Online konzultáció

2. Zh előtt

2013. 11. 20.

Matematika 3.
GKNB_MSTM011
2. zárthelyi dolgozat
2022.05.04.

A hallgató neve:
Neptun kódja:
aláírása:
előadója:

F

Eredmények

1. Egy dobozban 80 alkatrész van, melyekből 25 hibás. Visszatevéssel húzunk 4 alkatrészt. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott hibás alkatrészek száma kevesebb, mint a várható érték?

2. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{75} & \text{ha } 5 < x < 10 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$. Határozzuk meg X várható értékét!

3. Egy útszakaszon a burkolathibák száma Poisson- eloszlást követ, 1 km-en átlagosan 8 burkolathibával. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 200 m-es szakaszon a burkolathibák száma kett?nél több?

4. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 200. Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke legalább 600?

5. Az X normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 18, szórása 2,4. Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke a várható értéktől 3-nál kevesebbel tér el?

6. Egy szolgáltatónál minden hívásunk esetén 0,8 a valószínűsége annak, hogy a vonal foglalt. Addig próbálkozunk, míg kicseng a hívásunk. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább 15 próbálkozásra lesz szükség?

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
$\Phi(x)$	0.5987	0.6915	0.7734	0.8413	0.8944	0.9332	0.9599	0.9772	0.9878	0.9938	0.9970	0.9987

Matematika 3.
GKNB_MSTM011
2. zárthelyi dolgozat
2022.05.04.

A hallgató neve:
Neptun kódja:
aláírása:
előadója:

D

Eredmények

1. Egy dobozban 40 mobiltelefon van, közülük 8 hibás. Kiveszünk (visszatevés nélkül) 6 telefont a dobozból. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott telefonok több, mint fele hibás?

X: kihúzott hibások száma

$P(X>3) = P(X=4)+P(X=5)+P(X=6) =$

4 ∪ 5 ∪ 6

$$\frac{\binom{8}{4}\binom{32}{2}+\binom{8}{5}\binom{32}{1}+\binom{8}{6}\binom{32}{0}}{\binom{40}{6}} = 0{,}0095$$

2. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} \frac{324}{x^5} & \text{ha } 3 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$. $P(X \leq 4) = ?$

$$P(X\leq 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)\,dx = \int_{3}^{4} \frac{324}{x^5}\,dx = \left[\frac{-81}{x^4}\right]_3^4 =$$

$$\frac{-81}{4^4} - \left(\frac{-81}{3^4}\right) = 1 - \frac{81}{256} = 0{,}6836$$

3. Egy segélyhívó számra az éjszakai ügyeleti időben (este 8:00-tól reggel 6:00-ig) beérkező hívások száma Poisson-eloszlást követ, átlagosan 12 hívással. Mi a valószínűsége annak, hogy egy óra alatt 2-nél több hívás érkezik?

10 óra

X: hívások száma (10 óra) (Poisson-eo.) $\lambda = 12$

X: (1 óra) (Poisson-eo.) $\lambda = \frac{12}{10} = 1{,}2$

$P(X>2) = 1 - P(X\leq 2) = 1 - [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)] =$

3 ∪ 4 ∪ ... 0 ∪ 1 ∪ 2

$$= 1 - \left[\frac{1{,}2^0}{0!} + \frac{1{,}2^1}{1!} + \frac{1{,}2^2}{2!}\right] \cdot e^{-1{,}2} = 0{,}1205$$

4. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 150. Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke a várható értéktől legalább két szórásnyival eltér?

