VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

oktatási segédanyag

Harmati István Árpád

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY TANSZÉK
2012.

Ez egy másik kávéház.

Tartalomjegyzék

1. A valószínűségszámítás axiómái **5**

1.1. Események, műveletek eseményekkel 5

1.2. A valószínűségszámítás axiómái 10

1.3. Az axiómák egyszerűbb következményei 12

2. A klasszikus és a geometriai valószínűségi mező **17**

2.1. A klasszikus valószínűségi mező 17

2.1.1. Kombinatorika 17

2.1.2. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel 20

2.1.3. Nevezetes klasszikus problémák 24

2.2. A geometriai valószínűségi mező 26

3. Feltételes valószínűség, függetlenség **31**

3.1. A feltételes valószínűség 31

3.2. A teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel 35

3.3. Események függetlensége 40

4. A valószínűségi változó **44**

4.1. A valószínűségi változó 44

4.1.1. Diszkrét valószínűségi változó 45

4.1.2. Folytonos valószínűségi változó 48

4.2. Az eloszlásfüggvény 48

4.3. A sűrűségfüggvény 53

5. A várható érték és a szórás **60**

5.1. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke 60

5.2. Folytonos valószínűségi változó várható értéke 62

5.3. A szórás 65

6. Nevezetes diszkrét eloszlások **70**

6.1. Az indikátor változó eloszlása 70

6.2. Binomiális eloszlás 71

6.3. Hipergeometriai eloszlás 74

6.4. Geometriai eloszlás 76

6.5. Negatív binomiális eloszlás 79

6.6. Poisson-eloszlás 80

7. Nevezetes folytonos eloszlások **86**
7.1. Egyenletes eloszlás 86
7.2. Exponenciális eloszlás 88
7.3. Normális eloszlás 92
7.3.1. Standard normális eloszlás 94

8. Kapcsolatok a nevezetes diszkrét eloszlások között (határeloszlás tételek) **99**
8.1. A binomiális eloszlás közelítése Poisson-eloszlással 99
8.2. A hipergeometriai eloszlás közelítése binomiálissal 104

9. Valószínűségi változó függvényének eloszlása **108**
9.1. Diszkrét valószínűségi változó függvényének eloszlása 108
9.2. Folytonos valószínűségi változó függvényének eloszlása 110
9.3. Valószínűségi változó függvényének várható értéke 113
9.4. A lognormális eloszlás 116

10. A Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség **118**
10.1. A Markov-egyenlőtlenség 118
10.2. A Csebisev-egyenlőtlenség 121

11. Több valószínűségi változó együttes eloszlása **126**
11.1. Két diszkrét valószínűségi változó együttes eloszlása 127
11.2. Két folytonos valószínűségi változó együttes eloszlása 131
11.3. Tételek, definíciók több valószínűségi változó együttes eloszlására 141

12. Valószínűségi változók összege **143**
12.1. Valószínűségi változók összegének várható értéke és szórása 143
12.2. Valószínűségi változók átlagának várható értéke és szórása 150

13. A nagy számok törvényei **153**
13.1. A nagy számok törvénye az átlagra 153
13.2. A nagy számok törvénye a relatív gyakoriságra 155

14. A központi határeloszlás tétel **159**
14.1. A központi határeloszlás tétel 159
14.2. A Moivre-Laplace tétel 165

15. Korreláció és regresszió **171**
15.1. A korrelációs együttható 171
15.2. A lineáris regresszió 178

16. A matematikai statisztikában használatos eloszlások **180**
16.1. A χ^2 eloszlás 181
16.2. A Student-eloszlás 182
16.3. F-eloszlás 183

1. fejezet

A valószínűségszámítás axiómái

A valószínűségszámítás témája véletlen tömegjelenségekre vonatkozó törvényszerűségek megállapítása. Véletlen jelenség az, aminek a kimenetelét a tekintetbe vett, vagy az ésszerűség határain belül tekintetbe vehető, rendelkezésre álló feltételek még nem határozzák meg egyértelműen. Tömegjelenségen olyan jelenséget értünk, amely nagy számban megy végbe egyszerre, vagy (legalábbis elméletben) tetszőlegesen sokszor megismételhető. Az elsőre példa lehet mondjuk egy gáztartályban a részecskék ütközése, a másodikra valamely szerencsejáték. Az ezekből levonható törvényszerűségek statisztikai jellegűek, azaz nagy számú végrehajtás során átlagosan érvényes törvények.

1.1. Események, műveletek eseményekkel

Kísérlet alatt egy véletlen tömegjelenség megfigyelését értjük. Tekintsünk egy ilyen kísérletet. Ennek egy lehetséges kimenetele az *elemi esemény.* Az egy kísérlethez tartozó elemi események összessége az *eseménytér*, amit Ω-val jelölünk. Az eseménytér bizonyos részhalmazait *eseményeknek* nevezzük. Az esemény definíciója szerint az elemi események egyetlen elemet tartalmazó események. Ha egy A eseményre vonatkozóan kísérletet végzünk, és a kísérlet során adódó a elemi esemény eleme az A-nak ($a \in A$), akkor azt mondjuk, hogy az A esemény bekövetkezik.

1.1. Példa.
Dobjunk fel kétszer egy pénzérmét. Mindkét dobás lehet fej (F) és írás (I) is. Ekkor az eseménytér:

$$\Omega = \{FF, FI, IF, II\}.$$

1.2. Példa.
Legyen az előző kísérlettel kapcsolatban A az az esemény, hogy *az első dobás fej*,B pedig az, hogy *a második dobás írás.* Ekkor

$$A = \{FF, FI\} \qquad B = \{FI, II\}.$$

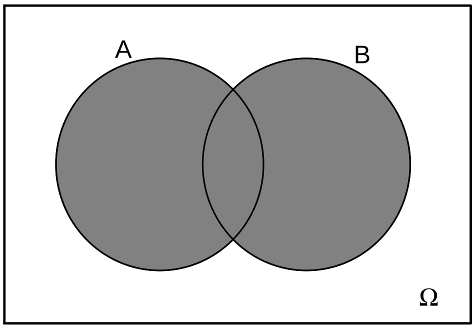
Az Ω halmaz is egy eseményt ad. Mivel ez az esemény az összes lehetséges elemi eseményt tartalmazza, ezért biztosan bekövetkezik, és emiatt biztos eseménynek nevezzük. Az üres halmazzal megadott esemény sohasem következik be, ezért lehetetlen eseménynek nevezzük és $\emptyset$-val jelöljük.

Ha A és B két esemény és $A \subset B$, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény bekövetkezése maga után vonja a B esemény bekövetkezését. Az A és B eseményeket egyenlőknek nevezzük, ha bármelyik bekövetkezése egyben a másik bekövetkezését is jelenti. Az események között az alábbi műveleteket értelmezzük:

Az A és B események $A+B$ összege az az esemény, amely akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik.

1.3. Példa.
Legyen A és B a 1.2. példában megadott esemény. Ekkor

$$A+B=\{FF,\,FI,\,II\}\,.$$

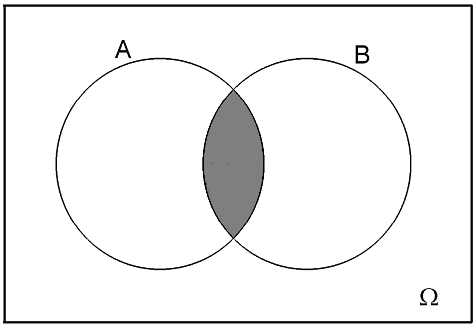


1.1. ábra. Az A és B események összege.

Az A és B események $A\cdot B$ szorzata az az esemény, amely akkor következik be, ha az A és a B is bekövetkezik.

1.4. Példa.
Legyen A és B a 1.2. példában megadott esemény. Ekkor

$$A\cdot B=\{FI\}\,.$$

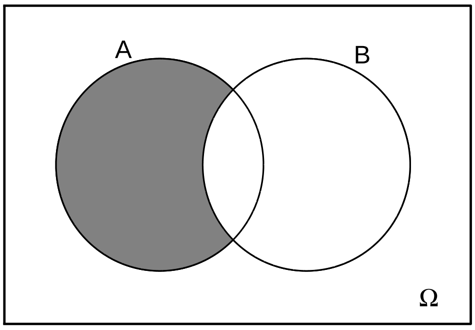


1.2. ábra. Az A és B események szorzata.

Az A és B események $A-B$ különbsége az az esemény, amely akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik, de a B esemény nem.

1.5. Példa.
Legyen A és B a 1.2. példában megadott esemény. Ekkor

$$A-B=\{FF\}\,.$$

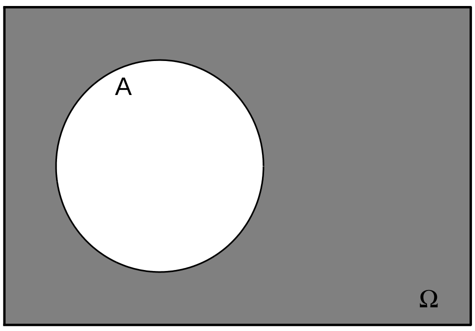


1.3. ábra. Az A és B események különbsége.

Az A esemény $\overline{A}$ ellentettje (komplementere) az az esemény, amely akkor következik be, ha az A esemény nem következik be.

1.6. Példa.
Az 1.2. példában szereplő A eseménnyel:

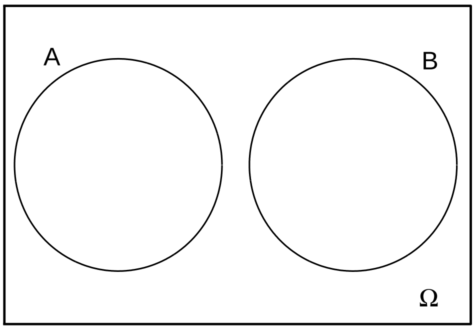
$$\overline{A}=\{II,\,IF\}\,.$$



1.4. ábra. Az A esemény komplementere.

Ha az A és B esemény egyszerre sohasem következik be, azaz $A \cdot B = \emptyset$, akkor az A és B eseményeket egymást kizáró eseményeknek nevezzük.

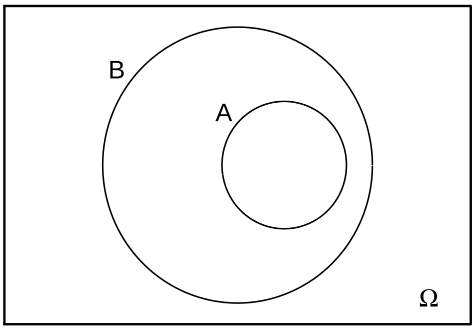
1.7. Példa.
Például *az első dobás fej* és *mindét dobás írás* események egymást kizáróak.



1.5. ábra. Egymást kizáró események.

Ha az A esemény bekövetkezésekor minden esetben egy másik, B esemény is bekövetkezik, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény bekövetkezése maga után vonja a B esemény bekövetkezését. Halmazokkal kifejezve ez azt jelenti,hogy A részhalmaza B-nek, azaz $A \subset B$.

1.8. Példa.
Legyen most A = *mindkét dobás fej*, és B = = *az első dobás fej*. Ekkor az $A \subset B$.



1.6. ábra. Az A esemény maga után vonja B-t.

1.9. Feladat.
Egy szabályos dobókockával egyszer dobunk. A kísérlet során az elemi események a dobott számok, így $\Omega = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$. Tekintsük a következő két eseményt:

$$A : \text{párosat dobunk} \quad \Longrightarrow \quad A = \{2{,}4{,}6\}$$
$$B : \text{háromnál kisebbet dobunk} \quad \Longrightarrow \quad B = \{1{,}2\}$$

Mi lesz ekkor $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$ és $B - A$?

Megoldás:

$\overline{A}$: nem dobunk páros számot, vagyis páratlant dobunk, így $\overline{A} = \{1{,}3{,}5\}$.

$\overline{B}$: nem dobunk háromnál kisebbet, azaz a dobott szám legalább három, tehát $\overline{B} = \{3{,}4{,}5{,}6\}$.

$A + B$: a *párosat dobunk* és a *háromnál kisebbet dobunk* események közül legalább az egyik bekövetkezik, tehát $A + B = \{2{,}4{,}6\} \cup \{1{,}2\} = \{1{,}2{,}4{,}6\}$.

$A \cdot B$: párosat is dobunk és háromnál kisebbet is dobunk (mindkettő bekövetkezik), így $A \cdot B = \{2\}$.

$A - B$: párosat dobunk, de nem dobunk háromnál kisebbet, azaz $A - B = \{4{,}6\}$.

$B - A$: háromnál kisebbet dobunk, de nem dobunk párosat, tehát $B - A = \{1\}$.

1.10. Feladat.
Fejezzük ki az események betűjelével az alábbiakat:

a) Az A és B események közül pontosan egy következik be.

b) Az A, B és C események közül egyik sem következik be.

c) Az A, B és C események közül pontosan egy következik be.

d) Az A, B és C események közül pontosan kettő következik be.

e) Az A, B és C események közül mindhárom bekövetkezik.

Megoldás:

a) Mivel a két esemény közül pontosan egy következik be, ezért két eset lehetséges: vagy A bekövetkezik és B nem következik be, vagy pedig A nem következik be és B bekövetkezik. Ha A bekövetkezik és B nem, akkor egyszerre bekövetkezik az A és a $\overline{B}$ esemény, tehát az $A\cdot\overline{B}$ esemény következik be. A másik esetben hasonlóan az $\overline{A}\cdot B$ esemény következik be. Így az, hogy a két esemény közül pontosan egy következik be az alábbi lesz:

$$A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B\,.$$

b) Ha az A, B, C események közül egyik sem következik be, akkor egyszerre bekövetkezik mindhárom esemény komplementere, azaz egyszerre következik be $\overline{A}$, $\overline{B}$ és $\overline{C}$. A jelölésekkel kifejezve:

$$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\,.$$

Ügyeljünk arra, hogy ez nem ugyanaz, mint az $\overline{A\cdot B\cdot C}$ esemény!

c) Pontosan egy következik be, tehát egy bekövetkezik és a másik kettő nem. Így a következő három eset közül törénik valamelyik: A bekövetkezik, de B és C nem következik be, B bekövetkezik, de A és C nem következik be, illetve C bekövetkezik, de A és B nem következik be. Ha A bekövetkezik, de B és C nem következik be, akkor az A, $\overline{B}$ és $\overline{C}$ események következnek be együttesen, vagyis az $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ esemény következik be. A másik két esetben ehhez hasonlóan rendre a $B\cdot\overline{A}\cdot\overline{C}$ és a $C\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}$ esemény következik be. Így az, hogy a három közül pontosan egy következik be az alábbi kifejezés lesz:

$$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{A}\cdot\overline{C}+C\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\,.$$

d) A feladat nagyon hasonló az előzőhöz, csak itt két esemény bekövetkezik, egy pedig nem. Itt is három eset van, amelyek közül valamelyik bekövetkezik: A és B bekövetkezik, de C nem vagy A és C bekövetkezik, de B nem, illetve B és C bekövetkezik, de A nem. Ha A és B bekövetkezik, de C nem akkor az $A\cdot B\cdot\overline{C}$ esemény következik be. A másik két esetben pedig az $A\cdot\overline{B}\cdot C$, illetve az $\overline{A}\cdot B\cdot C$ esemény következik be. Így az, hogy az A, B és C események közül pontosan kettő következik be:

$$A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C\,.$$

e) Mivel mindhárom esemény bekövetkezik, ezért az események szorzata következik be, azaz

$$A\cdot B\cdot C\,.$$

1.11. Feladat.

Egy szabályos pénzérmét kétszer feldobunk, és azt figyeljük, hogy összesen hány fejet kapunk. Az eseménytér ekkor $\Omega=\{0{,}1{,}2\}$. Az alábbiak közül melyek adhatóak meg Ω részhalmazaként?

a) Nem dobunk kétszer fejet.

b) Az egyik dobás fej, a másik írás.

c) Az első dobás fej, a második írás.

d) Legalább egy fejet dobunk.

Megoldás:

a) Ha nem dobunk kétszer fejet, akkor a dobott fejek száma nulla vagy egy. Ennek megfelel a $\{0{,}1\}$ részhalmaz, így ez negadható részhalmazként.

b) Mivel az egyik fej, a másik pedig írás, ezért a dobott fejek száma egy. Ez is megadható részhalmazként, a részhalmaz pedig $\{1\}$.

c) Hasonlóan az előzőhöz itt is igaz az, hogy az egyik dobás fej, a másik pedig írás, de itt az események sorrendje is számít. A dobások sorrendjét az eseménytér megadásánál viszont nem vettük figyelembe (nem az egyes dobások kimenetelét néztük, hanem azt, hogy összesen hány fejet dobunk), így ez nem fejezhető ki Ω részhalmazaként.

d) A legalább egy fej itt azt jelenti, hogy egy vagy két fejet dobunk. Az ennek megfelelő részhalmaz: $\{1,2\}$.

Az események közötti összeadás, szorzás ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint halmazok körében az unió és a metszet, azaz

kommutatív:	$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$
asszociatív:	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
disztributív:	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$

Egy tetszőleges A esemény, a komplementere ($\overline{A}$), a biztos esemény (Ω) és a lehetetlen esemény ($\emptyset$) között érvényesek a következő egyszerű műveleti tulajdonságok:

$$\begin{array}{cc} A+A=A & A\cdot A=A \\ A+\Omega=\Omega & A\cdot\Omega=A \\ A+\emptyset=A & A\cdot\emptyset=\emptyset \\ A+\overline{A}=\Omega & A\cdot\overline{A}=\emptyset \end{array}$$

Két esemény (A és B) különbsége átalakítható szorzattá:

$$A-B=A\cdot\overline{B}\,.$$

Itt is érvényesek a halmazok körében ismert De Morgan azonosságok:

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}\qquad\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}\,.$$

1.12. Feladat.
Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre fennáll, hogy

$$(A-B)\cdot(A-C)=A\cdot(\overline{B+C})\,.$$

Megoldás:
A bal oldalon használjuk fel, hogy $A-B=A\cdot\overline{B}$, illetve $A-C=A\cdot\overline{C}$, a jobb oldalon pedig alkalmazzuk az egyik de Morgan azonosságot: $\overline{B+C}=\overline{B}\cdot\overline{C}$. Így a következőt kapjuk:

$$A\cdot\overline{B}\cdot A\cdot\overline{C}=A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\,.$$

Mivel tudjuk, hogy az események körében a szorzás kommutatív, továbbá $A\cdot A=A$, ezért ebből az állítás már következik.

1.13. Feladat.
Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre fennáll, hogy

$$A-B\cdot C=(A-B)+(A-C)\,.$$

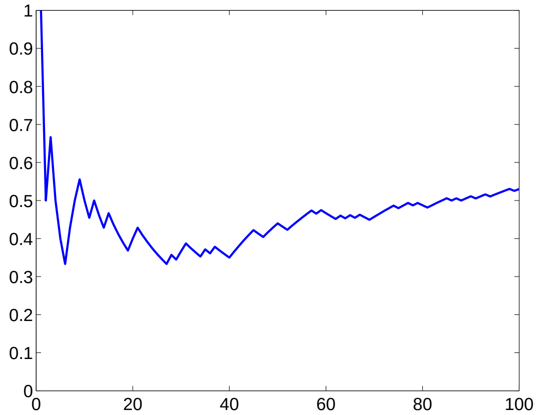
Megoldás:
A kivonásokat mindkét oldalon alakítsuk át az ismert formula szerint a komplementer eseménnyel vett szorzássá ($A-B=A\cdot\overline{B}$):

$$A\cdot\overline{B\cdot C}=A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}\,.$$

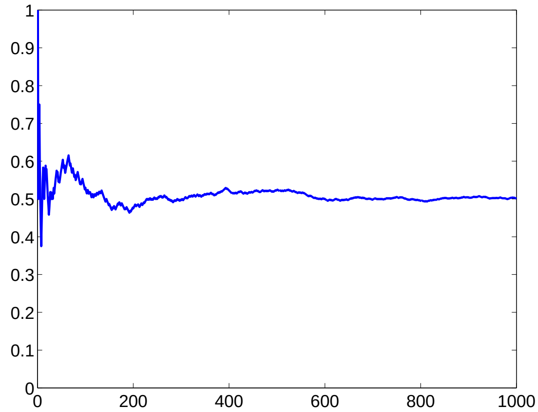
A bal oldalon alkalmazzuk a $\overline{B\cdot C}=\overline{B}+\overline{C}$ de Morgan azonosságot:

$$A\cdot(\overline{B}+\overline{C})=A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}\,.$$

Innen a bal oldalon álló zárójel felbontásával adódik az állítás.



(a) $n = 100$



(b) $n = 1000$

1.7. ábra. A fej relatív gyakoriságának időbeni alakulása egy 100 és egy másik, 1000 dobásból álló fej vagy írás kísérletsorozatban.

1.2. A valószínűségszámítás axiómái

Ha egy véletlen tömegjelenséget (A) nagyon sokszor, azonos körülmények között megfigyelünk, akkor a tapasztalat szerint a bekövetkezések és az összes kísérletek számának aránya hosszú távon stabilitást mutat. Ez annyit jelent, hogy ez az arány egy meghatározott számérték körül ingadozik, és az ingadozások a kísérletek számának növelésével általában egyre kisebbek lesznek (lásd az 1.7 ábrát). Ha többször is elvégezzük a kísérletsorozatot, akkor az egyes kísérletek eredményei természetesen nem feltétlenül lesznek ugyanazok, de a tendencia itt is érvényesül (lásd az 1.8 ábrát): az arány ingadozása egyre kisebb lesz. Azt a számot, amely körül ez az arány ingadozik, az esemény valószínűségének nevezzük és $P(A)$-val jelöljük.

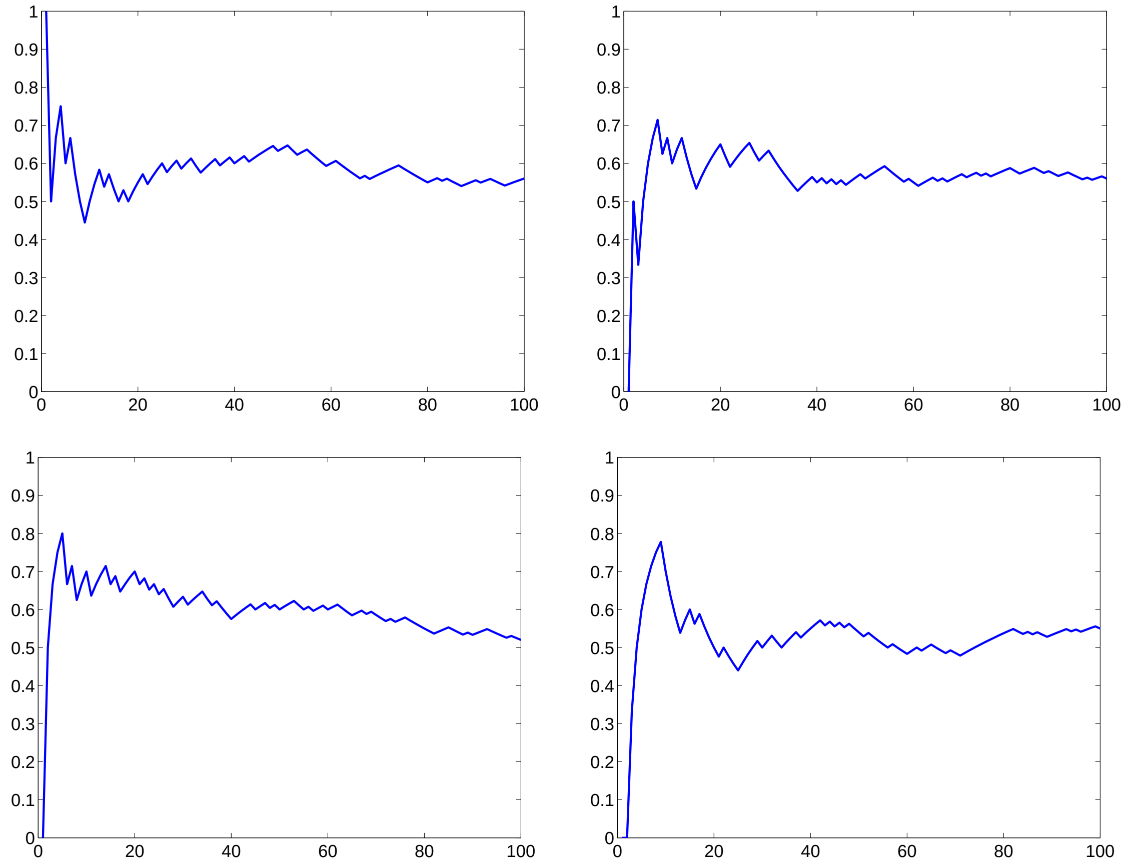
1.14. Definíció.
Ha egy kísérletet n -szer azonos körülmények között megismételve az A esemény k_A esetben következik be, akkor ezt a k_A számot az A esemény gyakoriságának nevezzük. A gyakoriság és a kísérletek számának hányadosát, $\frac{k_A}{n}$-et pedig az A esemény relatív gyakoriságának hívjuk.

1.15. Példa.
Tegyük fel, hogy egy pénzérmét harmincszor feldobva 18 fejet kapunk. Ekkor a fej dobás gyakorisága 18, relatív gyakorisága pedig $\frac{18}{30} = 0{,}6$.

A fentiek szerint az A esemény $\frac{k_A}{n}$ relatív gyakorisága az esemény $P(A)$ valószínűségéhez tart. A relatív gyakoriság tulajdonságaiból így következtethetünk a valószínűség tulajdonságaira is, érdemes tehát először ezeket megvizsgálni.

Ha egy kísérlettel kapcsolatos A esemény gyakorisága k_A , akkor nyilvánvaló, hogy az A esemény relatív gyakorisága 0 és 1 közötti érték, azaz

$$0 \leq \frac{k_A}{n} \leq 1\,.$$



1.8. ábra. A fej relatív gyakoriságának időbeni alakulása négy különböző, 100 dobásból álló fej vagy írás kísérletsorozatban.

Mivel az A esemény relatív gyakorisága az A esemény valószínűsége körül ingadozik, a

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

feltételnek is igaznak kell lennie.

A biztos esemény mindig bekövetkezik, ezért relatív gyakorisága mindig 1, azaz

$$\frac{k_\Omega}{n} = 1\,.$$

Ezért a

$$P(\Omega) = 1$$

egyenlőségnek is teljesülnie kell.

Ha A és B egymást kizáró események, akkor az $A+B$ esemény $(k_A + k_B)$-szer következik be. A relatív gyakoriságokra áttérve innen azt kapjuk, hogy

$$\frac{k_{A+B}}{n} = \frac{k_A + k_B}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n}\,.$$

Mivel az $A+B$ esemény relatív gyakorisága az $A+B$ esemény valószínűsége körül ingadozik, az A illetve a B esemény relatív gyakoriságai pedig az A illetve a B esemény valószínűsége körül, ezért egymást kizáró események esetén a

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

egyenlőségnek is fenn kell állnia.

A relatív gyakoriság tulajdonságai alapján célszerű a követlezőket tekinteni a valószínűségszámítás axiómáinak:

1.16. A valószínűségszámítás axiómái

1. Az adott Ω eseménytér minden egyes A eseményéhez tartozik egy 0 és 1 közé eső $P(A)$ szám, azaz
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
amelyet az A esemény valószínűségének (valószínűségi mértékének) nevezünk.

2. A biztos esemény valószínűsége 1 , azaz $P(\Omega) = 1$.

3. Az egymást páronként kizáró események összegének valószínűsége az egyes események valószínűségeinek összegével egyenlő, azaz ha az $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ események esetén $A_i \cdot A_j = \emptyset$ (ha $i \neq j$), akkor
$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots .$$
Tömörebben:
$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k) .$$

1.3. Az axiómák egyszerűbb következményei

1.17. Tétel.
Az A esemény komplementerének valószínűsége $1 - P(A)$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\Omega = A + \overline{A}$, így $P(\Omega) = P(A + \overline{A})$. Továbbá azt is tudjuk, hogy A és $\overline{A}$ egymást kizárják ($A \cdot \overline{A} = \emptyset$), tehát alkalmazhatjuk a 3. axiómát: $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$, másrészt a biztos esemény valószínűsége 1, így

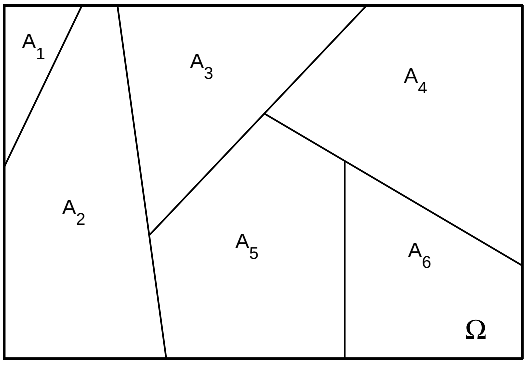
$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

Ebből rendezés után kapjuk, hogy

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) .$$

□

1.18. Definíció. (Teljes eseményrendszer)
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egymást páronként kizárják és összegük a biztos esemény, azaz ha* $A_i \cdot A_j = \emptyset$ *(ha* $i \neq j$*), és* $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$*.*



1.9. ábra. Teljes eseményrendszer, azaz a teljes eseménytér felbontása olyan diszjunkt részhalmazokra, melyek együttesen lefedik a teljes eseményteret.

1.19. Példa.
Legyen a kísérlet az, hogy feldobunk egy szabályos dobókockát. Nézzük ezzel kapcsolatban a következő eseményeket:

a) A_1: párosat dobunk, A_2: páratlant dobunk. Ekkor A_1, A_2 teljes eseményrendszert alkotnak, hiszen egyszerre nem következhetnek be ($A_1 \cdot A_2 = \emptyset$), viszont a kettő közül valamelyik biztosan bekövetkezik, így összegük a biztos esemény.

b) A_i: a dobott szám i ($i = 1, \ldots, 6$). Ekkor $A_1, A_2, \ldots, A_6$ teljes eseményrendszert alkotnak, hiszen egyszerre nem következhetnek be ($A_i \cdot A_j = \emptyset$, $i \neq j$), viszont a hat esemény közül valamelyik biztosan bekövetkezik, így összegük a biztos esemény.

c) A_1: egyet dobunk, A_2: kettőt vagy hármat dobunk, A_3: négyet, ötöt vagy hatot dobunk. Most is igaz az, hogy az események közül egyszerre csak egy következhet be (egymást páronként kizárják), valamelyik viszont mindenféleképpen be fog következni (összegük a biztos esemény), így most is teljes eseményrendszerről van szó.

d) A_1: a dobott szám legalább három, A_2: a dobott szám legfeljebb négy. A *legalább három* lehet 3, 4, 5 vagy 6, a *legfeljebb négy* pedig lehet 1, 2, 3 vagy 4. A két esemény összege a biztos esemény, de nem teljesül az, hogy egyszerre csak egy következhet be közülük, így nem alkotnak teljes eseményrendszert.

e) A_1: egyet dobunk, A_2: páros számot dobunk, A_3: hárommal osztható számot dobunk. Mivel a hat páros is és hárommal is osztható, ezért az A_2 és A_3 események egymást nem zárják ki, továbbá A_1, A_2, A_3 összege sem a biztos esemény, hiszen az 5 egyik eseményben sem szerepel, így ez sem teljes eseményrendszer.

1.20. Tétel.
Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor valószínűségeik összege 1, azaz $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

BIZONYÍTÁS: Mivel a teljes eseményrendszer tagjai egymást páronként kizárják, ezért a 3. axióma miatt az összegük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik összegével. Másrészt a teljes eseményrendszer tagjainak összege a biztos esemény, melynek a valószínűsége a 2. axióma miatt 1. Ebből már követezik az állítás. Formálisan:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \\ 1 &= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \end{aligned}$$

□

1.21. Példa.
Tekintsük az előző példában az első három esetet:

a) A_1: párosat dobunk, A_2: páratlant dobunk.

$$P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

b) A_i: a dobott szám i $(i = 1, \ldots, 6)$.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6} = 1\,.$$

c) A_1: egyet dobunk, A_2: kettőt vagy hármat dobunk, A_3: négyet, ötöt vagy hatot dobunk.

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1\,.$$

1.22. Tétel. (Különbség valószínűsége)
Az A és B események $B - A$ különbségének valószínűsége

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B)\,.$$

BIZONYÍTÁS: A B eseményt egymást kizáró események összegére fogjuk felbontani, majd alkalmazzuk a 3. axiómát.

$$P(B) = P(B \cdot \Omega) = P(B \cdot (A + \overline{A})) = P(B \cdot A + B \cdot \overline{A}) =$$

$B \cdot A$ és $B \cdot \overline{A}$ egymást kizáróak, ezért alkalmazhatjuk a 3. axiómát

$$= P(B \cdot A) + P(B \cdot \overline{A}) = P(B \cdot A) + P(B - A)$$

Átrendezve kapjuk, hogy

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B)\,.$$

□

1.23. Következmény.
Ha $A \subset B$, akkor $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

1.24. Tétel. (Összeg valószínűsége)
Az A és B események összegének valószínűsége

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)\,.$$

BIZONYÍTÁS: Az $A + B$ eseményt felbontjuk egymást kizáró események összegére, majd alkalmazzuk a 3. axiómát. Az $A + B$ esemény tartalmaz minden olyan eseményt, ahol A vagy B bekövetkezik. Ezt úgy is leírhatjuk, hogy tartalmazza azokat az eseményeket, amikor A bekövetkezik, továbbá azokat is, amikor B bekövetkezik, de A nem. Ebből következik ez az egyenlőség: $A + B = A + (B - A)$. Vigyázat, itt a zárójelet nem lehet elhagyni!

$$P(A + B) = P(A + (B - A)) =$$

A és $B - A$ egymást kizárják, ezért alkalmazhatjuk a 3. axiómát

$$= P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)\,.$$

□

1.25. Feladat.
Legyen az A esemény valószínűsége 0,6, a B esemény valószínűsége 0,5, az együttes bekövetkezés valószínűsége pedig 0,3. Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket:

a) $P(\overline{A})$ *c)* $P(A - B)$ *e)* $P(\overline{A} + \overline{B})$ *g)* $P(A \cdot \overline{B})$

b) $P(A + B)$ *d)* $P(B - A)$ *f)* $P(\overline{A} + B)$ *h)* $P(\overline{A} - \overline{B})$

Megoldás:

a)
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4\,.$$

b)
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8\,.$$

c)
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3\,.$$

d)
$$P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2\,.$$

e)

$$P(\overline{A}+\overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\cdot\overline{B}) = 1 - P(A) + 1 - P(B) - P(\overline{A+B}) =$$
$$= 1 - P(A) + 1 - P(B) - (1 - P(A+B)) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7\,.$$

Vegyük észre, hogy ennél egyszerűbben is megoldható a feladat, ha felhasználjuk, hogy $\overline{A}+\overline{B} = \overline{A\cdot B}$. Ekkor ugyanis:

$$P(\overline{A}+\overline{B}) = P(\overline{A\cdot B}) = 1 - P(A\cdot B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7\,.$$

f) Sajnos itt nem élhetünk az előzőhöz hasonló trükkel:

$$P(\overline{A}+B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A}\cdot B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B\cdot\overline{A}) =$$
$$= 1 - P(A) + P(B) - P(B-A) = 1 - 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7\,.$$

g)

$$P(A\cdot\overline{B}) = P(A-B) = P(A) - P(A\cdot B) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3\,.$$

h)

$$P(\overline{A}-\overline{B}) = P(\overline{A}\cdot\overline{\overline{B}}) = P(\overline{A}\cdot B) = P(B-A) = P(B) - P(A\cdot B) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2\,.$$

1.26. Feladat.
Legyen $B\subset A$, és $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}1$. Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket:

a) $P(A\cdot B)$ *c)* $P(A-B)$ *e)* $P(\overline{A}\cdot B)$ *g)* $P(A-\overline{B})$

b) $P(A+B)$ *d)* $P(B-A)$ *f)* $P(\overline{A+B})$ *h)* $P(\overline{B}-A)$

Megoldás:

a) Mivel $B\subset A$, ezért A és B együttes bekövetkezése tulajdonképpen B bekövetkezését jelenti, így

$$P(A\cdot B) = P(B) = 0{,}1\,.$$

b) Mivel $B\subset A$, ezért az $A+B$ esemény megegyezik A-val, ezért

$$P(A+B) = P(A) = 0{,}4\,.$$

c)

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cdot B) = \text{ (mivel } B\subset A\text{) } = P(A) - P(B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3\,.$$

d) A $B-A$ esemény jelentése: B bekövetkezik, de A nem. Mivel $B\subset A$, ezért nem fordulhat elő, hogy B bekövetkezik, de A nem, így a kérdéses valószínűség 0.

e)

$$P(\overline{A}\cdot B) = P(B-A) = \text{(az előző feladat alapján)} = 0\,.$$

f)

$$P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = \text{ (mivel } B\subset A\text{) } = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6\,.$$

g)

$$P(A-\overline{B}) = P(A\cdot\overline{\overline{B}}) = P(A\cdot B) = \text{ (mivel } B\subset A\text{) } = P(B) = 0{,}1\,.$$

h)

$$P(\overline{B}-A) = P(\overline{B}\cdot\overline{A}) = P(\overline{A+B}) = \text{ (ez már szerepelt)} = 0{,}6\,.$$

2. fejezet

A klasszikus és a geometriai valószínűségi mező

2.1. A klasszikus valószínűségi mező

2.1. Definíció.
Ha egy kísérlettel kapcsolatban az elemi események száma véges (n), és minden elemi esemény valószínűsége egyenlő $\left(\frac{1}{n}\right)$, akkor a k féleképpen bekövetkező A esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{k}{n}.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az események és ezek valószínűségei klasszikus valószínűségi mezőt alkotnak.

A kedvező és az összes esetek száma általában kombinatorikus úton határozható meg, ezért először tekintsük át az alapvető kombinatorikai eseteket.

2.1.1. Kombinatorika

- Adott n darab különböző elem. Ekkor a lehetséges sorrendek száma (az n elem permutációinak száma):

  $$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!\,.$$

  2.2. Példa.
  Adottak az A, B, C, D, E betűk. Ezeket összesen $5! = 120$ féleképpen lehet sorba rakni.

- Adott n darab elem, melyek között vannak megegyezőek is: k_1 darab 1. típusú, k_2 darab 2. típusú, …, k_r darab r. típusú (természetesen $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$). Ekkor a lehetséges sorrendek száma (az n elem ismétléses permutációinak száma):

  $$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}\,.$$

2.3. Példa.
Adott 3 darab A, 4 darab B, 2 darab C és egy D betű. Összesen $3+4+2+1=10$ darab elemünk van, melyek között vannak megegyezőek is. Ekkor a lehetséges sorrendek száma összesen

$$\frac{10!}{3!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 1} = 12\,600\,.$$

– Adott n darab különböző elem, melyekből kiválasztunk k darabot $(0 \leq k \leq n)$. Ekkor a kiválasztott elemek lehetséges sorrendjeinek száma (a variációk száma):

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\,.$$

2.4. Példa.
Adottak az A, B, C, D, E betűk. Ha minden betűt csak egyszer használhatunk fel, akkor ezekből összesen $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ féle három betűből álló „szót" lehet készíteni.

– Adott n darab különböző elem, melyekből k-szor választunk úgy, hogy egy elemet akár többször is kiválaszthatunk (így most k értéke lehet n-nél több is). Az így adódó lehetőségek száma (ismétléses variációk száma):

$$n\cdot n\cdot\ldots\cdot n = n^k\,.$$

2.5. Példa.
Adottak az A, B, C, D, E betűk. Ha egy betűt többször is felhasználhatunk, akkor ezekből összesen $5^3 = 125$ féle három betűből álló „szót" lehet készíteni.

– Adott n darab különböző elem, melyekből kiválasztunk k darabot $(0 \leq k \leq n)$ úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Ekkor a lehetséges kiválasztások száma (a kombinációk száma):

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}\,.$$

2.6. Példa.
A 32 lapos magyar kártyából osztanak nekünk öt lapot. A kapott öt lap $\binom{32}{5} = 201\,376$ féle lehet.

– Adott n darab különböző elem, melyekből k-szor választunk úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít, továbbá egy elemet többször is kiválaszthatunk. Ekkor a lehetséges kiválasztások száma (ismétléses kombinációk száma):

$$\binom{n+k-1}{k}\,.$$

2.7. Példa.
Egy ösztöndíjra 4 pályázat érkezett. A pályázatokról egy 12 fős bizottság dönt, mindenki pontosan egy pályázóra szavazhat. A szavazást tekinthetjük úgy is, hogy a bizottság minden egyes tagja kiválaszt pontosan egyet a pályázók közül, akire szavaz, tehát 4 emberből választanak 12-szer úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. A szavazás végeredményén azt értjük, hogy külön-külön hány szavazatot kaptak az egyes pályázók. Ekkor a lehetséges végeredmények száma:

$$\binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12} = 455\,.$$

2.8. Feladat.
Két szabályos dobókockával dobunk.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 8?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább az egyikkel hatost dobunk?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két kockával egyforma számokat dobunk?

Megoldás:

a) Két kockával dobva összesen 36 féle eset lehetséges (a kockák megkülönböztethetőek, tehát az (1,2) és a (2,1) nem ugyanaz az eset. Az összes eset: (1,1), (1,2), $\ldots$, (1,6), (2,1), (2,2),$\ldots$(6,6). A dobott számok összege a következők szerint lehet 8: $2+6$, $6+2$, $3+5$, $5+3$, $4+4$. Ez összesen 5 eset. Tehát a keresett valószínűség $\frac{5}{36} \approx 0{,}1389$.

b) Ez létre jöhet úgy, hogy

- az egyikkel hatost dobunk, a másikkal nem. Amikor nem dobunk hatost, akkor 5 félét dobhatunk.
- az egyikkel nem dobunk hatost a másikkal igen. Itt is 5 féle lehetőség van.
- mindkettővel hatost dobunk. Ez természetesen csak egyféleképpen jöhet létre.

Ez így össesen $5+5+1=11$ eset, tehát a keresett valószínűség $\frac{11}{36} \approx 0{,}3056$. Egyszerűbben is megkaphatjuk azonban ezt az eredményt. Azon esetek számát, amikor legalább az egyikkel hatost dobunk megkaphatjuk úgy is, hogy az összes esetből (ez 36 féle) elhagyjuk azokat, amikor nem dobunk hatost. Ha nem dobunk hatost, akkor mindkét kockával csak 5 féle számot dobhatunk, tehát itt $5 \cdot 5 = 25$ eset lehetséges. Tehát azon esetek száma, amikor legalább egy hatost dobunk $36-25=11$.

c) Itt 6 féle eset lehetséges $((1{,}1), (2{,}2), \ldots, (6{,}6))$, így a keresett valószínűség $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$.

2.9. Feladat.
Egy osztályban 16 fiú és 10 lány van. Kiválasztunk közülük négy embert (a kiválasztás sorrendje nem számít).

a) Mi a valószínűsége, hogy van közöttük lány?

b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan két fiú és két lány van közöttük?

c) Mi a valószínűsége, hogy legalább két lány van közöttük?

