

Próba vizsga megoldással (3)



1. Adottak az $x_1 := -4$, $x_2 := -1$, $x_3 := 0$, $x_4 := 3$ pontok és a hozzájuk rendelt $f_1 := -12$, $f_2 := 1$, $f_3 := 6$, $f_4 := 10$ értékek.

(a) Határozzuk meg a fenti adatokra illeszkedő lineáris regressziós függvényt. (4p)

(b) Határozzuk meg a fenti adatokra illeszkedő kvadratikus regressziós függvényt. (4p)

2. Adott az $f(x) = \ln(2x + 1)$ függvény. Adottak az $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$ interpolációs alappontok és a hozzájuk rendelt $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $f'_0 = f'(x_0)$, $f'_1 = f'(x_1)$ értékek.

(a) Határozzuk meg az adatokra illeszkedő Hermite-interpolációs polinomot. (6p)

(b) Becsüljük $f(0,35)$ értékét az interpolációs polinom helyettesítési értékével. (3p)

3. (a) Határozzuk meg a c konstans értékét úgy, hogy az alábbi, $\int_0^2 f(x)dx$ integrált közelítő kvadratúra a lehető legmagasabb foksámú polinomokra pontos legyen. (6p)

$$I(f) = \frac{f(0) + 4c \cdot f(1) + f(2)}{2c + 1}$$

(b) Mekkora ez a maximális foksám? (2p)

4. A gyártó tapasztalata szerint annak a valószínűsége, hogy egy 10 m-es wolfram szálaban van legalább egy hiba, 0,99. (A hibák száma Poisson-eloszlást követ.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy

(a) egy 50 cm-es wolfram szálaban legalább 3 hiba van? (6p)

(b) egy 10 cm-es wolfram szálaban nincs hiba? (3p)

5. Egy egyetemen a gépész szakos hallgatók testmagassága normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, 175 cm várható értékkel. A gépész hallgatók 15%-a magasabb, mint 185 cm.

(a) Mekkora a gépész hallgatók testmagasságának szórása? (5p)

(b) A gépész hallgatók hány százalékának testmagassága kisebb, mint 172 cm? (3p)

(c) Ábrázoljuk a feladatban megadott valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. (2p)

6. Egy bizonyos típusú csavar esetében a selejtarány 4%. Egy vállalkozó 5 000 ilyen csavart vásárol.

(a) Mekkora a hibás csavarok számának várható értéke és szórása? (2p)

(b) Mekkora lehet annak a valószínűség-e, hogy a megvásárolt csavarok között a hibásak száma legalább 195 és legfeljebb 210? (Számolásának eredményét 4-tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (6p)

7. Egy acélcső hossza névlegesen 3 m. Egy szállítmányból 50 acélcső hosszát megmérve a mintaátlagra 2,93 m, a korrigált tapasztalati szórásra 0,12 m adódott. (Feltételezzük, hogy az adatok normális eloszlásból származnak.)

(a) 95%-os szignifikanciaszinten elfogadható-e, hogy az acélcsövek hosszának várható értéke meg egyezik a névleges hosszal? (6p)

(b) Milyen próbát alkalmazunk, ha az adatok 5 elemű mintából származnak? (Válaszát indokolja!) (2p)

1.

	1	x_j	x_j^2	x_j^3	x_j^4	f_j	$x_j \cdot f_j$	$x_j^2 \cdot f_j$
	1	-4	16	-64	256	-12	48	-192
	1	-1	1	-1	1	1	-1	+1
	1	0	0	0	0	6	0	0
	1	3	9	27	81	10	30	90
Σ	4	-2	26	-38	338	5	77	-101

a) $y = a_0 + a_1 \cdot x$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 77 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a_0 - 2a_1 = 5 \\ -2a_0 + 26a_1 = 77 \end{cases}$$

$$a_0 = 2,84$$

$$a_1 = 3,18$$

$$y = 2,84 + 3,18 \cdot x$$

b) $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

$$a_0, a_1, a_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 26 \\ -2 & 26 & -38 \\ 26 & -38 & 338 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 77 \\ -101 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 = 5,09 \\ a_1 = 2,805 \\ a_2 = -0,375 \end{cases}$$

$$y = 5,09 + 2,805 \cdot x - 0,375 \cdot x^2$$

$$f(x) = \ln(2x+1)$$

② a)