X: exp. eo. $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{150}$ $\quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{150}x} & \text{ha } x>0 \\ 0 & \text{küll.} \end{cases}$

2·150 2·150

−150 150 450

$D(X) = E(X)$

$P(X<-150) + P(X>450) =$

$$= F(-150) + 1 - F(450) = 0 + 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{150}\cdot 450}\right) = e^{-3} = 0{,}0498$$

5. Az X normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 25, szórása 1,6. Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke 23,8 és 26,2 közé esik? X: norm. eo. $m = 25$ $\sigma = 1{,}6$

$$P(23{,}8 < X < 26{,}2) \overset{\text{I}}{=} P\left(\frac{23{,}8-25}{1{,}6} < X^* < \frac{26{,}2-25}{1{,}6}\right) =$$

$$= P(-0{,}75 < X^* < 0{,}75) \overset{\text{II.}}{=} \Phi(0{,}75) - \Phi(-0{,}75) =$$

$$= \Phi(0{,}75) - [1 - \Phi(0{,}75)] \overset{\text{III}}{=} 0{,}7734 - 1 + 0{,}7734 = 0{,}5468$$

6. Egy szerencsejátékban 0,05 a nyerési esély. Addig játszunk, míg nem nyerünk. Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 20 próbálkozásra lesz szükség?

X: próbálkozások száma (nyerésig)

$$P(X=20) = \underbrace{0{,}95^{19}}_{\substack{1-19. \\ \text{nem nyer}}} \underset{\text{és}}{\cdot} \underbrace{0{,}05}_{\substack{20. \\ \text{nyer}}} = 0{,}0189$$

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
$\Phi(x)$	0.5987	0.6915	0.7734	0.8413	0.8944	0.9332	0.9599	0.9772	0.9878	0.9938	0.9970	0.9987

① visszatevéssel húzunk

$$P(X>3) = \frac{8^4\cdot 32^2\cdot\binom{6}{4} + 8^5\cdot 32^1\cdot\binom{6}{5} + 8^6\cdot 32^0\cdot\binom{6}{6}}{40^6} =$$

$4 \cup 5 \cup 6$

$$= 0{,}0170$$

② a) $P(X>4) = \int_{4}^{\infty} f(x)\,dx = \int_4^{\infty} \frac{324}{x^5}\,dx =$ impr. ......

ellent

$$1 - P(X\le 4) = 1 - \int_3^4 \frac{324}{x^5}\,dx = 1-\left(1-\frac{81}{256}\right) = \frac{81}{256} =$$

ld. eredeti fel.

$$= 0{,}3164$$

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_3^{\infty} x\cdot\frac{324}{x^5}\,dx =$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{324}{x^4}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-108}{x^3}\right]_3^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-108}{b^3} - \frac{-108}{3^3}\right) =$$

$\frac{-108}{b^3} \to 0$

$$= 4$$

c) $D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{18 - 4^2} = \sqrt{2}$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{3}^{\infty} x^2 \cdot \frac{324}{x^5}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{3}^{b} \frac{324}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-162}{x^2}\right]_3^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\underbrace{\frac{-162}{b^2}}_{\downarrow\, 0} - \frac{-162}{3^2}\right) = 18$$

③ Mi a vsz-e, hogy 1 óra alatt a v. érték-nél kevesebb hívás érk?

$E(X) = 1{,}2$

$$P(X < E(X)) = P(\underset{0 \text{ v } 1}{X < 1{,}2}) = P(X=0) + P(X=1) =$$

$$= \left[\frac{1{,}2^0}{0!} + \frac{1{,}2^1}{1!}\right] e^{-1{,}2} = \underline{\underline{0{,}6626}}$$

4. a) Mi a vsg-e, hogy X értéke a v. érték kétszeresénél nagyobb?

$$P(X > 2\cdot E(X)) = P(X > 2\cdot 150) = P(X > 300)$$

$$= 1 - P(X < 300) = 1 - F(300) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{150}\cdot 300}\right)$$

$$= \underline{\underline{0{,}1353}}$$

(Megj: az eredeti feladat és ez a rész is megoldható λ ismerete nélkül.)

b) $$P(100 < X < 200) = F(200) - F(100) =$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{1}{150}\cdot 200}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{150}\cdot 100}\right) =$$

$$= e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{3}{4}} = \underline{\underline{0{,}6269}}$$

5. $P(X > 22{,}2) \overset{\text{I}}{=} 1 - P\left(X^* < \dfrac{22{,}2 - 25}{1{,}6}\right) =$

!