Megoldás:

a) Mivel a kiválasztás orrendje nem számít, ezért az összes lehetséges esetek száma $\binom{26}{4} = 14\,950$. A „van közöttük lány” esetek helyett egyszerűbb azokat megszámolni, amikor nincs közöttük lány. Azon esetek száma , amikor nincs közöttük lány $\binom{16}{4} = 1\,820$. Így a keresett valószínűség:

$$1 - \frac{\binom{16}{4}}{\binom{26}{4}} = 1 - \frac{1\,820}{14\,950} \approx 0{,}8783\,.$$

b) Ekkor a 16 fiúból kell kettőt és a 10 lányból kell szintén kettőt kiválasztani. A lehetőségek száma itt $\binom{16}{2} \cdot \binom{10}{2} = 5\,400$. A kérdéses valószínűség pedig:

$$\frac{\binom{16}{2} \cdot \binom{10}{2}}{\binom{26}{4}} = \frac{5\,400}{14\,950} \approx 0{,}3612\,.$$

c) A „legalább két lány” lehet 2, 3 vagy 4. Kettőnél az esetek száma $\binom{16}{2}\cdot\binom{10}{2} = 5\,400$, háromnál $\binom{16}{1}\cdot\binom{10}{3} = 1\,920$, négynél pedig $\binom{16}{0}\cdot\binom{10}{4} = 210$. A kérdéses valószínűség pedig:

$$\frac{\binom{16}{2}\cdot\binom{10}{2}+\binom{16}{1}\cdot\binom{10}{3}+\binom{16}{0}\cdot\binom{10}{4}}{\binom{26}{4}} = \frac{7530}{14\,950} \approx 0{,}5037\,.$$

2.1.2. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel

Minőségellenőrzéskor, közvéleménykutatásnál általlában nem vizsgáljuk a teljes alapsokaságot, hanem valamilyen metódus szerint kiválasztotunk néhányat. Ekkor azt mondjuk, hogy a sokaságból mintát veszünk. A mintavétel két legegyszerűbb módja a visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavétel.

A visszatevéses mintavétel

Visszatevéses mintavétel esetén a minta elemeit egyenként választjuk ki, majd a vizsgálat után visszatesszük, ezután kivesszük a következőt, stb.

Legyen összesen N darab termékünk, melyek közül s darab selejtes. Az N elemű sokaságból n elemű mintát veszünk visszatevéssel. Mi lehet annak a valószínűsége, hogy a mintában pontosan k darab selejt van?

A visszatevés miatt minden mintavétel ugyanolyan körülmények között történik, így az n elemű minta kiválasztására az összes lehetséges eset $N\cdot N\cdot\ldots\cdot N = N^n$. Azok lesznek a kedvező esetek, amikor a kiválasztott termékek között pontosan k darab selejt van, ekkor természetesen a többi $n-k$ termék nem selejtes. A k darab selejtes s^k, az $n-k$ darab nem selejtes pedig $(N-s)^{(n-k)}$ féleképpen választható ki. Mivel az n húzásból $\binom{n}{k}$ féleképpen választható ki az a k darab, amikor selejtet húzunk, így a megfelelő esetek száma: $\binom{n}{k}\cdot s^k\cdot(N-s)^{(n-k)}$. A kérdéses valószínűség ezzel:

$$\begin{aligned}
P(k \text{ db selejt}) &= \frac{\binom{n}{k}\cdot s^k\cdot(N-s)^{(n-k)}}{N^n} = \binom{n}{k}\cdot\frac{s^k}{N^k}\cdot\frac{(N-s)^{(n-k)}}{N^{n-k}} = \\
&= \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{s}{N}\right)^k\cdot\left(\frac{N-s}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{s}{N}\right)^k\cdot\left(1-\frac{s}{N}\right)^{n-k} = \quad (\text{legyen } p=\frac{s}{N}) \\
&= \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\,.
\end{aligned}$$

2.10. Példa.
Egy dobozban 12 fehér és 8 zöld golyó van. Visszatevéssel húzunk ötször és azt figyeljük, hogy hány zöld golyót húzunk ki. A fenti jelöléseket használva most $N = 20$, $s = 8$, $n = 5$, $p = \frac{8}{20} = 0{,}4$. Annak valószínűsége, hogy pontosan 2 zöldet húzunk ki ($k = 2$):

$$P(2 \text{ zöld}) = \binom{5}{2}\cdot(0{,}4)^2\cdot(1-0{,}4)^{5-2} = 0{,}3456\,.$$

A visszatevés nélküli mintavétel

Visszatevés nélküli mintavétel során vagy egyszerre emeljük ki a minta elemeit a sokaságból, vagy pedig egymás után, de egyetlen kihúzottat sem teszünk vissza.

Legyen most is összesen N darab termékünk, melyek közül s darab selejtes. Az N elemű sokaságból n elemű mintát veszünk visszatevés nélkül úgy, hogy $n \leq s$ és $n \leq N-s$ is teljesüljön. Mi lehet annak a valószínűsége, hogy a mintában pontosan k darab selejt van?

Tegyük fel, hogy a minta elemeit egyesével emeljük ki a sokaságból, és így számít a sorrend is. Ekkor az összes lehetséges eset $N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)$. A k darab selejt $s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)$ féleképpen választható ki, a maradék $n-k$ darab nem selejt pedig $(N-s) \cdot (N-s-1) \cdot \ldots \cdot (N-s-(n-k-1))$ féleképpen. Mivel a k darab selejt és az $n-k$ darab nem selejt $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ féleképpen állítható sorba, így a megfelelő esetek száma:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1) \cdot (N-s) \cdot (N-s-1) \cdot \ldots \cdot (N-s-(n-k-1)).$$

A kérdéses valószínűség:

$$P(k \text{ db selejt}) =$$

$$= \frac{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1) \cdot (N-s) \cdot (N-s-1) \cdot \ldots \cdot (N-s-(n-k-1))}{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)} =$$

$$= \frac{\frac{s \cdot (s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)}{k!} \cdot \frac{(N-s) \cdot (N-s-1) \cdot \ldots \cdot (N-s-(n-k-1))}{(n-k)!}}{\frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)}{n!}} =$$

$$= \frac{\frac{s!}{k! \cdot (s-k)!} \cdot \frac{(N-s)!}{(n-k)! \cdot (N-s-(n-k))!}}{\frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}} = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Tegyük fel most azt, hogy a minta elemeit egyszerre emeljük ki a sokaságból, és így nem számít a kiválasztás sorrendje. Az összes lehetséges eset annyi, ahány féleképpen N elemből kiválaszthatunk n darabot úgy, hogy a sorrend nem számít, azaz $\binom{N}{n}$. A megfelelő esetekhez az s darab selejtből kell k darabot kiválasztani, ezt megtehetjük $\binom{s}{k}$ féleképpen, továbbá az $N-s$ darab nem selejtesből kell a maradék $n-k$ darabot kiválasztani, amit $\binom{N-s}{n-k}$ féleképpen tehetünk meg. Így most a megfelelő esetek száma: $\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}$. A kérdéses valószínűség pedig:

$$P(k \text{ db selejt}) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy visszatevés nélküli mintavétel esetén a valószínűség szempontjából mindegy az, hogy figyelembe vesszük a sorrendet vagy nem.

2.11. Példa.
Tekintsük ugyanazt a példát, mint előbb, de most visszatevésnélkül: egy dobozban 12 fehér és 8 zöld golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk ötöt és azt figyeljük, hogy hány zöld golyót húzunk ki. A fenti jelöléseket használva most $N = 20$, $s = 8$, $n = 5$. Annak valószínűsége, hogy pontosan 2 zöldet húzunk ki ($k = 2$):

$$P(2 \text{ db zöld}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{20-8}{5-2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{20}{5}} \approx 0{,}3973\,.$$

A visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavétel közötti különbség egyre inkább elmosódik, ha a sokaság elemszáma, továbbá a két részsokaság (selejt–nem selejt) elemszáma nagyon nagy a kihúzott elemek számához képest. Azaz, ha N, s és $N - s$ is sokkal nagyobb , mint n, akkor a kétféle mintavétellel kapott valószínűségértékek gyakorlatilag megegyeznek.

2.12. Példa.
Legyen most százszor annyi golyónk a dobozban: 1200 fehér és 800 zöld. Öt golyót kihúzva mennyi lehet a valószínűsége annak, hogy pontosan 2 zöldet húzunk?

a) Ha visszatevéssel húzunk, akkor

$$P(2 \text{ db zöld}) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{800}{2000}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{800}{200}\right)^{5-2} = \binom{5}{2} \cdot (0{,}4)^2 \cdot (1 - 0{,}4)^3 = 0{,}3456\,.$$

b) Ha visszatevés nélkül húzunk, akkor

$$P(2 \text{ db zöld}) = \frac{\binom{800}{2} \cdot \binom{2000-800}{5-2}}{\binom{2000}{5}} = \frac{\binom{800}{2} \cdot \binom{1200}{3}}{\binom{2000}{5}} \approx 0{,}3460\,.$$

2.13. Feladat.
A 32 lapos magyar kártyából 3 lapot húzunk.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy a 3 lap között van piros, ha visszatevéssel húzunk?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy a 3 lap között van piros , ha visszatevés nélkül húzunk?

Megoldás:

a) A „van piros” többféleképpen is létrejöhet (lehet 1, 2 vagy 3 piros is), ezért célszerűbb úgy számolni, hogy 1-ből kivonjuk annak valószínűségét, hogy nem húzunk pirosat. Mivel visszatevéssel húzunk, ezért minden húzás eredménye 32 féle lehet, tehát három húzásnál összesen $32^3 = 32\,768$ eset lehetséges. Ha nem húzunk pirosat, akkor csak 24 féle lapot húzhatunk mindháromszor, ez $24^3 = 13\,824$ eset. Így a keresett valószínűség:

$$1 - \frac{32\,768}{13\,824} = 1 - \frac{24^3}{32^3} = 1 - \left(\frac{24}{32}\right)^3 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \approx 0{,}5781\,.$$

b) Az előzőhöz hasonlóan itt is annak valószínűségét fogjuk először meghatározni, hogy nem húzunk pirosat. Mivel visszatevés nélkül húzunk, ezért az első lap lehet 32 féle, a második 31 féle, a harmadik 30 féle, ez összesen $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$ féle eset. Ha nem húzunk pirosat, akkor az első lehet 24 féle, a második 23 féle, a harmadik 22 féle, ez összesen $24 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,144$ féle eset. Így annak valószínűsége, hogy húzunk pirosat:

$$1 - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{32 \cdot 31 \cdot 30} = 1 - \frac{12\,144}{29\,760} \approx 0{,}5919\,.$$

Ha úgy számolunk, hogy a húzások sorrendje nem számít, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk. Ekkor az összes lehetséges esetek száma $\binom{32}{3}$, hiszen a 32 lapból választunk ki hármat, és a sorrend nem számít. Hasonlóan azon esetek száma, amikor nem húzunk pirosat $\binom{24}{3}$. Ezzel a keresett valószínűség a következő lesz:

$$1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} = 1 - \frac{\frac{24!}{3!\,21!}}{\frac{32!}{3!\,29!}} = 1 - \frac{\frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3!}}{\frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3!}} = 1 - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{32 \cdot 31 \cdot 30} \approx 0{,}5919\,.$$

2.14. Feladat.

Adott 12 000 darab sorsjegy. Összesen 6000 nyereményt sorsolnak ki, azaz 6000 nyerő sorsjegy van. Az A játékos egy darabot, B pedig 20 darabot vásárol. Mi a valószínűsége annak, hogy A nyer? Mi a valószínűsége annak, hogy B nyer?

Megoldás:

Az A játékos akkor nyer, ha az ő szelvényét kihúzzák és a maradék 11 999 szelvény közül húzzák ki a többi 5999-et. Ennek valószínűsége:

$$P(A \text{ nyer}) = \frac{\binom{11\,999}{5999}}{\binom{12\,000}{6000}} = 0{,}5\,.$$

Ezt persze tudtuk, hiszen a szelvények fele nyer, így egy szelvénnyel játszva nyilván 0,5 valószínűséggel nyerünk.

A B játékos esetében a nyerés valószínűségét a komplementer esemény segítségével határozzuk meg:

$$P(B \text{ nyer}) = 1 - P(B \text{ nem nyer})\,.$$

Ha B nem nyer, akkor a nyerő szelvényeket a többi 11 980 szelvényből húzzák ki. Így a nyerés valószínűsége:

$$P(B \text{ nyer}) = 1 - \frac{\binom{11\,980}{6000}}{\binom{12\,000}{6000}} \approx 0{,}9999990613\,.$$

Ezt sajnos zsebszámológéppel általában nem lehet kiszámolni, de nincs is rá szükség, mert becsülhetjük is a valószínűséget. A feladat úgy is megfogalmazható, hogy adott 12 000 sorsjegy, ezek közül 6000 nyerő. 20 darabot kihúzva mi a valószínűsége, hogy lesz köztük nyerő? Mivel a húzások száma (20), sokkal kevesebb, mint a nyerő (6000) és a nem nyerő (6000) sorsjegyek száma, ezért a visszatevés nélküli modell jól közelíthető a visszatevésessel. Ha minden egyes húzás után visszatennénk a sorsjegyet, akkor minden húzásnál 0,5 lenne annak a valószínűsége, hogy nyerőt húzunk és 0,5, hogy nem nyerőt. Ezzel a módszerrel becsülve a valószínűséget a következő eredményt kapjuk:

$$P(B \text{ nyer}) = 1 - P(B \text{ nem nyer}) \approx 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0{,}9999990463\,.$$

Látszólag még ehhez is kell számológép, de ezt is tudjuk becsülni:

$$2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx \frac{1}{10^6} = 0{,}000001\,.$$

Ezt felhasználva a becsült eredmény:

$$P(B \text{ nyer}) = 1 - P(B \text{ nem nyer}) \approx 1 - \frac{1}{10^6} = 0{,}999999\,.$$

2.1.3. Nevezetes klasszikus problémák

2.15. Feladat.

Mi a valószínűsége, hogy egy n fős társaságban van legalább két olyan ember, aki ugyanakkor ünnepli a születésnapját?

Megoldás:

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden év 365 napból áll (azaz a szökőévekkel ne törődjünk), illetve tételezzük fel azt is, hogy az év egyik napján sem születnek nagyobb valószínűséggel emberek, mint máskor. Hasonlóan néhány előző feladathoz, itt is egyszerűbb először a komplementer esemény valószínűségét meghatározni, amiből majd könnyen megkaphatjuk a választ az eredeti kérdésre.

$$\begin{aligned}&P(\text{van legalább két olyan ember, aki ugyanakkor ünnepli a születésnapját}) = \\ &= 1 - P(\text{mindenkinek máskor van a születésnapja})\,.\end{aligned}$$

Ha egy n fős társaságot nézünk a fenti feltételekkel, akkor mindenki 365 féle napon születhetett, így az összes lehetséges eset 365^n. Nézzük azokat az eseteket, amikor mindenki más-más napon született. Ekkor az első 365, a második 364, stb., az n-edik pedig $365 - n + 1$ féle napon születhetett. Így a megfelelő esetek száma $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$. Így annak valószínűsége, hogy van legalább két olyan ember, aki ugyanakkor ünnepli a születésnapját a következő lesz:

$$\begin{aligned}&P(\text{van legalább két olyan ember, aki ugyanakkor ünnepli a születésnapját}) = \\ &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.\end{aligned}$$

Az igazán meglepő eredményt persze akkor kapjuk, ha néhány n-re ki is számoljuk ezt a valószínűséget. Meglepő módon 23 ember esetén a valószínűség már több, mint 0,5, míg 60 ember esetén pedig több, mint 0,99.

$P_{10} \approx 0{,}1411$	$P_{23} \approx 0{,}5073$	$P_{40} \approx 0{,}8912$
$P_{22} \approx 0{,}4757$	$P_{30} \approx 0{,}7063$	$P_{60} \approx 0{,}9941$

2.16. Feladat.

Ajándékozás I. Sokszor előfordul, hogy egy közösségben ajándékozáskor nem ad mindenki mindenkinek ajándékot, hanem a neveket egy kalapba (urnába, dobozba) teszik, majd mindenki húz egy nevet és csak annak ad ajándékot. Mi a valószínűsége, hogy ilyenkor lesz olyan, aki saját magát húzza?

Megoldás:

Mivel a „lesz olyan, aki saját magát húzza" esemény nagyon sokféleképpen előfordulhat (egy ember húzza saját magát, két ember húzza saját magát, stb.), ezért célszerűbb először a komplementer esemény valószínűségét meghatározni, azaz annak valószínűségét, hogy senki sem húzza saját magát. Mivel mindenki csak egy cédulát húz, ezért az összes eset száma annyi, ahány féleképpen az n darab különböző cédulát ki lehet osztani n ember között. Ez pontosan annyi, ahány féleképpen az n embert sorba lehet állítani, azaz $n!$.

Azon esetek összeszámlálása, amikor senki sem húzza saját magát már egypicit nehezebb. Az összes esetből ($n!$) el kell hagyni azokat, amikor valaki saját magát húzta. Ehhez az n emberből ki kell választani egyet (ezt megtehetjük $\binom{n}{1}$ féleképpen), a maradék $n-1$ ember pedig $(n-1)!$ féleképpen húzhat. Ekkor viszont kétszer vontuk le azt az esetet, amikor két ember húzta saját magát, ezért azt egyszer hozzá kell adni, és így tovább. A megfelelő esetek száma tehát:

$$\binom{n}{0} \cdot n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \binom{n}{3} \cdot (n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 0!\,.$$

Ez alapján a valószínűség:

$$P(\text{lesz olyan, aki saját magát húzza}) = 1 - P(\text{nem lesz olyan, aki saját magát húzza}) =$$

$$= 1 - \frac{\binom{n}{0}\cdot n! - \binom{n}{1}\cdot(n-1)! + \binom{n}{2}\cdot(n-2)! - \binom{n}{3}\cdot(n-3)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\cdot 0!}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{n!}{n!\cdot 0!}\cdot n! - \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}\cdot(n-1)! + \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\cdot(n-2)! - \frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}\cdot(n-3)! + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{0!\cdot n!}\cdot 0!}{n!}$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right].$$

A zárójeles kifejezés határértéke $n \to \infty$ esetén $\frac{1}{e} \approx 0{,}3679$, így a keresett valószínűségértéke nagy n esetén közelítőleg 0,6321, de nem is kell olyan nagyon nagy: $n = 5$ esetén az első kettő, $n = 7$ esetén pedig már az első négy tizedesjegy pontos.

2.17. Feladat.

Ajándékozás II. Tekintsünk egy kicsit másfajta ajándékozást. Most az n tagú társaság úgy oldja meg az ajándékozást, hogy mindenki visz egy-egy ajándékot, de nem tudja, hogy kinek, ugyanis az ajándékokat kisorsolják a résztvevők között. Ráadásul ezt úgy teszik, hogy mindenki részt vesz minden sorsoláson, tehát egy ember több ajándékot is kaphat. Mi valószínűsége ekkor annak, hogy egy előre kiszemelt ember nem kap ajándékot?

Megoldás:

Az összes lehetséges eset megszámlálásával kezdjük. Az első ajándékot kaphatja n ember, a másodikat szintén n ember, stb., az n-ediket is n ember, így az összes lehetőségek száma $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$. A megfelelő esetek most azok, amikor az előre kiszemelt áldozat nem kap semmit. Ekkor az első ajándékot kaphatja $n-1$ ember, a másodikat szintén $n-1$ ember, stb., az n-ediket is $n-1$ ember. Így a megfelelő esetek száma $(n-1)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-1) = (n-1)^n$. Tehát a valószínűség:

$$P(\text{egy előre kiszemelt ember nem kap ajándékot}) = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Analízisből ismerős lehet ez a kifejezés. A határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \approx 0{,}3679\,.$$

Az első két tizedesjegy már $n = 24$ esetén is ennyi.

2.2. A geometriai valószínűségi mező

A klasszikus valószínűségi mező csak olyan esetekben használható, amikor véges sok elemi eseményünk van, és ezek valószínűsége megegyezik. Előfordulhat azonban, hogy egy kísérletben a szóba jöhető elemi események száma nem véges, de még csak nem is megszámlálhatóan végtelen. Ilyenkor a klasszikus értelmezés természetesen nem alkalmazható. Ennek ellenére bizonyos esetekben számolhatunk a $\dfrac{\text{jó esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$ formulával analóg módon.

2.18. Definíció.
Ha egy kísérlettel kapcsolatos események egy geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetők meg úgy, hogy az egyes események valószínűsége az eseményekhez rendelt részhalmaz geometriai méretével (hosszúság, terület, térfogat) arányos, akkor az események és valószínűségeik geometriai valószínűségi mezőt alkotnak.

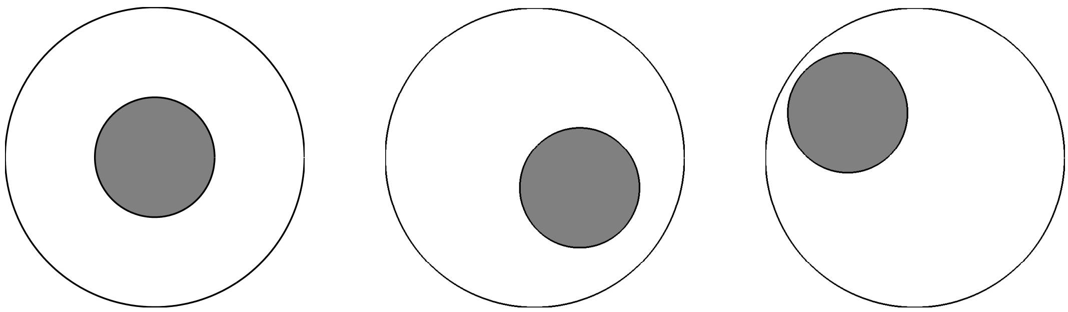
Legyen A egy ilyen kísérlettel kapcsolatos esemény. A kísérlettel kapcsolatban szóba jövő teljes alakzat mérete legyen M, az A eseménynek megfelelő részalakzaté pedig m . Az A esemény valószínűsége ekkor tehát

$$P(A) = \frac{m}{M}\,.$$

2.19. Példa.
Valaki egy R sugarú köralakú céltáblára lő. Tételezzük fel azt is, hogy a találatok a céltáblán egyenletesen oszlanak el, vagyis egy adott területű részbe mindig ugyanakkora valószínűséggel talál, függetlenül ennek a résznek a céltáblán elfoglalt helyétől. Ekkor annak valószínűsége, hogy a céltábla közepén levő r sugarú körbe talál, arányos a kis kör és a teljes céltábla területével, azaz

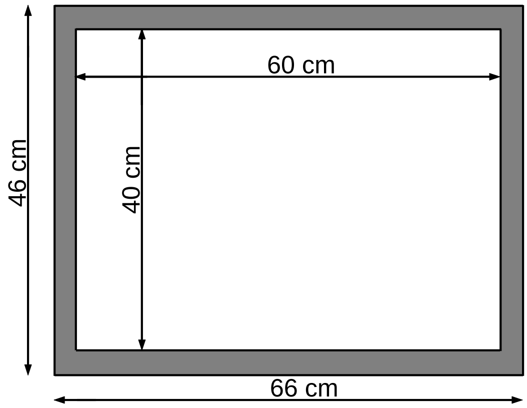
$$P(\text{a kis körbe talál}) = \frac{r^2\pi}{R^2\pi} = \frac{r^2}{R^2}\,.$$

Természetesen ugyanekkora valószínűséggel talál bármely más, ugyanekkora sugarú körbe is.



2.1. ábra. Adott nagy kör esetén a kis kör eltalálásának valószínűsége csak a kis kör területétől függ, a nagy körön belüli helyzetétől nem.

2.20. Feladat.
Szobám falán van egy 60 cm×40 cm-es kép, körülötte 3 cm széles keret. Egy pimasz légy erre (kép+ keret) akar leszállni. Ha teljesen véletlenszerűen választja ki a helyet, akkor mi a valószínűsége, hogy a keretre fog leszállni?



2.2. ábra. Kép és keret.

Megoldás:
Tekintsük a legyet pontszerűnek. A légy által választható helyek száma a kép és a keret pontjainak együttes száma, ami nyilván végtelen sok. Mivel a helyet teljesen véletlenszerűen választja ki, azaz egyiket sem tünteti ki a másikhoz képest, ezért használhatunk itt geometriai valószínűségi mezőt, a kérdéses valószínűséget pedig majd a keret területének és a kép és a keret együttes területének a hányadosa adja meg, vagyis:

$$P(\text{a keretre fog leszállni}) = \frac{\text{a keret területe}}{\text{a keret és a kép területe}}.$$

Mivel a kép mérete $60\,\text{cm}\times 40\,\text{cm}$ ($2\,400\,\text{cm}^2$), és körülötte $3\,\text{cm}$ széles keret van, ezért az együttes területük $66\,\text{cm}\times 46\,\text{cm}$, azaz $3036\,\text{cm}^2$. A keret területét legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, hogy ebből kivonjuk a kép területét, így a keret területe $636\,\text{cm}^2$. Ezzel a valószínűség:

$$P(\text{a keretre fog leszállni}) = \frac{\text{a keret területe}}{\text{a keret és a kép területe}} = \frac{636}{3036} \approx 0{,}2095\,.$$

Gyakran előfordul az is, hogy egy kérdés geometrai valószínűségi mező alkalmazásával megválaszolható, de a keresett valószínűség meghatározásához szükséges alakzat közvetlenül nem szerepel a feladatban. Ilyenkor a teljes eseménytérnek, illetve a vizsgálandó eseményeknek megfelelő alakzatok a feladatban szereplő összefüggések alapján határozhatóak meg.

2.21. Feladat.
Egy szakaszt véletlenszerűen három részre osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott szakaszokból háromszög szerkeszthető?

Megoldás:
A szakaszt úgy tudjuk három részre osztani, hogy kijelölünk rajta két osztópontot. A véletlenszerűség ott jelenkezik, hogy a pontokat teljesen véletlenszerűen, egymástól függetlenül jelöljük ki. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a $[0,1]$ intervallumot, ezt osztjuk fel három részre. Az egyik osztópont 0-tól mért távolsága legyen x, a másiké pedig y. Ekkor a keletkezett szakaszok hossza x, $y-x$ és $1-y$. Nem tudjuk viszont azt, hogy x vagy y a nagyobb, ezért lehet az is, hogy y, $x-y$ és $1-x$ hosszúságú szakaszok keletkeznek. Ezekből akkor lehet háromszöget szerkeszteni, ha teljesül rájuk a háromszög-egyenlőtlenség, azaz bármely két oldal összege nagyobb a harmadiknál. Ily módon az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

Ha a szakaszok hossza x, $y-x$ és $1-y$:

$$\begin{aligned} x+(y-x) &> 1-y & &\Longrightarrow & y &> \frac{1}{2}\\ (y-x)+(1-y) &> x & &\Longrightarrow & x &< \frac{1}{2}\\ x+(1-y) &> y-x & &\Longrightarrow & y &< x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ha a szakaszok hossza y, $x-y$ és $1-x$:

$$\begin{aligned} y+(x-y) &> 1-x & &\Longrightarrow & x &> \frac{1}{2}\\ (x-y)+(1-x) &> y & &\Longrightarrow & y &< \frac{1}{2}\\ y+(1-x) &> x-y & &\Longrightarrow & y &> x-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mivel az osztópontokat teljesen véletlenszerűen, egymástól is függetlenül jelöljük ki, ezért x és y is bármi lehet a [0,1] intervallumon. Így az összes lehetséges esetnek (a teljes eseménytérnek) megfeleltethető egy 1×1-es négyzet. Ezen belül keresssük az pontokat, melyeknek (x, y) koordinátái olyan x-et és y-t jelentenek, melyek esetén háromszöget lehet szerkeszteni a darabokból. Keressük tehát a négyzet pontjait, melyek koordinátáira az első, vagy a második egyenlőtlenség-rendszer teljesül.

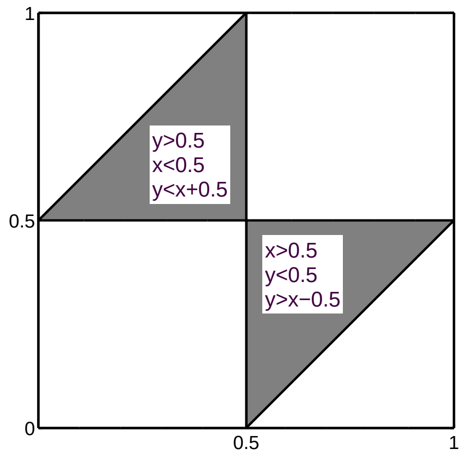
Az első egyenlőtlenség-rendszernél:

- $y > \frac{1}{2}$, tehát a megfelelő pontok az $y = \frac{1}{2}$ egyenletű vízszintes egyenes felett helyezkednek el.
- $x < \frac{1}{2}$, tehát a megfelelő pontok az $x = \frac{1}{2}$ egyenletű függőleges egyenestől balra helyezkednek el.
- $y < x + \frac{1}{2}$, tehát a megfelelő pontok az $y = x + \frac{1}{2}$ egyenletű egyenes alatt helyezkednek el.

A második egyenlőtlenség-rendszernél:

- $x > \frac{1}{2}$, tehát a megfelelő pontok az $x = \frac{1}{2}$ egyenletű függőleges egyenestől jobbra helyezkednek el.
- $y < \frac{1}{2}$, tehát a megfelelő pontok az $y = \frac{1}{2}$ egyenletű vízszintes egyenes alatt helyezkednek el.
- $y > x - \frac{1}{2}$, tehát a megfelelő pontok az $y = x - \frac{1}{2}$ egyenletű egyenes felett helyezkednek el.

A megfelelő ponthalmaz tehát az alábbi:



2.3. ábra. Az egyenlőtlenségeknek megfelelő ponthalmazok a háromszög szerkesztésénél.

A keresett valószínűség pedig:

$$P(\text{A darabokból háromszög szerkeszthető}) = \frac{\text{háromszögek területe}}{\text{négyzet területe}} = \frac{1}{4}.$$

2.22. Feladat.

Két ember találkozót beszél meg. 9 és 10 óra között egymástól függetlenül, teljesen véletlenszerű időpontban érkeznek meg a megbeszélt helyre, és várnak társuk érkezéséig. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az előbb érkezőnek 10 percnél többet kell várnia?

Megoldás:

Egy elemi eseménynek itt az felel meg, hogy az egyik megérkezik egy bizonyos időpontban, a másik (az előzőtől függetlenül) szintén megérkezik egy bizonyos időpontban. Tehát egy elemi esemény a két érkezési időponttal, vagyis egy számpárral jellemezhető. Az érkezési időpont mindkét esetben végtelen sok féle lehet, uis. az idő nem diszkrét egységekben, hanem folytonosan telik. Mégis választanunk kell valamiyen egységet, amiben az időt mérjük. Mivel a kérdés percben van megfogalmazva, mérjük az időt percekben (persze létezik a perc törtrésze is), méghozzá 9 órától kezdve. Így mindkét ember esetében az érkezési időpont a [0,60] intervallum valamely eleme lesz. Mivel az elemi esemény itt az érkezési időpontokból álló számpárt jelenti, az elemi események halmaza (vagyis a teljes eseménytér) megfeleltethető a $[0,60] \times [0,60]$ négyzet pontjainak. Ha az egyik érkezési időpontja x, a másiké y, akkor x és y egymástól függetlenül lehet bármi a [0,60] intervallumból.

Azon esetek kellenek nekünk, amikor az előbb érkezőnek 10 percnél többet kell várnia. Ez azt jelenti, hogy az érkezési időpontok különbségének abszolút értéke több, mint 10, azaz $|x - y| > 10$. Tehát a négyzeten belül meg kell keresnünk azt a ponthalmazt, amelyre ez a reláció teljesül, és ennek, valamint a teljes négyzet területének a hányadosa adja meg a keresett valószínűséget. Az $|x-y|>10$ reláció kétféleképpen teljesülhet:

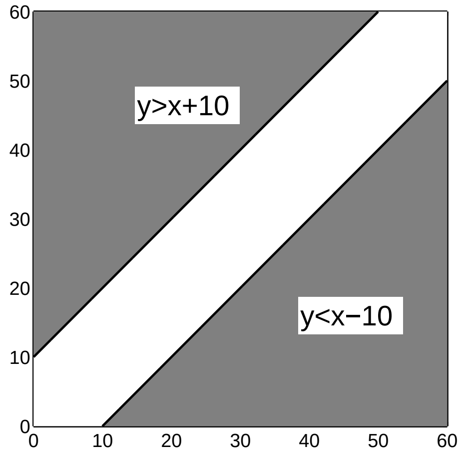
$$x-y>10 \qquad \text{vagy} \qquad x-y<-10\,.$$

Átrendezve y-ra a következőket kapjuk:

$$y<x-10 \qquad \text{vagy} \qquad y>x+10\,.$$

Ez azt jelenti, hogy a négyzetből a nekünk megfelelő ponthalmaz az $y=x-10$ egyenletű egyenes alatti rész, illetve az $y=x+10$ egyenletű egyenes feletti rész. Mindkét háromszög területe $50\cdot 50/2$, így a teljes megfelelő rész területe $50\cdot 50=2\,500$, a teljes négyzet területe pedig $60\cdot 60=3\,600$. Így a valószínűség:

$$P(\text{az előbb érkezőnek 10 percnél többet kell várnia})=\frac{\text{háromszögek területe}}{\text{négyzet területe}}=\frac{2\,500}{3\,600}\approx 0{,}6944\,.$$



2.4. ábra. A találkozásos feladatban a jó eseteknek megfelelő ponthalmaz két háromszög.

2.23. Feladat.

A $[0;2]$ intervallumból teljesen véletlenszerűen választunk két számot. Mi a valószínűsége annak, hogy az összegük kisebb kettőnél, de nagyobb egynél?

Megoldás:

Legyen az egyik szám x, a másik y. A feladat szerint mindkét szám bármi lehet a $[0;2]$ intervallumból, ezért minden egyes $(x;y)$ választásnak meg lehet feleltetni egy-egy olyan pontot a síkon, melynek az első koordinátája x, a második pedig y. Így az összes lehetséges esetnek a $[0;2]\times[0;2]$ négyzet pontjai felelnek meg. A kedvező esetekhez meg kell keresni azokat a pontokat, melyek koordinátáira $1<x+y<2$. Azaz: $y<2-x$ és $y>1-x$, tehát az $y=2-x$ egyenletű egyenes alatti és az $y=1-x$ egyenlet egyenes feletti rész metszete alkotja a megfelelő eseteket. Ennek területét úgy határozhatjuk meg, hogy a négyzet területének feléből még elhagyjuk a bal alsó háromszög területét: $2-0{,}5=1{,}5$. A kérdéses valószínűséget a jó eseteknek megfelelő ponthalmaz területének és az összes esetnek megfelelő ponthalmaz területének hányadosa adja:

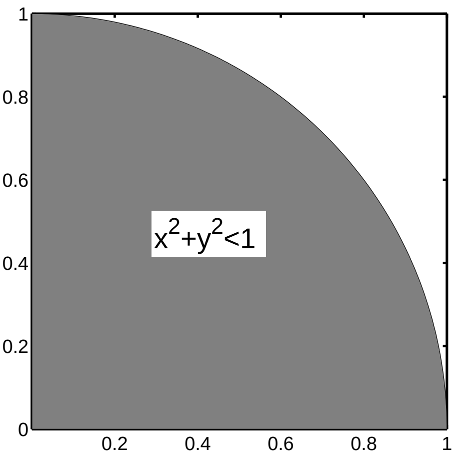
$$P(1<x+y<2)=\frac{\text{megfelelő rész területe}}{\text{négyzet területe}}=\frac{1{,}5}{4}=0{,}375\,.$$

2.24. Feladat.

Egy egységnyi oldalú négyzet két szomszédos oldalán teljesen vélelenszerűen, egymástól függetlenül kiválasztunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb, mint 1?

Megoldás:

Egy elemi eseménynek az felel meg, hogy az egyik oldalról is választunk egy pontot, és a másik oldalról is választunk egy pontot. Tekintsük viszonyítási alapnak a két szomszédos oldal közös csúcsát. Ha a csúcstól mért



2.5. ábra. A jó eseteknek megfelelő ponthalmaz egy negyedkör.

távolságok x és y, akkor a kérdés így szól: mi a valószínűsége annak, hogy $\sqrt{x^2+y^2} < 1$? Mivel a kiválasztott pontok egyértelműen megadhatók a csúcstól mért távolságukkal, így egy elemi esemény megfeleltethető egy olyan számpárnak, melynek mindkét eleme a [0,1] intervallumból kerül ki. Így a teljes eseménytér megfeleltethető egy egységnyi oldalú négyzet pontjainak (de ez a négyzet nem azonos az eredeti négyzettel). Ezen új négyzeten belül kell megkeresni azokat a pontokat, melyek koordinátáira az igaz, hogy $\sqrt{x^2+y^2} < 1$. Ez ekvivalens azzal, hogy $x^2+y^2 < 1$. Ez a ponthalmaz pedig nem más, mint az origó középpontú, egységnyi sugarú körlemez belső pontjainak halmaza. Esetünkben $x \geq 0$ és $y \geq 0$, így a megfelelő pontok halmaza a pozítív síknegyedbe eső negyed körlemez. Ezzel a keresett valószínűség:

$$P(\text{a két pont távolsága kisebb, mint 1}) = \frac{\text{negyedkör területe}}{\text{négyzet területe}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854\,.$$

3. fejezet

Feltételes valószínűség, függetlenség

3.1. A feltételes valószínűség

Gyakran előfordul, hogy egy esemény (A) valószínűségét olyan esetben kell megadni, amikor vele együtt egy másik esemény (B) is bekövetkezik. Ekkor azt mondjuk, hogy az A esemény valószínűségét a B feltétel bekövetkezése mellett adjuk meg. Nézzünk erre először egy példát:

3.1. Példa.
Adott 100 ember, közülök 40 szőke, 35 kékszemű, 30 pedig szőke és kékszemű. Véletlenszerűen választunk egy valakit. Ekkor

– annak valószínűsége, hogy szőke:

$$\frac{\text{szőkék száma}}{\text{összes ember száma}} = \frac{40}{100} = 0{,}4$$

– annak valószínűsége, hogy kékszemű:

$$\frac{\text{kékszeműek száma}}{\text{összes ember száma}} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

– annak valószínűsége, hogy szőke, feltéve, hogy kékszemű:

$$\frac{\text{szőkék száma a kékszeműek között}}{\text{kékszeműek száma}} = \frac{30}{35} \approx 0{,}8571$$

– annak valószínűsége, hogy kékszemű, feltéve, hogy szőke:

$$\frac{\text{kékszeműek száma a szőkék között}}{\text{szőkék száma}} = \frac{30}{40} = 0{,}75\,.$$

Az utolsó két esetben feltételes valószínűségről beszélhetünk. Figyeljük meg azt, hogy ekkor a számlálóban azon esetek száma áll, amikor a feltétel is és maga az esemény is bekövetkezik, a nevezőben pedig azon esetek száma áll, amikor teljesül a feltétel. Általános esetben is a fentihez hasonló módon határozhatjuk meg a feltételes valószínűséget, azaz

$$\frac{\text{együttes bekövetkezés valószínűsége}}{\text{feltétel valószínűsége}}\,.$$

Ezt a következőképpen magyarázhatjuk. Legyen A és B egy kísérlettel kapcsolatos két esemény, és legyen $P(B) > 0$. Végezzünk el n darab kísérletet. Nézzük azt, hogy hányszor következett be a B esemény, legyen ez a szám k_B. Figyeljük azt is, hogy ezekben az esetekben hányszor következett be az A esemény is (ekkor persze A is és B is bekövetkezett, tehát tulajdonképpen az $A \cdot B$ esemény következett be), legyen ez a szám k_{AB}. Ekkor a B esemény relatív gyakorisága $\frac{k_B}{n}$, az $A \cdot B$ esemény relatív gyakorisága pedig $\frac{k_{AB}}{n}$. Ezekkel definiálhatjuk a feltételes relatív gyakoriságot:

3.2. Definíció.
Legyen a B esemény relatív gyakorisága $\frac{k_B}{n}$, az $A \cdot B$ esemény relatív gyakorisága pedig $\frac{k_{AB}}{n}$. Ekkor a

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{\frac{k_{AB}}{n}}{\frac{k_B}{n}}$$

hányadost az A esemény B -re vonatkozó feltételes relatív gyakoriságának nevezzük.

3.3. Példa.
Egy szabályos dobókockával tízszer dobunk. A dobott számok:

$$4,\ 6,\ 2,\ 5,\ 5,\ 2,\ 1,\ 2,\ 6,\ 3\,.$$

Vezessük be a következő eseményeket:

$$\begin{aligned} A &: \text{ párosat dobunk} \\ B &: \text{ legalább hármat dobunk}\,. \end{aligned}$$

Ekkor az A esemény gyakorisága 6, relatív gyakorisága $\frac{6}{10}$, a B esemény gyakorisága 5, relatív gyakorisága $\frac{5}{10}$, az $A \cdot B$ esemény (páros és legalább három, azaz négy vagy hat) gyakorisága 3, relatív gyakorisága $\frac{3}{10}$. Az A esemény B -re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága pedig

$$\frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{5} = 0{,}6\,.$$

Tudjuk azt, hogy a relatív gyakoriság valószínűség körül ingadozik, tehát a $\frac{k_B}{n}$ relatív gyakoriság $P(B)$ körül, a $\frac{k_{AB}}{n}$ relatív gyakoriság pedig $P(A \cdot B)$ körül ingadozik. Ebből következően a $\frac{k_{AB}}{k_B}$ feltételes relatív gyakoriság a $\frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ hányados körül ingadozik, ezért értelmes az alábbi definíció:

3.4. Definíció.
Ha A és B egy kísérlettel kapcsolatos két tetszőleges esemény és $P(B) > 0$, akkor az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűségét a

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

kifejezéssel definiáljuk.

3.5. Példa.
Tekintsük az előző példa eseményeit. Ekkor

$$P(A) = \frac{3}{6} \qquad P(B) = \frac{4}{6} \qquad P(A \cdot B) = \frac{2}{6}\,.$$

Ebből meghatározható az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{2}{4} = 0{,}5\,.$$

Azaz, feltéve, hogy legalább hármat dobunk, 0,5 annak a valószínűsége, hogy párosat dobunk.

3.6. Feladat.
Legyen $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ és $P(A \cdot B) = 0{,}4$.

a) $P(A|B)=?$ *b)* $P(B|A)=?$

Megoldás:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8.$

b) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}6} \approx 0{,}6667.$

3.7. Feladat.
Egy pakli magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk egymás után két lapot.

a) Feltéve, hogy az első zöld, mi a valószínűsége, hogy a második piros?

b) Feltéve, hogy az első zöld, mi a valószínűsége, hogy a második zöld?