$x_0 = 0$ ✓	$x_1 = 0,5$
$f_0 = 0$ ✓	$f_1 = 0,6931$
$f'_0 = 2$ ✓	$f'_1 = 1$ ✓

$$(h = 0,5 - 0 = 0,5)$$

$$f_0 = f(x_0) = \ln(2 \cdot 0 + 1) = 0$$

$$f_1 = f(x_1) = f(0,5) = \ln(2 \cdot 0,5 + 1) = \ln 2 = 0,6931$$

$$f'_0 = f'(x_0) = f'(0) = \frac{2}{2 \cdot 0 + 1} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}$$

$$f'_1 = f'(x_1) = f'(0,5) = \frac{2}{2 \cdot 0,5 + 1} = 1$$

$$\rightarrow H(x) = A + B \cdot \frac{(x-x_0)}{h} + C \cdot \frac{(x-x_0)^2}{h^2} + D \cdot \frac{(x-x_0)^3}{h^3}$$

$A, B, C, D ?$

A

$$= f_0 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\rightarrow \underline{A} + \underline{B} + C + D$$

$$= f_1 = 0,6931$$

B

$$= h \cdot f'_0 = 0,5 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

$$\underline{B} + 2C + 3D$$

$$= h \cdot f'_1 = 0,5 \cdot 1 = 0,5$$

$$\left. \begin{array}{l} C + D = -0,3069 \\ 2C + 3D = -0,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} C = -0,4206 \\ D = 0,1137 \end{array}}$$

$$H(x) = 0 + 1 \cdot \frac{(x-0)}{0,5} - 0,4206 \frac{(x-0)^2}{0,5^2} + 0,1137 \cdot \frac{(x-0)^3}{0,5^3}$$

$$\boxed{H(x) = \frac{x}{0,5} - 0,4206 \frac{x^2}{0,5^2} + 0,1137 \frac{x^3}{0,5^3}}$$

$$b) \quad f(0,35) \approx H(0,35) = \underline{\underline{0,5329}} \quad \leftarrow$$

$$\left(f(0,35) = \ln(2 \cdot 0,35 + 1) = \ln 1,7 = 0,5306 \right) \quad \leftarrow$$

③ a) $f(x) = x^k$ ($k=0,1,\dots$)

$$J(f) = \frac{f(0) + 4c \cdot f(1) + f(2)}{2c+1}$$

• $k=0$ $f(x) = x^0 = 1$

$$\rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx = [x]_0^2 = 2 - 0 = 2$$

$$\rightarrow J(f) = \frac{1 + 4 \cdot c \cdot 1 + 1}{2c+1} = \frac{4c+2}{2c+1} = 2 \quad (c \neq -\frac{1}{2})$$

• $k=1$ $f(x) = x^1$

$$\rightarrow \int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2$$

$$\rightarrow J(f) = \frac{0 + 4c \cdot 1 + 2}{2c+1} = \frac{4c+2}{2c+1} = 2$$

• $k=2$ $f(x) = x^2$

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$J(f) = \frac{0 + 4c \cdot 1 + 2}{2c+1} = \frac{4c+4}{2c+1}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{8}{3} = \frac{4c+4}{2c+1}$$

$$16c+8 = 12c+12$$

$$4c = 4$$

$$\boxed{c=1}$$

$c=1$ einsetzen

b) $\boxed{c=1}$! $\Rightarrow$ $\boxed{f(t) = \frac{f(0) + 4 \cdot f(1) + f(2)}{3}}$

• $k=3$ $f(x) = x^3$

$$\rightarrow \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{0^3 + 4 \cdot 1^3 + 2^3}{3} = 4$$

$\boxed{\text{max. 3-adjok}}$

• $k=4$ $f(x) = x^4$ $\leftarrow$

$$\rightarrow \int_0^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5} = 6,4$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{0^4 + 4 \cdot 1^4 + 2^4}{3} = \frac{20}{3} = 6,3\bar{3}$$

④ X : hibah sama (10 m) (Poisson)

$$\lambda = ?$$

$$\begin{aligned} 0,99 &= P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = \\ &= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \underline{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

$$0,99 = 1 - e^{-\lambda}$$

$$e^{-\lambda} = 0,01$$

$$\lambda = -\ln 0,01 = \underline{4,6052}$$

a) $\tilde{X}$: hibah sama (20 cm) (Poisson)

$$\tilde{\lambda} = \frac{4,6052}{20} = 0,2303$$

$$\begin{aligned} P(\tilde{X} \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + \right. \\ &\quad \left. + P(X=2) \right] = 1 - \left[\frac{0,2303^0}{0!} + \frac{0,2303^1}{1!} + \frac{0,2303^2}{2!} \right] \cdot e^{-0,2303} \\ &= \underline{0,0017} \end{aligned}$$

b) X^{**} : hibah sama (10 cm)

$$\lambda^{**} = \frac{4,6052}{100} = 0,0461$$

$$P(X^{**} = 0) = \frac{0,0461^0}{0!} e^{-0,0461} = \underline{\underline{0,9549}}$$