$= 1 - P(X^* < -1{,}75) \overset{\text{II}}{=} 1 - \Phi(-1{,}75) =$

$= 1 - \cancel{[1 - \Phi(1{,}75)]} = \Phi(1{,}75) \overset{\text{III}}{=} \underline{\underline{0{,}9599}}$

6. a) Mi a vsz-e, hogy legalább 20 prób. kell (a nyerésig)?

$P(X \geq 20) = 0{,}95^{19} = \underline{\underline{0{,}3774}}$

Ötlet: átfogalmazva: 1–19. nem nyert

b) Mi a vsz-e, hogy 20-nál több prób. kell?

$P(\underbrace{X > 20}_{\text{1–20. nem nyert}}) = 0{,}95^{20} = \underline{\underline{0{,}3585}}$

6* c) Egy játékban a nyerési esély 0,05. (minden játékban egym. fgtl.). Mi a vsz-e, hogy 20 játékból pontosan egyszer nyerünk?

$n=20$ | $p=P(A)=0{,}05$

→ X: $\underbrace{\text{nyert}}_{A}$ játékok száma (binom.)

$$P(X=1) = 0{,}05 \cdot 0{,}95^{19} \cdot \binom{20}{1} = \underline{\underline{0{,}3774}}$$

d) a várható értéknél kevesebbszer nyerünk?

$$P(X < E(X)) = P(X<1) = P(X=0) = 0{,}95^{20} = \underline{\underline{0{,}3585}}$$

bin.
$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}05 = 1$

1. próbafel. sor C/1.

$\boxed{\text{60 alk. ebből 45 hibátlan}}$

Visszatevéssel addig húzunk, míg hibátlant nem kapunk.

Mi a vsz-e, hogy legalább öt húzás kell?

Mo:

I. mo X: húzások száma (hibátlanig)

$$P(\underbrace{X \geq 5}_{\text{átfog. 1–4 nem hibátlan}}) = \left(\frac{15}{60}\right)^4$$

nem hibátlan húzással.

II. mo:

$$P(\underbrace{X \geq 5}_{5 \cup 6 \cup \ldots}) = 1 - P(\underbrace{X < 5}_{1 \cup 2 \cup 3 \cup 4}) =$$

$$= 1 - \left[P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{45}{60} + \frac{15}{60} \cdot \frac{45}{60} + \left(\frac{15}{60}\right)^2 \cdot \frac{45}{60} + \left(\frac{15}{60}\right)^3 \cdot \frac{45}{60}\right] =$$

$=$

1. próbafel. sor C/5.

Egy laborban 12 műszer van, egym. fgtl.
0,07 val. hib. meg egy munkanapon.
Mi a vsz-e, hogy hétfőn a v. értéknél
több műszer hib. meg?

Mo: $\mathbf{X}$: meghib. műszerek száma (binom.)

$p = P(A) = 0{,}07$, $n = 12$

$$P(\mathbf{X} > E(\mathbf{X})) = P(\underbrace{\mathbf{X} > 0{,}84}_{1 \cup 2 \cup \ldots \cup 12}) = 1 - P(\mathbf{X} \leq 0{,}84) =$$

$$\underbrace{E(X)}_{\text{bin.}} = n \cdot p = 12 \cdot 0{,}07 = 0{,}84$$

$$= 1 - P(\mathbf{X} = 0) = 1 - \cancel{0{,}07^0} \cdot 0{,}93^{12} \cdot \cancel{\binom{12}{0}} = \underline{\underline{0{,}5814}}$$

1. próbafel. sor B/1.

| 30 csavar |
| 12 hibás |

8-at húznak ~~vissz. nélkül~~

Mi a vsg-e, hogy 6-nál kevesebb hibásat húznak.