Megoldás:

a) Mivel visszatevés nélkül húzunk, ezért a második húzás már csak 31 féle lehet. Az első kihúzott lap zöld volt, így a második 8 féleképpen lehet piros. Tehát a keresett valószínűség: $\dfrac{8}{31} \approx 0{,}2581.$

b) A második húzás itt is 31 féle lehet. Az első kihúzott lap zöld volt, így a második már csak 7 féleképpen lehet zöld. Tehát a keresett valószínűség: $\dfrac{7}{31} \approx 0{,}2258.$

3.8. Feladat.
A 2010. október 27-én rendezett püspökerdei futáson indulók megoszlását az alábbi táblázat mutatja:

	Férfi	Nő
hallgató	130	24
munkatárs	8	4
külsős	22	9

a) Véletlenszerűen választunk egy indulót. Mi a valószínűsége, hogy ő hallgató?

b) Feltéve, hogy külsőst választottunk, mi a valószínűsége, hogy ő nő?

c) Feltéve, hogy férfit választottunk, mi a valószínűsége, hogy ő hallgató?

d) Feltéve, hogy hallgatót választottunk, mi a valószínűsége, hogy ő férfi?

e) Feltéve, hogy nőt választottunk, mi a valószínűsége, hogy ő nem munkatárs?

f) Feltéve, hogy nem munkatársat választottunk, mi a valószínűsége, hogy ő nő?

Megoldás:

a) A táblázatból kiolvashatóak a következő adatok: összesen 197 fő indult a versenyen. A jogviszony szerinti megoszlás: 154 hallgató, 12 munkatárs, 31 külsős. Nemek szerinti megoszlás: 160 férfi, 37 nő. Annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott induló hallgató:

$$\frac{\text{hallgatók száma az indulók között}}{\text{összes induló száma}} = \frac{154}{197} \approx 0{,}7817\,.$$

b)

$$\frac{\text{nők száma a külsősök között}}{\text{külsősök száma}} = \frac{9}{31} \approx 0{,}2903\,.$$

c)

$$\frac{\text{hallgatók száma a férfiak között}}{\text{férfiak száma}} = \frac{130}{160} = 0{,}8125\,.$$

d)

$$\frac{\text{hallgatók száma a férfiak között}}{\text{hallgatók száma}} = \frac{130}{154} \approx 0{,}8442\,.$$

e)

$$\frac{\text{nők száma a nem munkatársak között}}{\text{nők száma}} = \frac{33}{37} \approx 0{,}8919\,.$$

f)

$$\frac{\text{nők száma a nem munkatársak között}}{\text{nem munkatársak száma}} = \frac{33}{185} \approx 0{,}1784\,.$$

3.9. Definíció.
A feltételes valószínűség definícióját felhasználva $P(A \cdot B)$ kifejezhető

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

alakban, amit a valószínűségek szorzási szabályának nevezünk.

3.10. Feladat.
Egy pakli magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk három lapot. Mi a valószínűsége annak, hogy az első ász, a második király, a harmadik pedig ismét ász lesz?

Megoldás:
Vezessük be a következő jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
&A_1 : \text{az első kihúzott lap ász}\\
&A_2 : \text{a második kihúzott lap király}\\
&A_3 : \text{a harmadik kihúzott lap ász}
\end{aligned}
$$

A feladat szerint mindháromnak be kell következnie, így a kérdés az $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ esemény valószínűsége. Ez a valószínűség a szorzási szabály alkalmazásával átírható olyan szorzat alakra, amelyben az egyes tényezők (valószínűségek) már könnyen meghatározhatók.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_3 \cdot A_2 \cdot A_1) = P(A_3|A_2 \cdot A_1) \cdot P(A_2 \cdot A_1) = P(A_3|A_2 \cdot A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)\,.$$

A pakliban 32 lap van, ebből 4 ász, ezért annak valószínűsége, hogy az első kihúzott lap ász:

$$P(A_1) = \frac{4}{32}\,.$$

Ha A_1 bekövetkezett, akkor a pakliban már csak 31 lap van, ebből 4 király, ezért annak valószínűsége, hogy a második kihúzott lap király, feltéve, hogy az első ász volt:

$$P(A_2|A_1) = \frac{4}{31}\,.$$

Ha A_1 és A_2 már bekövetkezett, akkor a pakliban már csak 30 lap van, ebből már csak 3 ász. Így annak valószínűsége, hogy a harmadik kihúzott lap ász, feltéve, hogy az első ász és a második király volt:

$$P(A_3|A_2 \cdot A_1) = \frac{3}{30}\,.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_3|A_2 \cdot A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{31} \cdot \frac{3}{30} = \frac{1}{620} \approx 0{,}0016\,.$$

3.2. A teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel

Egy esemény valószínűségét a rá vonatkozó feltételes valószínűségek ismeretében is meghatározhatjuk. Ehhez az kell, hogy ismerjük az egyes feltételek valószínűségét és a feltételek alkossanak teljes eseményrendszert.

3.11. Tétel. (A teljes valószínűség tétele)
Ha a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, és $P(B_i) > 0$ minden $i = 1{,}2, \ldots, n$ esetén, valamint A egy tetszőleges esemény, akkor

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)\,.$$

Bizonyítás: Mivel a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ezért $B_i \cdot B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, továbbá $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$. Ezt felhasználva átírhatjuk A-t más alakba:

$$A = A \cdot \Omega = A \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \ldots + A \cdot B_n\,.$$

A kapott események páronként kizárják egymást, mivel

$$(A \cdot B_i) \cdot (A \cdot B_j) = A \cdot (B_i \cdot B_j) = A \cdot \emptyset = \emptyset\,.$$

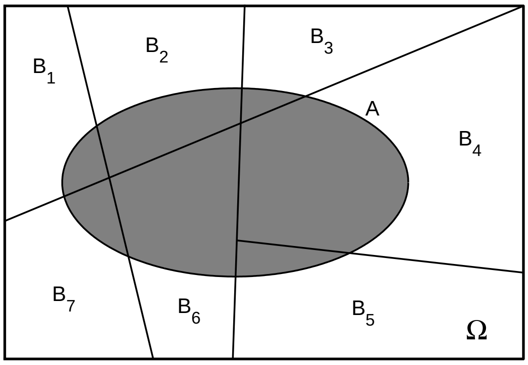
A 3. axióma alapján ezért

$$P(A) = P\left(A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \ldots + A \cdot B_n\right) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) + \ldots + P(A \cdot B_n)\,.$$

A szorzási szabály miatt azonban $P(A \cdot B_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i)$, így

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \ldots + A \cdot B_n\right) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) + \ldots + P(A \cdot B_n) = \\ &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)\,. \end{aligned}$$

□



3.1. ábra. A teljes valószínűség tételében az A esemény valószínűségét szemléletesen a teljes eseményrendszer egyes elemeibe eső részvalószínűségekből rakjuk össze.

3.12. Feladat.

Egy városban a lakosság 28 %-a rendelkezik diplomával. A munkanélküliek aránya a diplomások között 4,8 %, a többiek között 9,2 %. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy embert, mekkora a valószínűsége, hogy ő munkanélküli?

Megoldás:

A kérdés megválaszolásához a teljes valószínűségtételét fogjuk használni. Ehhez olyan teljes eseményrendszert kell keresnünk, amely tagjainak ismerjük a valószínűségét, és amelyekre vonatkozó feltételes valószínűségek is rendelkezésünkre állnak. A diplomás–nem diplomás, illetve a munkanélküli–nem munkanélküli felosztás is teljes eseményrendszer, de csak az első esetben ismerjük az események valószínűségét. Vezessük be tehát a következő jelöléseket:

B_1 : a kiválasztott embernek van diplomája

B_2 : a kiválasztott embernek nincs diplomája

A : a kiválasztott ember munkanélküli

Ezekkel kapcsolatban az alábbi valószínűségek szerepelnek a feladatban:

$P(B_1) = 0{,}28$	$P(A|B_1) = 0{,}048$	(a diplomások 4,8%-a munkanélküli)
$P(B_2) = 0{,}72$	$P(A|B_2) = 0{,}092$	(a nem diplomások 9,2%-a munkanélküli)

A fenti valószínűségekből a teljes valószínűség tétele segítségével meghatározható annak valószínűsége, hogy a kiválasztott ember munkanélküli (vagyis az A esemény valószínűsége):

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{2} P(A|B_i) \cdot P(B_i) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \\ &= 0{,}048 \cdot 0{,}28 + 0{,}092 \cdot 0{,}72 = 0{,}07968 \approx 0{,}0797\,. \end{aligned}$$

Azt a kérdést is feltehetjük, hogy ha bekövetkezett az A esemény, akkor a teljes eseményrendszer egyes tagjai milyen valószínűséggel következhetnek be. Erre ad választ a következő tétel.

3.13. Tétel. (Bayes-tétel)
Ha a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B_i) > 0$ minden $i = 1,2,\ldots,n$ esetén, valamint A egy tetszőleges pozitív valószínűségű esemény, azaz $P(A) > 0$, akkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}.$$

Bizonyítás: Alakítsuk át a $P(B_k|A)$ valószínűséget a feltételes valószínűség definíciója szerint, majd a számlálóban alkalmazzuk a szorzási szabályt, a nevezőben pedig a teljes valószínűség tételét:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(A \cdot B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k))}{P(A)} = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}.$$

□

3.14. Feladat.
Vegyük az előző feladatot. Találkoztunk valakivel, akinek nincs munkája. Mi a valószínűsége, hogy rendelkezik diplomával?

Megoldás:
A már bevezetett jelölésekkel megfogalmazva a kérdés: $P(B_1|A) =?$ Azaz, féltéve, hogy munkanélküli, mi a valószínűsége, hogy van diplomája? Alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2} P(A|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}048 \cdot 0{,}28}{0{,}07968} \approx 0{,}1687.$$

3.15. Feladat.
Egy kereskedő négy beszállítótól kap árut. Az első a teljes áru mennyiségének a felét, a másodiktól a negyedét, a harmadiktól és a negyediktől egyaránt a nyolcadát szerzi be. Tapasztalata szerint a legnagyobb szállítótól kapott áru 70 %-a első osztályú, a többi másodosztályú. A másodiknál ez az arány 60–40 %, a maradék kettőnél 40–60 %.

a) A készletéből választott áru mekkora valószínűséggel lesz első osztályú?

b) Egy véletlenszerűen választott másodosztályú áru mekkora valószínűséggel származik az egyes beszállítóktól?

Megoldás:

a) Mivel minden egyes beszállító esetében rendelkezésünkre áll az az információ, hogy a teljes készlet hányadrészét adja, továbbá azt is tudjuk minden beszállítónál, hogy az árujának mekkora része első osztályú, ezért a választ a teljes valószínűség tételének alkalmazásával kapjuk meg. Ehhez szükségünk van egy teljes eseményrendszerre. Erre a célra megfelel az, hogy a kereskedő kitől kapja az árut. Vezessük be tehát a következő jelöléseket:

B_1 : a kiválasztott áru az első beszállítótól származik
B_2 : a kiválasztott áru a második első beszállítótól származik
B_3 : a kiválasztott áru a harmadik beszállítótól származik
B_4 : a kiválasztott áru a negyedik beszállítótól származik
A : a kiválasztott áru első osztályú

Ezekkel kapcsolatban az alábbi valószínűségek szerepelnek a feladatban:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= 0{,}5 & P(A|B_1) &= 0{,}7 \\ P(B_2) &= 0{,}25 & P(A|B_2) &= 0{,}6 \\ P(B_3) &= 0{,}125 & P(A|B_3) &= 0{,}4 \\ P(B_4) &= 0{,}125 & P(A|B_4) &= 0{,}4 \end{aligned}$$

A teljes valószínűség tételét felírva:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(A|B_i) \cdot P(B_i) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}125 + 0{,}4 \cdot 0{,}125 = 0{,}6\,.$$

b) Az előbb A-val jelöltük azt az eseményt, hogy a kiválasztott áru első osztályú. Mivel csak kétféle áru van (első ill. másodosztályú), ezért $\overline{A}$ lesz az az esemény, hogy a kiválasztott áru másodosztályú. A vele kapcsolatos valószínűségek:

$$\begin{aligned} P(A|B_1) &= 0{,}7 & &\Longrightarrow & P(\overline{A}|B_1) &= 0{,}3 \\ P(A|B_2) &= 0{,}6 & &\Longrightarrow & P(\overline{A}|B_2) &= 0{,}4 \\ P(A|B_3) &= 0{,}4 & &\Longrightarrow & P(\overline{A}|B_3) &= 0{,}6 \\ P(A|B_4) &= 0{,}4 & &\Longrightarrow & P(\overline{A}|B_4) &= 0{,}6 \end{aligned}$$

A kérdés szerint meg kell határoznunk annak valószínűségét, hogy a termék az i-edik beszállítótól származik, feltéve, hogy másodosztályú. Formálisan kifejezve ez azt jelenti, hogy a $P(B_i|\overline{A})$ valószínűségeket kell meghatároznunk $i = 1{,}2{,}3{,}4$-re. A választ a Bayes-tétellel adhatjuk meg:

$$P(B_i|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{4} P(\overline{A}|B_j) \cdot P(B_j)} = \frac{P(\overline{A}|B_i) \cdot P(B_i)}{P(\overline{A})}.$$

Az egyes esetek kiszámolva, felhasználva, hogy $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

$$\begin{aligned} P(B_1|\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A}|B_1) \cdot P(B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}4} = 0{,}375\,, \\ P(B_2|\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A}|B_2) \cdot P(B_2)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}25}{0{,}4} = 0{,}25\,, \\ P(B_3|\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A}|B_3) \cdot P(B_3)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}125}{0{,}4} = 0{,}1875\,, \\ P(B_4|\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A}|B_4) \cdot P(B_4)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}125}{0{,}4} = 0{,}1875\,. \end{aligned}$$

3.16. Feladat.

Tíz érme van a zsebemben. Kilenc szabályos, de a tizedik hamis, mert mindkét oldalán fej van. Teljesen véletlenszerűen kiveszek egy érmét a zsebemből és háromszor feldobom. Feltéve, hogy mindig fej jön ki, mi a valószínűsége, hogy a hamis pénzérmét választottam?

Megoldás:

A választ a Bayes-tétel segítségével kaphatjuk meg. Teljes eseményrendszernek kézenfekvő a szabályos érmét húztam – hamis érmét húztam eseményeket választani. Vezessük be tehát a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} B_1 &: \text{ szabályos érmét húztam} \\ B_2 &: \text{ hamis érmét húztam} \\ A &: \text{ mindháromszor fejet dobtam} \end{aligned}$$

A hamis érmével csak fejet lehet dobni, így ebben az esetben a három fej valószínűsége 1. Szabályos érmével minden egyes dobásnál 1/2–1/2 valószínűséggel dobhatunk fejet, illetve írást, ezért ekkor a három fej valószínűsége $0{,}5^3 = 0{,}125$. Ismertek tehát a következő valószínűségek:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= 0{,}9 & P(A|B_1) &= 0{,}125 \\ P(B_2) &= 0{,}1 & P(A|B_2) &= 1 \end{aligned}$$

A bevezetett jelölésekkel az eredeti kérdés formálisan megfogalmazva: $P(B_2|A) = ?$

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{\sum_{i=1}^{2} P(A|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{1 \cdot 0{,}1}{0{,}125 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}1} = \frac{8}{17} \approx 0{,}4706\,.$$

3.17. Feladat.

Egy szabályos dobókockával dobunk, majd a dobás eredményétől függően néhány piros és fehér golyót teszünk egy urnába:

- ha 1-et, 2-t vagy 3-at dobunk, akkor 2 fehéret és 8 pirosat,
- ha 4-et vagy 5-öt, akkor 7 fehéret és 3 pirosat,
- ha 6-ot, akkor 3 fehéret és 3 pirosat.

Az urnából húzunk egy golyót.

a) Mi a valószínűsége, hogy fehéret húzunk?

b) Feltéve, hogy fehéret húztunk, mi a valószínűsége, hogy előtte hatost dobtunk?

Megoldás:

Teljes eseményrendszernek megfelel az, hogy a kockával mit dobtunk, továbbá szükségünk lesz arra az eseményre is, hogy fehéret húztunk. Vezessük be ezért a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} B_1 &: \text{ 1-et, 2-t vagy 3-at dobunk,} \\ B_2 &: \text{ 4-et vagy 5-öt dobunk,} \\ B_3 &: \text{ 6-ot dobunk,} \\ A &: \text{ fehéret húzunk.} \end{aligned}$$

A B_1, B_2, B_3 események teljes eseményrendszert alkotnak. Velük és az A eseménnyel kapcsolatban a feladat szövegéből a következő valószínűségeket ismerjük:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= \frac{3}{6} & P(A|B_1) &= \frac{2}{10} \\ P(B_2) &= \frac{2}{6} & P(A|B_2) &= \frac{7}{10} \\ P(B_3) &= \frac{1}{6} & P(A|B_3) &= \frac{3}{6} \end{aligned}$$

a) Annak valószínűsége, hogy fehéret húzunk meghatározható a teljes valószínűségtételével:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|B_i) \cdot P(B_i) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{6} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \approx 0{,}4167\,.$$

b) Feltéve, hogy fehéret húztunk, annak a valószínűsége, hogy előtte hatost dobtunk:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{25}{60}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2\,.$$

3.3. Események függetlensége

A hétköznapi életben akkor mondjuk azt, hogy két esemény független egymástól, ha az egyik bekövetkezése nem befolyásolja a másik bekövetkezését. Jellemzően ilyen például kockadobásnál két egymást követő dobás eredménye. A valószínűség-elméletben az alábbi módon definiáljuk két esemény függetlenségét:

3.18. Definíció.
Két eseményt függetlennek nevezünk, ha az együttes bekövetkezésük valószínűsége egyenlő a valószínűségeik szorzatával, azaz

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)\,.$$

3.19. Példa.
Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Nézzük a következő eseményeket:

$$\begin{aligned} A &: \text{ az első dobás fej} \\ B &: \text{ a második dobás fej}\,. \end{aligned}$$

Ekkor, mivel az érme szabályos

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad P(B) = \frac{1}{2}\,.$$

A két dobás után végül a következőket kaphatjuk: FF, II, IF, FI. Mivel a fej (F) és az írás (I) valószínűsége minden dobásnál megegyezik, ezért ezeknek az eseményeknek a valószínűsége is egyenlő lesz, tehát mindegyik $\frac{1}{4}$, így az $A \cdot B$ esemény valószínűsége is ennyi. Azt kaptuk tehát, hogy

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)\,.$$

Tehát az A és B események függetlenek. A kapott matematikai eredmény teljes összhangban van azzal, hogy az érme nem emlékszik arra, hogy mi volt az előző dobás eredménye, a dobás kimenetele független az előző dobás(ok) kimenetelétől.

A függetlenség fogalmát két eseményről kiterjeszthetjük több eseményre is. Itt viszont már többféle függetlenséget is definiálhatunk.

3.20. Definíció.
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményeket páronként függetleneknek nevezzük, ha bárhogyan is válasszunk ki közülük két eseményt, ezek szorzatának valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségeinek szorzatával, azaz

$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad 1 \le i < j \le n\,.$$

3.21. Definíció.
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményeket (teljesen) függetleneknek nevezzük, ha bárhogyan is válasszunk ki közülük k darab eseményt ($k = 2{,}3, \ldots, n$), ezek szorzatának valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségeinek szorzatával. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlensége esetén tehát a

$$\begin{aligned} P(A_i \cdot A_j) &= P(A_i) \cdot P(A_j) && 1 \le i < j \le n \\ P(A_i \cdot A_j \cdot k) &= P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) && 1 \le i < j < k \le n \\ &\vdots && \vdots \\ P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) \end{aligned}$$

egyenlőségeknek mind teljesülniük kell.

Vegyük észre, hogy itt összesen $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$ feltételnek kell teljesülni.

3.22. Példa.
Két szabályos dobókockával dobunk. Tekintsük a következő eseményeket: A: az elsővel páratlan számot dobunk; B: a másodikkal páratlan számot dobunk; C: a dobott számok összege páratlan. Azt fogjuk igazolni, hogy ezek az események páronként függetlenek, de teljesen nem függetlenek.

A két kockával dobott számok egymástól függetlenek. Mivel a dobókocka szabályos, ezért $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$ és $P(B) = \frac{3}{6} = 0{,}5$. A dobott számok összege akkor lesz páratlan, ha az egyikkel páros, a másikkal pedig páratlan számot dobunk, vagy fordítva. Ennek valószínűsége $\frac{3\cdot3+3\cdot3}{36} = \frac{18}{36} = 0{,}5$, tehát $P(C) = 0{,}5$.

Vizsgáljuk az együttes bekövetkezéseket: $A \cdot B$ azt jelenti, hogy mindkettővel páratlant dobunk, ennek valószínűsége $\frac{3\cdot3}{36} = \frac{9}{36} = 0{,}25$. $A \cdot C$ azt jelenti, hogy az első kockával páratlant dobunk, a dobott számok összege pedig páratlan. Ez csak úgy fordulhat elő, hogy a második kockával párosat dobunk. Tehát az elsővel páratlant, a másodikkal párosat dobunk, ennek valószínűsége szintén $\frac{3\cdot3}{36} = \frac{9}{36} = 0{,}25$. A $B \cdot C$ esemény jelentése és valószínűsége teljesen hasonló. Kaptuk tehát a következőket:

$$\begin{aligned} P(A \cdot B) &= 0{,}25 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = P(A) \cdot P(B) && \text{tehát } A \text{ és } B \text{ függetlenek} \\ P(A \cdot C) &= 0{,}25 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = P(A) \cdot P(C) && \text{tehát } A \text{ és } C \text{ függetlenek} \\ P(B \cdot C) &= 0{,}25 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = P(B) \cdot P(C) && \text{tehát } B \text{ és } C \text{ függetlenek} \end{aligned}$$

Így az A, B és C események páronként függetlenek. Nézzük most az $A \cdot B \cdot C$ eseményt. Ez azt jelenti, hogy az elsővel páratlant dobunk, a másodikkal páratlant dobunk, és dobott számok összege is páratlan. Ez lehetetlen esemény, hiszen két páratlan szám összege nem lehet páratlan. Ezért $P(A \cdot B \cdot C) = 0$. Azaz

$$P(A \cdot B \cdot C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125\,.$$

Vagyis az A, B és C események páronként függetlenek, de teljesen nem függetlenek.

3.23. Tétel.
Ha A és B független események, akkor

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{és} \quad P(B|A) = P(B)\,.$$

BIZONYÍTÁS: A tétel szinte magától értetődő: ha két esemény független, akkor hiába szabom meg feltételként az egyiket, az nem fogja befolyásolni a másik bekövetkezését.

A bizonyítás során azt használjuk fel, hogy $P(A|B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$, továbbá azt, hogy ha A és B függetlenek, akkor $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. A két egyenlőség közül elég csak az egyiket bebizonyítani, a másik teljesen azonos módon adódik.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)\,.$$

□

3.24. Feladat.
Egy pakli magyar kártyából visszatevéssel húzunk egymás után két lapot.

a) Mi a valószínűsége, hogy a második piros?

b) Feltéve, hogy az első király, mi a valószínűsége, hogy a második piros?

Megoldás:

a) Visszatevéssel húzzuk ki a lapokat, tehát egy húzás sem befolyásolja azt, hogy mit húzunk utána, így a piros húzásának valószínűsége minden esetben $\frac{8}{32} = 0{,}25$.

b) A visszatevéses húzás miatt a feltételnek semmilyen szerepe sincs, hiszen az előző húzás eredményétől függetlenül bármit húzhatunk. Így a válasz ugyanaz, mint az előzőben: $\frac{8}{32} = 0{,}25$.

3.25. Tétel.
Ha A és B független események, akkor A és $\overline{B}$, $\overline{A}$ és B, valamint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is független események.

BIZONYÍTÁS: Az átalakítások során azt fogjuk kihasználni, hogy $A \cdot \overline{B} = A - B$, a különbség valószínűsége $P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B)$, továbbá azt, hogy ha A és B függetlenek, akkor $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = \\ = P(A) \cdot P(\overline{B}) .$$

Azt kaptuk, hogy $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$, tehát A és $\overline{B}$ függetlenek. Hasonlóan látható be a tétel másik két állítása is. □

3.26. Feladat.
A és B legyenek független események, $P(A) = 0{,}4$ és $P(B) = 0{,}7$. Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket!

a) $P(A \cdot B)$

b) $P(A + B)$

c) $P(A - B)$

d) $P(B - A)$

e) $P(A|B)$

f) $P(\overline{A}|\overline{B})$

g) $P(\overline{A}|B)$

h) $P(A|\overline{B})$

i) $P(\overline{A} + B)$

j) $P(\overline{A} - \overline{B})$

Megoldás:

a) A függetlenség definícióját kell alkalmazni:
$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28 .$$

b) A függetlenség definíciója alapján:
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}82 .$$

c) A függetlenség definíciója alapján:
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 - 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}12 .$$

d) A függetlenség definíciója alapján:
$$P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}7 - 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}42 .$$

e) A már bizonyított tétel szerint, ha A és B függetlenek, akkor $P(A|B) = P(A)$, ezért
$$P(A|B) = P(A) = 0{,}4 .$$

f) Itt az előző feladatban említett tételt, továbbá azt használjuk fel, hogy ha A és B függetlenek, akkor A és $\overline{B}$, $\overline{A}$ és B, $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek.
$$P(\overline{A}|\overline{B}) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6 .$$

g) Ugyanazt kell felhasználni, mint előbb.
$$P(\overline{A}|B) = P(\overline{A}) = 0{,}6 .$$

h) Ugyanazt kell felhasználni, mint előbb.
$$P(A|\overline{B}) = P(A) = 0{,}4 .$$

i) Csak azt használjuk fel, hogy ha A és B függetlenek, akkor A és $\overline{B}$, $\overline{A}$ és B, $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek.
$$P(\overline{A} + B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cdot B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}88 .$$

j) Ugyanazt kell felhasználni, mint előbb.
$$P(\overline{A} - \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}6 - 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}42 .$$

4. fejezet

A valószínűségi változó

A gyakorlatban előforduló kísérletek túlnyomó részében a kísérletek egyes kimeneteleivel, az elemi eseményekkel, egyúttal számértékek is adódnak. Például kockadobás esetén a pontok száma, mintavételkor a selejtek száma, a vizsgált berendezés élettartama. Az említett kísérleteknél minden elemi eseményhez egyetlen számérték tartozik, és e számérték megjelenése az elemi esemény bekövetkezésétől függ, tehát beszélhetünk a számérték bekövetkezéséről is.

4.1. A valószínűségi változó

4.1. Definíció.
Ha egy kísérlettel kapcsolatos elemi események mindegyikéhez egyértelműen hozzárendelünk egy-egy valós számot, akkor az elemi események Ω halmazán egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt értelmezünk. Ezt a függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

A valószínűségi változó definíciója nem határozza meg azt, hogy az egyes elemi eseményekhez milyen számértéket rendeljünk. Ha azonban az egyes elemi eseményekkel együtt valamilyen számértékek is adódnak és ezek mindegyike fontos a további vizsgálatok szempontjából, akkor érdemes az egyes elemi eseményekhez a velük együtt megjelenő értékeket rendelni. Ha az elemi eseményekhez közvetlenül nem tartozik számérték, akkor az eseményekhez rendelt számértékeket úgy célszerű megválasztani, hogy a további elemzés, számolás során ne okozzanak felesleges bonyadalmakat.

Ha egy kísérlet során az a_i elemi esemény következik be és a valószínűségi változó megadásakor ehhez az x_i értéket rendeltük, akkor azt mondjuk, hogy az X valószínűségi változó az x_i értéket veszi fel, az x_i -t pedig az X egy lehetséges értékének nevezzük.

4.2. Példa.
Egy pakli magyar kártyából húzunk egy lapot. Ezzel kapcsolatban megadunk három valószínűségi változót. A valószínűségi változó a kísérlettel kapcsolatos elemi eseményekhez rendel számot oly módon, hogy minden elemi eseményhez tartozzon egy szám, továbbá egy elemi eseményhez csak egy szám tartozzon.

Ha csak az érdekel minket, hogy húzunk-e pirosat, akkor a valószínűségi változó lehet például az alábbi:

$$X_1 = \begin{cases} 0\,, & \text{ha a kihúzott lap piros,} \\ 1\,, & \text{ha a kihúzott lap nem piros.} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy ha a piros ászt húzzuk, akkor 10 Ft-ot kapunk, ha valamelyik másik ászt, akkor 5-öt, egyébként pedig semmit. Ekkor megfelelő lehet ez a valószínűségi változó:

$$X_2 = \begin{cases} 10\,, & \text{ha a kihúzott lap a piros ász,} \\ 5\,, & \text{ha a kihúzott lap ász, de nem piros,} \\ 0\,, & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

Ha több eset is érdekes számunkra, akkor választhatunk például ilyen valószínűségi változót:

$$X_3 = \begin{cases} 1\,, & \text{ha a kihúzott lap piros,} \\ 2\,, & \text{ha a kihúzott lap zöld,} \\ 5\,, & \text{ha a kihúzott lap tök,} \\ 8\,, & \text{ha a kihúzott lap makk.} \end{cases}$$

4.3. Példa.
Az A esemény indikátor változójának nevezzük a következő $X_A : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót:

$$X_A : \begin{cases} 1\,, & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0\,, & \text{ha } A \text{ nem következik be.} \end{cases}$$

4.1.1. Diszkrét valószínűségi változó

4.4. Definíció.
Egy valószínűségi változót diszkrétnek nevezünk, ha a lehetséges értékeinek halmaza megszámlálható (azaz véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok lehetséges értéke van).

Ha egy Ω eseménytéren értelmezett X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei az x_k, $(k = 1,2,\ldots)$ valós számok, és egy esemény bekövetkezésekor az X értéke x_k , akkor azt mondjuk, hogy az $\{X = x_k\}$ esemény következik be, és az esemény bekövetkezési valószínűségét $p_k = P(X = x_k)$-vel jelöljük.

4.5. Példa.
Tízszer feldobunk egy pénzérmét. A valószínűségi változó értéke legyen a dobott fejek száma. Ekkor a lehetséges értékek halmaza véges: 0, 1, ...,10.

4.6. Példa.
Addig dobálunk egy pénzérmét, amíg írást nem kapunk. A valószínűségi változó értéke legyen a szükséges dobások száma. Ekkor a lehetséges értékek halmaza megszámlálhatóan végtelen: 1,2,... (felső korlát nincs).

4.7. Definíció.
Az X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékeihez tartozó bekövetkezési valószínűségek összességét X eloszlásának nevezzük. Azaz, ha X lehetséges értékei az x_k , $(k = 1,2,\ldots)$ számok, akkor X eloszlása a $p_k = P(X = x_k)$ $(k = 1,2,\ldots)$ bekövetkezési valószínűségek összessége.

4.8. Feladat.
Két szabályos dobókockát elgurítunk, és azt vizsgáljuk, hogy a dobott számok szorzata páros vagy páratlan. Adjunk meg egy megfelelő valószínűségi változót és írjuk fel az eloszlását!

Megoldás:
Az érdekel minket, hogy a dobott számok szorzata páros vagy páratlan (ez minden esetet lefed), tehát elegendő, ha a valószínűségi változónak csak két értéke van. Legyen a valószínűségi változóa következő (a szorzat kettővel vett maradéka):

$$X = \begin{cases} 0\,, & \text{ha a dobott számok szorzata páros,} \\ 1\,, & \text{ha a dobott számok szorzata páratlan.} \end{cases}$$

A valószínűségi változó eloszlása a lehetséges értékeinek és az azokhoz tartozó valószínűségeknek az összessége. A valószínűségi változó értéke akkor 1, amikor a dobott számok szorzata páratlan. Két szám szorzata csak akkor páratlan, ha mindkét szám páratlan. Szabályos dobókockákkal dobunk, ezért $3/6 = 0{,}5$ a valószínűsége annak, hogy páratlan számot dobunk. A két dobott szám független egymástól, így tehát annak valószínűsége, hogy a mind a kettő páratlan lesz $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$, vagyis ennyi annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó által felvett érték 1. Minden más esetben (páros–páros, páros–páratlan, páratlan–páros) a dobott számok szorzata páros, így a valószínűségi változó értéke 0 lesz. Ennek valószínűsége $1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Most már felírhatjuk a valószínűségi változó eloszlását:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{cases}.$$

4.9. Feladat.
Egy szabályos dobókockával addig dobunk, amíg nem kapunk hatost. Jelölje X a szükséges dobások számát. Adjuk meg X eloszlását!

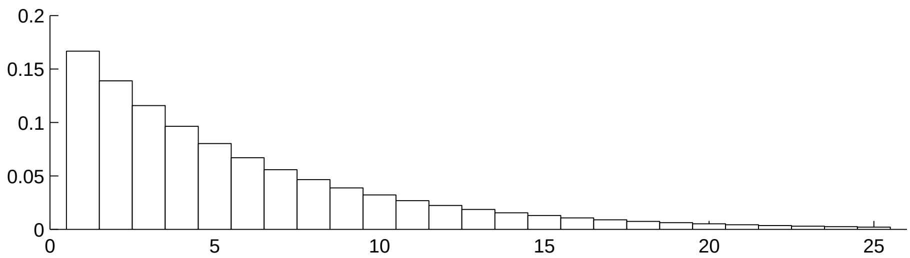
Megoldás:
Először megállapítjuk X lehetséges értékeit. Egy dobás mindenképpen szükséges, viszont a szükséges dobások számának nincs felső korlátja, így a lehetséges értékek: $1,2,\ldots$. Annak valószínűsége, hogy az első dobásra hatost dobunk $\frac{1}{6}$. Annak valószínűsége, hogy a második dobásra dobjuk az első hatost $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$, mert elsőre nem dobunk hatost (ennek valószínűsége $\frac{5}{6}$), másodikra viszont hatost dobunk (ennek valószínűsége $\frac{1}{6}$), és a dobások kimenetelei egymástól függetlenek. Hasonlóan annak valószínűsége, hogy k-adikra dobjuk az első hatost $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$, hiszen az első $k-1$ dobás nem hatos, az utolsó viszont hatos. Így X eloszlása

$$X : \begin{cases} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} & \ldots & \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} & \ldots \end{cases}.$$

A valószínűségeket ki lehet fejezni egy képlettel, amely X lehetséges értékeitől függ, így az eloszlást rövidebben is felírhatjuk:

$$P(X = k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \qquad k = 1,2,\ldots.$$

4.10. Feladat.
Egy urnában 4 piros és 6 fehér golyó van. Az urnából 3 golyót húzunk visszatevéssel. Jelölje X a kihúzott fehérek számát. Adjuk meg X eloszlását!



4.1. ábra. Az első hatos valószínűségének eloszlása.

Megoldás:
Háromszor húzunk, így a kihúzott fehér golyók száma lehet 0, 1, 2 vagy 3. Ezek lesznek tehát a valószínűségi változó lehetséges értékei. Mivel visszatevéssel húzunk, ezért a fehér golyó valószínűsége minden húzásnál $\frac{6}{4+6} = 0{,}6$, a pirosé pedig $\frac{4}{4+6} = 0{,}4$.

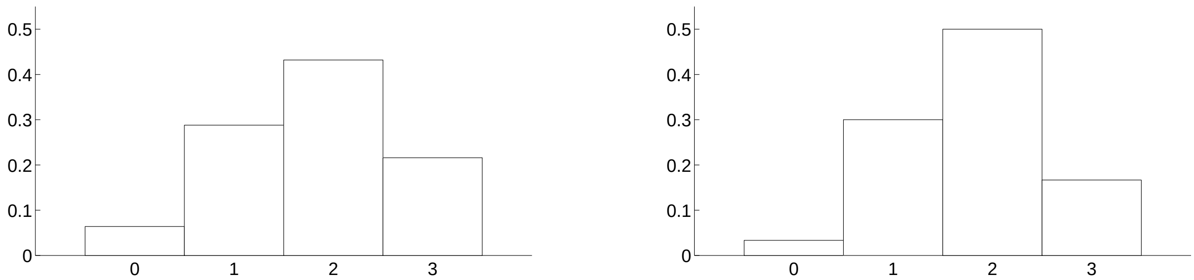
- Annak a valószínűsége, hogy nem húzunk fehér golyót ($X = 0$) $0{,}4^3 = 0{,}064$, hiszen ekkor a 0,4 valószínűségű esemény következik be egymás után háromszor (azaz három pirosat húzunk).
- Annak valószínűsége, hogy egyetlen fehéret húzunk ($X = 1$) $3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}288$, mert fehéret 0,6, pirosat pedig 0,4 valószínűséggel húzunk, a 3-as szorzót pedig az indokolja, hogy egyetlen fehéret háromféleképpen húzhatunk (piros–piros–fehér, piros–fehér–piros, fehér–piros–piros).
- Annak valószínűsége, hogy kettő fehéret húzunk ($X = 2$) hasonló az előzőhöz: $3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}432$. A 3-as szorzót itt is a lehetséges sorrendek száma indokolja (piros–fehér–fehér, fehér–piros–fehér, fehér–fehér–piros).
- Végül annak a valószínűsége, hogy három fehéret húzunk ($X = 3$) $0{,}6^3 = 0{,}216$.

Ezekből már felírható X eloszlása:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}064 & 0{,}288 & 0{,}432 & 0{,}216 \end{cases} .$$

Tömörebb formában:

$$P(X = k) = \binom{3}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{3-k} \qquad k = 0{,}1{,}2{,}3\,.$$



(a) Visszatevéssel. (b) Visszatevés nélkül.

4.2. ábra. A kihúzott fehér golyók számának eloszlása, amikor a négy piros és hat fehér golyót tartalmazó urnából húzunk egymás után háromszor.

4.11. Feladat.

Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy visszatevés nélkül húzunk!

Megoldás:
A valószínűségi változó lehetséges értékei most is 0, 1, 2, 3. Összesen van 10 golyónk, ebből 4 piros és 6 fehér. Ebből a 10 golyóból választunk ki hármat, így az összes lehetséges esetek száma $\binom{10}{3} = 120$.

- Ha nem húzunk fehéret ($X = 0$), akkor csak a 4 piros közül válogathatunk, itt az esetek száma $\binom{4}{3} = 4$. Tehát annak valószínűsége, hogy nem húzunk fehéret $\frac{4}{120} \approx 0{,}0333$.
- Ha egy fehéret húzunk ($X = 1$), akkor a fehérek közül választunk egyet, és a pirosak közül választunk kettőt, így az esetek száma $\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2} = 36$, azaz annak valószínűsége, hogy egy fehéret húzunk $\frac{36}{120} = \frac{9}{30} = = 0{,}3$.
- Ha két fehéret húzunk ($X = 2$), akkor a fehérek közül választunk kettőt, és a pirosak közül választunk egyet, így az esetek száma $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} = 60$, azaz annak valószínűsége, hogy két fehéret húzunk $\frac{60}{120} = 0{,}5$.
- Ha három fehéret húzunk ($X = 3$), akkor csak a fehérek közül válogathatunk, itt az esetek száma $\binom{6}{3} = 20$, így a három fehér valószínűsége $\frac{20}{120} \approx 0{,}1667$.

Ezekből már felírható X eloszlása:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}0333 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1667 \end{cases} .$$

Tömörebb formában:

$$P(X = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{4}{3-k}}{\binom{10}{3}}, \qquad k = 0{,}1{,}2{,}3 .$$

4.1.2. Folytonos valószínűségi változó

4.12. Definíció.
Egy valószínűségi változót folytonosnak nevezünk, ha a lehetséges értékei egy vagy több intervallumot alkotnak (lehet nem korlátos is).

4.13. Példa.
A $[0; 4]$ intervallumból választunk véletlenszerűen egy számot. A valószínűségi változó értéke legyen a választott szám. Ekkor a lehetséges értékek halmaza egy intervallum, így a valószínűségi változónak nem megszámlálhatóan végtelen sok lehetséges értéke van.

4.14. Példa.
Vásárolunk egy energiatakarékos izzót. A valószínűségi változónk értéke legyen az izzó órában mért élettartama (ez lehet nem egész is). Ekkor a lehetséges értékek halmaza a $[0; \infty)$ félegyenes, ezért a valószínűségi változónak most is nem megszámlálhatóan végtelen sok lehetséges értéke van.

4.2. Az eloszlásfüggvény

4.15. Definíció.
Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük azt az F függvényt, amely minden valós x értékhez hozzárendeli annak valószínűségét, hogy az X valószínűségi változó x-nél kisebb értéket vesz fel, azaz

$$F(x) = P(X < x) \qquad x \in \mathbb{R} .$$

4.16. Példa.
Az X valószínűségi változó eloszlása legyen az alábbi:

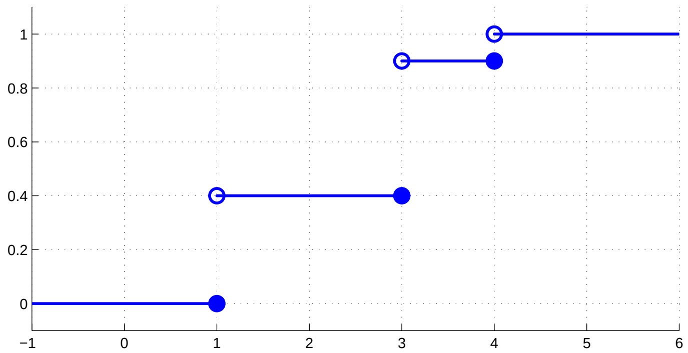
$$X : \begin{cases} 1 & 3 & 4 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{cases}.$$

Meghatározzuk X eloszlásfüggvényét, amihez csak az eloszlásfüggvény definíciójára lesz szükségünk.

- Ha $x \leq 1$, akkor $F(x)$ értéke 0, hiszen a valószínűségi változó lehetséges értékei 1, 3, 4, így annak a valószínűsége, hogy 1-nél (vagy egy 1-nél kisebb számnál) kisebb értéket vesz fel 0.
- Ha $1 < x \leq 3$, akkor $F(x)$ értéke 0,4, mert ekkor van x-nél kisebb érték, az 1, aminek a valószínűsége 0,4.
- Ha $3 < x \leq 4$, akkor $F(x)$ értéke 0,9, mert ekkor két x-nél kisebb érték is van, az 1 és a 3, ezek valószínűségei pedig 0,4 és 0,5, tehát $0{,}4 + 0{,}5 = 0{,}9$ a valószínűsége annak, hogy a valószínűségi változó értéke kisebb x-nél.
- Ha $x > 4$, akkor $F(x)$ értéke 1, mert a valószínűségi változó lehetséges értékei 1, 3, 4, így annak a valószínűsége, hogy egy 4-nél nagyobb számnál kisebb értéket vesz fel 1.

A fentieket összefoglalva a következőt kapjuk:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ 0{,}4 & \text{ha } 1 < x \leq 3 \\ 0{,}9 & \text{ha } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{ha } x > 4 \end{cases}.$$



4.3. ábra. A diszkrét eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye lépcsős függvény.

4.17. Példa.
Egy két egység sugarú körlapon teljesen véletlenszerűen választunk egy pontot. Az X valószínűségi változó értéke legyen a pontnak a kör középpontjától mért távolsága. X lehetséges értékei ekkor a $[0; 2]$ intervallumot alkotják. Meghatározzuk X eloszlásfüggvényét.

