	0	0	0	3	0	0
1	2	4	8	16	5	10	20
1	3	9	27	81	6	18	54
1	4	16	64	256	9	36	144
Σ	4	9	29	99	23	64	218

a)

$y = a_0 + a_1 \cdot x$

a_0, a_1 ??

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 64 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a_0 + 9a_1 = 23 \\ 9a_0 + 29a_1 = 64 \end{cases}$$

$a_0 = 2,6$

$a_1 = 1,4$

$$y = 2,6 + 1,4 \cdot x$$

$$b) \rightarrow y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \quad a_0, a_1, a_2 \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 29 \\ 9 & 29 & 99 \\ 29 & 99 & 353 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 64 \\ 218 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 3,0545$$

$$a_1 = 0,1727$$

$$a_2 = 0,3182$$

$$y = 3,0545 + 0,1727x + 0,3182x^2$$

② $x_0 = 0$ $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$
 $f_0 = 12$ $f_1 = 6$ $f_2 = 4$ $f_3 = 3$

$f_0 = f(x_0) = \frac{12}{0+1} = 12$

$f_1 = f(x_1) = f(1) = \frac{12}{1+1} = 6$... etc...

$f(x) = \frac{12}{x+1}$ ✓

a) ~~over~~ diff-4 nodes:

x_j	f_j	$= a_0$		$= a_1$		$= a_2$
<u>0</u>	<u>12</u>		$\frac{6-12}{1-0} = -6$		$\frac{-2-(-6)}{2-0} = 2$	
<u>1</u>	<u>6</u>		$\frac{4-6}{2-1} = -2$		$\frac{-1-(-2)}{3-1} = \frac{1}{2}$	
<u>2</u>	<u>4</u>		$\frac{3-4}{3-2} = -1$			
<u>3</u>	<u>3</u>					

$\frac{\frac{1}{2} - 2}{3 - 0} = -\frac{1}{2} = a_3$

$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$L(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)(x-x_1) + a_3 \cdot (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ ✓

$= 12 - 6 \cdot (x-0) + 2 \cdot (x-0)(x-1) - \frac{1}{2} (x-0)(x-1)(x-2)$

$$\left(L(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 10x + 12 \right)$$

$$b) \quad f(1,5) \approx L(1,5) = \underline{4,6875}$$

↑

$$(Pontos : f(1,5) = \frac{12}{1,5+1} = 4,8)$$

③

$$\underline{x_1 = x_0 - 2h}$$

$$\underline{x_0}$$

$$\underline{x_2 = x_0 + h}$$

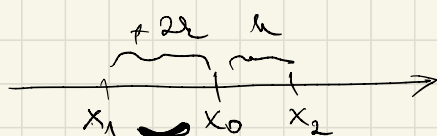
$$\underline{f_1 = f(x_1)}$$

$$\underline{f_0 = f(x_0)}$$

$$\underline{f_2 = f(x_2)}$$

a) $f'(x_0)$

Taylor-Form:



$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-x_0)^3$$

$$x = x_1$$

$$\underline{x_1 - x_0 = (x_0 - 2h) - x_0 = -2h}$$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2} (x_1 - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6} (x_1 - x_0)^3$$

$$(1) \underline{f_1} = \underline{f_0} + \underline{f'(x_0) \cdot (-2h)} + \underline{\frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot 4h^2} + \underline{\frac{f'''(\xi)}{6} \cdot (-8h^3)}$$

$$x = x_2$$

$$\underline{x_2 - x_0 = (x_0 + h) - x_0 = h}$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_2 - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x_2 - x_0)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6} (x_2 - x_0)^3$$

$$(2) \underline{f_2} = \underline{f_0} + \underline{f'(x_0) \cdot h} + \underline{\frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2} + \underline{\frac{f'''(\eta)}{6} \cdot h^3}$$

$$(1) - 4 \cdot (2)$$

$$f_1 - 4f_2 \approx -3f_0 - 6h \cdot f'(x_0) \quad [+O(h^3)]$$

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 - f_1 + 4f_2}{6h}$$

$O(h^2)$ (Maschinen-
runden)

b) $f''(x_2)$

Taylor - sor:

$$f(x) = f(x_2) + \frac{f'(x_2)}{1!}(x-x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x-x_2)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_2)^3$$

$x = x_0$ $x_0 - x_2 = x_0 - (x_0 + h) = -h$

$$f(x_0) = f(x_2) + f'(x_2)(x_0 - x_2) + \frac{1}{2} f''(x_2)(x_0 - x_2)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(x_0 - x_2)^3$$

(1) $f_0 = f_2 + f'(x_2)(-h) + \frac{1}{2} f''(x_2) \cdot h^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(-h^3)$

$x = x_1$ $x_1 - x_2 = (x_0 - 2h) - (x_0 + h) = -3h$

$$f(x_1) = f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} f''(x_2) \cdot (x_1 - x_2)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}(x_1 - x_2)^3$$

(2) $f_1 = f_2 + f'(x_2)(-3h) + \frac{1}{2} f''(x_2) \cdot 9h^2 + \frac{f'''(\eta)}{6} \cdot (-27h^3)$

$3(1) - (2)$

$$3f_0 - f_1 \approx 2f_2 - 6h^2 \cdot f''(x_2) \cdot \frac{1}{2} \quad (+ o(h^3))$$

$$f''(x_2) \approx \frac{-3f_0 + f_1 + 2f_2}{3h^2}$$

$o(h)$
(elsorendű)

h)