Mo: X: kihúzott hibásak száma

$$P(X<6) = 1-P(X \geq 6) =$$

$0 \cup 1 \cup \ldots \cup 5$ $\quad$ $6 \cup 7 \cup 8$

$$= 1-\left[P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)\right] =$$

$$= 1-\left[\frac{\binom{12}{6}\cdot\binom{18}{2}+\binom{12}{7}\cdot\binom{18}{1}+\binom{12}{8}\cdot\cancel{\binom{18}{0}}}{\binom{30}{8}}\right] =$$

$=$

1. próbafel. B/3.

Egy játékban minden játsz-ban egym. fgtl. 0,12 a nyerési esély. Mi a vsz-e, hogy 10 játszmából a v. értéknél többször nyerünk?

Mo: X: nyert játszmák száma (binom. eo.)

A $\quad n=10$

$p=P(A)=0{,}12$

$$P(X>E(X)) = P(X>1{,}2) = 1-P(X\le 1{,}2) =$$

$\quad$ bin. $\uparrow$ $\quad\quad 2 \cup 3 \ldots \cup 10 \quad\quad 0 \cup 1$

$$n\cdot p = 10\cdot 0{,}12 = 1{,}2$$

$$= 1-[P(X=0)+P(X=1)] =$$

$$= 1-\left[\cancel{0{,}12^0}\cdot 0{,}88^{10}\cdot \cancel{\binom{10}{0}} + 0{,}12\cdot 0{,}88^9\cdot\binom{10}{1}\right] =$$

$$= \underline{\underline{0{,}3417}}$$

2. próbafel. 3/1.

$\boxed{\text{14\%-a selejt}}$

visszatevéssel 7-t húzunk.
Mi a vsz-e, hogy a kihúzott selejtek száma legalább a v. érték?

Mo: X: $\underbrace{\text{kihúzott selejtek}}_{A}$ száma (binom.)

$p = P(A) = 0{,}14$ $\quad n = 7$

$$P(X \geq \underset{\text{binom!}}{E(X)}) = P(\underset{1 \vee 2 \vee \ldots \vee 7}{X \geq 0{,}98}) = 1 - P(\underset{0}{X < 0{,}98})$$

$n \cdot p = 7 \cdot 0{,}14 = 0{,}98$

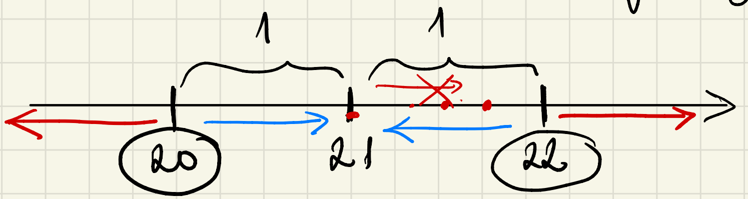
$$= 1 - P(X = 0) = 1 - \cancel{0{,}14^{0}} \cdot 0{,}86^{7} \cdot \cancel{\binom{7}{0}} = \underline{\underline{0{,}6521}}$$

2. próbafel. 3/5.

X: norm. eo., v.é: 21, sz: 0,8. Mi a val-e hogy X értéke a v. értéktől legalább 1-gyel eltér?

Mo: X: norm. eo. $m = 21$

$\sigma = 0{,}8$



$P(X \le 20) + P(X \ge 20) =$ 3. lépés ------

$$1 - P(20 < X < 22) \overset{\text{I.}}{=} 1 - P\left(\underbrace{\frac{20-21}{0{,}8}}_{-1{,}25} < X^* < \underbrace{\frac{22-21}{0{,}8}}_{1{,}25}\right)$$

$$\overset{\text{II.}}{=} 1 - \left[\Phi(1{,}25) - \Phi(-1{,}25)\right] =$$

$$= 1 - \left[\Phi(1{,}25) - (1 - \Phi(1{,}25))\right] = 1 - \left[2\Phi(1{,}25) - 1\right] =$$

$$\overset{\text{III.}}{=} 2 - 2 \cdot 0{,}8944 = \underline{\underline{0{,}2112}}$$