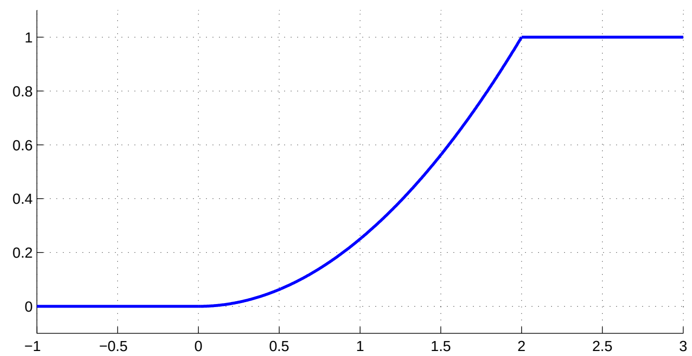
- Ha $x \leq 0$, akkor $F(x)$ értéke 0, hiszen a távolság nem lehet nullánál kisebb, így ennek a valószínűsége 0.

– Legyen most $0 < x \leq 2$. A választott pont akkor lesz x-nél kisebb távolságra a középponttól, ha az eredeti középpont körüli, x sugarú körön belül van. Ennek a valószínűsége megadható, mint az x sugarú és a 2 sugarú kör területének hányadosa, azaz $\frac{x^2\pi}{2^2\pi} = \frac{x^2}{4}$. Tehát ebben az esetben $F(x) = \frac{x^2}{4}$.

– Ha $x > 2$, akkor $F(x)$ értéke 1, mert a középponttól mért távolság legfeljebb 2 lehet, így biztosan kisebb egy 2-nél nagyobb számnál.

A fentieket összefoglalva a következőt kapjuk:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{ha } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{ha } x > 2 \end{cases} .$$



4.4. ábra. A körlapos példában szereplő folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

Az eloszlásfüggvény definíciójából következnek az alábbi tulajdonságok:

4.18. Tétel.
Legyen X egy tetszőleges valószínűségi változó, az eloszlásfüggvénye pedig legyen $F(x)$. Ekkor $F(x)$ rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. Monoton növő, azaz ha $a < b$, akkor $F(a) \leq F(b)$.
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
4. $F(x)$ minden pontban balról folytonos, azaz $\lim_{x\to a-0} F(x) = F(a)$.

Bizonyítás:

1. Mivel az eloszlásfüggvény értéke egy esemény valószínűségét adja meg, így $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. Ha $a < b$, akkor $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \le X < b\}$. Ezzel az $\{X < b\}$ eseményt egymást kizáró események összegeként írtuk fel, így a 3. axióma miatt a valószínűsége ezen két esemény valószínűségének az összege, azaz $P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b)$. Az eloszlásfüggvény definíciója alapján ez átírható $F(b) = F(a) + P(a \le X < b)$ alakba. Mivel $P(a \le X < b) \ge 0$, ezért $F(a) \le F(b)$.

A 3. és a 4. tulajdonságot nem bizonyítjuk.

□

A következő tétel azt mutatja meg, hogy az $\{X \ge a\}$, $\{a \le X < b\}$, $\{X > a\}$ és $\{X = a\}$ események valószínűsége hogyan számítható ki az eloszlásfüggvény segítségével.

4.19. Tétel.
Legyen X egy tetszőleges valószínűségi változó, az eloszlásfüggvénye pedig legyen $F(x)$. Ekkor

1. $P(X \ge a) = 1 - F(a)\,.$
2. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)\,.$
3. $P(X > a) = 1 - \lim\limits_{x \to a+0} F(x)\,.$
4. $P(X = a) = \lim\limits_{x \to a+0} F(x) - F(a)\,.$

BIZONYÍTÁS:

1. Az $\{X \ge a\}$ esemény az $\{X < a\}$ esemény komplementere, ezért
$$P(X \ge a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)\,.$$
2. Az $\{a \le X < b\}$ esemény az $\{X < b\}$ és az $\{X < a\}$ események különbsége, ráadásul e két eseményközött fennáll az $\{X < a\} \subset \{X < b\}$ reláció is. Az események különbségének valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján kapjuk, hogy
$$P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a)\,.$$
3. $P(X > a) = \lim\limits_{n \to \infty} P\left(X \ge a + \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 - P\left(X < a + \dfrac{1}{n}\right)\right) = 1 - \lim\limits_{x \to a+0} F(x)\,.$
4. Az $\{X = a\}$ esemény az $\{X \ge a\}$ és az $\{X > a\}$ események különbsége, továbbá teljesül az is, hogy $\{X > a\} \subset \{X \ge a\}$. Az események különbségének valószínűségére vonatkozó összefüggés és a tételbeli 1. és 3. pontok alapján kapjuk, hogy
$$P(X = a) = P(X \ge a) - P(X > a) = 1 - F(a) - \left(1 - \lim_{x \to a+0} F(x)\right) = \lim_{x \to a+0} F(x) - F(a)\,.$$

□

4.20. Feladat.
Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{25}{x^2} & \text{ha } x > 5 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket:

a) $P(X < 6)$
b) $P(X < 1)$
c) $P(X \geq 6)$
d) $P(X \geq 2)$
e) $P(X = 8)$
f) $P(X > 8)$
g) $P(6 \leq X < 8)$
h) $P(-5 < X < 6)$
i) $P(X < 8 | X < 10)$
j) $P(X < 8 | X > 6)$
k) $P(X > 9 | X > 10)$
l) $P(X < 8 | X > 12)$

Megoldás:

a) Az eloszlásfüggvény definíciója miatt ez nem más, mint $F(x)$ helyettesítési értéke az $x = 6$ helyen, azaz

$$P(X < 6) = F(6) = 1 - \frac{25}{6^2} = \frac{11}{36} \approx 0{,}3056 .$$

b) A feladat szinte azonos az előzővel, csak arra kell figyelni, hogy 5-nél kisebb számokhoz az eloszlásfüggvény nullát rendel, így

$$P(X < 1) = F(1) = 0 .$$

c) Az eloszlásfüggvény egyik tulajdonsága ($P(X \geq a) = 1 - F(a)$) miatt

$$P(X \geq 6) = 1 - F(6) = 1 - \left(1 - \frac{25}{6^2}\right) = \frac{25}{36} \approx 0{,}6944 .$$

d) Hasonló az előzőhöz, de figyelni kell arra, hogy 2 kisebb 5-nél, ezért $F(2) = 0$:

$$P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0 = 1 .,$$

Úgy is gondolkodhattunk volna, hogy az eloszlásfüggvény csak 5-nél nagyobb számokhoz rendel nullától eltérő értéket, tehát a valószínűségi változó csak 5-nél nagyobb értékeket vehet fel. Így nyilán 1 lesz annak a valószínűsége, hogy az értéke legalább 2.

e) Az eloszlásfüggvény egyik tulajdonságából ($P(X = a) = \lim\limits_{x \to a+} F(x) - F(a)$) következik, hogy folytonos eloszlásfüggvény esetén az egyenlőség valószínűsége mindig nulla, így

$$P(X = 8) = 0 .$$

f) Az eloszlásfüggvény tulajdonságaiból tudjuk, hogy $P(X \geq a) = 1 - F(a)$, továbbá azt is tudjuk, hogy folytonos eloszlásfüggvény esetén az egyenlőség valószínűsége 0. Így most nem számít, hogy nagyobb vagy nagyobb-egyenlő szerepel-e a relációban, vagyis

$$P(X > 8) = 1 - F(8) = 1 - \left(1 - \frac{25}{8^2}\right) = \frac{25}{64} \approx 0{,}3906 .$$

g) Az eloszlásfüggvény egyik tulajdonsága, hogy $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$. Ezt alkalmazva:

$$P(6 \leq X < 8) = F(8) - F(6) = 1 - \frac{25}{8^2} - \left(1 - \frac{25}{6^2}\right) = \frac{25}{36} - \frac{25}{64} \approx 0{,}3038 .$$

h) Az előbb már láttuk, hogy most nem számít, hogy a relációban kisebb vagy kisebb-egyenlő szerepel-e, hiszen az egyenlőség valószínűsége úgyis nulla. Továbbá figyeljünk arra, hogy $-5 < 5$, tehát $F(-5) = 0$. Így

$$P(-5 < X < 6) = F(6) - F(-5) = 1 - \frac{25}{6^2} - 0 = \frac{11}{36} \approx 0{,}3056 .$$

i) Emlékezzünk vissza arra, hogy hogyan kell feltételes valószínűséget számolni:

$$\frac{\text{együttes bekövetkezés valószínűsége}}{\text{feltétel valószínűsége}}\,.$$

Az együttes bekövetkezés azt jelenti, hogy az $X < 8$ és a $X < 10$ relációknek egyszerre kell teljesülniük. Akkor fog mindkettő teljesülni, ha $X < 8$. A feltétel szerint $X < 10$. Így a következőt kapjuk:

$$P(X < 8|X < 10) = \frac{P(X < 8)}{P(X < 10)} = \frac{F(8)}{F(10)} = \frac{1 - \dfrac{25}{8^2}}{1 - \dfrac{25}{10^2}} = \frac{13}{16} = 0{,}8125\,.$$

j) Itt egyszerre kell teljesülni annak, hogy $X < 8$ és annak, hogy $X > 6$. Ez azt jelenti, hogy $6 < X < 8$, a feltétel pedig $X > 6$. Ezzel az alábbiakat kapjuk:

$$P(X < 8|X > 6) = \frac{P(6 < X < 8)}{P(X > 6)} = \frac{F(8) - F(6)}{1 - F(6)} = \frac{1 - \dfrac{25}{8^2} - \left(1 - \dfrac{25}{6^2}\right)}{1 - \left(1 - \dfrac{25}{6^2}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{25}{36} - \dfrac{25}{64}}{\dfrac{25}{36}} = 1 - \frac{36}{64} = \frac{28}{64} = 0{,}4375\,.$$

k) Az együttes bekövetkezéshez teljesülni kell az $X > 9$ és az $X > 10$ relációknak, ami tulajdonképpen azt jelenti, hogy $X > 10$. Viszont a feltételünk is az, hogy $X > 10$, így ezt kapjuk:

$$P(X > 9|X > 10) = \frac{P(X > 10)}{P(X > 10)} = \frac{1 - F(10)}{1 - F(10)} = 1\,.$$

Ez az eredmény már a kérdésből is látszik, az ugyanis szavakkal megfogalmazva így hangzik: feltéve, hogy X nagyobb tíznél, mi a valószínűsége, hogy nagyobb kilencnél?

l) Szavakkal kifejezve így hangzik a kérdés: feltéve, hogy X nagyobb tizenkettőnél, mi a valószínűsége, hogy kisebb nyolcnál? Erre a kérdésre nyilvánvalóan 0 a válasz. Ha formálisan akarjuk megoldani a feladatot, akkor azt kapjuk, hogy egyszerre kell teljesülni az $X < 8$ és az $X > 12$ relációknak, ami lehetetlen. Így a számlálóban a lehetetlen esemény valószínűsége állna, ami nulla, s így a feltételes valószínűség is nulla lesz.

4.3. A sűrűségfüggvény

A valószínűségi változók közül külön figyelmet érdemelnek azok, amelyeknek eloszlásfüggvénye előáll egy másik függvény integráljaként.

4.21. Definíció.
Az X valószínűségi változót folytonos eloszlásúnak nevezzük, ha az eloszlásfüggvénye integrálfüggvény, azaz van olyan f függvény, amelyre

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

A fenti definíció szerint adott F-hez keresünk megfelelő f-et. Azonban a definícióban szereplő f korántsem egyértelmű, hiszen ha egy, a feltételnek megfelelő f függvény értékeit megszámlálható (véges vagy megszámlálhatóan végtelen) sok helyen megváltoztatjuk, akkor az az integrál értékét nem befolyásolja. A definíciónak megfelelő f függvények közül olyat célszerű választani, ami a legkevesebb helyen nem folytonos. Tudjuk azt is, hogy abszolút folytonos függvény majdnem mindenütt differenciálható és egyenlő a deriváltjának határozatlan integráljával, így abszolút folytonos F esetén a $f = F'$ megfelel a fenti követelményeknek. A kérdés már csak az, hogy mit tegyünk azokban a pontokban, ahol F nem differenciálható. Megtehetnénk azt is, hogy ezeken a helyeken f-et nem definiáljuk, sőt akár tetszőleges értéket is adhatnánk neki, az az integrál értékét nem fogja befolyásolni. Mi itt azt a (műszaki alkalmazásokban elterjedt) megoldást választjuk, hogy ezeken a helyeken f értékét 0-nak definiáljuk.

4.22. Definíció.
Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$. Ha $F(x)$ abszolút folytonos, akkor legyen $f(x) = F'(x)$, ha pedig egy pontban $F(x)$ nem differenciálható, ott $f(x)$ értéke legyen 0. Az így definiált $f(x)$ függvényt az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényének.

A sűrűségfüggvény definíciójából következnek az alábbi tulajdonságok:

4.23. Tétel.
Legyen X egy tetszőleges folytonos eloszlású valószínűségi változó, az eloszlásfüggvénye legyen $F(x)$, a sűrűségfüggvénye pedig legyen $f(x)$. Ekkor $f(x)$ rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Nemnegatív, azaz $f(x) \geq 0$.
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

BIZONYÍTÁS:

1. Mivel az eloszlásfüggvény monoton növő, ezért a deriváltja nem negatív azokon a helyeken, ahol F differenciálható, a többi pontban pedig a definíció szerint 0 a sűrűségfüggvény értéke.
2. Mivel a sűrűségfüggvény olyan függvény, amelyre a $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$, ezért

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1\,.$$

$\square$

A következő tétel azt mutatja meg, hogy az $\{X < a\}$, $\{X \geq a\}$ és $\{a \leq X < b\}$ események valószínűsége hogyan számítható ki a sűrűségfüggvény segítségével.

4.24. Tétel.
Legyen X egy tetszőleges folytonos eloszlású valószínűségi változó, az eloszlásfüggvénye legyen $F(x)$, a sűrűségfüggvénye pedig legyen $f(x)$. Ekkor

1. $P(X < a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$
2. $P(X \geq a) = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$
3. $P(a \leq X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

BIZONYÍTÁS:

1. $P(X < a) = F(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$
2. $P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$
3. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$\square$

4.25. Feladat.
Mennyi legyen a c paraméter értéke, hogy az alábbi függvény sűrűségfüggvény legyen?

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-5} & \text{ha } x > 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

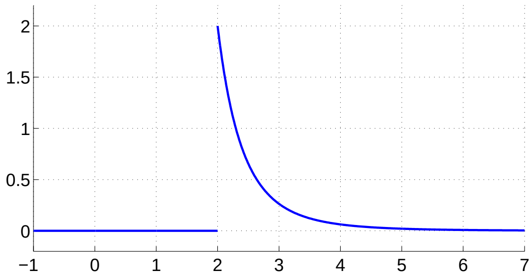
Megoldás:
Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény sűrűségfüggvény legyen az kell, hogy legyen nemnegatív, és a teljes számegyenesen vett integrálja legyen 1. Az első feltételből annyi adódik, hogy $c \geq 0$, viszont a másodikból már meg tudjuk határozni a paraméter értékét. Mivel $f(x)$ sűrűségfüggvény (azt szeretnénk), ezért

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Figyeljünk arra, hogy a sűrűségfüggvény nem $c \cdot x^{-5}$, hanem egy olyan függvény, amely 2-ig nulla, utána pedig $c \cdot x^{-5}$. Elvégezve az integrálást:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{\infty} c \cdot x^{-5}\,\mathrm{d}x = c \cdot \left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_2^{\infty} = c \cdot \left[\frac{-1}{4x^4}\right]_2^{\infty} = c \cdot \left(0 - \frac{-1}{64}\right) = \frac{c}{64}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $1 = \frac{c}{64}$, ebből pedig $c = 64$ következik.



4.5. ábra. A 4.25. feadatban szereplő sűrűségfüggvény.

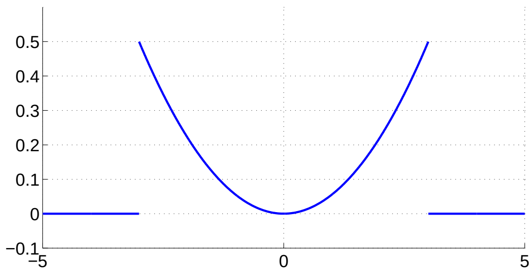
4.26. Feladat.
Mennyi legyen a c paraméter értéke, hogy az alábbi függvény sűrűségfüggvény legyen?

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 & \text{ha } -3 < x < 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Megoldás:
Ugyanúgy kell eljárnunk, mint az előző feladatban, azzal a különbséggel, hogy a függvény csak egy korlátos tartományon különbözik nullától.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{3} c \cdot x^2\,\mathrm{d}x = c \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = c \cdot \left(\frac{27}{3} - \frac{-27}{3}\right) = c \cdot 18\,.$$

Mivel azt kaptuk, hogy $1 = c \cdot 18$, ezért a c paraméter értéke $\frac{1}{18}$.



4.6. ábra. A 4.26. feladatban szereplő sűrűségfüggvény.

4.27. Feladat.
Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az alábbi függvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le -2 \\ \frac{(x+2)^2}{36} & \text{ha } -2 < x \le 4 \\ 1 & \text{ha } x > 4 \end{cases}.$$

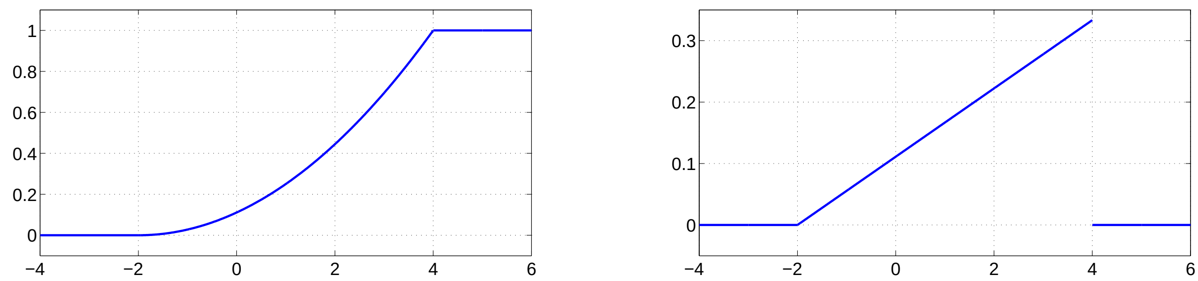
Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét!

Megoldás:
Tudjuk, hogy a sűrűségfüggvény olyan függvény, amelyet integrálva előállíthatjuk az eloszlásfüggvényt. Megfordítva, ha az eloszlásfüggényt deriváljuk, akkor megkapjuk a sűrűségfüggvényt, azaz $f(x) = F'(x)$. Mivel az eloszlásfüggvény a $(-2;4)$ intervallumon kívül konstans, ezért a $(-2;4)$ intervallumon kívül a sűrűségfüggvény nulla lesz (uis. konstans deriváltja nulla). A $(-2;4)$ intervallumon a sűrűségfüggvény az $\dfrac{(x+2)^2}{36}$ függvény deriváltja lesz, azaz

$$\left(\frac{(x+2)^2}{36}\right)' = \frac{1}{36}\cdot\left((x+2)^2\right)' = \frac{1}{36}\cdot 2\cdot(x+2) = \frac{x+2}{18}\,.$$

Így a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{18} & \text{ha } -2 < x < 4 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$



(a) Az eloszlásfüggvény.

(b) A sűrűségfüggvény.

4.7. ábra. A 4.27. feladatban szerelő eloszlásfüggvény és az abból meghatározott sűrűségfüggvény.

4.28. Feladat.
Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{72}{x^3} & \text{ha } x > 6 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

a) $P(X < 10) = ?$

b) $P(X > 7) = ?$

c) $P(8 < X < 12) = ?$

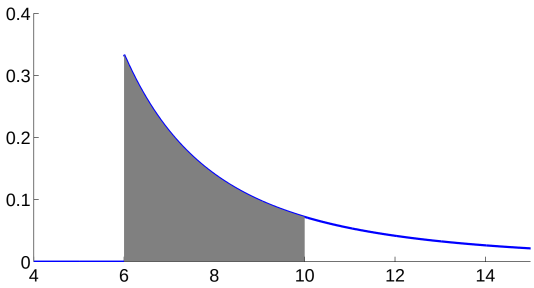
d) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét!

Megoldás:
a) A sűrűségfüggvény tulajdonságaiból tudjuk, hogy $P(X < a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$, ezért

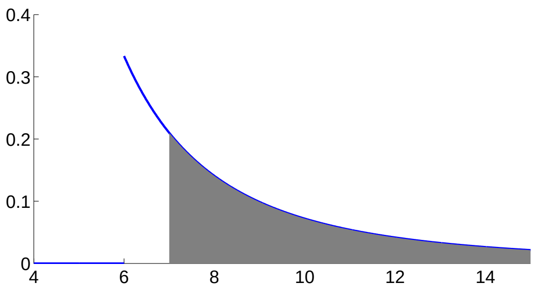
$$P(X < 10) = \int\limits_{-\infty}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{6}^{10} \frac{72}{x^3}\,\mathrm{d}x = 72\cdot\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_6^{10} = 72\cdot\left(\frac{-1}{200} - \frac{-1}{72}\right) = 1 - \frac{36}{100} = \frac{64}{100} = 0{,}64\,.$$

b) A sűrűségfüggvény tulajdonságaiból tudjuk, hogy $P(X > a) = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, ezért

$$P(X > 7) = \int\limits_{7}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{7}^{\infty} \frac{72}{x^3}\,\mathrm{d}x = 72\cdot\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_7^{\infty} = 72\cdot\left(0 - \frac{-1}{98}\right) = \frac{72}{98} \approx 0{,}7347\,.$$



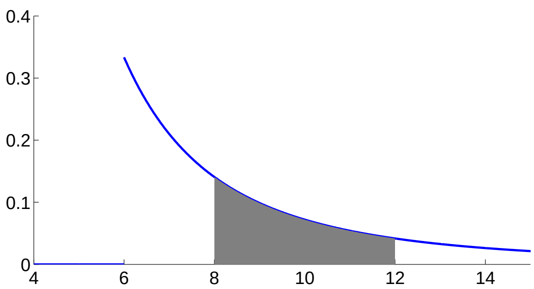
4.8. ábra. A $P(X < 10)$ valószínűség a sűrűségfüggvény alatti terület $-\infty$-től 10-ig.



4.9. ábra. A $P(X > 7)$ valószínűség a sűrűségfüggvény alatti terület 7-től végtelenig.

c) A sűrűségfüggvény tulajdonságaiból tudjuk, hogy $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ezért

$$P(8 < X < 12) = \int\limits_8^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_8^{12} \frac{72}{x^3}\,\mathrm{d}x = 72 \cdot \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_8^{12} = 72 \cdot \left(\frac{-1}{288} - \frac{-1}{128}\right) = 0{,}5625 - 0{,}25 = 0{,}3125\,.$$



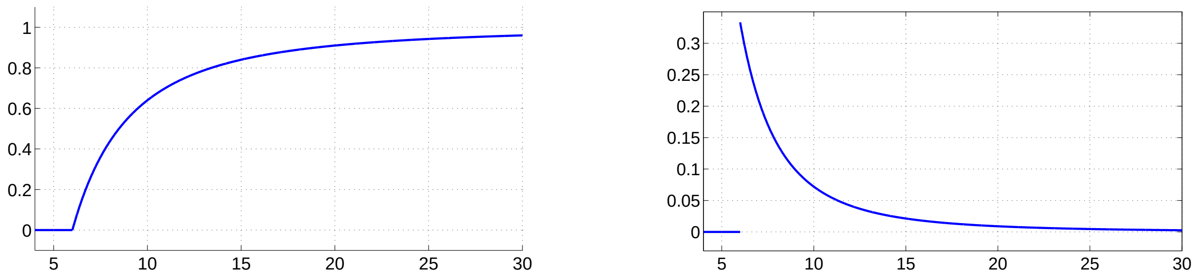
4.10. ábra. A $P(8 < X < 12)$ valószínűség a sűrűségfüggvény alatti terület 8 és 12 között.

d) A sűrűségfüggvény az az $f(t)$ függvény, amelyre igaz, hogy $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, tehát az eloszlásfüggvényt a sűrűségfüggvény integrálásával fogjuk előállítani. Mivel a sűrűségfüggvény mínusz végtelentől egészen 6-ig nulla, ezért a fenti integrál értéke is nulla lesz, ha $x \leq 6$ (konstans nulla integrálja nulla), vagyis $x \leq 6$ esetén az eloszlásfüggvény 0. Legyen most $x > 6$, így tehát $f(t)$ mínusz végtelen és x között nem mindenhol nulla. Az eloszlásfüggvény értéke ezen az x helyen:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{6}^{x} \frac{72}{t^3}\mathrm{d}t = 72 \cdot \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_6^x = 72 \cdot \left(\frac{-1}{2x^2} - \frac{-1}{72}\right) = 1 - \frac{36}{x^2}\,.$$

Összegezve az eredményeket azt kaptuk, hogy az eloszlásfüggvény a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 6 \\ 1 - \dfrac{36}{x^2} & \text{ha } x > 6 \end{cases} .$$



(a) Az eloszlásfüggvény. (b) A sűrűségfüggvény.

4.11. ábra. A 4.28. feladatban szerelő eloszlásfüggvény és az abból meghatározott sűrűségfüggvény.

5. fejezet

A várható érték és a szórás

Egy valószínűségi változóval kapcsolatos kérdések megválaszolásához fontos információt ad az eloszlásfüggvény, vagy diszkrét esetben az eloszlás, folytonos esetben pedig a sűrűségfüggvény. Sokszor azonban nincs szükség nagyon részletes leírásra, csak az a fontos, hogy átlagosan mennyi a valószínűségi változó értéke, milyen érték körül ingadoznak a valószínűségi változó lehetséges értékei, illetve ezek az értékek mennyire koncentrálódnak, átlagosan mekkorák az ingadozások. Ezeket a jellemzőket adja meg a várható érték és a szórás.

5.1. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Legyen X egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, az ezekhez tartozó valószínűségek pedig $p_1, p_2, \ldots$. Elvégezve n darab független kísérletet, az egyes értékek gyakoriságai legyenek rendre $k_1, k_2, \ldots$. A valószínűség értelmezésénél láttuk, hogy a $\frac{k_i}{n}$ relatív gyakoriság p_i körül ingadozik, így a $\sum_i \frac{k_i}{n} \cdot x_i$ kifejezés, amely az n darab kísérlet során kapott értékek számtani közepe (átlaga) a $\sum_i p_i \cdot x_i$ érték körül ingadozik. Ezt a számot nevezzük az X valószínűségi változó várható értékének. Pontosabban:

5.1. Definíció.
Legyen X diszkrét valószínűségi változó, és legyen $p_i = P(X = x_i)$. Ekkor X várható értékén az $E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$ összeget értjük, amennyiben a $\sum_i |x_i| \cdot p_i$ összeg véges. Egyéb esetben azt mondjuk, hogy a várható érték nem létezik.

5.2. Példa.
Meghatározzuk a szokásos kockadobásnál a dobott szám várható értékét. Legyen X a dobott számot jelentő valószínűségi változó. Eloszlása:

$$X : \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Ez alapján a várható érték:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5\,.$$

5.3. Példa.

(Nincs várható érték) Az X valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek a pozitív egészek $(1,2,\ldots)$, a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig definiáljuk a következő módon: a k számhoz tartozzon az $\dfrac{1}{k(k+1)}$ valószínűség. Határozzuk meg X várható értékét!

A leírtak alapján X eloszlása a következő:

$$X : \begin{cases} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{6} & \ldots & \dfrac{1}{k(k+1)} & \ldots \end{cases}.$$

Első ránézésre egyáltalán nem világos, hogy ez egyáltalán eloszlás-e. Ehhez az kell, hogy a valószínűségek összege legyen 1 (és persze ne legyenek negatívak, de ez láthatóan teljesül). Nézzük tehát a valószínűségek összegét:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\text{felhasználva, hogy } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] =$$

az első néhány tagot kiírva már látszik a lényeg:

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1\,.$$

Tehát valóban eloszlásról van szó. Nézzük a várható értéket. Ehhez egy végtelen összeget kell vizsgálnunk:

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + k \cdot \frac{1}{k(k+1)} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}\,.$$

Mivel a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sor divergens, ezért a fenti végtelen sor is divergens, így a valószínűségi változónak nem létezik várható értéke.

5.4. Feladat.

Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk. Legyen X a dobott fejek száma. Határozzuk meg X várható értékét!

Megoldás:

Először meg kell határoznunk X eloszlását. Mivel háromszor dobunk, a fejek száma lehet 0, 1, 2 vagy 3, ezek lehetnek X értékei. A pénzérme szabályos, tehát $1/2-1/2$ valószínűséggel dobhatunk fejet, illetve írást. A három fej ($X=3$) valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, hasonlóan ennyi a három írás (azaz a nulla fej, $X=0$) valószínűsége is. Az egy fej, két írás ($X=1$) és a két fej, egy írás ($X=2$) események valószínűsége szintén megegyezik, mivel a fej és az írás valószínűsége egyenlő. Tekintsük pl. az $X=1$ esetet. Ennek valószínűsége $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$, ugyanis mind a fej, mind az írás valószínűsége $1/2$, és az egy fej, két írás esemény háromféleképpen jöhet létre (fej, írás írás–írás, fej, írás–írás, írás, fej). Így X eloszlása:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{3}{8} & \dfrac{3}{8} & \dfrac{1}{8} \end{cases}.$$

Ebből meghatározhatjuk X várható értékét:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}\,.$$

5.2. Folytonos valószínűségi változó várható értéke

Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó, a sűrűségfüggvénye legyen $f(x)$. Legyen (a, b) az az intervallum, ahol $f(x)$ nem nulla. Osszuk fel ezt az intervallumot m részre, az i-edik részintervallum végpontjai legyenek t_{i-1} és t_i. Ekkor annak valószínűsége, hogy az X valószínűségi változó értéke az i-edik részintervallumba esik

$$P(t_{i-1} < X < t_i) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Végezzünk el n darab független kísérletet, az eredmények legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$, és vizsgáljuk, hogy az egyes részintervallumokba hányszor esik az eredmény. Jelölje k_i az i-edik részintervallumba eső elemek számát. Az átlagot közelítsük úgy, hogy minden egyes részintervallumból választunk egy-egy számot, amivel helyettesítünk minden olyan értéket, ami az adott intervallumba esik (például, ha a (3,4) intervallumot tekintjük, akkor vehetjük a 3,5-et). Legyen az i-edik intervallumból választott érték τ_i. Ekkor az átlag közelítése:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} k_i \cdot \tau_i = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \frac{k_i}{n}\,.$$

Sok kísérletsorozat esetén a $\dfrac{k_i}{n}$ relatív gyakoriság az i-edik részintervallumba esés valószínűsége körül ingadozik, ezért

$$\frac{k_i}{n} \approx \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ezt felhasználva az átlag közelítése:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \approx \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \frac{k_i}{n} \approx \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

A fenti eljárás alapján definiálhatjuk a folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értékét:

5.5. Definíció.
Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó, a sűrűségfüggvénye legyen $f(x)$. Ekkor X várható értékén az $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ integrált értjük, amennyiben az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ integrál véges. Egyéb esetben azt mondjuk, hogy a várható érték nem létezik.

5.6. Példa.
Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye legyen a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ x^2 & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{ha } x > 1 \end{cases}\,.$$

A várható érték meghatározásához először ki kell számítanunk a sűrűségfüggvényt. A $(0;1)$ intervallumon kívül az eloszlásfüggvény konstans, így azokon a helyeke a sűrűségfüggvény nulla lesz. Ha $0 < x < 1$, akkor a sűrűségfüggvény megfelelő része deriválással kapható meg: $\left(x^2\right)' = 2x$. Vagyis a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Ennek segítségével a várható érték:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \left[2 \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} .$$

5.7. Példa.
(Nincs várható érték) Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye legyen a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Határozzuk meg X várható értékét!

Ha $x < 1$, akkor az eloszlásfüggvény konstans, így a sűrűségfüggvény nulla lesz. Ha $x > 1$, akkor deriválással előállítható a sűrűségfüggvény megfelelő része:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \left(1 - x^{-1}\right)' = -1 \cdot -1 \cdot x^{-2} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} .$$

Tehát a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{ha } 1 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

A sűrűségfüggvény segítségével próbáljuk meg kiszámítani a várható értéket:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln x\Big]_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty .$$

Mivel a kapott érték nem véges, ezért azt mondjuk, hogy a várható érték nem létezik.

5.8. Feladat.
Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^4} & \text{ha } x > 4 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

a) Határozzuk meg az a paraméter értékét!

b) Határozzuk meg X várható értékét!

Megoldás:

a) A sűrűségfüggvény egyik tulajdonsága az, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ezt kihasználva:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{4}^{\infty} \frac{a}{x^4}\,\mathrm{d}x = \left[a \cdot \frac{-1}{3 \cdot x^3}\right]_4^{\infty} = a \cdot \frac{1}{192} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 192\,.$$

b)

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{4}^{\infty} x \cdot \frac{192}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{4}^{\infty} \frac{192}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[192 \cdot \frac{-1}{2 \cdot x^2}\right]_4^{\infty} = 6\,.$$

5.9. Tétel.
Legyen X egy tetszőleges valószínűségi változó és legyen $Y = a \cdot X^2 + b \cdot X + c$, ahol a, b és c tetszőleges valós számok. Ekkor az Y valószínűségi változó várható értéke

$$E(Y) = a \cdot E(X^2) + b \cdot E(X) + c$$

amennyiben X és X^2 várható értéke létezik.

Bizonyítás:

1. Ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor

$$E(Y) = \sum_i y_i \cdot p_i = \sum_i \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right) \cdot p_i =$$
$$= a \cdot \sum_i x_i^2 \cdot p_i + b \cdot \sum_i x_i \cdot p_i + c \cdot \sum_i p_i = a \cdot E(X^2) + b \cdot E(X) + c\,.$$

2. Ha X folytonos eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$E(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(a \cdot x^2 + b \cdot x + c\right) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= a \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x + b \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x + c \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= a \cdot E(X^2) + b \cdot E(X) + c\,.$$

□

5.10. Példa.
Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk. Legyen X a dobott fejek száma, legyen továbbá $Y = 4 \cdot X - 1$. Az X valószínűségi változó várható értékét már meghatároztuk, és azt kaptuk, hogy $E(X) = \frac{3}{2}$. Ezzel az Y valószínűségi változó várható értéke:

$$E(Y) = 4 \cdot E(X) - 1 = 4 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 5\,.$$

5.3. A szórás

Olyan mérőszámot keresünk, amellyel jellemezhetjük a várható érték körül ingadozást, vagyis a valószínűségi változónak (X) és a várható értéknek ($E(X)$) az eltérését szeretnénk egyetlen számmal leírni. Vegyük alapul a különbséget. Az egyszerű $X - E(X)$ kifejezés nem megfelelő, hiszen ez egy valószínűségi változó, vagyis az értéke függ a véletlentől. Ennek a várható értéke már nem valószínűségi változó, de

$$E[X - E(X)] = E(X) - E(X) = 0$$

így ez egyáltalán nem jellemzi az ingadozást. Tekintsük ezért inkább az $X - E(X)$ különbség négyzetét. Ez azért nem megfelelő, mert nem egy szám, hanem valószínűségi változó, de ennek a várható értéke már megfelelő lesz az ingadozás jellemzésére. Pontosabban:

5.11. Definíció.
Az X valószínűségi változó szórásán az $(X - E(X))^2$ valószínűségi változó várható értékének négyzetgyökét értjük, amit $D(X)$-szel (vagy σ-val) jelölünk. Azaz X szórása

$$D(X) = \sqrt{E\left[(X - E(X))^2\right]}.$$

amennyiben X és $(X - E(X))^2$ várható értéke létezik.

5.12. Megjegyzés.
A gyökvonás nélküli $D^2(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$ értéket az X valószínűségi változó szórásnégyzetének nevezzük. Általában először a szórásnégyzetet tudjuk meghatározni, és abból gyökvonással a szórást.

5.13. Tétel.
Ha az X valószínűségi változónak és annak a négyzetének is létezik a várható értéke, akkor létezik X szórása is, és

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}.$$

Bizonyítás: A kifejezés szórásnégyzetre vonatkozó alakját fogjuk igazolni, abból pedig gyökvonással következik az állítás.

$$D^2(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left[X^2 - 2 \cdot X \cdot E(X) + E^2(X)\right] =$$
$$= E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

□

5.14. Feladat.
Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk. Legyen X a dobott fejek száma. Határozzuk meg X szórását!

Megoldás:
A szórást a $D(X)=\sqrt{E(X^2)-E^2(X)}$ formula alapján fogjuk kiszámítani. Ebből a várható értéket ($E(X)$) egy előző feladatban már meghatároztuk, és azt kaptuk, hogy

$$E(X)=\frac{3}{2}\,.$$

Szükségünk lesz még X^2 várható értékére, így először írjuk fel X^2 eloszlását. X^2 lehetséges értékeit úgy kaphatjuk meg, hogy X lehetséges értékeit négyzetre emeljük, a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig az eredeti értékekhez tartozó valószínűségek lesznek, azaz

$$X^2:\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right..$$

Ebből X^2 várható értéke:

$$E(X^2)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+9\cdot\frac{1}{8}=\frac{24}{8}=3\,.$$

A szórásnégyzet és abból a szórás:

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\quad\Longrightarrow\quad D(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660\,.$$

5.15. Tétel.
Legyen X egy tetszőleges valószínőségi változó és legyen $Y=a\cdot X+b$. Ekkor Y szórása

$$D(Y)=D(a\cdot X+b)=|a|\cdot D(X)$$

amennyiben X szórása létezik.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
D^2(Y)&=D^2(a\cdot X+b)=E\left[(a\cdot X+b)^2\right]-E^2\left[a\cdot X+b\right]=\\
&=E\left[a^2\cdot X^2+2ab\cdot X+b^2\right]-\left[a\cdot E(X)+b\right]^2=\\
&=a^2\cdot E(X^2)+2ab\cdot E(X)+b^2-a^2\cdot E^2(X)-2ab\cdot E(X)-b^2=\\
&=a^2\cdot E(X^2)-a^2\cdot E^2(X)=a^2\cdot\left(E(X^2)-E^2(X)\right)=a^2\cdot D^2(X)\,.
\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy $D^2(Y)=a^2\cdot D^2(X)$, amiből gyökvonással következik a tétel állítása. □

5.16. Példa.
Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk. Legyen X a dobott fejek száma, legyen továbbá $Y=-2\cdot X+3$. X várható értéke és szórása az előző feladatokból már ismert:

$$E(X)=\frac{3}{2}\qquad\text{és}\qquad D(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660\,.$$

Az Y valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\begin{aligned}
E(Y)&=E(-2\cdot X+3)=-2\cdot E(X)+3=-2\cdot\frac{3}{2}+3=0\\
D(Y)&=D(-2\cdot X+3)=|-2|\cdot D(X)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\approx 1{,}7321\,.
\end{aligned}$$

5.17. Feladat.

Határozzuk meg az alábbi eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$X : \begin{cases} -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{cases}.$$

Megoldás:

A várható érték:

$$E(X) = -2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9\,.$$

A szórás meghatározásához először írjuk fel X^2 eloszlását. X^2 lehetséges értéke X lehetséges értékeinek a négyzetei, a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig az eredeti értékekhez tartozóak. Egy dologra érdemes figyelni: mivel -2 és 2 négyzete is 4, ezért X^2 eloszlásában a 4-hez tartozó valószínűség a -2-höz és a 2-höz tartozó valószínűségek összege lesz. Így X^2 eloszlása:

$$X^2 : \begin{cases} 0 & 4 & 9 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{cases}.$$

Ez alapján X^2 várható értéke:

$$E(X^2) = 0 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}3 = 4{,}3\,.$$

A szórásnégyzet és a szórás:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4{,}3 - 0{,}9^2 = 3{,}49 \quad \Longrightarrow \quad D(X) = \sqrt{3{,}49} \approx 1{,}8682\,.$$

5.18. Feladat.

Egy urnában 4 piros és 6 fehér golyó van. Az urnából 3 golyót húzunk visszatevéssel. Jelölje X a kihúzott fehérek számát. Adjuk meg X várható értékét és szórását!

Megoldás:

A valószínűségi változó eloszlását már meghatároztuk egy korábbi feladatban:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}064 & 0{,}288 & 0{,}432 & 0{,}216 \end{cases}.$$

A várható érték:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}064 + 1 \cdot 0{,}288 + 2 \cdot 0{,}432 + 3 \cdot 0{,}216 = 1{,}8\,.$$

A valószínűségi változó négyzetének eloszlása:

$$X^2 : \begin{cases} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0{,}064 & 0{,}288 & 0{,}432 & 0{,}216 \end{cases}.$$

X^2 várható értéke:

$$E(X^2) = 0 \cdot 0{,}064 + 1 \cdot 0{,}288 + 4 \cdot 0{,}432 + 9 \cdot 0{,}216 = 3{,}96\,.$$

A szórásnégyzet és a szórás:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3{,}96 - 1{,}8^2 = 0{,}72 \quad \Longrightarrow \quad D(X) = \sqrt{0{,}72} \approx 0{,}8485\,.$$

5.19. Feladat.

Oldjuk meg a feladatot visszatevés nélkül!