X : érték. ügyletek száma (1óra) (Poisson)

$$\lambda = ?$$

$$\underline{0,9} = P(X \geq 1) = 1 - \underbrace{P(X < 1)}_{\substack{X=0 \\ k}} = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \underline{1 - e^{-\lambda}}$$

$$e^{-\lambda} = 0,1$$

$$\underline{\lambda} = -\ln 0,1 = \underline{2,3026}$$

a) $\tilde{X}$: érték. ügyletek száma (2óra) $\tilde{\lambda} = 2 \cdot 2,3026 = 4,6052$

$$\begin{aligned} P(\tilde{X} \geq 3) &= 1 - P(\tilde{X} \leq 3) = \\ &= 1 - \left[\frac{4,6052^0}{0!} + \frac{4,6052^1}{1!} + \frac{4,6052^2}{2!} \right] \cdot e^{-4,6052} \\ &= \underline{0,8349} \end{aligned}$$

b) X^{**} : érték. ügylet. száma (10 perc) $\lambda^{**} = \frac{2,3026}{6} =$

$$P(X^{**} = 0) = \frac{0,3838^0}{0!} e^{-0,3838} = \underline{0,6813}$$

$$= \underline{0,3838}$$

5)

X: alunos (nome) $n = 12$

$\sigma = ?$

$$a) \quad \underline{0,22} = P(X < 11,8) \stackrel{(1)}{=} P\left(X^* < \underbrace{\frac{11,8 - 12}{\sigma}}_{-\frac{0,2}{\sigma}}\right) =$$
$$\stackrel{(2)}{=} \Phi\left(\underbrace{-\frac{0,2}{\sigma}}_{\uparrow}\right) = \underline{1 - \Phi\left(\frac{0,2}{\sigma}\right)}$$

$$\Phi\left(\frac{0,2}{\sigma}\right) = 0,78$$

$$(3) \quad \frac{0,2}{\sigma} = 0,77$$

$$\underline{\underline{\sigma = \frac{0,2}{0,77} = 0,2597}}}$$

$$b) \quad P(11,9 < X < 12,1) \stackrel{(1)}{=} P\left(\underbrace{\frac{11,9 - 12}{0,2597}}_{\uparrow} < X^* < \underbrace{\frac{12,1 - 12}{0,2597}}_{\uparrow}\right)$$

$$= \Phi\left(\underbrace{\frac{0,1}{0,2597}}_{\substack{0,3851 \\ 0,39}}\right) - \underbrace{\Phi\left(\frac{-0,1}{0,2597}\right)}_{\substack{\uparrow \\ 1 - \Phi\left(\frac{0,1}{0,2597}\right)}} = 2\Phi(0,39) - 1$$

$$= 2 \cdot 0,6517 - 1 = \underline{\underline{0,3034}}$$

$$\Rightarrow 30,34 \%$$

A hand-drawn graph of a normal distribution curve on a grid. The horizontal axis is labeled with three points: $12-5$, 12 , and $12+5$. Below $12-5$ is the number $11,7403$ with an upward arrow. Below $12+5$ is the number $12,2597$ with an upward arrow. The curve is labeled $f(x)$ at its right end. A vertical dashed line passes through the peak of the curve at $x=12$.

(6) X : egy műszer élettart (exp. co.)

X_1 : 1. műszer élettart

$\vdots$

X_{60} : 60. " " "

$n=60$

$\lambda = 15\,000$

aszerint co.

fgst.

v. ért: 15000^m

szórás: 15000^p

a) Δt_{lag} vs Δt_{fiche} : $\frac{15000}{\sqrt{60}}$ (= m)
u - Δt_{fiche} : $\frac{15000}{\sqrt{60}} = 1936$ (s/ $\sqrt{m}$)

$$b) P(14000 < \frac{X_1 + \dots + X_{60}}{60} < 15500) =$$

$$(1) \quad P\left(\frac{14000 - 15000}{\underbrace{1936,4917}_{-0,52}} < X^* < \frac{15500 - 15000}{\underbrace{1936,4917}_{0,26}}\right) \approx$$

$$x \approx \frac{\Phi(0,26) - \Phi(-0,52)}{(1 - \Phi(0,52))} = \frac{0,6026 - 0,3085}{0,3085} =$$

④

X: munkajegy, elvégz. ideje (óra)

Adatok: $n = 18$ ✓

$$\hat{m}_{18} = 33,2$$

$$\hat{s}_{18} = 4,8 \quad \checkmark$$

a) 1) $\Rightarrow H_0: E(X) = 30 \quad (=m_0)$

$H_1: E(X) \neq 30 \quad (\text{eltérési})$

2) t-próba ($n < 30$ és σ nem ismert)

$$t_p = \frac{\hat{m}_n - m_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} = \frac{33,2 - 30}{4,8/\sqrt{18}} = \underline{2,8284}$$

3) $t_{kr} = \textcircled{\pm} 2,11$

$$\begin{cases} \text{mag: } \frac{0,95+1}{2} \\ \text{szab. fok: } 18-1 \end{cases}$$



4) H_0 -t elutasítjuk: nem fogadható

az, hogy a várható értéke 30 perc

b) n -próbát (t-próba is jó) $n \geq 30$