5.) X : testmagasság (norm. el.) $\mu = 175$

$\sigma = ?$

$$a) \quad \underline{0,15} = P(X > 185) \stackrel{(1)}{=} 1 - P(X^* < \frac{185 - 175}{\sigma}) \stackrel{(2)}{=} 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,85 \quad (3)$$

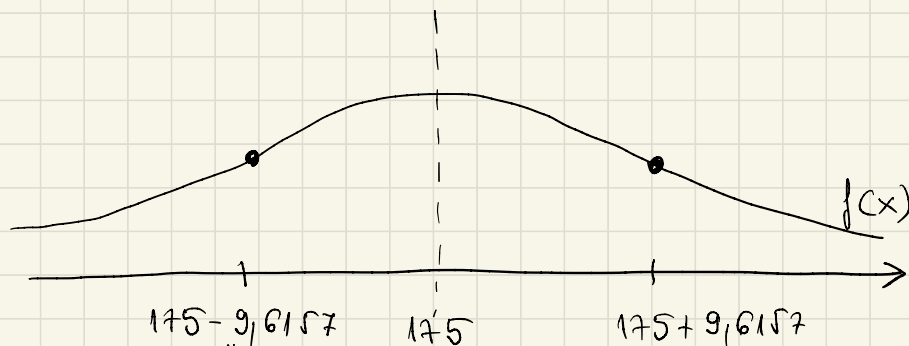
$$\frac{10}{\sigma} = 1,04 \Rightarrow \underline{\underline{\sigma = 9,6157}}$$

$$b) \quad P(X < 172) \stackrel{(1)}{=} P(X^* < \underbrace{\frac{172 - 175}{9,6157}}_{-0,31}) \stackrel{(2)}{=} \Phi(-0,31) =$$

$$= 1 - \Phi(0,31) \stackrel{(3)}{=} 1 - 0,6217 = 0,3783$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{37,83\%}}$$

c)



6.) X : ^{select.} čas hitov osavareh 12 am a (binom.)
A

a) $E(X) = n \cdot p = 5000 \cdot 0,04 = \underline{\underline{200}}$ ✓

$D(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{5000 \cdot 0,04 \cdot 0,96} = \underline{\underline{13,8564}}$ ✓

$n = 5000$ ✓, $p = P(A) = 0,04$ ✓
 ~~$n=5$~~ $X \approx \text{norm. eo.}$

b) $P(195 \leq X \leq 210) = P(194,5 < X < 210,5) \stackrel{(1)}{=}$

$\boxed{194, 195, 196, \dots, 210, 211}$

$= P\left(\underbrace{\frac{194,5 - 200}{13,8564}}_{-0,40} < X^* < \underbrace{\frac{210,5 - 200}{13,8564}}_{0,76}\right) \approx$

$\approx \Phi(0,76) - \Phi(-0,40) = \Phi(0,76) - [1 - \Phi(0,40)]$

$\stackrel{(3)}{=} 0,7734 - 1 + 0,6554 = 0,4288$

$\approx 0,4288$

7) a) X : átlagos kor

(munk.)

Adatok: $n = 50$ ✓

$$\bar{x}_{50} = 2,93$$

$$s_{50} = 0,12 \quad \checkmark$$

1) $\rightarrow H_0: E(X) = 3 = \mu_0$

$H_1: E(X) \neq 3$ (kétold.)

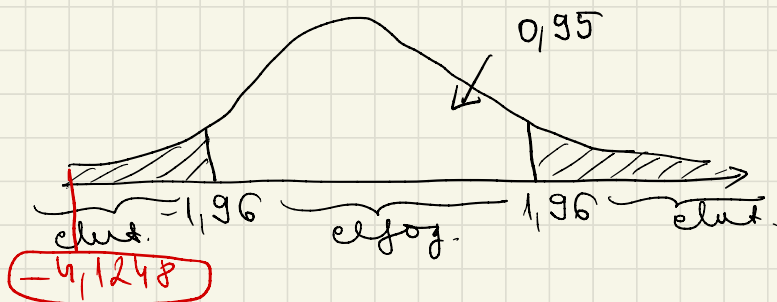
2) u -próba ($n \geq 30$)

(t is lehet!)

$$u_p = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{s_n / \sqrt{n}} = \frac{2,93 - 3}{0,12 / \sqrt{50}} = \underline{\underline{-4,1248}}$$

3) $\Phi(u_{kr}) = \frac{0,95 + 1}{2} = 0,975$

$u_{kr} = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 1,96 <$



4) H_0 -t elvet.: nem fogadjuk el, hogy a közp. v. értéke 3 m.

b) t-probat ($n=5!!!$ $n < 30$ is for new var.)