Megoldás:

Itt is meghatároztuk már X eloszlását:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \dfrac{1}{30} & \dfrac{9}{30} & \dfrac{15}{30} & \dfrac{5}{30} \end{cases}.$$

A várható érték:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{9}{30} + 2 \cdot \frac{15}{30} + 3 \cdot \frac{5}{30} = \frac{54}{30} = 1{,}8\,.$$

X^2 eloszlása:

$$X^2 : \begin{cases} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{30} & \frac{9}{30} & \frac{15}{30} & \frac{5}{30} \end{cases} .$$

X^2 várható értéke:

$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{9}{30} + 4 \cdot \frac{15}{30} + 9 \cdot \frac{5}{30} = \frac{114}{30} = 3{,}8 .$$

A szórásnégyzet és a szórás:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3{,}8 - 1{,}8^2 = 0{,}56 \quad \Longrightarrow \quad D(X) = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}7483 .$$

5.20. Feladat.

Számítsuk ki az alábbi eloszlásfüggvényel rendelkező X valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2-4}{21} & \text{ha } 2 < x \leq 5 \\ 1 & \text{ha } x > 5 \end{cases} .$$

Megoldás:

Vegyük sorra, hogy mi mindent kell tennünk: az eloszlásfüggvényből meg kell határozni a sűrűségfüggvényt; a sűrűségfüggvény felhasználásával ki kell számítanunk X és X^2 várható értékét; ezek segítségével meghatározhatjuk a szórásnégyzetet, abból pedig a szórást. Kezdjük tehát a sűrűségfüggvénnyel, amit az eloszlásfüggvény deriválásával kaphatunk meg. Az eloszlásfüggvény a $(2;5)$ intervallumon kívül konstans, ezért ott a deriváltja nulla, tehát a sűrűségfüggvény a $(2;5)$ intervallumon kívül nulla lesz. Az intervallumon belüli értékhez az eloszlásfüggvény megfelelő részét kell deriválni:

$$\left(\frac{x^2-4}{21}\right)' = \left(\frac{1}{21}x^2 - \frac{4}{21}\right)' = \frac{2x}{21} .$$

Tehát a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{21} & \text{ha } 2 < x < 5 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

A sűrűségfüggvény segítségével kiszámíthatjuk a várható értéket:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 x \cdot \frac{2x}{21}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{21}\int_2^5 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{21}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{2}{21}\left(\frac{125}{3} - \frac{8}{3}\right) =$$
$$= \frac{26}{7} \approx 3{,}7143 .$$

X^2 várható értéke:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 x^2 \cdot \frac{2x}{21}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{21}\int_2^5 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{2}{21}\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^5 = \frac{2}{21}\left(\frac{625}{4} - \frac{16}{4}\right) =$$
$$= \frac{203}{14} = 14{,}5 .$$

A szórásnégyzet és a szórás:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{203}{14} - \left(\frac{26}{7}\right)^2 = \frac{69}{98} \approx 0{,}7041$$
$$D(X) = \sqrt{\frac{69}{98}} \approx 0{,}8391 .$$

5.21. Feladat.

Számítsuk ki az alábbi eloszlásfüggvényel rendelkező X valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{64}{x^3} & \text{ha } x > 4 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Megoldás:

Ugyanazokat a lépéseket kell végrehajtanunk, mint az előbb. Mivel az eloszlásfüggvény $x < 4$ esetén nulla, ezért itt a sűrűségfüggvény is nulla lesz. Az $x > 4$ esethez tartozó részt deriválással határozzuk meg:

$$\left(1 - \frac{64}{x^3}\right)' = \left(1 - 64 \cdot x^{-3}\right)' = -64 \cdot -3 \cdot x^{-4} = \frac{192}{x^4}\,.$$

Tehát a sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{192}{x^4} & \text{ha } 4 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

A sűrűségfüggvény segítségével kiszámíthatjuk a várható értéket:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{4}^{\infty} x \cdot \frac{192}{x^4}\,\mathrm{d}x = 192 \int_{4}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = 192 \int_{4}^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 192 \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_4^{\infty} = 192 \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_4^{\infty} = 192 \left(0 - \frac{-1}{32}\right) = \frac{192}{32} = 6\,.$$

X^2 várható értéke hasonlóan kapható meg:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{4}^{\infty} x^2 \cdot \frac{192}{x^4}\,\mathrm{d}x = 192 \int_{4}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 192 \int_{4}^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 192 \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_4^{\infty} = 192 \left[\frac{-1}{x}\right]_4^{\infty} = 192 \left(0 - \frac{-1}{4}\right) = \frac{192}{4} = 48\,.$$

A szórásnégyzet és a szórás:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = 48 - 6^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad D(X) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}4641\,.$$

6. fejezet

Nevezetes diszkrét eloszlások

6.1. Az indikátor változó eloszlása

A legegyszerűbb eloszlást úgy kapjuk, hogy csupán egyetlen kísérletet hajtunk végre egy adott valószínűségű esemény megfigyelésére. Itt tehát két dolog történhet: az esemény vagy bekövetkezik, vagy nem.

6.1. Definíció.
Végezzünk el egyetlen kísérletet a p valószínűségű A esemény megfigyelésére. Az X valószínűségi vátozó értéke legyen 1, ha A bekövetkezik, és legyen 0, ha A nem következik be. Ekkor X az A esemény indikátor változója, eloszlása pedig az alábbi:

$$X : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array} \right. .$$

A valószínűségi változó várható értéke:

$$E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p .$$

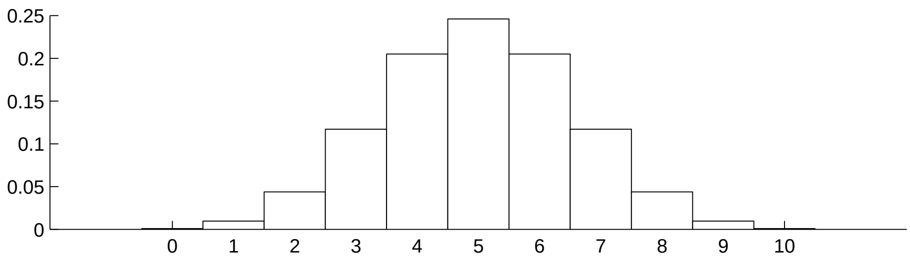
Mivel $0^2 = 0$ és $1^2 = 1$, ezért a valószínűségi változó négyzetének eloszlása és várható értéke ugyanaz, mint X eloszlása és várható értéke:

$$X^2 : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad E(X^2) = p .$$

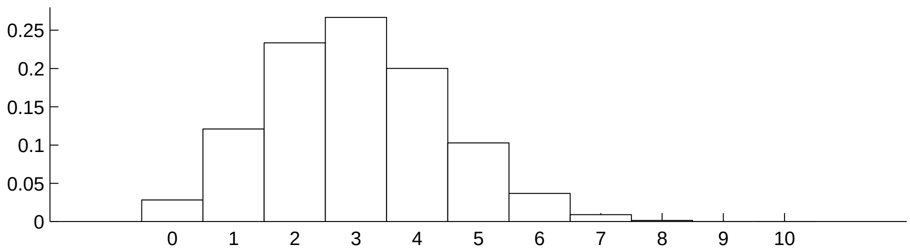
A valószínűségi változó szórása:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{p - p^2} = \sqrt{p(1-p)} .$$

Látható, hogy az indikátor eloszlás nagyon egyszerű. Jelentősége abban áll, hogy egy kísérletsorozat esetén minden egyes kísérlethez hozzárendelhetünk egy-egy indikátor valószínűségi változót, így a sikeres kísérletek számát ezen valószínűségi változók összege adja meg. Így kaphatjuk meg például a binomiális eloszlást is.



6.1. ábra. Binomiális eloszlás $n = 10$ és $p = 0{,}5$ esetén.



6.2. ábra. Binomiális eloszlás $n = 10$ és $p = 0{,}3$ esetén.

6.2. Binomiális eloszlás

Binomiális eloszlással adhatjuk meg, hogy adott számú független kísérlet elvégzése esetén a megfigyelt p valószínűségű esemény összesen hányszor következik be. Az előbbiek szerint a binomiális eloszlás megkapható úgy is, mint adott számú (n), független, azonos paraméterű (p) indikátor eloszlás összege. A visszatevéses mintavételnél a kihúzott selejtek száma szintén leírható binomiális eloszlással, hiszen minden egyes húzás az előzőekkel azonos körülmények között, azoktól függetlenül történik.

6.2. Definíció.
Végezzünk el n darab kísérletet a p valószínűségű A esemény megfigyelésére. Az X valószínűségi vátozó értéke legyen a sikeres kísérletek száma $(0,1,2,\ldots,n)$. Ekkor X binomiális eloszlású valószínűségi változó az n és p paraméterekkel, eloszlása:

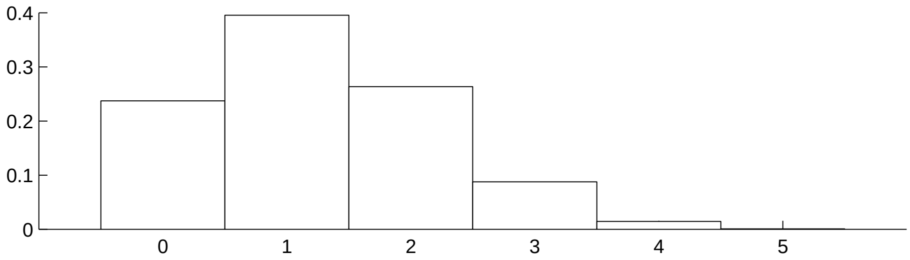
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n\,.$$

Mivel a binomiális eloszlású valószínűségi változó tekinthető n darab független, karakterisztikus eloszlású valószínűségi változó összegének is, ezért a változó várható értéke és szórása:

$$E(X) = n \cdot p \qquad D(X) = \sqrt{np(1-p)}\,.$$

6.3. Feladat.
Egy pakli magyar kártyából 5 lapot húzunk visszatevéssel.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között nincs piros?



6.3. ábra. Binomiális eloszlás $n = 5$ és $p = 0{,}25$ esetén.

b) Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között van piros?

c) Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között pontosan három piros van?

d) Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között háromnál több piros van?

e) Adjuk meg a kihúzott pirosak számának várható értékét és szórását!

Megoldás:

a) Előre rögzített számú kísérletet (húzást) hajtunk végre, visszatevéssel húzunk, így az egyes húzások eredménye független a többitől, továbbá minden egyes húzáskor $8/32 = 1/4$ valószínűséggel húzunk pirosat. Így a kihúzott pirosak száma binomiális eloszlást követ, a kísérletek száma $n = 5$, a sikeres kísérlet valószínűsége $p = \frac{1}{4}$. Legyen a kihúzott pirosak száma X. Ekkor

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0{,}2373\,.$$

b) A „van piros" esemény sokféleképpen megvalósulhat, uis. lehet a kihúzottak között 1, 2, 3, 4 vagy 5 piros is. Ezért célszerűbb a komplementer esemény valószínűségével számolni: $P(\text{van piros}) = 1 - P(\text{nincs piros})$.

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0{,}2373 = 0{,}7627\,.$$

c)

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0{,}0879\,.$$

d)

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0 \approx 0{,}01562\,.$$

e) Binomiális eloszlásról van szó, tehát a várható érték $E(X) = n \cdot p$, a szórás pedig $D(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Behelyettesítve az $n = 5$ és a $p = \frac{1}{4}$ értékeket:

$$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1{,}25 \qquad D(X) = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \approx 0{,}9682\,.$$

6.4. Feladat.

Egy halastóban 1000 hal van. Egyik nap kihalásznak közülük százat. Ezeket valamilyen módon megjelölik, majd visszadobják őket. Másnap megint kihalásznak 100 halat, de most visszatevéssel (azaz kifognak egyet, megnézik, viszadobják, és ezt ismétlik százszor). Határozzuk meg a második nap kifogott megjelölt halak számának várható értékét és szórását!

Megoldás:

A megjelölés után a tóban 1000 hal van, közülük 100 megjelölt. Mivel másnap a halakat egyesével fogják ki (és vissza is dobják), ezért minden esetben $100/1000 = 0{,}1$ annak a valószínűsége, hogy megjelölt halat fognak ki, és 0,9 annak a valószínűsége, hogy jelöletlent. Feltételezhetjük azt is, hogy az egyes fogások eredménye (megjelölt vagy jelöletlen) független az előzőektől. Ha ezekhez még hozzávesszük azt is, hogy a előre tudjuk, hogy hány halat fognak ki másnap (azaz rögzített számú kísérletet hajtanak végre), akkor kijelenthetjük, hogy a másnap kifogott megjelölt halak száma binomiális eloszlást követ az $n = 100$ és a $p = 0{,}1$ paraméterekkel (ha másnap mondjuk 50 halat fognának ki, akkor $n = 50$ lenne). Így a várható érték $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$, a szórás pedig $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$.

6.5. Feladat.

Létezik-e olyan binomiális eloszlás, melynek várható értéke 6, szórása pedig 2?

Megoldás:

Binomiális eloszlásnál a várható érték $n \cdot p$, a szórás pedig $\sqrt{np(1-p)}$, ahol n a kísérletek számát jelöli, így pozitív egész, p pedig a sikeres kísérlet valószínűsége, ezért 0 és 1 közé esik. A kérdés tehát az, hogy az alábbi egyenletrendszer megoldása megfelel-e ezeknek a feltételeknek.

$$\begin{aligned} n \cdot p &= 6 \\ \sqrt{np(1-p)} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcr} \text{Emeljük négyzetre a második egyenletet:} & np(1-p) = 4 & & \\ \text{Használjuk fel, hogy } np = 6\text{:} & 6(1-p) = 4 & \Longrightarrow & p = \dfrac{1}{3} \\ \text{Visszahelyettesítve az elsőbe:} & n \cdot \dfrac{1}{3} = 6 & \Longrightarrow & n = 18 \end{array}$$

Tehát létezik ilyen binomiális eloszlás, nevezetesen az $n = 18$ és $p = 1/3$ paraméterekkel rendelkező ilyen. Ha viszont pl. a szórás nem 2, hanem 3 lenne, akkor nem létezne, ugyanis az egyenletek így alakulnának:

$$\begin{array}{lrcr} \text{Emeljük négyzetre a második egyenletet:} & np(1-p) = 9 & & \\ \text{Használjuk fel, hogy } np = 6\text{:} & 6(1-p) = 9 & \Longrightarrow & p = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

, ami nyilván lehetetlen, hiszen p valószínűség érték.

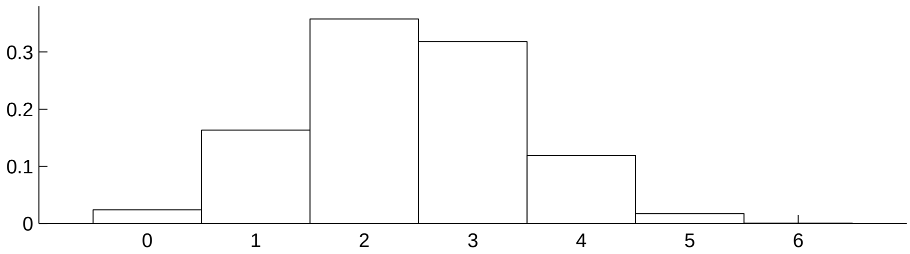
6.6. Feladat.

Egy tesztben 20 kérdést tesznek fel, amelyekre három-három lehetséges válasz van, ezek közül egy jó. Tegyük fel, hogy 6 kérdésre tudjuk a helyes választ, a többinél teljesen véletlenszerűen, találomra választunk. Mi a valószínűsége, hogy legalább 50%-os eredményt érünk el?

Megoldás:

Ahhoz, hogy legalább 50%-os eredményt érjünk el, legalább 10 helyes válasz kell. Mivel 6 kérdésre tudjuk a választ, ezért ez azt jelenti, hogy a maradék 14 kérdésből kell legalább négyre helyes választ adni. Minden esetben teljesen véletlenszerűen választunk a három válasz közül, ezért a helyes válasz valószínűsége $\frac{1}{3}$, a helytelené $\frac{2}{3}$. Rögzített számú kísérletet (tippelést) hajtunk végre, a kísérletek egymástól függetlenek, a sikeres kísérlet valószínűsége mindig ugyanakkora, ezért az eltalált válaszok száma (sikeres kísérletek száma) binomiális eloszlású, az $n = 14$ és $p = \frac{1}{3}$ paraméterekkel. Legyen X a 14 kísérletből eltalált válaszok száma. Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$\begin{aligned} &P(\text{legalább 50\%-os eredményt érünk el a teszten}) = P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) \\ &\quad = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] = \\ &\quad = 1 - \left[\binom{14}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{14} + \binom{14}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{13} + \binom{14}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{12} + \binom{14}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right] \approx \\ &\quad \approx 1 - 0{,}2612 = 0{,}7388\,. \end{aligned}$$



6.4. ábra. Hipergeometriai eloszlás $m = 20$, $s = 8$ és $n = 6$ esetén.

6.3. Hipergeometriai eloszlás

Hipergeometriai eloszlással adhatjuk meg visszatevés nélküli mintavételnél a kihúzott selejtek számát. Később látni fogjuk, hogy a hipergeometriai eloszlás bizonyos körülmények között helyettesíthető (közelíthető) binomiális eloszlással.

6.7. Definíció.
Tekintsünk m darab elemet (bármit), amelyből s darabot valamilyen ok miatt megkülönböztetünk a többi $m - s$ darabtól (például selejtes). Ezután találomra kiválasztunk az m elemből n darabot visszatevés nélkül, ahol $n \leq s$ és $n \leq m - s$ (tehát előfordulhat az is, hogy minden kiválasztott selejtes, és az is, hogy egyik sem az). Legyen az X valószínűségi változó értéke az n darab kiválasztott között lévő megkülönböztetett elemek száma, így X lehetséges értékei $0,1,2,\ldots,n$. Ekkor X hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó az m, s és n paraméterekkel, eloszlása:

$$P(X = k) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n\,.$$

A valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$E(X) = n \cdot \frac{s}{m} = n \cdot p \qquad D(X) = \sqrt{np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{m-1}\right)}\,.$$

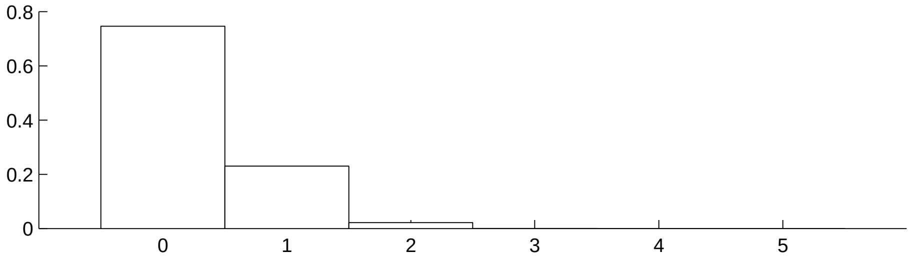
6.8. Példa.
Meghatározzuk az ötös lottón elért találatainkat jellemző valószínűségi változó eloszlását és várható értékét. A 90 számot elméletben két részre oszthatjuk: 5 nyerő szám van és 85 nem nyerő. A 90 számból a szelvényen ötöt jelölünk be, és minket az érdekel, hogy hány nyerő számot sikerül eltalálnunk. Jelölje X a találatok számát. Ekkor X hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó az $m = 90$, $s = 5$ és $n = 5$ paraméterekkel. X eloszlása:

$$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \qquad k = 0,1,2,3,4,5\,.$$

Kicsit bővebben:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}7463 & 0{,}2304 & 0{,}0225 & 8{,}12 \cdot 10^{-4} & 9{,}67 \cdot 10^{-6} & 2{,}27 \cdot 10^{-8} \end{cases}.$$

Hipergeometriai eloszlás esetén a várható érték $n \cdot \frac{s}{m}$, vagyis most $5 \cdot \frac{5}{90} = \frac{5}{18} \approx 0{,}2778$.



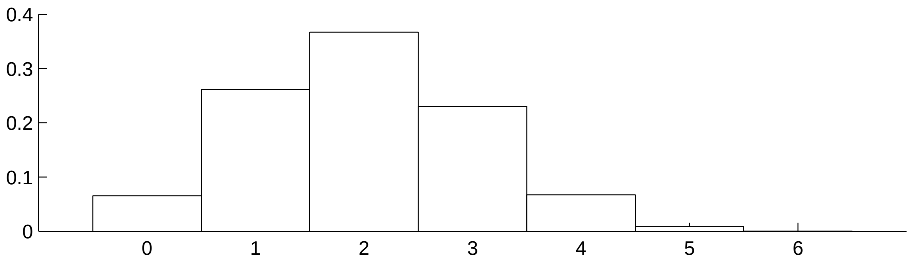
6.5. ábra. Hipergeometriai eloszlás $m = 90$, $s = 5$ és $n = 5$ esetén.

6.9. Feladat.
Egy dobozban 20 fekete és 10 piros golyó van. Hat golyót kihúzunk visszatevés nélkül.

a) Mi a valószínűsége, hogy mind a hat fekete?

b) Mi a valószínűsége, hogy pontosan négy fekete?

c) Mi a valószínűsége, hogy több pirosat húzunk, mint feketét?



6.6. ábra. Hipergeometriai eloszlás $m = 30$, $s = 10$ és $n = 6$ esetén.

Megoldás:

a) Adott számú (összesen 30) golyóból húzunk visszatevés nélkül, a golyókat valamilyen szempont (szín) szerint két csoportra osztottuk, és az érdekel minket, hogy a kihúzottak között hány olyan van, amely az egyik csoportba (fekete) tartozik. Legyen X a kihúzott fekete golyók száma. A fentiek miatt ekkor X hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó az $m = 30$, $s = 20$, $n = 6$ paraméterekkel. Így a kérdéses valószínűség:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{20}{6} \cdot \binom{10}{0}}{\binom{30}{6}} = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} \approx 0{,}0653\,.$$

Természetesen úgy is gondolkodhatunk volna, hogy az összes lehetőség $\binom{30}{6}$, a megfelelő esetek száma pedig $\binom{20}{6}$.

b) Hasonlóan az előzőhöz:

$$P(X=4)=\frac{\binom{20}{4}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{30}{6}}\approx 0{,}3672\,.$$

c) Ekkor a pirosak száma lehet 4,5 vagy 6, így a feketék száma (vagyis X) lehet 2,1 vagy 0. A keresett valószínűség:

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$
$$=\frac{\binom{20}{0}\cdot\binom{10}{6}}{\binom{30}{6}}+\frac{\binom{20}{1}\cdot\binom{10}{5}}{\binom{30}{6}}+\frac{\binom{20}{2}\cdot\binom{10}{4}}{\binom{30}{6}}\approx 0{,}0760\,.$$

6.4. Geometriai eloszlás

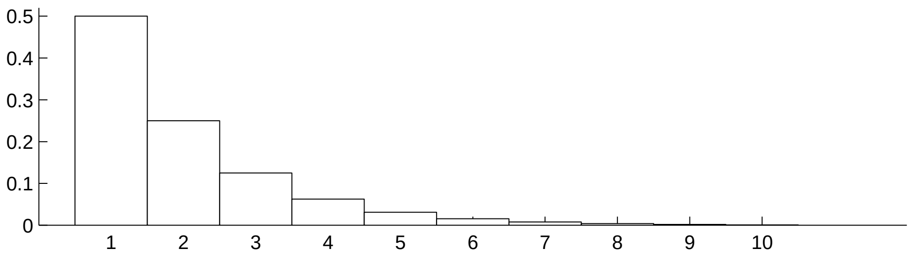
Gyakran előfordul, hogy addig kell próbálkoznunk valamivel, amíg az nem sikerül. Ilyenkor természetesen fontos kérdés az, hogy nagy valószínűséggel mennyi időre, hány próbálkozásra is lesz szükségünk. Ha az egyes kísérletek egymástól függetlenül mindig ugyanakkora valószínűséggel sikeresek, akkor a szükséges próbálkozások számát geometriai eloszlással írhatjuk le. Az eloszlás elnevezését a valószínűségek mértani (geometriai) sorozattal való kapcsolata indokolja.

6.10. Definíció.
Tegyük fel, hogy addig hajtunk végre kísérleteket a p valószínűségű A esemény megfigyelésére, amíg az be nem következik. A szükséges kísérletek száma legyen X, így a lehetséges értékek $1,2,\ldots$ (felső korlát nincs). Ekkor X geometriai eloszlású valószínűségi változó a p paraméterrel, eloszlása:

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p \qquad k=1,2,\ldots\,.$$

A valószínűségi változó várható értéke és szórása:

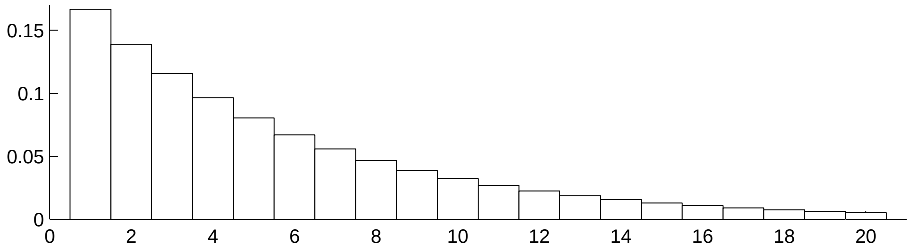
$$E(X)=\frac{1}{p}\qquad D(X)=\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}\,.$$



6.7. ábra. Geometriai eloszlás $p=0{,}5$ esetén.

6.11. Feladat.

Egy kockával addig dobunk ismételten, míg hatost nem dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább ötször kell dobni, hogy az első hatos kijöjjön? Melyik az a k szám, amelyre teljesül, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább k dobás kell az első hatosig kb. 1/3?



6.8. ábra. Geometriai eloszlás $p = \frac{1}{6}$ esetén.

Megoldás:

Addig hajtunk végre független kísérleteket (dobunk a kockával), amíg be nem következik a várt esemény (hatost dobunk). Legyen a szükséges dobások száma X. Ekkor X geometriai eloszlású valószínűségi változó a $p = \dfrac{1}{6}$ paraméterrel. Annak valószínűsége, hogy legalább öt dobás kell:

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) = 1 - [P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)] = \\ &= 1 - \left[p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p\right] = \end{aligned}$$

a mértani sorozat összegképletét felhasználva:

$$= 1 - p \cdot \frac{(1-p)^4 - 1}{(1-p) - 1} = 1 - p \cdot \frac{(1-p)^4 - 1}{-p} = 1 + ((1-p)^4 - 1) = (1-p)^4 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 \approx 0{,}4823\,.$$

Ezt az eredmény kicsit egyszerűbben is megkaphatjuk. Ha legalább öt dobás kell az első hatoshoz, akkor az első négy dobás eredménye biztosan nem hatos. A nem hatos valószínűsége minden dobásnál $\frac{5}{6}$, így annak valószínűsége, hogy az első négy dobás nem hatos (tehát legalább öt dobás kell) $\left(\frac{5}{6}\right)^4$.

Az eddigiek alapján annak valószínűsége, hogy legalább k dobás kell az első hatosig

$$P(X \geq k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

A feladat szerint megoldandó tehát a következő egyenlet:

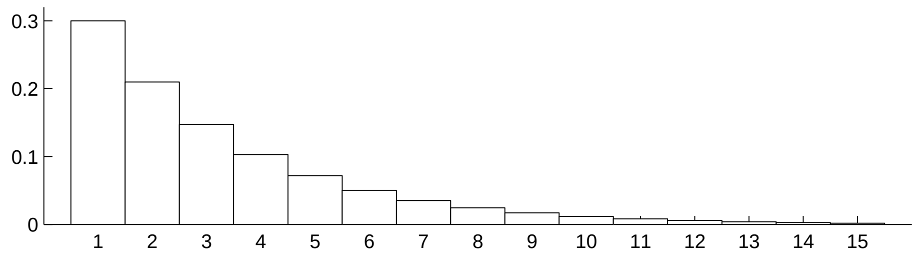
$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} &= \frac{1}{3} && \text{vegyük mindkét oldal logaritmusát} \\ \ln\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} &= \ln\frac{1}{3} && \text{használjuk fel, hogy } \ln a^n = n \ln a \\ (k-1)\ln\frac{5}{6} &= \ln\frac{1}{3} && \text{rendezzük } k\text{-ra} \\ k &= \frac{\ln\frac{1}{3}}{\ln\frac{5}{6}} + 1 \approx 7{,}0257 \approx 7\,. \end{aligned}$$

Tehát kb. 1/3 annak a valószínűsége, hogy legalább 7 dobás kell az első hatosig. Ellenőrzésképp: $\left(\frac{5}{6}\right)^{7-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}3349$.

6.12. Feladat.
Szabó Béla mindig 0,3 valószínűséggel vizsgázik eredményesen egy bizonyos tárgyból, függetlenül az addigi vizsgák eredményétől.

a) Mi a valószínűsége, hogy egy tárgyfelvétellel (maximum 3 vizsga) teljesíti a tárgyat?

b) Mi a valószínűsége, hogy három tárgyfelvétel (3-szor 3 vizsga) és egy méltányossági vizsga után sem sikerül teljesítenie a tárgyat?



6.9. ábra. Geometriai eloszlás $p = 0{,}3$ esetén.

Megoldás:

a) Mivel addig próbálkozik, amíg nem sikerül a vizsgája, továbbá a sikeres vizsga valószínűsége függetlenül az előzményektől mindig ugyanannyi, ezért a szükséges vizsgák száma geometriai eloszlású valószínűségi változó ($p = 0{,}3$), jelölje ezt X. Maximum három vizsgával teljesíti a tárgyat, tehát a szükséges vizsgák száma legfeljebb három, $X \le 3$. Ennek valószínűsége:

$$P(X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = p + p(1-p) + p(1-p)^2 =$$
$$= 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}657\,.$$

b) Ezek szerint legalább tízszer vizsgázik sikertelenül, vagyis a sikerhez szükséges vizsgák száma legalább 11, $X \ge 11$. Ennek valószínűsége (az előző feladat szerint):

$$P(X \ge 11) = (1-p)^{10} = 0{,}7^{10} \approx 0{,}0282\,.$$

6.13. Feladat.
Egy kedves ismeretlen a következő játékra akar minket rávenni: fizetünk neki 1500 Ft-ot, majd egy szabályos dobókockával az első hatosig dobunk. Nyereményünk a dobások száma $\times$ 200 Ft.

a) Kinek kedvező a játék?

b) Mi a valószínűsége, hogy számunkra nyereséges lesz a játék?

Megoldás:

a) Az első hatosig szükséges dobások száma legyen X. Ez geometriai eloszlású valószínűségi változó, a paraméter értéke $p = \frac{1}{6}$ (mivel szabályos a dobókocka). A szükséges dobások számának várható értéke $E(X) = \frac{1}{p} = 6$, azaz átlagosan hatodik kísérletre jön ki az első hatos, így játszmánként átlagosan $6 \times 200 =$ $= 1\,200$ Ft-ot nyerünk, viszont számunkra egy játszma 1500 Ft-ba kerül, így a játék a kedves ismeretlennek kedvező.

b) Számunkra akkor nyereséges a játék, ha 1500 Ft-nál többet nyerünk. Ez akkor fordul elő, ha az első hét játszmában nem dobunk hatost, azaz $X \ge 8$. Ennek valószínűsége:

$$P(X \ge 8) = (1-p)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0{,}2791\,.$$

6.14. Feladat.
Egy izzó minden egyes bekapcsoláskor az addigi működésétől függetlenül 0,005 valószínűséggel kiég. Legyen az X valószínűségi változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma (azzal együtt, amikor kiég). Számoljuk ki X várható értékét és szórását! Mennyi a valószínűsége, hogy a várható értékénél tovább tudjuk használni az izzót?

Megoldás:
Addig kapcsolgatjuk az izzót, amíg az ki nem ég, továbbá a kiégés valószínűsége függetlenül az előzményektől, mindig 0,005. Ezért X geometriai eloszlású valószínűségi változó a $p = 0{,}005$ paraméterrel. A várható értéke és a szórása:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}005} = 200 \qquad D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}005}{0{,}005^2}} \approx 199{,}4994\,.$$

Akkor tudjuk a várható értékénél tovább használni az izzót, ha a tönkremenésig történő bekapcsolások száma több, mint a várható érték, azaz $X > 200$. Ennek valószínűsége:

$$P(X > 200) = (1-p)^{200} = 0{,}995^{200} \approx 0{,}3670\,.$$

6.15. Feladat.
Egy bizonyos esemény minden egyes napon „szinte biztosan” bekövetkezik. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az év minden napján bekövetkezik, ha a „szinte biztosan” 99%-ot, 99,9%-ot illetve 99,99%-ot jelent!

Megoldás:
Minden esetben a p^{365} valószínűséget kel meghatároznunk, ahol p rendre 0,99, 0,999 és 0,9999. A kapott értékek:

$$0{,}99^{365} \approx 0{,}0255 \qquad 0{,}999^{365} \approx 0{,}6941 \qquad 0{,}9999^{365} \approx 0{,}9642\,.$$

Az eredményekből látszik, hogy nagyon kell vigyázni a „majdnem mindig”, „szinte biztosan” megfogalmazásokkal, mert az eredeti értékekben egy kis különbség is nagy eltéréseket eredményez hosszú távon.

6.5. Negatív binomiális eloszlás

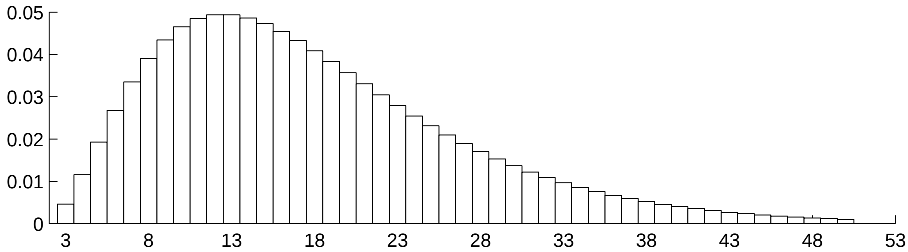
Ha nem csak az első sikeres kísérletig, hanem például a harmadikig kell próbálkoznunk, akkor a szükséges kísérletek száma negatív binomiális eloszlással adható meg.

6.16. Definíció.
Tegyük fel, hogy addig hajtunk végre kísérleteket a p valószínűségű A esemény megfigyelésére, amíg az n-szer be nem következik. A szükséges kísérletek száma legyen X, így a lehetséges értékek $n, n+1, \ldots$ (felső korlát itt sincs). Ekkor X negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó az n és p paraméterekkel, eloszlása:

$$P(X = n+k) = \binom{n+k-1}{n-1}(1-p)^k \cdot p^n \qquad k = 0,1,2,\ldots\,.$$

Az n és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó tekinthető n darab független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó összegének is: az első sikeres kísérletig tart az első, itt újra kezdjük a számolást, a második sikeres kísérletig tart a második, stb. Így a várható értéke és szórása:

$$E(X) = n \cdot \frac{1}{p} \qquad D(X) = \sqrt{n \cdot \frac{1-p}{p^2}}\,.$$



6.10. ábra. Negatív binomiális eloszlás $n = 3$ és $p = \frac{1}{6}$ esetén.

6.17. Feladat.
Egy szabályos dobókockával addig dobunk ismételten, míg összesen három darab hatost nem dobunk.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan tízszer kell dobni?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább hétszer kell dobni?

c) Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

Megoldás:

a) A szükséges dobások száma legyen X. Ez negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó, hiszen addig hajtunk végre kísérleteket (dobunk a kockával), amíg be nem következik r-edszer (harmadszor) a várt esemény. Az eloszlás paraméterei $p = \frac{1}{6}$ és $r = 3$. Ezzel a keresett valószínűség:

$$P(X = 10) = \binom{9}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^7 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0{,}0465\,.$$

b) Ha legalább hétszer kell dobni a három hatoshoz, akkor az első hat dobásban maximum két hatos lehetett. Így a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= P(\text{az első hat dobásban maximum két hatos}) = \\ &= P(0 \text{ hatos}) + P(1 \text{ hatos}) + P(2 \text{ hatos}) = \\ &= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}9377\,. \end{aligned}$$

c) $p = \frac{1}{6}$ és $r = 3$ paraméterű negatív binomiális eloszlásról van szó, így a várható érték:

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{3}{\frac{1}{6}} = 18\,.$$

6.6. Poisson-eloszlás

Előfordul, hogy sok, független, kis valószínűségű eseménnyel kapcsolatban nem az érdekel bennünket, hogy pontosan mely események következnek be, hanem csupán az, hogy közülük hány következik be. Ez a valószínűségi változó Poisson-eloszlásúnak tekinthető, még akkor is, ha az egyes események valószínűségei különbözőek. Események (pontok) térbeli vagy időbeli eloszlása is modellezhető Poisson-eloszlással, ha az egyes események egymástól függetlenek, továbbá minden térrészben (időintervallumban) a bekövetkezés valószínűsége arányos e részhalmaz méretével. Gyakran modellezhetőek Poisson-eloszlással például az alábbiak:

– adott időintervallumon belül a bekövetkezések száma (pl. egy óra alatt beérkező telefonhívások száma, tíz percen belül érkező járművek száma, öt perc alatt látott hullócsillagok száma, stb.),

– adott térrészben történő bekövetkezések száma (pl. sajtóhibák száma egy oldalon, hullócsillagok száma az égbolt egy adott részén)

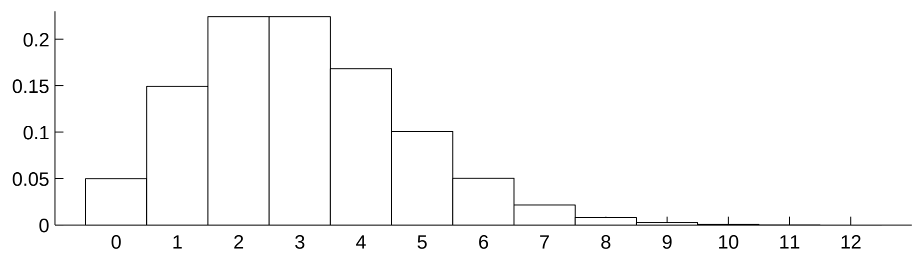
– adott számú berendezés esetén adott idő alatt a meghibásodások száma.

6.18. Definíció.
Az X valószínűségi változó Poisson-eloszlású a $\lambda > 0$ paraméterrel, ha lehetséges értékei a nemnegatív egész számok (0,1,...), az eloszlása pedig

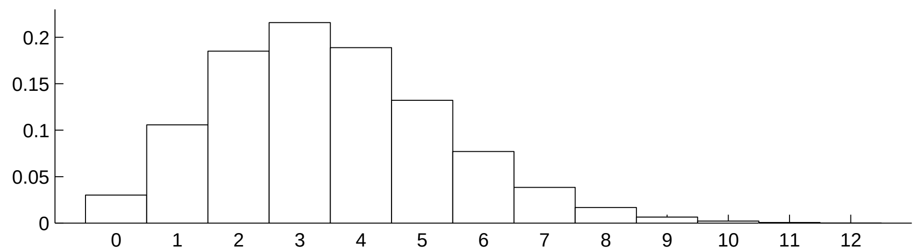
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad k = 0,1,2,\dots .$$

A valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$E(X) = \lambda \qquad D(X) = \sqrt{\lambda}\,.$$



6.11. ábra. Poisson-eloszlás $\lambda = 3$ esetén.



6.12. ábra. Poisson-eloszlás $\lambda = 3{,}5$ esetén.

6.19. Feladat.
Egy buszmegállóban az öt perc alatt érkező buszok száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó (X), melynek várható értéke kettő.

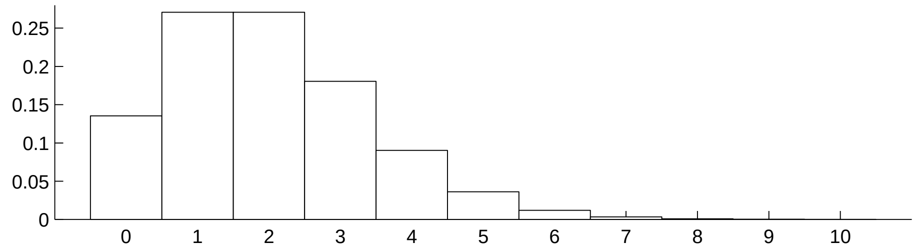
a) Mi a valószínűsége annak, hogy öt perc alatt pontosan három busz jön?

b) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy öt perc alatt kettőnél kevesebb, pontosan kettő, illetve kettőnél több busz jön!

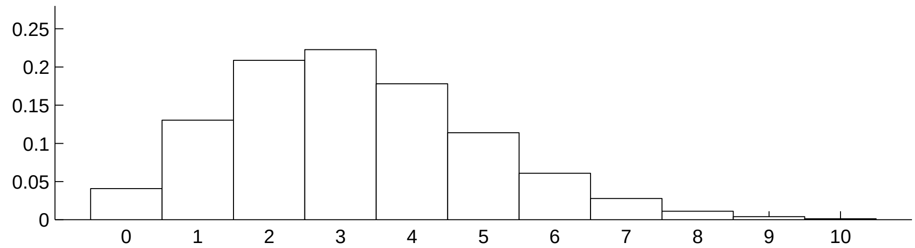
c) Mi a valószínűsége, hogy nyolc perc alatt pontosan három busz jön?

d) Mi a valószínűsége, hogy negyedóra alatt nem jön busz?

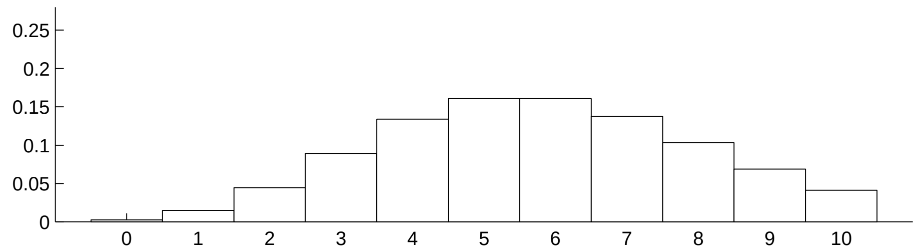
e) Mekkora az az időtartam, amely alatt 0,9, illetve 0,99 a valószínűsége annak, hogy jön busz?



(a) Az öt perchez tartozó Poisson-eloszlás ($\lambda = 2$).



(b) A nyolc perchez tartozó Poisson-eloszlás ($\lambda = 3{,}2$).



(c) A negyed órához tartozó Poisson-eloszlás ($\lambda = 6$).

6.13. ábra. A különböző időtartamokhoz tartozó Poisson-eloszlások.

Megoldás:

a) Poisson-eloszlásról van szó, tehát $E(X) = \lambda$, másrészt a feladat szerint $E(X) = 2$, így $\lambda = 2$. Így a kérdéses valószínűség:

$$P(X = 3) = \frac{2^3}{3!}\, e^{-2} \approx 0{,}1804\,.$$

b) A kérdés most is öt percre vonatkozik, tehát dolgozhatunk az eredeti valószínűségi változóval, így λ értéke is változatlan. A keresett valószínűségek:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{2^0}{0!}\, e^{-2} + \frac{2^1}{1!}\, e^{-2} = 3\, e^{-2} \approx 0{,}4060$$
$$P(X = 2) = \frac{2^2}{2!}\, e^{-2} \approx 0{,}2707$$
$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - [P(X = 2) + P(X < 2)] \approx 0{,}3233\,.$$

c) A kérdés itt már a feladatban megadottól eltérő hosszúságú időtartamra vonatkozik. Viszont az igaz, hogy az ezen idő alatt érkező buszok száma is Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Legyen ez a valószínűségi változó Y_1. Először határozzuk meg az eloszlás paraméterét, ami megegyezik a várható értékkel, hiszen

Poisson-eloszlásról van szó. Az öt perc alatt érkező buszok számának várható értéke kettő, azaz öt perc alatt átlagosan két busz érkezik. Ebből következik, hogy pl. 10 perc alatt átlagosan négy busz érkezik, a kérdésben szereplő nyolc perc alatt pedig átlagosan $\frac{8}{5} \cdot 2 = 3{,}2$ (átlagosan érkezik ennyi, tehát itt van értelme a nem egész értéknek is). Azt kaptuk tehát, hogy $E(Y_1) = 3{,}2$ és ennyi a paraméter értéke is. Így a valószínűség:

$$P(Y_1 = 3) = \frac{3{,}2^3}{3!} e^{-3{,}2} \approx 0{,}2226\,.$$

d) Ismét más az időtartam, de most is igaz, hogy az ezen idő alatt érkező buszok száma is Poisson-eloszlású valószínűségi változó, amit most jelöljön Y_2. A fentihez hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy $E(Y_2) = 6$, így ennyi az eloszlás paramétere is. Ezzel a keresett valószínűség:

$$P(Y_2 = 0) = \frac{6^0}{0!} e^{-6} = e^{-6} \approx 0{,}0025\,.$$

e) Mint sok más esetben, itt is érdemes a komplementer esemény valószínűségével számolni:

$$P(\text{jön busz}) = 1 - P(\text{nem jön busz})\,.$$

Mivel a keresett időtartamban érkező buszok száma is Poisson-eloszlású valamely λ' paraméterrel, ezért annak valószínűsége, hogy nem jön busz:

$$P(\text{nem jön busz}) = \frac{\lambda'^0}{0!} e^{-\lambda'} = e^{-\lambda'}\,.$$

Az első esetben 0,1, a másodikban 0,01 ez a valószínűség. Ennek ismeretében mindkét esetben meghatározható λ', abból pedig az időintervallum hossza (hiszen tudjuk, hogy öt percre $\lambda = 2$). Az első esetben:

$$e^{-\lambda'} = 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda' \approx 2{,}3026\,.$$

Mivel öt percre $\lambda = 2$, ezért itt az időtartam $\frac{2{,}3026}{2} \cdot 5 \approx 5{,}76$ perc.
A második esetben:

$$e^{-\lambda'} = 0{,}01 \quad \Longrightarrow \quad \lambda' \approx 4{,}6052\,.$$

Itt az időtartam $\frac{4{,}6052}{2} \cdot 5 \approx 11{,}51$ perc.

6.20. Feladat.

Egy kéziratban 200 oldalon 300 sajtóhiba található.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy oldalon nincs hiba?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy oldalon van hiba?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy oldalon pontosan két hiba van?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy oldalon legalább három hiba van?

Megoldás:

a) A megadott értékek szerint egy oldalon átlagosan $300/200 = 1{,}5$ sajtóhiba van. Egy oldalon nagyon sok karakter (és így hibalehetőség) van, de mindegyik csak kis valószínűséggel „romlik el", továbbá feltehetjük azt is, hogy a hibák bekövetkezése egymástól független. Ezek alapján az egy oldalon levő hibák számát modellezhetjük olyan Poisson-eloszlású valószínűségi változóval, melynek várható értéke (és így az eloszlás paramétere) 1,5. Jelölje ezt a valószínűségi változót X. Ezzel a kérdéses valószínűség:

$$P(X = 0) = \frac{1{,}5^0}{0!} e^{-1{,}5} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231\,.$$

b) Mivel $P(\text{van hiba}) = 1 - P(\text{nincs hiba})$, ezért

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1{,}5} \approx 0{,}7769\,.$$

c)

$$P(X = 0) = \frac{1{,}5^2}{2!} e^{-1{,}5} \approx 0{,}2510\,.$$

d)

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \\ &= 1 - \left[\frac{1{,}5^0}{0!}\, e^{-1{,}5} + \frac{1{,}5^1}{1!}\, e^{-1{,}5} + \frac{1{,}5^2}{2!}\, e^{-1{,}5}\right] = 1 - 3{,}625 \cdot e^{-1{,}5} \approx 0{,}1912\,. \end{aligned}$$

6.21. Feladat.
Augusztus közepe táján, az éjféli órákban 10 percenként átlagosan egy hullócsillagot lehet látni a Galyatetőről. Mi a valószínűsége annak, hogy 5 perc alatt két hullócsillagot is látunk?

Megoldás:
Az időintervallum alatt látott hullócsillagok száma Poisson-eloszlással modellezhető (kis valószínűségű események, egymástól függetlenül következnek be). Mivel 10 percenként átlagosan egy hullócsillagot lehet látni, ezért 5 percenként átlagosan felet (ennek az „átlagosan" kifejezés miatt van értelme). Tekintsük tehát az öt perc alatt látott hullócsillagok számát. Ezek szerint ez modellezhető egy Poisson-eloszlású valószínűségi változóval, melynek várható értéke 0,5, és így ennyi a paraméter értéke is. Legyen ez a valószínűségi változó X. Ezzel a keresett valószínűség:

$$P(X = 2) = \frac{0{,}5^2}{2!}\, e^{-0{,}5} \approx 0{,}0758\,.$$

6.22. Feladat.
A tapasztalat azt mutatja, hogy óránként négyszer csörög a telefon az irodában.

a) Mi a valószínűsége, hogy fél óra alatt pontosan két hívás érkezik?

b) Mi a valószínűsége, hogy negyed óra alatt pontosan egy hívás érkezik?

Megoldás:

a) Az egy óra alatt bejövő hívások száma modellezhető olyan Poisson-eloszlású valószínűségi változóval, melynek várható értéke négy, így a fél óra alatt bejövő hívások száma olyan Poisson-eloszlású valószínűségi változóval jellemezhető, melynek várható értéke kettő, így ennyi a paraméter értéke is. Legyen ez a valószínűségi változó X_1. Ezzel a keresett valószínűség:

$$P(X_1 = 2) = \frac{2^2}{2!}\, e^{-2} = 2 \cdot e^{-2} \approx 0{,}2707\,.$$

b) Hasonlóan az előzőhöz, itt is Poisson-eloszlású valószínűségi változóval jellemezhetjük a hívások számát, de most a várható érték egy. Legyen a valószínűségi változó X_2. Ezzel a kérdéses valószínűség:

$$P(X_2 = 1) = \frac{1^1}{1!}\, e^{-1} = e^{-1} \approx 0{,}3679\,.$$

6.23. Feladat.
Egy benzinkútnál a tíz perc alatt érkező vevők száma Poisson-eloszlást követ. Tudjuk, hogy tíz percenként átlagosan öt vevő érkezik.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy tíz perc alatt pontosan négy vevő jön?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy öt perc alatt jön vevő?

Megoldás:

a) Legyen a tíz perc alatt érkező vevők száma X_1. Ekkor X_1 Poisson-eloszlású, várható értéke $E(X_1) = 5 = \lambda_1$. Ezzel a kérdéses valószínűség:

$$P(\xi_1 = 4) = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} = 0{,}1755\,.$$

b) Legyen az öt perc alatt érkező vevők száma X_2. Ekkor X_2 is Poisson-eloszlású, várható értéke pedig $E(X_2) = 2{,}5 = \lambda_2$. A „jön vevő" nem azt jelenti, hogy egy vevő jön, hanem azt, hogy nullánál több. Így

$$P(\text{jön vevő}) = P(\xi_2 > 0) = 1 - P(\xi_2 = 0) = 1 - e^{-2{,}5} = 0{,}9179\,.$$

6.24. Feladat.
X_1 és X_2 legyenek független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, λ_1 és λ_2 paraméterekkel. Határozzuk meg az $Y = X_1 + X_2$ valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását!

Megoldás:
X_1 és X_2 lehetséges értékei $0,1,2,\ldots$, így Y lehetséges értékei is $0,1,2,\ldots$. Az Y valószínűségi változó eloszlását akarjuk meghatározni, vagyis minden egyes k-ra ($k = 0,1,\ldots$) keressük annak valószínűségét, hogy $Y = k$. $Y = k$ akkor fordul elő, ha $X_1 = i$ és $X_2 = k - i$. Ennek valószínűsége pedig $P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = k - i)$, azaz $\frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2}$. Az $Y = k$ esemény valószínűségét akkor kapjuk meg, ha ezeket összegezzük minden lehetséges i-re:

$$P(Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= e^{-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{k!} \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i! \cdot (k-i)!} \frac{1}{k!} \cdot \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}_{=(\lambda_1+\lambda_2)^k} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{1}{k!} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^k = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

A kapott eredmény szerint Y Poisson-eloszlású, paramétere pedig $\lambda_1 + \lambda_2$. Így a várható értéke és a szórása:

$$E(Y) = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad D(Y) = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}\,.$$

7. fejezet

Nevezetes folytonos eloszlások

7.1. Egyenletes eloszlás

Tegyük fel, hogy egy valószínűségváltozó az (a, b) intervallumból veheti fel az értékeit, és ha ezen belül veszünk egy (c, d) részintervallumot, akkor ennek hosszával arányos annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke bele esik-e, attól viszont nem függ, hogy az eredeti (a, b)-n belül hol helyezkedik el ez a részintervallum. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon. Itt tulajdonképpen geometriai valószínűségi mezőről van szó, hiszen a valószínűség a geometriai mérettel (hosszúsággal) arányos.

7.1. Definíció.
Az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $(a; b)$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

A sűrűségfüggvény alapján meghatározható az eloszlásfüggvénye

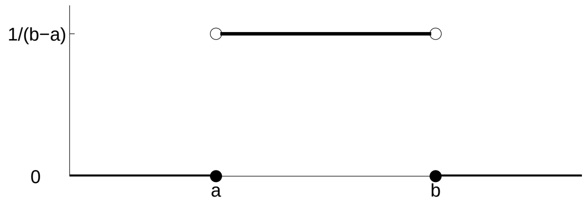
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1 & \text{ha } x > b \end{cases} .$$

A várható értéke:

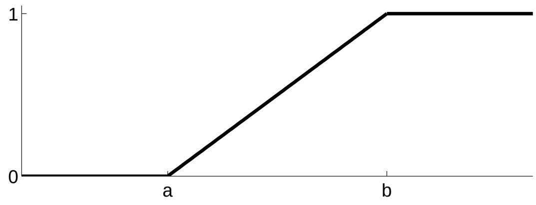
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2} .$$

A szórás meghatározásához először ki kell számítanunk X^2 várható értékét:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} .$$



(a) Sűrűségfüggvény.



(b) Eloszlásfüggvény.

7.1. ábra. Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye.

Így a szórásnégyzet:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$
$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Tehát a valószínűségi változó szórása:

$$D(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

7.2. Feladat.

Egy 800 m hosszú vezeték bármely pontjában meghibásodhat, a hiba helye egyenletes eloszlású folytonos valószínűségi változó.

a) Adjuk meg a hiba helyét leíró valószínűségi változót, a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a vezeték első negyedében történik a meghibásodás?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a vezeték pontosan a felénél hibásodik meg?

Megoldás:

a) Legyen a hiba helyét megadó valószínűségi változó X. A hiba helyét célszerű a vezeték valamelyik végétől mérni, így (méterben) X lehetséges értékei a $(0; 800)$ intervallumból kerülhetnek ki. Ezek szerint X egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0; 800)$ intervallumon. Így az eloszlásfüggvénye és a sűrűségfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{x}{800} & \text{ha } 0 < x \le 800 \\ 1 & \text{ha } x > 800 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{800} & \text{ha } 0 < x < 800 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

A várható értéke és a szórása:

$$E(X) = \frac{0+800}{2} = 400 \qquad D(X) = \frac{800-0}{\sqrt{12}} = \frac{400}{\sqrt{3}} \approx 230{,}9401\,.$$

b) Átfogalmazva: mi a valószínűsége annak, hogy a hiba 200 méternél közelebb van az elejéhez (azaz mi a valószínűsége, hogy $X < 200$)?

$$P(X < 200) = F(200) = \frac{200}{800} = 0{,}25\,.$$

c) A valószínűségi változóval kifejezve: $P(X = 400) = ?$ Mivel az eloszlásfüggvény folytonos, ezért ez a valószínűség nulla.

7.2. Exponenciális eloszlás

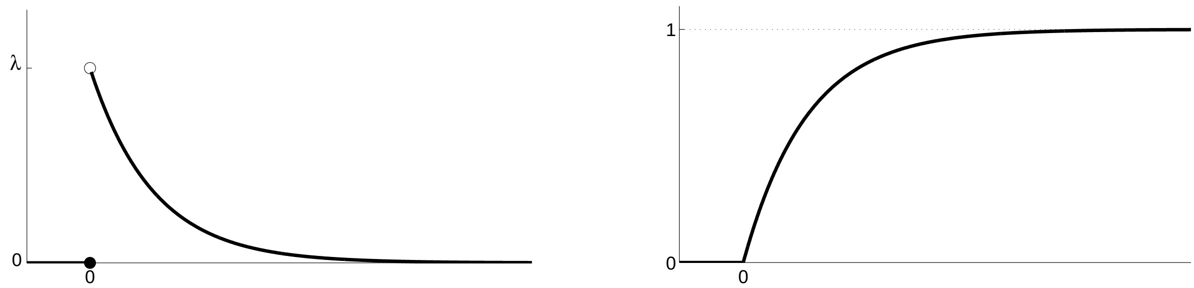
Exponenciális eloszlással általában valamilyen időtartamot modellezünk. Ez lehet egy alkatrész élettartama, két meghibásodás között eltelt idő, két telefonhívás között eltelt idő, stb. Ha egy alkatrész jövőbeni élettartamát nem befolyásolja az eddigi működése (pl. a kopása), akkor az élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változóval modellezhető. Ha egy időintervallumon belül valamilyen esemény bekövetkezéseinek száma Poisson-eloszlású, melynek paramétere (vagyis a várható értéke) arányos az időintervallum hosszával, akkor az első bekövetkezésig eltelt idő exponenciális eloszlású, sőt két bekövetkezés között eltelt idő is exponenciális eloszlású.

7.3. Definíció.
Az X valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású, ha sűrűségfügvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \textit{ha } x > 0 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases} .$$

A sűrűségfüggvény alapján meghatározható az eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} .$$



(a) Sűrűségfüggvény.
(b) Eloszlásfüggvény.

7.2. ábra. Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye.

A valószínűségi változó várható értékét parciális integrálással határozhatjuk meg az $u = x \cdot \lambda$ és $v' = e^{-\lambda \cdot x}$ választással:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = \left[x \cdot \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot x}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot x}}{-\lambda}\,\mathrm{d}x =$$

az első kifejezés határértéke ∞-ben 0 (beláthatjuk a L'Hospital-szabállyal), 0-ban a helyettesítési értéke szintén 0, így

$$= 0 - \int_0^{\infty} \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot x}}{-\lambda}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-\lambda \cdot x}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{-1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} .$$

A szórás kiszámításához X^2 várható értékét is meg kell határozni. Ez az előbbihez hasonlóan történik, azzal a különbséggel, hogy most kétszer kell parciálisan integrálni. Így a következőt kapjuk:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}\,.$$

Most már meg tudjuk határozni a szórásnégyzetet, majd abból a szórást:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \Longrightarrow \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Tehát exponenciális eloszlás esetén a várható érték és szórás egyenlő, mindkettő a λ paraméter reciproka.

Az exponenciális eloszlás egyik furcsa tulajdonsága az úgynevezett *örökifjú tulajdonság*. Ha egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású, akkor az alkatrész bizonyos értelemben véve nem öregszik. Ez annyit jelent,hogy ha már működött t ideig, akkor annak valószínűsége, hogy még legalább s ideig fog működni (vagyis összesen legalább $t+s$ ideig fog működni), nem függ a megelőző t időtartamtól, ugyanakkora, mint annak valószínűsége, hogy a kezdettől számítva legalább s ideig működni fog. Tehát az eltelt t időtartam alatt a berendezés nem használódott el, nem öregedett, ezért nevezzük ezt a örökifjú tulajdonságnak.

7.4. Tétel.
Az exponencális eloszlás örökifjú tulajdonságú, azaz ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$P(X \geq t+s | X \geq t) = P(X \geq s)\,.$$

Bizonyítás: Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a tételben szereplő feltételes valószínűség:

$$P(X \geq t+s|X \geq t) = \frac{P(X \geq t+s)}{P(X \geq t)} = \frac{1-F(s+t)}{1-F(t)} = \frac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} =$$
$$= e^{-\lambda s} = 1-(1-e^{-\lambda s}) = 1-F(s) = P(X \geq s)\,.$$

□

7.5. Feladat.
Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó, 5000 óra várható értékkel.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy az alkatrész kevesebb, mint 100 óra múlva meghibásodik?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy legalább 3000, de legfeljebb 7000 órát képes működni?

c) Feltéve, hogy 4000 óráig működött, mi a valószínűsége, hogy még legalább 6000 óráig működni fog?

Megoldás:

a) Legyen az alkatrész élettartamát jelentő valószínűségi változó X. A feladat szerint $E(X) = 5000$ (órában), továbbá exponenciális eloszlásról van szó, ezért $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, vagyis $\lambda = \frac{1}{5000} = 0{,}0002$. Ezzel X eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}0002 \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Az eloszlásfüggvénnyel már kiszámíthatóak az X-szel kapcsolatos valószínűségek. Ha az alkatrész kevesebb, mint 100 óra múlva meghibásodik, akkor az élettartama kevesebb, mint 100 óra, vagyis $X < 100$. Ennek valószínűsége:

$$P(X < 100) = F(100) = 1 - e^{-0{,}0002 \cdot 100} = 1 - e^{-0{,}02} \approx 0{,}0198 .$$

b) Ezek szerint az élettartama legalább 3000, de legfeljebb 7000 óra, azaz $3000 \leq X \leq 7000$. Ennek valószínűsége:

$$\begin{aligned} P(3000 \leq X \leq 7000) &= F(7000) - F(3000) = \\ &= 1 - e^{-0{,}0002 \cdot 7000} - (1 - e^{-0{,}0002 \cdot 3000}) = \\ &= 1 - e^{-1{,}4} - (1 - e^{-0{,}6}) = e^{-0{,}6} - e^{-1{,}4} \approx 0{,}3022 . \end{aligned}$$

c) Ha már 4000 óráig működött, akkor az élettartama legalább 4000 óra, azaz $X \geq 4000$. Ha még legalább 6000 óráig működni fog, akkor összességében az élettartama legalább 10 000 óra, azaz $X \geq 10\,000$. A feltételes valószínűségmeghatározásához szükségünk van az együttes bekövetkezés valószínűségére, annak valószínűségére, hogy $X \geq 4000$ és $X \geq 10\,000$ egyszerre teljesül. Ezek természetesen akkor következnek be egyszerre, ha $X \geq 10\,000$. Így a feltételes valószínűség:

$$\begin{aligned} P(X \geq 10\,000 | X \geq 4000) &= \frac{P(X \geq 10\,000)}{P(X \geq 4000)} = \frac{1 - F(10\,000)}{1 - F(4000)} = \\ &= \frac{1 - (1 - e^{-0{,}0002 \cdot 10\,000})}{1 - (1 - e^{-0{,}0002 \cdot 4000})} = \frac{e^{-2}}{e^{-0{,}8}} = e^{-1{,}2} \approx \\ &\approx 0{,}3012 . \end{aligned}$$

Ezt az eredményt másképp is megkaphattuk volna, ugyanis az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal:

$$P(X \geq t + s | X \geq t) = P(X \geq s) .$$

Ez alapján:

$$\begin{aligned} P(X \geq 10\,000 | X \geq 4000) &= P(X \geq 6000) = 1 - F(6000) = \\ &= 1 - \left(1 - e^{-0{,}0002 \cdot 6000}\right) = e^{-1{,}2} \approx 0{,}3012 . \end{aligned}$$

7.6. Feladat.

Egy bizonyos fajtájú izzó élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A tapasztalat szerint átlagosan csak minden harmadik éli túl a féléves időtartamot. Mennyi lehet az izzók átlagos élettartama?

Megoldás:

Legyen X az izzó élettartamát jelentő valószínűségi változó. Mivel a tapasztalat szerint átlagosan csak minden izzó harmadik éli túl a féléves időtartamot, ezért $\frac{1}{3}$ annak a valószínűsége, hogy egy izzó élettartama több, mint fél év. Ebből az exponenciális eloszlás paramétere meghatározható, abból pedig az élettartam várható értéke, ami megfelel az átlagos élettartamnak.

$$\begin{aligned} P(X > 0{,}5) &= \frac{1}{3} \\ 1 - \left(1 - e^{-\lambda \cdot 0{,}5}\right) &= \frac{1}{3} \\ e^{-\lambda \cdot 0{,}5} &= \frac{1}{3} \\ -\lambda \cdot 0{,}5 &= \ln \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -2 \cdot \ln \frac{1}{3} \approx 2{,}1972 . \end{aligned}$$

Mivel exponenciális eloszlásról van szó, ezért $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2{,}1972} \approx 0{,}4551$. Tehát az átlagos élettartam 0,4551 év (kb. 3987 óra).

7.7. Feladat.

Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A tapasztalat szerint az ilyen típusú alkatrésze 80%-a bír ki 4000 óránál többet.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy alkatrész legalább 6000 órát képes működni?

b) Feltéve, hogy egy alkatrész már 3000 órája működik, mi a valószínűsége, hogy még legalább 5000 órát képes működni?

Megoldás:

a) A feladat először a λ paraméter meghatározása. Legyen X egy alkatész élettartama. A feladatban szereplő információ valószínűségre átfogalmazva: $P(X > 4000) = 0{,}8$. Ebből kell λ-t meghatározni:

$$\begin{aligned} P(X > 4000) &= 0{,}8 \\ 1 - F(4000) &= 0{,}8 \\ 1 - (1 - e^{-\lambda\cdot 4000}) &= 0{,}8 \\ \lambda &= -\frac{\ln 0{,}8}{4000} \approx 0{,}00005578 \end{aligned}$$

Ezzel:

$$P(X \geq 6000) = 1 - F(6000) = 1 - (1 - e^{-\lambda\cdot 6000}) \approx 0{,}7155\,.$$

b) Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt nem számít az, hogy mennyit működött már az alkatrész, így a kérdéses valószínűség:

$$P(X \geq 5000) = 1 - F(5000) = 1 - (1 - e^{-\lambda\cdot 5000}) \approx 0{,}7566\,.$$

7.8. Feladat.

Egy karácsonyi izzósoron 50 darab égő van sorbakötve. Az égők élettartama egyenként (egymástól függetlenül) exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A tapasztalat szerint az ilyen típusú izzók 1%-a kevesebb, mint 200 óráig bírja. Az árus azt állítja, hogy ha december 24-én este 6-kor bekapcsoljuk az izzósort, akkor szinte biztos, hogy 31-én éjfélkor még világítani fog. Vajon igazat mond?

Megoldás:

Legyen X az egy izzó élettartamát leíró valószínűségi változó. Az adatok szerint az izzók 1%-a kevesebb, mint 200 óráig bírja, azaz 0,01 annak a valószínűsége, hogy egy izzó élettartama 200 óránál kevesebb. Ebből az eloszlás paramétere meghatározható:

$$\begin{aligned} P(X < 200) &= 0{,}01 \\ 1 - e^{-\lambda\cdot 200} &= 0{,}01 \\ e^{-\lambda\cdot 200} &= 0{,}99 \\ -\lambda\cdot 200 &= \ln 0{,}99 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 0{,}99}{200} \approx 0{,}00005\,. \end{aligned}$$

Az égők sorba vannak kapcsolva, tehát ha egy kiég, akkor az izzósor már nem világít. December 24-edike este 6-tól 31-edike éjfélig $6 + 7\cdot 24 = 174$ óra telik el. Akkor fog tehát világítani az izzósor, ha minden égő élettartama több, mint 174 óra. Egy izzó esetén annak valószínűsége, hogy az élettartama több, mint 174 óra:

$$P(X > 174) = 1 - (1 - e^{-0{,}00005\cdot 174}) = e^{-0{,}00005\cdot 174} \approx 0{,}9913\,.$$

Mivel az égők élettartama egymástól független, ezért ennek valószínűsége, hogy mind az ötven élettartama több, mint 174 óra:

$$[P(X > 174)]^{50} \approx [0{,}9913]^{50} \approx 0{,}6460\,.$$

A kapott 0,6460 valószínűség semmiképp sem nevezhető „szinte biztosnak”, így az árus sajnos nem mondott igazat.

Egy kicsit pontosabb eredményt kaphatunk úgy, hogy λ-t ki sem számoljuk:

$$\begin{aligned} P(X > 174) &= e^{-\lambda\cdot 174} = \left[e^{-\lambda\cdot 200}\right]^{\frac{174}{200}} = [0{,}99]^{\frac{174}{200}} \\ [P(X > 174)]^{50} &= \left[[0{,}99]^{\frac{174}{200}}\right]^{50} = [0{,}99]^{\frac{174}{4}} = [0{,}99]^{43{,}5} \approx 0{,}6458\,. \end{aligned}$$

A kapott eredmény alig különbözik az előzőtől, így a válasz most is az, hogy az árus sajnos nem mondott igazat.

7.3. Normális eloszlás

A normális eloszlás (vagy Gauss-eloszlás) a legfontosabb valószínűség eloszlás. Számos, a valóságban tapasztalt véletlenszerű jelenség modellezhető normális eloszlással. Általában, ha egy jelenséget nagy számú, egymástól független vagy csak kevéssé függő, véletlenszerű tényező határoz meg, továbbá az egyes tényezők egyenként csak kis mértékben járulnak hozzá a véletlentől függő ingadozásokhoz, és a tényezők hatásai összegződnek, akkor a jelenség eloszlása jól közelíthető normális eloszlással. A normális eloszlás kiemelkedő szerepet játszik az összes olyan tudományban, amely statisztikai vizsgálatokra is támaszkodik.

7.9. Definíció.
Az X folytonos eloszlású valószínűségi változót m, σ ($\sigma > 0$) paraméterű normális eloszlásúnak nevezünk, ha a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

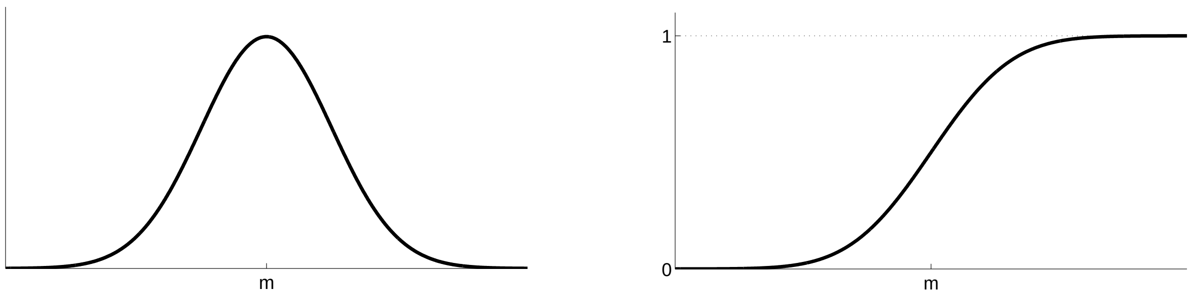
Eloszlásfüggvénye pedig

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t .$$

Várható értéke és szórása:

$$E(X) = m \qquad D(X) = \sigma .$$

A normális eloszlás sűrűségfüggvénye az úgynevezett Gauss-görbe (vagy más néven haranggörbe). Ez a függvény szimmetrikus a várható értéknél (m-nél) húzott függőlegesre. A maximumának helye a várható értéktől (m), a görbe alakja (csúcsosabb vagy laposabb) pedig a szórástól (σ) függ. Ehhez hasonló alakú grafikonokkal gyakran lehet találkozni különféle statisztikákban (pl. IQ eloszlása, egy népcsoport magasságáról készült hisztogramm, egy tömegtermelésben készülő termék mérethibája, stb.), ami jól igazolja a gyakorlati jelentőségét.

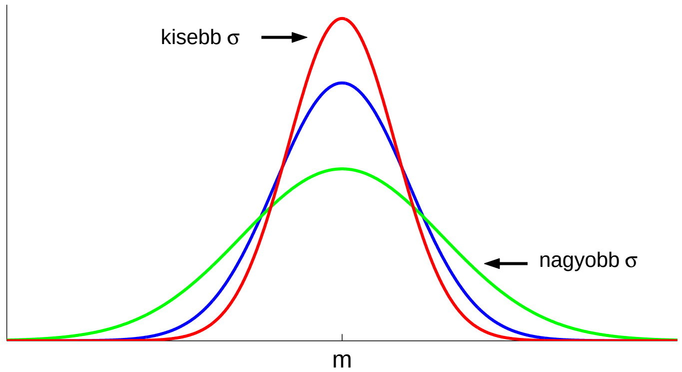


(a) Sűrűségfüggvény.

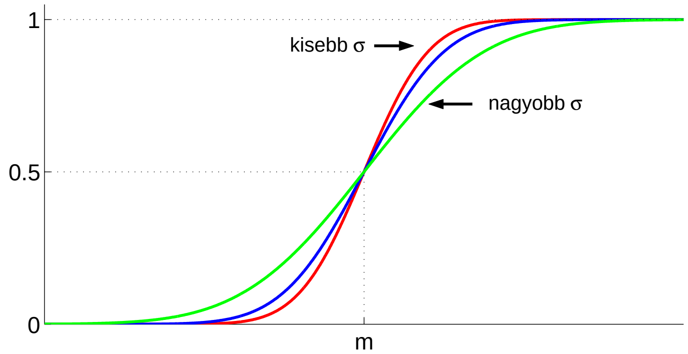
(b) Eloszlásfüggvény.

7.3. ábra. A normális eloszlás sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye.

A normális eloszlás eloszlásfüggvénye nem elemi függvény, azaz a szokásos zárt alakban nem írható fel. Értékeinek meghatározása numerikusan vagy már kész táblázat segítségével történik.



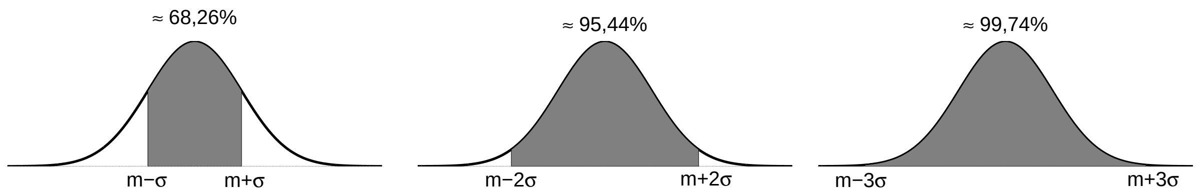
7.4. ábra. A normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus a várható értékre (m-re). A függvény alakját a σ paraméter határozza meg. Ha σ nagyobb, akkor a függvény inkább szétterül, ha kisebb, akkor jobban csúcsosodik az m paraméter körül. A függvénynek az $x = m$ helyen maximuma van, itt az értéke minden esetben $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.



7.5. ábra. A normális eloszlás eloszlásfüggvénye középpontosan szimmetrikus a várhatóértékre (m-re). A függvény alakját itt is a σ paraméter határozza meg. Ha σ nagyobb, akkor a függvény jobban elnyúlk, ha kisebb, akkor meredekebben változik 0 és 1 között. A függvénynek az $x = m$ helyen inflexiós pontja van, itt az értéke mindig 0,5.

A függvény sehol sem éri el a nullát és az egyet, de természetesen teljesül rá, hogy $-\infty$-ben a határértéke 0, és ∞-ben a határértéke 1.

Érdemes megjegyezni, hogy tetszőleges normális eloszlású valószínűségi változó esetén menynyi a valószínűsége annak, hogy a valószínűségi változó értéke a várható érték körüli egy, kettő vagy három szórás sugarú intervallumba esik:



(a) Egy szórás. (b) Két szórás. (c) Három szórás.

7.6. ábra. A várható érték körüli, egy, kettő és három szórás sugarú intervallumba esés valószínűsége normális eloszlásnál.

7.3.1. Standard normális eloszlás

A normális eloszlások között kitüntetett szerep jut annak, amelynek várható értéke 0, szórása pedig 1, azaz $m = 0$ és $\sigma = 1$. Tetszőleges normális eloszlással kapcsolatos valószínűség meghatározását vissza lehet vezetni egy ilyen típusú normális eloszlással kapcsolatos kérdésre. Ezt standard normális eloszlásnak hívják, és fontossága miatt külön jelölése is van.

A sűrűségfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Az eloszlásfüggvénye:

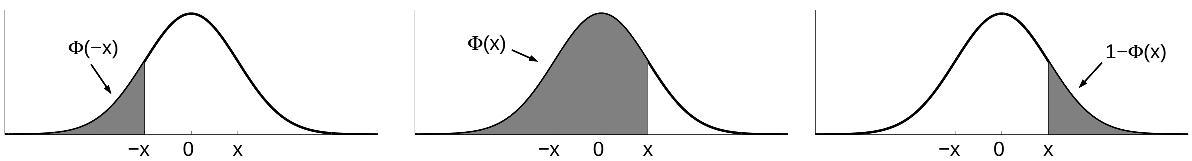
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének ($\Phi(x)$) értékeit táblázatokban szokás közölni. Az ilyen táblázatok csak pozitív x-ekre tartalmazzák $\Phi(x)$ értékeit. Ennek oka a következő:

7.10. Tétel.
Legyen $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ekkor:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

BIZONYÍTÁS: Mivel $\Phi(x)$ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ezért az értéke a sűrűségfüggvény integrálásával adódik. Így $\Phi(-x)$ értéke szemléletesen a sűrűségfüggvény alatti terület a $(-\infty, -x)$ intervallumon, $\Phi(x)$ értéke pedig sűrűségfüggvény alatti terület a $(-\infty, x)$ intervallumon. Mivel a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmmetrikus a függőleges tengelyre, ezért a függvény alatti, $-x$-tól balra és x-től jobbra eső területek nagysága megegyezik. Mivel a teljes görbe alatti terület egy (hiszen sűrűségfüggvény), ezért az utóbbi terület nagysága éppen $1 - \Phi(x)$, ami igazolja a tétel állítását. □



7.7. ábra. A standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének szimmetriája miatt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

7.11. Tétel. (Standardizálás)
Legyen X normális eloszlású valószínűségi változó, a várható értéke m, a szórása σ. Ekkor az

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma}$$

valószínűségi változó standard normális eloszlású.

BIZONYÍTÁS: Azt fogjuk belátni, hogy X^* eloszlásfüggvényének deriváltja (azaz a sűrűségfüggvénye) a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye, így X^* nyilvánvalóan standard normális eloszlású. Legyen X^* eloszlásfügvénye $F^*(x)$. Az eloszlásfüggvény definíciója miatt ez a következő valószínűséggel egyenlő:

$$F^*(x) = P(X^* < x)\,.$$

Használjuk fel azt, hogy $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$, és alakítsuk át a fenti formulát:

$$F^*(x) = P(X^* < x) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < x\right) = P(X < x\cdot\sigma + m) = F(x\cdot\sigma + m)\,.$$

Azt kaptuk, hogy X^* eloszlásfüggvénye nem más, mint X eloszlásfüggvénye az $x\cdot\sigma+m$ helyen. A sűrűségfüggvényt ennek deriválásával kapjuk. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján:

$$(F^*(x))' = (F(x\cdot\sigma+m))' = \sigma\cdot F'(x\cdot\sigma+m) = \sigma\cdot f(x\cdot\sigma+m),$$

ahol f az X sűrűségfüggvénye, azaz

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Elvégezve a műveleteket:

$$(F^*(x))' = \sigma\cdot f(x\cdot\sigma+m) = \sigma\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x\cdot\sigma+m-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Tehát X^* sűrűségfüggvénye a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye, vagyis X^* valóban standard normális eloszlású. □

7.12. Példa.
Legyen X olyan normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 10, szórása pedig 4. Ekkor

a)

$$P(X<12) = P\left(\frac{X-10}{4} < \frac{12-10}{4}\right) = P(X^* < 0{,}5) = \Phi(0{,}5) \approx 0{,}6915\,.$$

b)

$$\begin{aligned} P(4<X<16) &= P\left(\frac{4-10}{4} < \frac{X-10}{4} < \frac{16-10}{4}\right) = P(-1{,}5 < X^* < 1{,}5) = \\ &= \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(1{,}5) - (1-\Phi(1{,}5)) = 2\cdot\Phi(1{,}5) - 1 \approx \\ &\approx 2\cdot 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664\,. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(5<X<11) &= P\left(\frac{5-10}{4} < \frac{X-10}{4} < \frac{11-10}{4}\right) = P(-1{,}25 < X^* < 0{,}2) = \\ &= \Phi(0{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(0{,}5) - (1-\Phi(1{,}25)) = \\ &= \Phi(0{,}5) + \Phi(1{,}25) - 1 \approx 0{,}6915 + 0{,}8944 - 1 = 0{,}5859\,. \end{aligned}$$

d)

$$P(X < 7) = P\left(\frac{X-10}{4} < \frac{7-10}{4}\right) = P(X^* < -0{,}75) = \Phi(-0{,}75) =$$
$$= 1 - \Phi(0{,}75) \approx 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266\,.$$

e)

$$P(X > 2) = P\left(\frac{X-10}{4} > \frac{2-10}{4}\right) = P(X^* > -2) = 1 - \Phi(-2) =$$
$$= 1 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) \approx 0{,}9772\,.$$

7.13. Feladat.
Egy normális eloszlású valószínűségi változó 0,1 valószínűséggel vesz fel 7-nél kisebb értéket, és 0,25 valószínűséggel 15-nél nagyobbat. Mennyi a várható értéke és a szórása?

Megoldás:
Legyen a valószínűségi változó X. Ezzel felírhatjuk a rendelkezésünkre álló információkat:

$$P(X < 7) = 0{,}1$$
$$P(X > 15) = 0{,}25\,.$$

Legyen X várható értéke m, szórása pedig σ. Mindkét egyenlőséget standardizálással fogjuk átalakítani, majd kapunk így két egyenletet m-re és σ-ra:

$$P(X < 7) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{7-m}{\sigma}\right) = P\left(X^* < \frac{7-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right)$$
$$P(X > 15) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{15-m}{\sigma}\right) = P\left(X^* > \frac{15-m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{15-m}{\sigma}\right)\,.$$

Összevetve ezeket az eredeti egyenletekkel azt kapjuk, hogy

$$\Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) = 0{,}1$$
$$1 - \Phi\left(\frac{15-m}{\sigma}\right) = 0{,}25 \quad \Longrightarrow \quad \Phi\left(\frac{15-m}{\sigma}\right) = 0{,}75$$

Nézzük először az első egyenletet. A táblázatunkban Φ oszlopában nincs 0,5-nél kisebb érték, ezért az ismert $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ összefüggés felhasználásával egy kicsit át kell alakítanunk a kifejezést:

$$\Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) = 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad \Phi\left(-\frac{7-m}{\sigma}\right) = 0{,}9\,.$$

A táblázatból Φ oszlopából visszakeresve 0,9-et x-re azt kapjuk, hogy 1,28 (közelítőleg). Ezzel kaptunk egy egyenletet m-re és σ-ra:

$$-\frac{7-m}{\sigma} = 1{,}28\,.$$

A második egyenlettel könnyebb dolgunk lesz, csak ki kell keresni Φ oszlopából 0,75-ot, és x-re azt kapjuk, hogy 0,67 (közelítőleg). Ezzel kaptunk még egy egyenletet m-re és σ-ra:

$$\frac{15-m}{\sigma} = 0{,}67\,.$$

Megoldandó tehát a következő egyenletrendszer:

$$-\frac{7-m}{\sigma} = 1{,}28$$
$$\frac{15-m}{\sigma} = 0{,}67$$

Mindkét egyenletet szorozzuk meg σ-val, ügyelve arra, hogy az elsőben a tört előtt egy negatív előjel is van, majd adjuk össze a két egyenletet. Így a következőt kapjuk:

$$8 = 1{,}95 \cdot \sigma \quad \Longrightarrow \quad \sigma \approx 4{,}1026\,.$$

Ezt helyettesítsük vissza pl. az első egyenletbe:

$$-\frac{7-m}{4{,}1026} = 1{,}28 \quad \Longrightarrow \quad m \approx 12{,}2513\,.$$

Tehát X várható értéke 12,2513, szórása pedig 4,1026 (közelítőleg).

7.14. Feladat.

Egy üzemben 30 dkg névleges töltőtömegű konzervet gyártanak. A töltőtömeg normális eloszlásúnak tekinthető, melynek várható értéke megegyezik a névleges értékkel. A termékek 95%-ának töltőtömege 27 és 33 dkg közötti.

a) Közelítőleg mekkora a töltőtömeget leíró valószínűségi változó szórása?

b) Ha a szórás 1,5 dkg lenne, akkor a termékek kb. hány százalékának tömege esne 27 és 33 dkg közé?

Megoldás:

a) Legyen a töltőtömeget leíró valószínűségi változó X. Ennek várható értéke 30, a keresett szórás pedig legyen σ. Mivel a termékek 95%-ának töltőtömege 27 és 33 dkg közötti, ezért $P(27 < X < 33) = 0{,}95$. Ezt átalakítva:

$$P(27 < X < 33) = P\left(\frac{27-30}{\sigma} < \frac{X-30}{\sigma} < \frac{33-30}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-3}{\sigma} < X^* < \frac{3}{\sigma}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-3}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right)\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}95\,.$$

Kaptuk így a következő egyenletet, melyből már meg is tudjuk határozni a szórást:

$$2\cdot\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}95$$
$$\Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) = 0{,}975$$
$$\frac{3}{\sigma} \approx 1{,}645 \quad \Longrightarrow \quad \sigma \approx 1{,}8237\,.$$

Tehát a szórás közelítőleg 1,8 dkg.

b) A töltőtömeget leíró normális eloszlású valószínűségi változó legyen most is X, $m = 30$ és $\sigma = 1{,}5$. Ekkor

$$P(27 < X < 33) = P\left(\frac{27-30}{1{,}5} < \frac{X-30}{1{,}5} < \frac{33-30}{1{,}5}\right) = P(-2 < X^* < 2) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\cdot\Phi(2) - 1 \approx 2\cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544\,.$$

Tehát a termékek kb. 95,44%-ának a töltőtömege esne ekkor 27 és 33 dkg közé.

7.15. Feladat.

Egy faüzemben készített deszkák hossza normális eloszlást követ 400 cm várható értékkel és 2 cm szórással. Egy deszka selejtesnek számít, ha a hossza legalább 5 cm-rel eltér 4 m-től.

a) Milyen selejtszázalékkal dolgozik az üzem?

b) Hogyan kellene változtatni a tűréshatárokat, hogy a selejtszázalék 0,5% legyen?

Megoldás:

a) A kérdés megválaszolásához azt kell kiszámítani, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott deszka selejtes. Legyen X a deszka hosszát jelentő normális eloszlású valószínűségi változó, $m = 400$, $\sigma = 2$. Egy deszka akkor nem selejtes, ha a hossza 395 és 405 cm közé esik, azaz

$$P(\text{nem selejt}) = P(395 < X < 405) = P\left(\frac{395-400}{2} < \frac{X-400}{2} < \frac{405-400}{2}\right) =$$
$$= P(-2{,}5 < X^* < 2{,}5) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(2{,}5) - (1-\Phi(2{,}5)) =$$
$$= 2\cdot\Phi(2{,}5) - 1 \approx 2\cdot 0{,}9938 - 1 = 0{,}9876\,.$$

Ezek szerint egy termék 0,9876 valószínűséggel nem selejt, így 0,0124 valószínűséggel selejt, tehát a selejtszázalék 1,24%.

b) Nyilván adott szórás mellett akkor lesz kisebb a selejtszázalék, ha a várható értéktől nagyobb eltérés is megengedett. Legyen ez a keresett eltérés d. Ekkor annak valószínűsége, hogy egy termék nem selejtes 99,5%, azaz 0,995 (hiszen 0,5% selejt):

$$P(\text{nem selejt}) = P(400-d < X < 400+d) = P\left(\frac{-d}{2} < \frac{X-400}{2} < \frac{d}{2}\right) =$$
$$= P\left(\frac{-d}{2} < X^* < \frac{d}{2}\right) = \Phi\left(\frac{d}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-d}{2}\right) = \Phi\left(\frac{d}{2}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{d}{2}\right)\right) =$$
$$= 2\cdot\Phi\left(\frac{d}{2}\right) - 1 = 0{,}995\,.$$

Ebből d már meghatározható:

$$2\cdot\Phi\left(\frac{d}{2}\right) - 1 = 0{,}995$$
$$\Phi\left(\frac{d}{2}\right) = 0{,}9975$$
$$\frac{d}{2} = 2{,}81 \quad\Longrightarrow\quad d = 5{,}62\,.$$

Tehát a selejtszázalék akkor lesz 0,5%, ha tűréshatár ± 5 cm helyett $\pm 5{,}62$ cm.

7.16. Feladat.

Egy termék mérethibája normális eloszlású valószínűségi változó 0 mm várható értékkel és 5 mm szórással. A termék első osztályú, ha a mérethiba ($\pm$) legfeljebb 2 mm és selejtes, ha legalább 9 mm. Ekkor 1000 termékből átlagosan hány termék lesz elfogadható (tehát nem selejt), de nem első osztályú?

Megoldás:

A válaszhoz ki kell számítani, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott termék nem első osztályú, de nem is selejt. Legyen X a termék mérethibáját megadó normális eloszlású valószínűségi változó, $m = 0$ és $\sigma = 5$ (miliméterben). Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$P(-9 < X < -2) + P(2 < X < 9)\,.$$

Ezt egyszerűen kiszámíthatjuk standardizálással, de egy kicsit kevesebb számolással jár, ha észrevesszük, hogy

$$P(-9 < X < -2) + P(2 < X < 9) = P(-9 < X < 9) - P(-2 < X < 2)\,.$$

Kövessük az utóbbit:

$$P(-9 < X < 9) = P\left(\frac{-9-0}{5} < \frac{X-0}{5} < \frac{9-0}{5}\right) = P(-1{,}8 < X^* < 1{,}8) =$$
$$= 2\cdot\Phi(1{,}8) - 1 \approx 2\cdot 0{,}9641 - 1 = 0{,}9282$$
$$P(-2 < X < 2) = P\left(\frac{-2-0}{5} < \frac{X-0}{5} < \frac{2-0}{5}\right) = P(-0{,}4 < X^* < 0{,}4) =$$
$$= 2\cdot\Phi(0{,}4) - 1 \approx 2\cdot 0{,}6554 - 1 = 0{,}3108\,.$$

Így a keresett valószínűség (közelítőleg) $0{,}9282 - 0{,}3108 = 0{,}6174$, tehát 1000 termékből átlagosan kb. 617,4 lesz elfogadható, de nem első osztályú (mivel átlagról van szó, ezért van értelme a nem egész értéknek).

8. fejezet

Kapcsolatok a nevezetes diszkrét eloszlások között (határeloszlás tételek)

Bizonyos esetekben előfordulhat, hogy egy jelenséggel kapcsolatos valószínűségek kielégítő pontosságú meghatározásához nem szükséges a jelenséget pontosan leíró valószínűségi modell (eloszlás) használata, hanem egy egyszerűbb, kevesebb paramétert tartalmazó, könnyebben kezelhető eloszlás is elegendő. Az alábbiakban két olyan esetet tárgyalunk, amikor egy diszkrét eloszlás közelíthető egy másik, egyszerűbb diszkrét eloszlással.

8.1. A binomiális eloszlás közelítése Poisson-eloszlással

Tudjuk azt, hogy ha végrehajtunk rögzített számú, független kísérletet egy adott valószínűségű esemény megfigyelésére, akkor a sikeres kísérletek száma binomiális eloszlással írható le. A következő tétel azt mutatja, hogy ha kísérletek száma elegendően nagy, a sikeres kísérlet valószínűsége pedig elég kicsi, akkor a binomiális eloszlás helyett használhatunk Poissont is. Lehet, hogy az az első benyomásunk, hogy a Poisson-eloszlás bonyolultabb a binomiálisnál, de ez nem így van. A binomiális eloszlás két paramétert tartalmaz (n és p), a Poisson-eloszlás viszont csak egyet (λ).

8.1. Tétel.
Legyen λ egy pozitív szám, legyen p_n $(n = 1,2,\ldots)$ 0 és 1 közötti számok olyan sorozata, amelynél

$$\lim_{n\to\infty} p_n \cdot n = \lambda\,.$$

Ekkor tetszőleges rögzített k esetén

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}\,.$$

Tehát az n és p_n paraméterű binomiális eloszlás a λ paraméterű Poisson-eloszláshoz közelít.

Bizonyítás: A bizonyításhoz először át fogjuk alakítani a binomiális eloszlás kifejezését:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k}.\end{aligned}$$

Ezután meghatározzuk az egyes tényezők határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} (1-p_n)^n \cdot (1-p_n)^{-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = e^{-\lambda} \cdot 1 = e^{-\lambda}.$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot p_n^k = \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n^k} (p_n \cdot n)^k = \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} (p_n \cdot n)^k = \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \lambda^k = \frac{\lambda^k}{k!}.\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

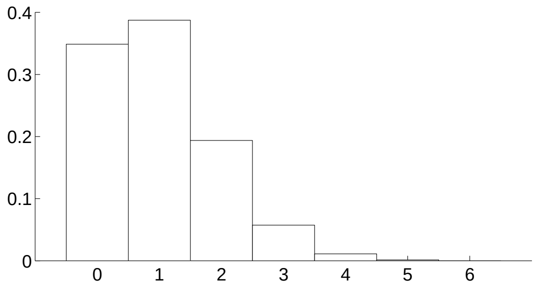
Tehát a fenti feltételek mellett a binomiális eloszlás a Poisson-eloszláshoz tart. □

8.2. Következmény.
Ha p elég kicsi és n nagy, akkor a binomiális eloszlást Poisson-eloszlással közelíthetjük:

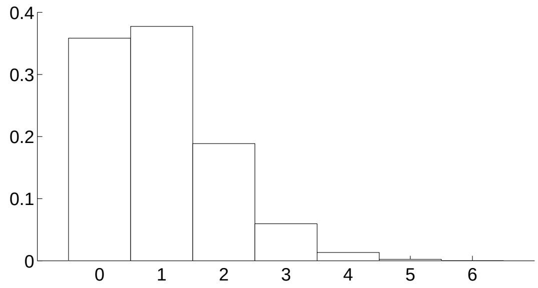
$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}.$$

8.3. Példa.
Tegyük fel, hogy végrehajtunk n darab kísérletet egy p valószínűségű esemény megfigyelésére. Ekkor annak valószínűsége, hogy pontosan 2 darab sikeres kísérletünk lesz (négy tizedesjegyre kerekítve):

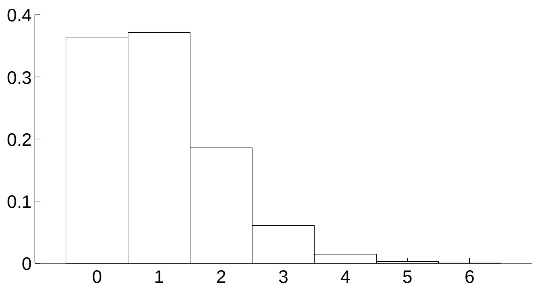
- $n = 10$ és $p = 0{,}1$ esetén $\binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 \approx 0{,}1937$.
- $n = 20$ és $p = 0{,}05$ esetén $\binom{20}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} \approx 0{,}1887$.
- $n = 50$ és $p = 0{,}02$ esetén $\binom{50}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{48} \approx 0{,}1858$.
- $n = 100$ és $p = 0{,}01$ esetén $\binom{10}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{98} \approx 0{,}1847$.
- $n = 1000$ és $p = 0{,}001$ esetén $\binom{1000}{2} \cdot 0{,}001^2 \cdot 0{,}999^{998} \approx 0{,}1840$.



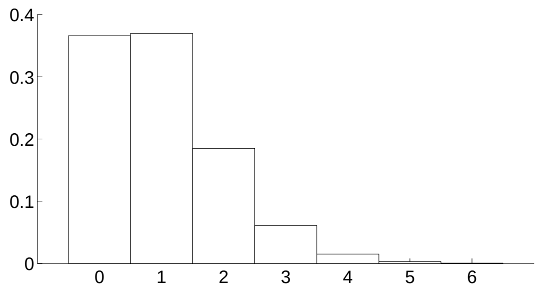
(a) Binomiális eloszlás, $n = 10$, $p = 0{,}1$.



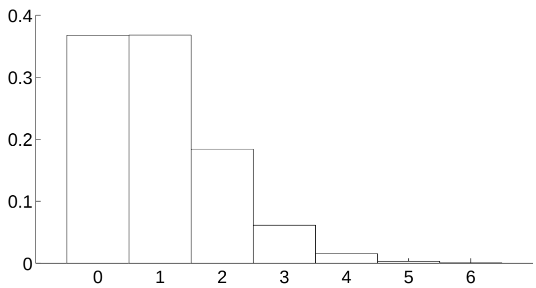
(b) Binomiális eloszlás, $n = 20$, $p = 0{,}05$.



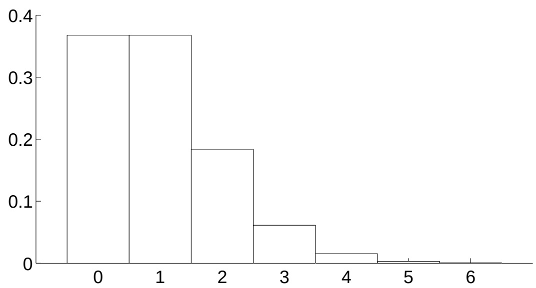
(c) Binomiális eloszlás, $n = 50$, $p = 0{,}02$.



(d) Binomiális eloszlás, $n = 100$, $p = 0{,}01$.



(e) Binomiális eloszlás, $n = 1000$, $p = 0{,}001$.



(f) Poisson-eloszlás, $\lambda = 1$.

8.1. ábra. A binomiális eloszlás n növelésével és p csökkentésével egyre közelebb kerül a $\lambda = n \cdot p$ paraméterű Poisson-eloszláshoz.

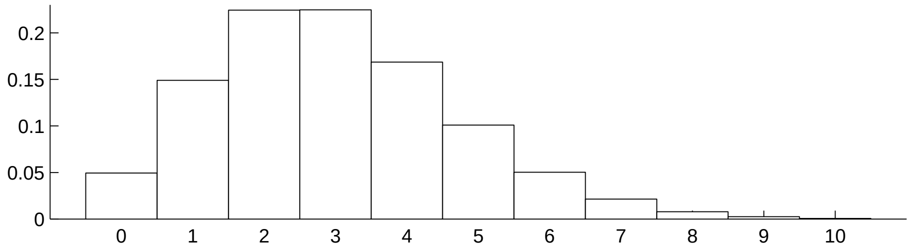
A fenti esetek mindegyikében $n \cdot p = 1$. A $\lambda = 1$ paraméterű Poisson-eloszlás értéke $k = 2$ esetén $\approx 0{,}1839$. Látható, hogy n növelésével (és p csökkenésével) egyre közelebb kerülnek ehhez a binomiális eloszlással számolt értékek, így például az utolsó esetben már mindenképpen elfogadható a binomiális eloszlás Poissonnal való közelítése. Az eloszlásokat az 8.1 ábrán szemléltetjük.

8.4. Feladat.

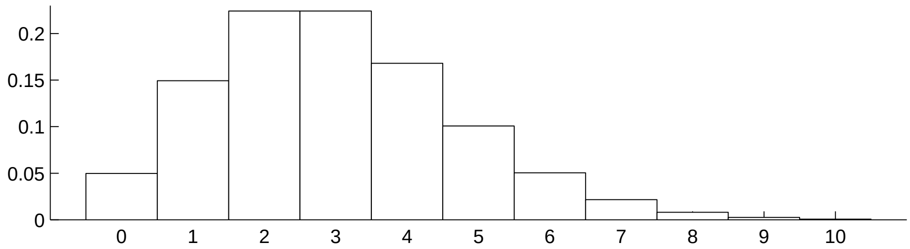
Egy hivatalban 600 telefonkészülék van, melyek a tapasztalat szerint egymástól függetlenül 0,005 valószínűséggel romlanak el naponta.

a) Mi a valószínűsége, hogy egy nap alatt pontosan öt készülék romlik el?

b) Mi a valószínűsége, hogy egy nap alatt egy készülék sem romlik el?



(a) Binomiális



(b) Poisson

8.2. ábra. A telefonos feladathoz tartozó binomiális, illetve Poisson-eloszlás

Megoldás:

a) Legyen az egy nap alatt meghibásodó készülékek száma X. Mivel előre megadott számú (600) készülékről van, továbbá ezek egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel romolhatnak el, ezért X binomiális eloszlású valószínűségi változó az $n = 600$ és $p = 0{,}005$ paraméterekkel. Így a kérdéses valószínűség:

$$P(X = 5) = \binom{600}{5} \cdot 0{,}005^5 \cdot (1 - 0{,}005)^{595} \approx 0{,}1009\,.$$

Mivel n nagy és p kicsi, ezért a binomiális eloszlás közelíthető olyan Poisson-eloszlással, melynek paramétere $\lambda = n \cdot p = 600 \cdot 0{,}005 = 3$. Ezzel a keresett valószínűség közelítőleg meghatározható:

$$P(X = 5) \approx \frac{3^5}{5!}\, e^{-3} \approx 0{,}1008\,.$$

Látható, hogy igen jó a közelítés, hiszen a két érték között kevesebb, mint egy tízezred az eltérés.

b) Binomiális eloszlással számolva:

$$P(X = 0) = \binom{600}{0} \cdot 0{,}005^0 \cdot (1 - 0{,}005)^{600} = 0{,}995^{600} \approx 0{,}0494\,.$$

Poisson-eloszlással közelítve:

$$P(X = 0) \approx \frac{3^0}{0!}\, e^{-3} \approx 0{,}0498\,.$$

Most is jó a közelítés, az eltérés kevesebb, mint egy ezred.

8.5. Feladat.

Tegyük fel, hogy az év minden napján százszor elgurítunk egy dobókockát, és azt figyeljük, hogy naponta hány hatost dobunk. Annak valószínűsége, hogy 100 dobásból legalább 25 hatost kapunk kb. 0,022.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy az évben pontosan nyolc olyan nap lesz, amikor a hatosok száma legalább 25?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy az évben legalább négy ilyen nap lesz?

Megoldás:

a) Egy éven keresztül mindennap végrahajtjuk a 100 dobásból álló kísérlet sorozatot. Azt tekintjük sikeresnek, amikor legalább 25 hatost dobunk. Legyen X ezeknek a napoknak a száma. Ekkor X binomiális eloszlású valószínűségi változó az $n = 365$ és $p = 0{,}022$ paraméterekkel. Így a kérdéses valószínűség:

$$P(X = 8) = \binom{365}{8} \cdot 0{,}022^8 \cdot (1 - 0{,}022)^{357} \approx 0{,}1411\,.$$

Mivel n nagy és p kicsi, ezért a binomiális eloszlás közelíthető olyan Poisson-eloszlással, melynek paramétere $\lambda = n \cdot p = 365 \cdot 0{,}022 = 8{,}03$. Ezzel a keresett valószínűségközelítőleg meghatározható:

$$P(X = 8) \approx \frac{8{,}03^8}{8!}\, e^{-8{,}03} \approx 0{,}1396\,.$$

A két valószínűség közötti eltérés mindössze 0,0015. Ha 8,03 helyett 8-cal számoltunk volna, akkor az eredmény akkor is $\approx 0{,}1396$.

Az igazán pontos értéket természetesen akkor kapjuk, ha a binomiális eloszlásban a feladatban szereplő „kb. 0,022” helyett minél pontosabb értéket használunk. Ehhez a következőt kell felírnunk:

$$\begin{aligned} P(X = 8) = &\binom{365}{8} \cdot \left[\sum_{k=25}^{100} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}\right]^8 \cdot \left[1 - \sum_{k=25}^{100} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}\right]^{357} \approx \\ &\approx 0{,}1410855\,. \end{aligned}$$

Látható, hogy legkevesebb számolással a Poisson-eloszlással való közelítés járt, és az ott kapott eredmény alig tér el a pontosnak mondható értéktől.

b) Binomiális eloszlással:

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{365}{k} \cdot 0{,}022^k \cdot (1 - 0{,}022)^{365-k} \approx 0{,}9600\,. \end{aligned}$$

Poisson-eloszlással:

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = \\ &= 1 - \left[\frac{8{,}03^0}{0!}\, e^{-8{,}03} + \frac{8{,}03^1}{1!}\, e^{-8{,}03} + \frac{8{,}03^2}{2!}\, e^{-8{,}03} + \frac{8{,}03^3}{3!}\, e^{-8{,}03}\right] \approx \\ &\approx 0{,}9585\,. \end{aligned}$$

Ha itt 8,03 helyett 8-cal számoltunk volna, akkor az eredmény $\approx 0{,}9576$, ami még mindig elég közel van a binomiális eloszlással kapott értékhez. Ha itt is a lehető legpontosabban számolunk, akkor

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{365}{k} \cdot \left[\sum_{k=25}^{100} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}\right]^k \cdot \left[1 - \sum_{k=25}^{100} \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}\right]^{365-k} \approx \\ &\approx 0{,}9569\,. \end{aligned}$$

Az eredményekből világosan látszik, hogy a Poisson-eloszlással való közelítés a jóval kevesebb számolás mellett még elfogadható értéket is ad.

8.6. Feladat.

Egy dobozban 1000 golyó van, közülük 2 fekete, a többi piros. Ezerszer húzunk visszatevéssel. Az alábbiak közül melyik a legvalószínűbb:

– kettőnél kevesebb feketét húzunk,

– pontosan kettő feketét húzunk,

– kettőnél több feketét húzunk?

Megoldás:
Legyen X a kihúzott fekete golyók száma. A leírtak alapján ez $n = 1000$ (húzások száma) és $p = 0{,}002$ (fekete húzásának valószínűsége) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Ezzel a keresett valószínűségek:

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \\ &= \binom{1000}{0} 0{,}002^0 \cdot 0{,}998^{1000} + \binom{1000}{1} 0{,}002^1 \cdot 0{,}998^{999} \approx 0{,}4057 \\ P(X = 2) &= \binom{1000}{2} 0{,}002^2 \cdot 0{,}998^{998} \approx 0{,}2709 \\ P(X > 2) &= 1 - [P(X < 2) + P(X = 2)] \approx 0{,}3233\,. \end{aligned}$$

Mivel n nagy és p kicsi, ezért a binomiális eloszlás közelíthető olyan Poisson-eloszlással, melynek paramétere $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$. Az ezzel kapott valószínűségek:

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \approx \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 3 \cdot e^{-2} \approx 0{,}4060 \\ P(X = 2) &\approx \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2 \cdot e^{-2} \approx 0{,}2707 \\ P(X > 2) &\approx 1 - [P(X < 2) + P(X = 2)] = 1 - 5 \cdot e^{-2} \approx 0{,}3233\,. \end{aligned}$$

Tehát ebben az esetben is jó közelítést kaptunk.

8.2. A hipergeometriai eloszlás közelítése binomiálissal

A visszatevés nélküli mintavétel kapcsán már láttuk azt, hogy ha a teljes elemszám, és ezen belül a kitüntettek száma sokkal nagyobb, mint a kihúzott elemek száma, akkor a valószínűség szempontjából szinte teljesen mindegy, hogy a visszatevéses vagy a visszatevés nélküli modellel számolunk. Mivel a visszatevés nélküli mintavétel hipergeometriai valószínűségi változóval írható le, a visszatevéses pedig binomiálissal, ezért itt arról van szó, hogy a hipergeometriai eloszlás közelíthető binomiálissal.

8.7. Tétel.
Legyen p egy 0 és 1 közé eső szám, legyen továbbá s_m olyan egész értékű sorozat, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_m}{m} = p\,.$$

Legyen n olyan m-től és s_m-től független egész állandó, melyre $n \le s_m$ és $n \le m - s_m$. Ekkor tetszőleges rögzített k esetén $(0 \le k \le n)$:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\binom{s_m}{k} \cdot \binom{m - s_m}{n - k}}{\binom{m}{n}} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}\,.$$

Tehát az m, s_m és n paraméterű hipergeometriai eloszlás az n és p paraméterű binomiális eloszláshoz közelít.

Bizonyítás: Először alakítsuk át a hipergeometriai kifejezést (az egyszerűség kedvéért s_m

helyett s-et írunk):

$$\frac{\binom{s}{k}\cdot\binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}} = \frac{\frac{s!}{k!\cdot(s-k)!}\cdot\frac{(m-s)!}{(n-k)!\cdot(m-s-(n-k))!}}{\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}} =$$

$$= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{s\cdot(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-(k-1))\cdot(m-s)\cdot(m-s-1)\cdot\ldots\cdot(m-s-(n-k-1))}{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}$$

Vegyük észre, hogy a hosszú tört számlálója és nevezője is összesen n tényezőből áll

$$= \binom{n}{k}\cdot\frac{s}{m}\cdot\frac{s-1}{m-1}\cdot\ldots\cdot\frac{s-(k-1)}{m-(k-1)}\cdot\frac{m-s}{m-k}\cdot\frac{m-s-1}{m-(k+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{m-s-(n-k-1)}{m-(n-1)}\,.$$

Nézzük meg az egyes tényezők határértékét:

– $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{s-\text{konstans}}{m-\text{konstans}} = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{s}{m} = p.$

– $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m-s-\text{konstans}}{m-\text{konstans}} = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{m-s}{m} = 1-p.$

Az első típusból k darab, a másodikból pedig $n-k$ darab van, így a teljes kifejezés határértéke:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\binom{s}{k}\cdot\binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}} = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\,.$$

□

8.8. Következmény.
Ha m, s és $m-s$ nagy az alapsokaság n elemszámához képest, akkor a hipergeometriai eloszlás közelíthető a $p=\frac{s}{m}$ paraméterű binomiális eloszlással. Ekkor tehát

$$\frac{\binom{s}{k}\cdot\binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}} \approx \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{s}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{s}{m}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\,.$$

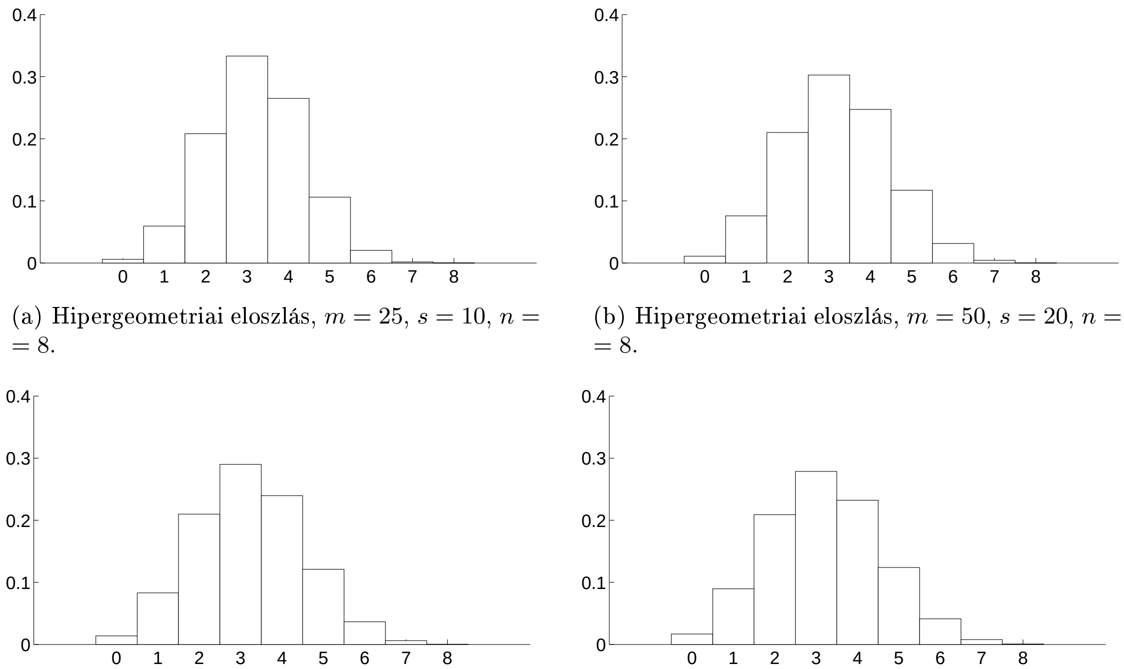
8.9. Példa.
Egy urnában m darab golyó van, ezek közül s darab piros. Visszatevés nélkül húzunk nyolcat. Ekkor annak a valószínűsége, hogy pontosan két pirosat húzunk (négy tizedesjegyre kerekítve):

– $m=25$ és $s=10$ esetén $\frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{15}{5}}{\binom{25}{8}} \approx 0{,}3332.$

– $m=50$ és $s=20$ esetén $\frac{\binom{20}{3}\cdot\binom{30}{5}}{\binom{50}{8}} \approx 0{,}3026.$

– $m = 100$ és $s = 40$ esetén $\dfrac{\binom{40}{3} \cdot \binom{60}{5}}{\binom{100}{8}} \approx 0{,}2800.$

Az $\dfrac{s}{m}$ arány mindhárom esetben 0,4. Az $n = 8$ és $p = 0{,}4$ paraméterű binomiális eloszlás értéke $k = 2$ esetén $\approx 0{,}2787$. Látható, hogy m (és s) növelésével egyre közelebb kerülnek ehhez a hipergeometriai eloszlásból számolt értékek. Az eloszlásokat a 8.3 ábrán szemléltetjük.



(a) Hipergeometriai eloszlás, $m = 25$, $s = 10$, $n = 8$.

(b) Hipergeometriai eloszlás, $m = 50$, $s = 20$, $n = 8$.

(c) Hipergeometriai eloszlás, $m = 100$, $s = 40$, $n = 8$.

(d) Binomiális eloszlás, $n = 8$, $p = 0{,}4$.

8.3. ábra. A hipergeometrai eloszlás adott n mellett m és s növelésével egyre közelebb kerül az n és $p = \dfrac{s}{m}$ paraméterű binomiális eloszláshoz.

8.10. Feladat.

Egy városban 51000 nő és 49000 férfi él. Véletlenszerűen kiválasztunk 10 embert.

a) Mi a valószínűsége, hogy pontosan hat nő van a kiválasztottak között?

b) Mi a valószínűsége, hogy legalább két férfi van a kiválasztottak között?

Megoldás:

a) Legyen X_1 a nők száma a kiválasztottak között. Ekkor X_1 hipergeometriai eloszlású az $m = 100\,000$, $s = 51\,000$ és $n = 10$ paraméterekkel. Így a valószínűség:

$$P(X_1 = 6) = \frac{\binom{51\,000}{6} \cdot \binom{49\,000}{4}}{\binom{100\,000}{10}} \approx 0{,}2130\,.$$

Egyszerűbb számológéppel elég nehézkes kiszámítani a fenti kifejezés értékét. Viszont most m, s és $m-s$ is sokkal nagyobb, mint n, így a hipergeometriai eloszlás olyan binomiális eloszlással közelíthető, melyre $p = \frac{s}{m} = 0{,}51$ és $n = 10$. Ezzel a következőt kapjuk:

$$P(X_1 = 6) \approx \binom{10}{6} \cdot 0{,}51^6 \cdot 0{,}49^4 \approx 0{,}2130\,.$$

Látható, hogy a két eredmény négy tizedesjegyre megegyezik.

b) Legyen X_2 a férfiak száma a kiválasztottak között. Természetesen ez is hipergeometriai eloszlású, a keresett valószínűség pedig:

$$\begin{aligned} P(X_2 \geq 2) &= 1 - [P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1)] = \\ &= 1 - \left[\frac{\binom{51\,000}{10} \cdot \binom{49\,000}{0}}{\binom{100\,000}{10}} + \frac{\binom{51\,000}{9} \cdot \binom{49\,000}{1}}{\binom{100\,000}{10}}\right] \approx 0{,}9873756 \\ &\approx 0{,}9874\,. \end{aligned}$$

X_2 eloszlása közelíthető olyan binomiális eloszlással, melyre $n = 10$ és $p = 0{,}49$. Így a binomiális közelítéssel kapott valószínűség:

$$\begin{aligned} P(X_2 \geq 2) &= 1 - [P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1)] \\ &\approx 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0{,}51^10 \cdot 0{,}49^0 + \binom{10}{1} \cdot 0{,}51^9 \cdot 0{,}49^1\right] \approx 0{,}9873721 \\ &\approx 0{,}9874\,. \end{aligned}$$

A közelítés most is igen jól működik, a két eredmény csak a hatodik tizedesjegyben tér el egymástól.

8.11. Feladat.

A legutóbbi Barcelona meccs 70000 nézőjéből 60000 volt hazai, 10000 pedig vendég szurkoló. A mérkőzés után a rendőrök közülük 20 főt vettek őrizetbe. Mi a valószínűsége, hogy 17 hazai és 3 vendég szurkolót vettek őrizetbe?

Megoldás:

Legyen X az őrizetbe vett hazai szurkolók száma. Ha $X = 17$, akkor nyilván 17 hazai és 3 vendég szurkoló élvezi a rendőrség vendégszeretetét (hiszen összesen húsz embert vettek őrizetbe). X tekinthető hipergeometriai eloszlású valószínűségi változónak az $m = 70\,000$, $s = 60\,000$ és $n = 20$ paraméterekkel. Ezzel a kérdéses valószínűség:

$$P(X = 17) = \frac{\binom{60\,000}{17} \cdot \binom{10\,000}{3}}{\binom{70\,000}{20}} \approx 0{,}241869 \approx 0{,}2419\,.$$

Mivel m, s és $m-s$ is nagyon nagy n-hez képest, így X eloszlása közelíthető olyan binomiális eloszlással, melyre $n = 10$ és $p = \frac{60\,000}{70\,000} = \frac{6}{7}$. A binomiális közelítéssel kapott valószínűség:

$$P(X = 17) \approx \binom{20}{17} \left(\frac{6}{7}\right)^{17} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3} \approx 0{,}241833 \approx 0{,}2418\,.$$

Látható, hogy a pontosabb értékek csak az ötödik tizedesjegyben térnek el.

9. fejezet

Valószínűségi változó függvényének eloszlása

Előfordul, hogy egy proléma megoldásához egy adott valószínűségi változó valamely függvényére van szükségünk, például adott az X valószínűségi változó, mi pedig az $Y = X^3$ valószínűségi változóval kapcsolatos kérdésekre keressük a választ. Ilyen esetekben fontos, hogy meg tudjuk határozni a transzformációval kapott új valószínűségi változó eloszlását, eloszlásfügggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét, szórását.

9.1. Diszkrét valószínűségi változó függvényének eloszlása

9.1. Példa.
Az X valószínűségi változó eloszlása legyen az alábbi:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{cases} .$$

Ekkor az $Y = X^3$ valószínűségi változó lehetséges értékeit úgy kapjuk, hogy X lehetséges értékeit harmadik hatványra emeljük. A hozzájuk tartozó valószínűségek meghatározhatók X eloszlásából: az $Y = y$ esemény valószínűsége megegyezik az $X = \sqrt[3]{y}$ esemény valószínűségével. Így az $Y = X^3$ valószínűségi változó eloszlása:

$$Y : \begin{cases} 0 & 1 & 8 & 27 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{cases} .$$

Nézzük meg azt is, hogy mi történik a várható értékkel és a szórással. Az eredeti X valószínűségi változó várható értéke és szórása az eloszlás alapján könnyen meghatározható:

$$E(X) = 1{,}8 \qquad D(X) = \sqrt{1{,}16} \approx 1{,}077 .$$

Hasonlóan egyszerű Y várható értékének és szórásának meghatározása:

$$E(Y) = 11{,}4 \qquad D(Y) = \sqrt{114{,}44} \approx 10{,}6977 .$$

Látható, hogy $E(Y) \neq [E(X)]^3$ és $D(Y) \neq [D(X)]^3$, azaz itt sem a várható érték, sem pedig a szórás nem úgy transzformálódik, mint a valószínűségi változó.

9.2. Példa.
Legyen most X eloszlása az alábbi:

$$X : \begin{cases} 0 & \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{cases} .$$

A várható értéke és a szórása:

$$E(X) = \frac{3\pi}{4} \qquad D(X) = \sqrt{0{,}3125 \cdot \pi^2} = 0{,}559\pi .$$

Az új valószínűségi változó legyen $Y = \cos X$. Ekkor Y lehetséges értékei:

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0 .$$

Az $Y = 1$ és az $Y = -1$ esemény csak úgy következhet be, ha az $X = 0$ illetve az $X = \pi$ esemény bekövetkezik, ezért az $Y = 1$ esemény valószínűsége megegyezik az $X = 0$ esemény valószínűségével, az $Y = -1$ esemény valószínűsége pedig megegyezik az $X = \pi$ esemény valószínűségével. Az $Y = 0$ esemény akkor következik be, ha $X = \frac{\pi}{2}$ vagy $X = \frac{3\pi}{2}$, így az $Y = 0$ esemény valószínűsége az $X = \frac{\pi}{2}$ és az $X = \frac{3\pi}{2}$ események valószínűségeinek összege. Így az $Y = \cos X$ valószínűségi változó eloszlása:

$$Y : \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{cases} .$$

Az új valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$E(Y) = 0 \qquad D(Y) = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}7071 .$$

Mivel $\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ és $\cos 0{,}559\pi = -0{,}1843$, ezért $E(Y) \neq \cos E(X)$ és $D(Y) \neq \cos D(X)$.

9.3. Megjegyzés.
Van olyan eset is, amikor a várható érték és a szórás ugyanúgy transzformálódik, mint a valószínűségi változó. Legyen $Y = a \cdot X + b$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$. Emlékezzünk vissza röviden két tételre:

- *$E(Y) = a \cdot E(X) + b$, és*
- *$D(Y) = |a| \cdot D(X)$.*

A fentiekből következik, hogy ha $a > 0$ és $b = 0$, akkor a várható érték és a szórás ugyanúgy transzformálódik, mint a valószínűségi változó, vagyis az eredeti értékek a-szorosára változnak.

A példák után már kézenfekvő a diszkrét valószínűségi változó transzformáltjának általános definíciója:

9.4. Definíció.
Legyenek az X diszkrét eloszlású valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$ és ezek bekövetkezési valószínűségei $p_1, p_2, \ldots$. Az $Y = h(X)$ valószínűségi változó lehetséges értékei ekkor az $y_1 = h(x_1), y_2 = h(x_2), \ldots$ számok (amelyek között megegyezők is lehetnek) és ezek bekövetkezési valószínűségei a

$$P(Y = y_k) = \sum_{h(x_i)=y_k} P(X = x_i) = \sum_{h(x_i)=y_k} p_i .$$

értékek, ahol az összegzés mindazon x_i-re vonatkozik, amelyre $h(x_i) = y_k$ fennáll.

9.5. Megjegyzés.
Ha az $Y = h(X)$ valószínűségi változó X-nek szigorúan monoton függvénye, akkor az Y valószínűségi változó $y_k = h(x_k)$, $(k = 1,2,\ldots)$ értékeihez tartozó valószínűség eloszlás megegyezik az X valószínűségi változó eloszlásával.

9.2. Folytonos valószínűségi változó függvényének eloszlása

Legyen most X folytonos eloszlású valószínűségi változó, eloszlásfüggvénye pedig legyen $F(x)$. Tegyük fel, hogy az Y valószínűségi változót az X függvényeként kaptuk. Az Y-nal kapcsolatos kérdések megválaszolásához szükség lesz Y eloszlásfüggvényére és sűrűségfüggvényére. Ezeket az X valószínűségi változó ismeretében meg tudjuk határozni. A módszer lényege, hogy az Y-nal kapcsolatos eseményt ki tudjunk fejezni X-szel kapcsolatos eseményként.

9.6. Példa.
Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(-4; 4)$ intervallumon. Ekkor eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le -4 \\ \frac{x+4}{8} & \text{ha } -4 < x \le 4 \\ 1 & \text{ha } x > 4 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{ha } -4 < x < 4 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Legyen $Y = X^3$. Mivel X -4 és 4 közé esik, ezért Y -64 és 64 közé fog esni. Jelölje Y eloszlásfüggvényét $G(x)$, sűrűségfüggvényét pedig $g(x)$. Fejezzük ki G-t F segítségével:

$$G(x) = P(Y < x) = P(X^3 < x) = P(X < \sqrt[3]{x}) = F(\sqrt[3]{x}) .$$

Vagyis Y eloszlásfüggvényét úgy kapjuk, hogy X eloszlásfüggvényébe $\sqrt[3]{x}$-et helyettesítünk. Az F függvény értéke

- 0, ha a változó kisebb vagy egyenlő, mint -4. Ezért G értéke 0, ha $\sqrt[3]{x} \le -4$, azaz ha $x \le -64$.
- $\dfrac{x+4}{8}$, ha a változó -4 és 4 közé esik. Ezért G értéke $\dfrac{\sqrt[3]{x}+4}{8}$, ha $-4 < \sqrt[3]{x} \le -4$, azaz ha $-64 < x \le 64$.
- 1, ha a változó nagyobb, mint 4. Ezért G értéke 1, ha $\sqrt[3]{x} > 4$, azaz ha $x > 64$.

Így Y eloszlásfüggvénye:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le -64 \\ \frac{\sqrt[3]{x}+4}{8} & \text{ha } -64 < x \le 64 \\ 1 & \text{ha } x > 64 \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény most is előáll az eloszlásfüggvény deriváltjaként, ezért

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & \text{ha } -64 < x \le 64 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A $g(x)$ sűrűségfüggvény meghatározható X eloszlásfüggvényéből is:

$$g(x) = G'(x) = [F(\sqrt[3]{x})]' = f(\sqrt[3]{x}) \cdot (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

(ott, ahol a sűrűségfüggvény nem nulla).

9.7. Példa.
Legyen az X valószínűségi változó ugyanaz, mint előbb, a belőle képzett valószínűségi változó pedig legyen $Y = X^2$. Az a nagy különbség az előző példához képest, hogy a négyzetre emelés (a harmadik hatványra emeléssel szemben) a megadott intervallumon nem szigorúan monoton függvény, így az eloszlásfüggvény meghatározása kicsit másképp történik. Mivel X értéke -4 és 4 közé esik, ezért Y értéke 0 és 16 közé fog esni. Jelölje Y eloszlásfüggvényét most is $G(x)$, sűrűségfüggvényét pedig $g(x)$. Fejezzük ki G-t F segítségével:

$$G(x) = P(Y < x) = P(X^2 < x) = P(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})\,.$$

Mivel Y nemnegatív, ezért $G(x)$ nulla lesz minden $x \le 0$ esetén. Ha $x > 0$, akkor

- ha $0 < x \le 16$, akkor $0 < \sqrt{x} < 4$ és $-4 < -\sqrt{x} < 0$. Az $F(x)$ függvény értéke $\dfrac{x+4}{8}$, ha a változó -4 és 4 közé esik, így itt $G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = \dfrac{\sqrt{x}+4}{8} - \dfrac{-\sqrt{x}+4}{8}$, azaz $G(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{4}$.
- ha $x > 16$, akkor $\sqrt{x} > 4$ és $-\sqrt{x} < -4$, tehát most $F(\sqrt{x}) = 1$ és $F(-\sqrt{x}) = 0$, így $G(x) = 1$.

A fentieket összefoglalva kapjuk Y eloszlásfüggvényét:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{4} & \text{ha } 0 < x \le 16 \\ 1 & \text{ha } x > 16 \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény pedig

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{ha } 0 < x \le 16 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A $g(x)$ sűrűségfüggvényt most is meghatározhatjuk X eloszlásfüggvényéből is:

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) = [F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})]' = f(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' - f(-\sqrt{x}) \cdot (-\sqrt{x})' = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{(ott, ahol a sűrűségfüggvény nem nulla).} \end{aligned}$$

A két példából látszik, hogy egy kicsivel egyszerűbb az $Y = h(X)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a meghatározása, ha h szigorúan monoton függvény. Erre az esetre egy általános formulát adunk a következő tételben.

9.8. Tétel.
Legyen h egy szigorúan monoton, differenciálható függvény és X egy folytonos eloszlású valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye f . Ekkor az $Y = h(X)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$g(x) = f\left(h^{-1}(x)\right) \cdot \left|\left(h^{-1}(x)\right)'\right| \qquad x \in D_{h^{-1}}\,.$$

ahol h^{-1} a h függvény inverzét jelöli.

BIZONYÍTÁS:

1. Legyen először h szigorúan monoton növő. Ekkor az $\{Y < x\}$ esemény (ami tulajdonképpen a $\{h(X) < x\}$ esemény) ekvivalens az $\{X < h^{-1}(x)\}$ eseménnyel. Így Y eloszlásfüggvénye:

$$G(x) = P(Y < x) = P(h(X) < x) = P(X < h^{-1}(x)) = F\left(h^{-1}(x)\right),$$

ahol F az X eloszlásfüggvénye. Ebből Y sűrűségfüggvénye az összetett függvény deriválásával megkapható:

$$g(x) = \left[F\left(h^{-1}(x)\right)\right]' = f\left(h^{-1}(x)\right) \cdot \left(h^{-1}(x)\right)'.$$

Mivel h szigorúan monoton növő, ezért $\left(h^{-1}(x)\right)' > 0$, ami megegyezik az abszolút értékével.

2. Legyen most h szigorúan monoton csökkenő. Ekkor az $\{Y < x\}$ esemény (ami most is a $\{h(X) < x\}$ esemény) ekvivalens az $\{X > h^{-1}(x)\}$ eseménnyel. Így ebben az esetben Y eloszlásfüggvénye:

$$G(x) = P(Y < x) = P(h(X) < x) = P(X > h^{-1}(x)) = 1 - F\left(h^{-1}(x)\right),$$

ahol F az X eloszlásfüggvénye. Ebből Y sűrűségfüggvénye az összetett függvény deriválásával megkapható:

$$g(x) = \left[1 - F\left(h^{-1}(x)\right)\right]' = -f\left(h^{-1}(x)\right) \cdot \left(h^{-1}(x)\right)'.$$

Mivel h szigorúan monoton csökkenő, ezért $\left(h^{-1}(x)\right)' < 0$, így a -1-szerese megegyezik az abszolút értékével.

□

9.9. Példa.
Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Az Y valószínűségi változó legyen e^X. Mivel X értékkészlete a $(0; \infty)$ halmaz, ezért Y értékei az $(1; \infty)$ halmazból kerülnek ki Az X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{ha } 0 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Most $h(x) = e^x$, így

$$h^{-1}(x) = \ln x \quad \text{és} \quad \left(h^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{x}.$$

Ezzel Y sűrűségfüggvénye:

$$g(x) = f\left(h^{-1}(x)\right) \cdot \left|\left(h^{-1}(x)\right)'\right| = \lambda \cdot e^{-\lambda \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \lambda \cdot \left(e^{\ln x}\right)^{-\lambda} \cdot \frac{1}{x} = \lambda \cdot x^{-\lambda} \cdot \frac{1}{x} = \lambda \cdot \frac{1}{x^{\lambda+1}}.$$

Pontosabban:

$$g(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \frac{1}{x^{\lambda+1}} & \text{ha } 1 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

A tétel fontos speciális esete az, amikor Y az X lineáris transzformáltja, vagyis $Y = a \cdot X + b$, $(a \neq 0)$. Ekkor a sűrűségfüggvényre vonatkozó formula is egyszerűsödik:

9.10. Tétel.
Legyen X egy folytonos eloszlású, f sűrűségfüggvényű valószínűségi változó. Ekkor az $Y = = a \cdot X + b$ $(a \neq 0)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$g(x) = \frac{1}{|a|} \cdot f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Bizonyítás: Tekintsük az előző tételt a $h(x) = a \cdot x + b$ függvénnyel. Ekkor $h(x)$ inverze $h^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$, ennek deriváltja pedig $\left(h^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{a}$, így adódik a tétel állítása. □

A lineáris transzformálás leggyakrabban akkor fordul elő, amikor egy normális eloszlású valószínűségi változót standardizálunk. Az előző tétel alapján egyszerűen beláthatjuk, hogy a standardizálással kapott valószínűségi változó valóban standard normális eloszlású.

9.11. Tétel.
Legyen X normális eloszlású valószínűségi változó az m és σ paraméterekkel. Ekkor X standardizáltja, vagyis az $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ valószínűségi változó standard normális eloszlású.

Bizonyítás: A bizonyításhoz elég azt megmutatni, hogy X^* sűrűségfüggvénye $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mivel X normális eloszlású, ezért a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Mivel $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma} \cdot X - \dfrac{m}{\sigma}$, ezért alkalmazhatjuk az előző tétel az $a = \frac{1}{\sigma}$ és $b = -\frac{m}{\sigma}$ választással. Így X^* sűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|a|} \cdot f\left(\frac{x-b}{a}\right) &= \sigma \cdot f\left(\frac{x - \frac{-m}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma \cdot f(\sigma \cdot x + m) = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{((\sigma \cdot x+m)-m)^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

□

9.3. Valószínűségi változó függvényének várható értéke

Az $Y = h(X)$ valószínűségi változó várható értékét kiszámíthatjuk diszkrét esetben az eloszlásából, folytonos esetben pedig a sűrűségfüggvényéből. Ha azonban csak Y várható értéke érdekel minket, az viszont nem, hogy az eloszlása, eloszlásfüggvénye mi lesz, akkor jóval kevesebb számolással is megkaphatjuk azt.

9.12. Tétel.
Legyen X diszkrét eloszlású valószínűségi változó, lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig $p_1, p_2, \ldots$. Legyen továbbá $Y = h(X)$. Ekkor Y várható értéke

$$E(Y) = \sum_i h(x_i) \cdot p_i \,.$$

Bizonyítás: Az Y valószínűségi változó várható értéke:

$$E(Y) = \sum_k y_k \cdot q_k \qquad \text{, ahol } q_k = \sum_{h(x_i)=y_k} p_i.$$

Ezzel

$$E(Y) = \sum_k y_k \cdot q_k = \sum_k y_k \cdot \sum_{h(x_i)=y_k} p_i = \sum_k \sum_{h(x_i)=y_k} y_k \cdot p_i = \sum_k \sum_{h(x_i)=y_k} h(x_i) \cdot p_i =$$
$$= \sum_i h(x_i) \cdot p_i \,.$$

□

9.13. Tétel.
Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó, a sűrűségfüggvénye legyen $f(x)$, és legyen $Y = h(X)$. Ekkor Y várható értéke

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Bizonyítás: Mivel minden függvény felbontható szigorúan monoton függvények összegére[1], ezért a tételt elég szigorúan monoton h-ra bizonyítani.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f\left(h^{-1}(x)\right) \cdot \left(h^{-1}(x)\right)' \,\mathrm{d}x \,.$$

Használjuk fel, hogy az inverzfüggvényre vonatkozó deriválási szabály miatt: $\left(h^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{h'\left(h^{-1}(x)\right)}$, majd pedig végezzük el az $y = h^{-1}(x)$ helyettesítést. Ekkor $x = h(y)$, $\mathrm{d}x = h'(y)\mathrm{d}y$. Ezzel

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f\left(h^{-1}(x)\right) \cdot \frac{1}{h'\left(h^{-1}(x)\right)} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot f(y) \cdot \frac{1}{h'(y)} \cdot h'(y) \,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot f(y) \,\mathrm{d}y \,.$$

[1] Pontosabban minden olyan függvény, amely folytonos és minden véges intervallumon korlátos variációjú.

Ha h szigorún monoton csökkenő, akkor a levezetés teljesen hasonlóan elvégezhető. Ha pedig h nem szigorúan monoton, akkor felbontható szigorúan monoton függvények összegére. □

9.14. Példa.
Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye legyen a következő:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^4} & \text{ha } 1 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $Y_1 = X^2$, $Y_2 = \sqrt{X}$, $Y_3 = 1/X$. Ekkor az alkalmazott függvények: $h_1(x) = x^2$, $h_2(x) = \sqrt{x}$, $h_3(x) = \dfrac{1}{x}$. Meghatározzuk X és az új valószínűségi változók várható értékét is. Ehhez szükségünk lesz X sűrűségfüggvényére, amely $F(x)$-ből megkapható:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^5} & \text{ha } 1 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \frac{4}{x^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{-3 \cdot x^3}\right]_1^{\infty} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333 .$$

$$E(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \frac{4}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{-2 \cdot x^2}\right]_1^{\infty} = 2 .$$

$$E(Y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{x^9}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{\sqrt{x^7}}\right]_1^{\infty} = \frac{8}{7} \approx 1{,}1429 .$$

$$E(Y_3) = \int_{-\infty}^{\infty} h_3(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \frac{4}{x^6}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{-5 \cdot x^5}\right]_1^{\infty} = \frac{4}{5} = 0{,}8 .$$

9.15. Feladat.
Egy gyárban acélgolyókat készítenek. A golyók tömege (g) egyenletes eloszlású a $(9{,}5; 10{,}5)$ intervallumon. Határozzuk meg az átmérő várható értékét és szórását!

Megoldás:
Legyen az X valószínűségi változó egy golyó tömege grammban. A feladat szerint X egyenletes eloszlású a $(9{,}5; 10{,}5)$ intervallumon, így a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 9{,}5 < x \leq 10{,}5 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Jelölje d egy golyó átmérőjét. A golyó tömege és átmérője között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$m = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \rho$$

, ahol ρ az acél sűrűsége ($\rho = 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$). A fenti összefüggésből kifejezhető az átmérő:

$$d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{m}{\pi \cdot \rho}} .$$

Ennek segítségével pedig felírható d várható értéke:

$$E(d) = \int_{9,5}^{10,5} 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{\pi \cdot 7{,}8}} \cdot 1\,\mathrm{d}x = \int_{9,5}^{10,5} 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi \cdot 7{,}8}} \cdot \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \left[2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi \cdot 7{,}8}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4}\right]_{9,5}^{10,5} \approx 1{,}3477 .$$

Mivel a tömeg grammban, a sűrűség pedig g/cm^3-ben volt megadva, így a kapott eredmény természetesen cm-ben értendő, tehát az átmérő várható értéke kb. 1,35 cm.

A szórást most is a $D(d) = \sqrt{E(d^2) - E^2(d)}$ összefüggés alapján határozzuk meg, amiből csak $E(d^2)$-et nem ismerjük. Ennek meghatározása hasonlóan történhet, mint a várható érték kiszámítása:

$$E(d^2) = \int_{9,5}^{10,5} \left(2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{\pi \cdot 7{,}8}}\right)^2 \cdot 1 \,\mathrm{d}x = \int_{9,5}^{10,5} \left(2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi \cdot 7{,}8}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} \,\mathrm{d}x = \left[\left(2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi \cdot 7{,}8}}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{x^5}\right]_{9,5}^{10,5}$$
$$\approx 1{,}8165\,.$$

Ebből a szórás:

$$D(d) = \sqrt{E(d^2) - E^2(d)} \approx \sqrt{1{,}8165 - 1{,}3477^2} \approx 0{,}0143\,.$$

Természetesen a szórásra kapott érték is cm-ben értendő, tehát a szórás kb. 0,0143 cm. (Ha mind a várható érték, mind a négyzet várható értékének meghatározásakor pontosabban számolunk, akkor a szórásra kb. 0,01297 adódik.)

9.4. A lognormális eloszlás

A lognormális eloszlás (másnéven lognormál vagy logaritmikusan normális eloszlás) általában törési, osztódási folyamatoknál alkalmazható. Ekkor a végtermék tömege, térfogata lognormális eloszlásúnak tekinthető.

9.16. Definíció.
Az Y valószínűségi változót m és σ paraméterű lognormális eloszlásúnak nevezzük, ha Y e alapú logaritmusa m és σ paraméterű normális eloszlású.

Legyen az X valószínűségi változó normális eloszlású az m és σ paraméterekkel, az eloszlásfüggvényét jelölje F, a sűrűségfüggvényét pedig f. A belőle származtatott lognormális eloszlású valószínűségi változó $Y = e^X$ (hiszen ekkor Y e alapú logaritmusa éppen X). Meghatározzuk Y eloszlásfüggvényét:

- Mivel $Y = e^X$, ezért csak pozitív értéke lehet, így $x \leq 0$ esetén $G(x) = 0$.
- Ha $x > 0$, akkor

$$G(x) = P(Y < x) = P(e^X < x) = P(X < \ln x) = F(\ln x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t\,.$$

A sűrűségfüggvénye (ott, ahol a sűrűségfüggvény nem nulla):

$$g(x) = G'(x) = (F(\ln x))' = f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Összefoglalva:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \cdot \sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} & \text{ha } 0 < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

A várható érték meghatározása igényel némi számolást:

$$E(Y) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{x \cdot \sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x\,.$$

Vezessük be a $t = \ln x$ helyettesítést. Ekkor $x = e^t$ és $\mathrm{d}x = e^t \mathrm{d}t$. Mivel x 0 és ∞ között változik, ezért $t = \ln x$ $-\infty$ és ∞ között változik. Így a helyettesítéssel kapott integrál:

$$E(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^t \,\mathrm{d}t\,.$$

Az integrandusban alakítsuk teljes négyzetté e kitevőjét:

$$\begin{aligned}-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} + t &= \frac{-(t-m)^2 + 2\sigma^2 t}{2\sigma^2} = \frac{-t^2 - m^2 + 2mt + 2\sigma^2 t}{2\sigma^2} = \frac{-(t-(m+\sigma^2))^2 + \sigma^4 + 2m\sigma^2}{2\sigma^2} = \\ &= \frac{-(t-(m+\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} + m\,.\end{aligned}$$

Ezzel a várható érték:

$$E(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-(t-(m+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}+m} \,\mathrm{d}t = e^{\frac{\sigma^2}{2}+m} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-(t-(m+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t}_{=1} = e^{\frac{\sigma^2}{2}+m}\,.$$

A kijelölt rész azért 1, mert az integrandus (a már kiemelt konstans szorzót is hozzáértve) egy sűrűségfüggvény (az $m + \sigma^2$, σ paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye).

A szórása meghatározásához szükségünk van Y^2 várható értékére. Itt ugyanazt a helyettesítést fogjuk alkalmazni, mint a várható érték kiszámításánál:

$$E(Y^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{x \cdot \sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^t \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^t \,\mathrm{d}t\,.$$

Most is alakítsuk teljes négyzetté e kitevőjét:

$$\begin{aligned}t - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} + t &= \frac{-t^2 - m^2 + 2mt + 4\sigma^2 t}{2\sigma^2} = \frac{-(t-(m+2\sigma^2))^2 + 4\sigma^4 + 4m\sigma^2}{2\sigma^2} = \\ &= \frac{-(t-(m+2\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + 2\sigma^2 + 2m\,.\end{aligned}$$

Ezzel Y^2 várható értéke:

$$E(Y^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-(t-(m+2\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{2\sigma^2+2m} \,\mathrm{d}t = e^{2\sigma^2+2m} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-(t-(m+2\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t}_{=1} = e^{2\sigma^2+2m}\,.$$

A kijelölt rész ismét azért 1, mert sűrűségfüggvény integrálja. A kapott eredményekből a szórás:

$$D(Y) = \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)} = \sqrt{e^{2\sigma^2+2m} - \left(e^{\frac{\sigma^2}{2}+m}\right)^2} = \sqrt{e^{2m+\sigma^2} \cdot \left(e^{\sigma^2} - 1\right)}\,.$$

10. fejezet

A Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség

Sok esetben előfordul, hogy nem áll minden információ rendelkezésre ahhoz, hogy egy valószínűséget pontosan meg tudjunk határozni. Ilyenkor a valószínűségi változó néhány jellemzőjének (várható érték, szórás) ismeretében csupán a valószínűség becslésére szorítkozhatunk.

Ebben a fejezetben először annak valószínűségére mutatunk felső becslést, hogy egy nem negatív értékű valószínűségi változó értéke nagyobb vagy egyenlő, mint egy adott szám. Látni fogjuk, hogy ez a valószínűség nem lehet akármekkora, a várható érték alapján adható rá egy felső korlát. Ez azt is jelenti, hogy a valószínűségi változó csak viszonylag kis valószínűséggel vehet fel a várható értékhez képest nagy értékeket.

Ezután annak valószínűségére adunk becslést, hogy a valószínűségi változó a várható értéktől legalább egy adott értékkel eltér. Ez is azt mutatja, hogy túlságosan nem lehet eltérni a várható értéktől, azaz a nagy eltérés valószínűsége kicsi.

10.1. A Markov-egyenlőtlenség

10.1. Tétel. (Markov-egyenlőtlenség)
Ha X olyan nem negatív értékeket felvevő valószínségi változó, amelynek van várható értéke, és az a egy tetszőleges pozitív valós szám, akkor

$$P\left(X \geq a\right) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Bizonyítás: Az állítást külön-külön bizonyítjuk diszkrét, illetve folytonos eloszlású valószínűségi változóra.

1. Legyen X a feltételeknek megfelelő diszkrét eloszlású valószínűségi változó. A lehetséges értékei legyenek $x_1, x_2, \ldots$, az ezekhez tartozó valószínűségek pedig $p_1, p_2, \ldots$. A bizonyításhoz felírjuk X várható értékét, majd azt alulról becsüljük:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k \geq \sum_{x_k \geq a} x_k \cdot p_k \geq \sum_{x_k \geq a} a \cdot p_k = a \cdot \sum_{x_k \geq a} p_k = a \cdot P(X \geq a)\,.$$

Az alábbi egyenlőtlenséget kaptuk, melyből átrendezéssel adódik a tétel állítása:

$$E(X) \geq a \cdot P(X \geq a) \qquad \Longrightarrow \qquad P\left(X \geq a\right) \leq \frac{E(X)}{a}\,.$$

2. Legyen most X a feltételeknek megfelelő folytonos eloszlású valószínűségi változó, a sűrűségfüggvénye pedig legyen $f(x)$. Ugyanazt az eljárást fogjuk követni, mint diszkrét esetben:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_{a}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_{a}^{\infty} a \cdot f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= a \cdot \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = a \cdot P(X \geq a)\,.$$

Ugyanolyan egyenlőtlenséget kaptuk, mint az előbb, most is átrendezéssel adódik a tétel állítása:

$$E(X) \geq a \cdot P(X \geq a) \qquad \Longrightarrow \qquad P\left(X \geq a\right) \leq \frac{E(X)}{a}\,.$$

□

10.2. Példa.
Jelölje X egy teljesen véletlenszerűen választott férfi magasságát. Ha a magasság várható értéke 175 cm, akkor annak valószínűsége, hogy egy férfi legalább 250 cm magas:

$$P\left(X \geq 250\right) \leq \frac{175}{250} = 0{,}7\,.$$

A Markov-egyenlőtlenséggel kapott becslés szerint ez a valószínűség legfeljebb 0,7 lehet. Ez, mint matematikai állítás nyilvánvalóan igaz (megfelel neki a 0 valószínűség is), de maga a becslés igen gyenge, hiszen a valószínűség tényleges értéke bár nem ismert, de nyilvánvalóan igen-igen csekély.

10.3. Példa.
Ez a példa azt mutatja, hogy előfordulhat olyan eset is, amikor a Markov-egyenlőtlenségben egyenlőség áll, vagyis a becsléssel kapott érték megegyezik a tényleges valószínűséggel. Legyen X egy olyan valószínűségi változó, amelynek az értéke p valószínűséggel c, $1-p$ valószínűséggel pedig 0 ($p, c > 0$). Ekkor X eloszlása és várható értéke:

$$X : \begin{cases} c & 0 \\ p & 1-p \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad E(X) = c \cdot p\,.$$

A $P(X \geq c)$ valószínűségre alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget:

$$P(X \geq c) \leq \frac{c \cdot p}{c} = p\,.$$

Az eloszlásból viszont látszik, hogy $P(X \geq c) = p$, így most az egyenlőtlenségben egyenlőség áll.

10.4. Példa.
Legyen X egy nemnegatív értékű valószínűségi változó, a várható értéke legyen 12. Annak valószínűségére akarunk becslést adni, hogy X értéke legalább 30. Mivel az X valószínűségi változó

megfelel a tétel feltételeinek, ezért használhatjuk a Markov-egyenlőtlenséget, most $E(X) = 12$ és $a = 30$. Ezzel:

$$P(X \geq 30) \leq \frac{12}{30} = 0{,}4\,.$$

Tehát azt mondhatjuk, hogy a kérdéses valószínűség legfeljebb 0,4. Tipikus rossz válasz az, hogy „a valószínűség 0,4”. Nem tudjuk, hogy mennyi a valószínűség, csak azt tudjuk, hogy legfeljebb 0,4.

10.5. Feladat.

Egy bizonyos típusú izzó élettartama átlagosan 4000 óra.

a) Adjunk becslést annak valószínűségére, hogy az élettartam legalább 6000 óra!

b) Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy az élettartam exponenciális eloszlású valószínűségi változó?

Megoldás:

a) Legyen az élettartamot órában megadó valószínűségi változó X. Tudjuk azt is, hogy $E(X) = 4000$. Mivel az élettartam nyilvánvalóan nemnegatív, továbbá létezik X várható értéke is, ezért használhatjuk a Markov-egyenlőtlenséget (most $a = 6000$):

$$P(X \geq 6000) \leq \frac{4000}{6000} = \frac{2}{3}\,.$$

Tehát legfeljebb $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy az élettartam legalább 6000 óra. Ha egyéb információ nem áll rendelkezésünkre, akkor ennél többet nem tudunk mondani.

b) Nagyban változott a helyzet az előzőhöz képest, hiszen most ismerjük X eloszlását, a várható értékből meg tudjuk határozni az eloszlás paraméterét, így a kérdéses valószínűséget már nem kell becsülnünk, ki is tudjuk számítani. Mivel X exponenciális eloszlású, ezért:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad E(X) = 4000 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4000} = 0{,}00025\,.$$

Így az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{4000}} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

Ezzel a valószínűség:

$$P(X \geq 6000) = 1 - F(6000) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{6000}{4000}}\right) = e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231\,.$$

A valószínűségre tehát most pontos értéket kaptunk (a kerekítéstől eltekintve). Figyeljük meg azt is, hogy a kapott valószínűségérték megfelel az előző pontban kapott becslésnek, hiszen kisebb, mint $\frac{2}{3}$.

10.6. Feladat.

Az X valószínűségi változó várható értéke 5, szórása 12.

a) Mennyi lehet annak valószínűsége, hogy X^2 értéke legalább 196?

b) Mi a válasz, ha X normális eloszlású?

Megoldás:

a) Az X valószínűségi változónak, és X^2-nek sem ismerjük az eloszlását, tehát ezt a valószínűséget pontosan nem tudjuk meghatározni. Az X^2 valószínűségi változó nyivánvalóan nemnegatív. Ha ismerjük a várható értékét, akkor alkalmazhatjuk rá a Markov-egyenlőtlenséget. Használjuk fel a szórásnégyzetre vonatkozó formulát:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad \Longrightarrow \quad E(X^2) = D^2(X) + E^2(X)\,.$$

A feladatban szereplő értékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy $E(X^2) = 12^2 + 5^2 = 169$. A Markov-egyenlőtlenséget felírva:

$$P(X^2 \geq 196) \leq \frac{169}{196} \approx 0{,}8622\,.$$

A kérdéses valószínűségről tehát annyit lehet mondani, hogy legfeljebb 0,8622.

b) Ha X normális eloszlású, akkor a valószínűség pontos értéke is meghatározható. Most $m = 5$ és $\sigma = 12$, így

$$
\begin{aligned}
&P(X^2 \geq 196) = 1 - P(X^2 < 196) = 1 - P(-14 < X < 14) = \\
&= 1 - P\left(\frac{-14-5}{12} < \frac{X-5}{12} < \frac{14-5}{12}\right) = 1 - P\left(-\frac{19}{12} < X^* < \frac{9}{12}\right) \approx \\
&\approx 1 - P\left(-1{,}58 < X^* < 0{,}75\right) = 1 - (\Phi(0{,}75) - \Phi(-1{,}58)) = \\
&= 1 - (\Phi(0{,}75) - 1 + \Phi(1{,}58)) = \Phi(1{,}58) - \Phi(0{,}75) \approx 0{,}9429 - 0{,}7734 = 0{,}1695\,.
\end{aligned}
$$

A kapott eredmény természetesen itt is megfelel az előző pontban kapott becslésnek.

10.2. A Csebisev-egyenlőtlenség

Tudjuk, hogy a valószínűségi változó értékeinek a várható értéktől való eltérését a szórással jellemezzük. A következőkben azt fogjuk látni, hogy a várható értéktől a szórás sokszorosával való eltérés valószínűsége nem lehet bármekkora, a nagy eltérés valószínűsége kicsi.

10.7. Tétel. (Csebisev-egyenlőtlenség)
Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek van várható értéke és szórása, legyen továbbá λ tetszőleges pozitív szám. Ekkor

$$P\left(|X - E(X)| \geq \lambda \cdot D(X)\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz a Markov-egyenlőtlenséget fogjuk felhasználni. Az ott szereplő nemnegatív valószínűségi változó legyen $(X - E(X))^2$. Ennek létezik a várható értéke, hiszen $E[(X - E(X))^2] = D^2(X)$, amiről tudjuk, hogy létezik, hiszen X-nek van szórása, így szórásnégyzete is, jogos tehát a Markov-egyenlőtlenség használata. Az a szám legyen $\lambda^2 \cdot D^2(X)$. Ezekkel felírva a Markov-egyenlőtlenséget:

$$P\left((X - E(X))^2 \geq \lambda^2 \cdot D^2(X)\right) \leq \frac{E[(X - E(X))^2]}{\lambda^2 \cdot D^2(X)}\,.$$

A bal oldal átalakításhoz használjuk fel, hogy az $(X - E(X))^2 \geq \lambda^2 \cdot D^2(X)$ esemény ekvivalens az $|X - E(X)| \geq \lambda \cdot D(X)$ eseménnyel, a jobb oldal egyszerűsítéséhez pedig azt, hogy $E[(X - E(X))^2] = D^2(X)$, így megkapjuk a tétel állítását. □

10.8. Megjegyzés.
A Csebisev-egyenlőtlenséget gyakran alkalmazzuk annak becslésére, hogy az X valószínűségi változó értéke milyen valószínűséggel esik egy adott, várható érték körüli szimmetrikus intervallumba. Ez az esemény a Csebisev-egyenlőtlenségben szereplőnek a komplementere, így az egyenlőtlenséget az alábbi, az eredeti alakkal ekvivalens formában használjuk:

$$P\left(|X - E(X)| < \lambda \cdot D(X)\right) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

10.9. Példa.
Az X valószínűségi változó várható értéke legyen $E(X) = 40$, szórása pedig $D(X) = 8$. Annak valószínűségére akarunk becslést adni, hogy a valószínűségi változó értéke legalább a szórás háromszorosával eltér a várható értéktől.

A valószínűségi változónak létezik várható értéke és szórása, így alkalmazhatjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget. Vegyük észre azt is, hogy a várható érték és a szórás konkrét értékének itt nincs semmilyen szerepe, csak az számít, hogy a szórás hányszorosa a minimális eltérés. A Csebisev-egyenlőtlenségben ez lesz λ értéke:

$$P\left(|X - E(X)| \geq 3 \cdot D(X)\right) \leq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}\,.$$

Annyit mondhatunk tehát a kérdéses valószínűségről, hogy legfeljebb $\frac{1}{9}(\approx 0{,}1111)$ lehet.

10.10. Példa.
Egy valószínűségi változó várható értéke 40, szórása 4. Becslést adunk annak valószínűségére, hogy a valószínűségi változó értéke 30 és 50 közé esik.

Legyen a valószínűségi változó X, az adatok szerint $E(X) = 40$, $D(X) = 4$. Az $30 < X <$ < 50 eseményt vizsgáljuk. Ez ugyanaz, mintha azt mondanánk, hogy X értéke 40-től csak tíznél kevesebbel térhet el, azaz $|X - 40| < 10$. Mivel X várható értéke pont 40 (és mert létezik $E(X)$ és $D(X)$), ezért alkalmazhatjuk a Csebisev-egyenlőtlenség komplementer eseményre vonatkozó alakját:

$$P\left(|X - 40| < 10\right) = P(|X - \underbrace{40}_{E(X)}| < \underbrace{2{,}5}_{\lambda} \cdot \underbrace{4}_{D(X)}) \geq 1 - \frac{1}{2{,}5^2} = \frac{21}{25} = 0{,}84\,.$$

A keresett valószínűségről így annyit lehet mondani, hogy legalább 0,84.

10.11. Példa.
Jelölje most is X egy teljesen véletlenszerűen választott férfi magasságát. A magasság várható értéke most is 175 cm, szórása pedig legyen 15 cm. Most is vizsgáljuk annak valószínűségét, hogy $X \geq 250$.

$$P(X \geq 250) = P(X - 175 \geq 250 - 175) = P(X - 175 \geq 75)\,.$$

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P(|X - 175| \geq 75) = \\ &\quad = P(X - 175 \geq 75 \text{ vagy } X - 175 \leq -75) = P(X - 175 \geq 75) + P(X - 175 \leq -75)\,. \end{aligned}$$

Ezért

$$P(X \geq 250) = P(X - 175 \geq 75) \leq P(|X - 175| \geq 75)\,.$$

Az utolsó valószínűséget becsülhetjük a Csebisev-egyenlőtlenséggel:

$$P(|X - 175| \geq 75) = P(|X - 175| \geq \underbrace{15}_{D(X)} \cdot \underbrace{5}_{\lambda}) \leq \frac{1}{5^2} \approx 0{,}04\,.$$

A kapott becslés ugyan sokkal jobb, mint amit a szórás ismerete nélkül a Markov-egyenlőtlenséggel kaptunk (az $\leq 0{,}7$ volt), de még mindig elég messze áll a valóságtól.

Ha még további információ is rendelkezésünkre állna, akkor akár még a pontos valószínűséget is meg lehetne határozni. Ha például tudnánk, hogy a magasság normális eloszlású, akkor a valószínűség standardizálással meghatározható:

$$P(X \geq 250) = P\left(\frac{X - 175}{15} \geq \frac{250 - 175}{15}\right) = P(X^* \geq 5) = 1 - \Phi(5) \approx 2{,}867 \cdot 10^{-7}\,.$$

10.12. Példa.
Ez a példa azt mutatja, hogy a Csebisev-egyenlőtlenségben előfordulhat egyenlőség is. Legyenek m, σ és k valós számok, $\sigma > 0$, $k \geq 1$, X pedig olyan valószínűségi változó, melynek eloszlása:

$$X : \begin{cases} m - k \cdot \sigma & m & m + k \cdot \sigma \\ \dfrac{1}{2k^2} & 1 - \dfrac{1}{k^2} & \dfrac{1}{2k^2} \end{cases} .$$

Ekkor X várható értéke:

$$E(X) = (m - k \cdot \sigma) \cdot \frac{1}{2k^2} + m \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) + (m + k \cdot \sigma) \cdot \frac{1}{2k^2} = m\,.$$

X^2 várható értéke:

$$E(X^2) = (m - k \cdot \sigma)^2 \cdot \frac{1}{2k^2} + m^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) + (m + k \cdot \sigma)^2 \cdot \frac{1}{2k^2} = m^2 + \sigma^2\,.$$

Így a szórás:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{m^2 + \sigma^2 - m^2} = \sigma\,.$$

Vizsgáljuk a $P(|X - m| \geq k \cdot \sigma)$ valószínűséget:

$$P(|X-m| \geq k\cdot\sigma) = P(X-m \geq k\cdot\sigma) + P(X-m \leq -k\cdot\sigma) = P(X \geq m+k\cdot\sigma) + P(X \leq m-k\cdot\sigma)\,.$$

Az eloszlás szerint mindkét valószínűség értéke $\dfrac{1}{2k^2}$, így $P(|X - m| \geq k \cdot \sigma) = \dfrac{1}{k^2}$. Másrészt a Csebisev-egyenlőtlenség szerint:

$$P(|X - m| \geq \underbrace{k}_{\lambda} \cdot \underbrace{\sigma}_{D(X)}) \leq \frac{1}{k^2}\,,$$

így most a Csebisev-egyenlőtlenségben tényleg egyenlőség áll.

10.13. Feladat.
Az X valószínűségi változó várható értéke 25, szórása 5.

a) Mennyi lehet annak valószínűsége, hogy X értéke legfeljebb 15 vagy legalább 35?

b) Mi a válasz akkor, ha X normális eloszlású?

Megoldás:

a) Az adatok szerint $E(X) = 25$ és $D(X) = 5$. Ha X értéke legfeljebb 15 vagy legalább 35, akkor 25-től, vagyis a várható értéktől legalább tízzel eltér, tehát az eltérés legalább a szórás kétszerese, így a Csebisev-egyenlőtlenségben $\lambda = 2$ szerepel. A keresett valószínűségről tehát ezt tudjuk:

$$\begin{aligned} P(X \leq 15 \text{ vagy } 35 \leq X) &= P(|X - 25| \geq 10) = \\ &= P(|X - \underbrace{25}_{E(X)}| \geq \underbrace{2}_{\lambda} \cdot \underbrace{5}_{D(X)}) \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,. \end{aligned}$$

Tehát a kérdéses valószínűség legfeljebb 0,25. Tipikus rossz válasz az, hogy „a valószínűség 0,25”. Ennyi információ birtokában ugyanis nem határozható meg pontosan, hogy mennyi ez a valószínűség, csak annyi mondható, hogy az legfeljebb 0,25.

b) Ekkor $m = 25$ és $\sigma = 5$ ismeretében standardizálással kiszámítható a (kerekítés erejéig) pontos valószínűség. Célszerűbb a komplementer esemény valószínűségét meghatározni:

$$P(15 < X < 35) = P\left(\frac{15-25}{5} < \frac{X-25}{5} < \frac{35-25}{5}\right) = P(-2 < X^* < 2) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544\,.$$

Mivel $P(X \leq 15 \text{ vagy } 35 \leq X) = 1 - P(15 < X < 35)$, ezért a kérdéses valószínűség $1 - 0{,}9544 = 0{,}0456$ (közelítőleg).

10.14. Feladat.

Egy gyárban 2 m hosszú rudakat gyártanak 0,6 cm szórással. Selejtesnek minősül az a termék, melynek hossza legalább 1 cm-rel eltér az elvárt hosszúságtól. Adjunk becslést arra, hogy 1000 darabból átlagosan hány olyan termék lesz, ami nem selejtes! Mi lenne a válasz, ha normális eloszlást tételeznénk fel?

Megoldás:

A válaszhoz azt kell megmondani, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott termék nem selejtes. Legyen a rúd hosszát jelentő valószínűségi változó X. Ekkor centiméterben számolva $E(X) = 200$, $D(X) = 0{,}6$. Ha egy termék nem selejtes, akkor 1 cm-nél kevesebbel tér el a 2 métertől, vagyis ekkor $|X - 200| < 1$. Erre már felírhatjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$P(|X - 200| < 1) = P\left(|X - 200| < \frac{5}{3} \cdot 0{,}6\right) \geq 1 - \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{16}{25} = 0{,}64\,.$$

Azt kaptuk tehát a valószínűségre, hogy legalább 0,64, ezért 1000 darabból átlagosan legalább 640 nem lesz selejtes.

Ha azt tételezzük fel, hogy X normális eloszlású, akkor a valószínűséget nem kell becsülnünk a Csebisev-egyenlőtlenséggel, hanem ki is számíthatjuk:

$$P(|X - 200| < 1) = P(199 < X < 201) = P\left(\frac{199-200}{0{,}6} < \frac{X-200}{0{,}6} < \frac{201-200}{0{,}6}\right) =$$
$$= P\left(-\frac{5}{3} < X^* < \frac{5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - 1 \approx 2 \cdot \Phi\left(1{,}67\right) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9525 - 1 = 0{,}905\,.$$

Ekkor tehát 1000 darabból átlagosan 905 nem lesz selejtes.

10.15. Feladat.

Határozzuk meg annak valószínűségét az alábbi esetekben, hogy a valószínűségi változó által felvett érték a várható érték két szórás sugarú környezetébe esik, azaz

$$P\left(|X - E(X)| < 2 \cdot D(X)\right) = ?$$

a) Tetszőleges olyan X esetén, amikor $E(X)$ és $D(X)$ létezik.

b) X folytonos egyenletes eloszlású.

c) X exponenciális eloszlású.

d) X normális eloszlású.

Megoldás:

a) Alkalmazhatjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$P\left(|X - E(X)| < 2 \cdot D(X)\right) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0{,}75\,.$$

Ebben az esetben tehát annyit mondhatunk, hogy a valószínűség legalább 0,75.

b) Az $(a;b)$ intrevallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}\,.$$

A várható érték itt az $(a;b)$ intervallum középpontja, amely mindkét végponttól $\frac{b-a}{2}$ távolságra van. A szórás kétszerese

$$2 \cdot \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{3}} > \frac{b-a}{2}\,.$$

Mivel a szórás kétszerese több, mint a várható értéknek az intervallum végpontjaitól mért távolsága, ezért biztos, hogy a valószínűségi változó értéke a várható érték két szórás sugarú környezetébe esik, tehát most a valószínűség értéke 1.

c) Exponenciális eloszlású valószínűségi változó esetén a várható érték és a szórás megegyezik:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda}\,.$$

A kérdéses valószínűség pedig meghatározható az eloszlásfüggvénnyel:

$$P\left(|X - E(X)| < 2 \cdot D(X)\right) = P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| < 2 \cdot \frac{1}{\lambda}\right) = P\left(-\frac{1}{\lambda} < X < 3 \cdot \frac{1}{\lambda}\right) =$$
$$= F\left(\frac{3}{\lambda}\right) - F\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\lambda \cdot \frac{3}{\lambda}} - 0 = 1 - e^{-3} \approx 0{,}9502\,.$$

A levezetés végén azt használtuk fel, hogy exponenciális eloszlásnál $F(x) = 0$, ha $x \le 0$.

d) Itt a már megszokott standardizálás eredményre vezet (ha nem tudjuk már fejből is ezt a valószínűséget …):

$$P\left(|X - E(X)| < 2 \cdot D(X)\right) = P\left(E(X) - 2 \cdot D(X) < X < E(X) + 2 \cdot D(X)\right) =$$
$$= P\left(\frac{E(X) - 2 \cdot D(X) - E(X)}{D(X)} < \frac{X - E(X)}{D(X)} < \frac{E(X) + 2 \cdot D(X) - E(X)}{D(X)}\right) =$$
$$= P(-2 < X^* < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544\,.$$

11. fejezet

Több valószínűségi változó együttes eloszlása

Sok gyakorlati problémánál előfordul, hogy egyszerre több valószínűségi változóval van dolgunk. Például egyidejűleg mérjük egy adott csoport magasságát és testtömegét. Ez a két érték nyilván összefügg egymással, de mégsem mondhatjuk, hogy függvényszerű kapcsolat áll fenn közöttük, például vannak sovány magasak és alacsony kövérek is. Ilyen esetekben a teljes valószínűségi leíráshoz ismernünk kell azt, hogy a két valószínűségi változó együttesen hogyan viselkedik.

11.1. Definíció.
Az $X_1, X_2, \dots, X_n$ együtt megfigyelt valószínűségi változók összességét n-dimenziós valószínűségi vektorváltozónak nevezzük, és az $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ szimbólummal jelöljük.

11.2. Definíció.
Egy valószínűségi vektorváltozót diszkrétnek (folytonosnak) nevezünk, ha valamennyi komponense diszkrét (folytonos).

11.3. Példa.
Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Legyen X_1 a dobott számok összege, X_2 pedig a dobott számok szorzata. Ekkor az (X_1, X_2) valószínűségi vektorváltozó diszkrét, hiszen minden komponense diszkrét.

11.4. Példa.
Egyidejűleg mérjük egy adott csoporton belül az emberek magasságát (X_1), testtömegét (X_2) és mellbőségét (X_3). Ekkor az (X_1, X_2, X_3) valószínűségi vektorváltozó folytonos, hiszen minden komponense folytonos.

A továbbiakban a definíciókat, tételeket két valószínűségi változóra (X és Y) mondjuk ki. A fejezet végén adjuk meg az általános formulákat n darab valószínűségi változó együttes eloszlására.

11.1. Két diszkrét valószínűségi változó együttes eloszlása

11.5. Definíció.
Az X és Y diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlásán az (x_i, y_k) számpárok és a

$$P(X = x_i,\, Y = y_k)$$

valószínűségek összességét értjük.

11.6. Példa.
Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk, legyen X a dobott számok összege, Y pedig a dobott számok különbségének abszolút értéke.

X értékei lehetnek $2,3,\ldots,12$, Y értékei pedig $0,1,\ldots,5$. Ez elvileg $11 \times 6 = 66$ esetet jelentene, de ezek közül sok nem valósulhat meg. Például nem lehet az összeg 2 akkor, amikor a különbség abszolút értéke 3, stb. Vegyük sorra X és Y esetén, hogy milyen dobásoknál jöhetnek létre az egyes értékek. A dobások eredményét egy-egy számpárral jelöljük:

$X = 2$	(1,1)
$X = 3$	(1,2) (2,1)
$X = 4$	(1,3) (2,2) (3,1)
$X = 5$	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)
$X = 6$	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)
$X = 7$	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)
$X = 8$	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)
$X = 9$	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)
$X = 10$	(4,6) (5,5) (6,4)
$X = 11$	(5,6) (6,5)
$X = 12$	(6,6)

$Y = 0$	(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)
$Y = 1$	(1,2) (2,1) (2,3) (3,2) (3,4) (4,3) (4,5) (5,4) (5,6) (6,5)
$Y = 2$	(1,3) (3,1) (2,4) (4,2) (3,5) (5,3) (4,6) (6,4)
$Y = 3$	(1,4) (4,1) (2,5) (5,2) (3,6) (6,3)
$Y = 4$	(1,5) (5,1) (2,6) (6,2)
$Y = 5$	(1,6) (6,1)

Ezek után csak annyit kell tennünk, hogy összeszámoljuk, hogy az egyes $(X = x_i, Y = y_k)$ esetek hányszor fordulnak elő. Mivel a két dobás kimenetele összesen $6 \times 6 = 36$ féle lehet, ezért ebből az esemény valószínűségét is meg tudjuk mondani. Például az $(X = 2, Y = 0)$ csak akkor fordulhat elő, amikor a dobások kimenetele (1,1), így $P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{36}$. Hasonlóan az $(X = 5, Y = 1)$ eset akkor fordulhat elő, ha a dobások kimenetele (2,3) vagy (3,2), így $P(X = 5, Y = 1) = \frac{2}{36}$. Végigmehetünk így az összes eseten. Az eredmények közlésére viszont alkalmasabb formát is találhatunk. Készítünk egy táblázatot, ahol az első sorában X lehetséges értékei, az első oszlopában pedig Y lehetséges értékei szerepelnek, az egyes cellákban pedig az ezen értékekhez tartozó valószínűségek. Esetünkben a következő táblázatot kapjuk:

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$
1	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0
2	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0
3	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0
4	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0

11.7. Feladat.
Legyen X és Y együttes eloszlása az, ami a példában volt. Határozzuk meg az alábbiakat:

a) $P(X < 4, Y < 3)$ *b)* $P(3 \leq X \leq 8, Y > 2)$ *c)* $P(Y = 2|X < 10)$.

Megoldás:

a) A keresett valószínűséget úgy kaphatjuk meg, hogy összeadjuk az összes olyan esemény valószínűségét, melyre $X < 4$ és $Y < 3$ egyidejűleg teljesül. Mivel X lehet 2, 3, Y lehet 0, 1, 2, így a valószínűség:

$$P(X < 4, Y < 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

b) Hasonlóan járhatunk el, mint az előbb. Most X lehet 3, 4, 5, 6, 7, 8, Y lehet 3, 4, 5, ezért a valószínűség:

$$P(3 \leq X \leq 8, Y > 2) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

c) Feltételes valószínűséget kell meghatároznunk, ehhez ki kell számítanunk az együttes bekövetkezés valószínűségét és feltétel valószínűségét. Az együttes bekövetkezés valószínűsége ($P(Y = 2, X < 10)$) úgy kapható meg, hogy az $Y = 2$ sorban összeadjuk azokat az elemeket, ahol $X < 10$, a feltétel valószínűsége ($P(X < 10)$) pedig úgy kapható meg, hogy a táblázatban összeadjuk az összes olyan éréket, amelyre $X < 10$. Így a feltételes valószínűség:

$$P(Y = 2|X < 10) = \frac{P(Y = 2, X < 10)}{P(X < 10)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

11.8. Feladat.
Legyen az X valószínűségi változó az előző, az Y pedig a dobott számok szorzatának hárommal vett maradéka. Határozzuk meg X és Y együttes eloszlását!

Megoldás:
Y lehetséges értékei 0, 1 és 2. Az előző példában látottakhoz hasonló gondolatmenettel azt kapjuk az együttes eloszlásra, hogy

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	0
2	0	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$	0	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0

11.9. Definíció.
Az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó komponenseinek eloszlását peremeloszlásoknak nevezzük.

11.10. Tétel.
Legyen (X, Y) kétdimenziós diszkrét valószínűségi vektorváltozó, a $P(X = x_i\,, Y = y_k)$ valószínűséget pedig jelölje p_{ik}. Ekkor a peremeloszlásokat (X és Y eloszlását) az alábbi formulákkal kapjuk meg:

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_k p_{ik} \qquad \text{és} \qquad q_k = P(Y = y_k) = \sum_i p_{ik}\,.$$

11.11. Példa.
Az együttes eloszlást megadó táblázat alapján egyszerűen meghatározhatóak a komponensek eloszlásai. Az X valószínűségi változó megfelelő értékeihez tartozó valószínűségeket a velük egy oszlopban levő elemek összegeként, az Y valószínűségi változó megfelelő értékeihez tartozó valószínűségeket pedig a velük egy sorban levő elemek összegeként kapjuk meg. A példában szereplő valószínűségi vektorváltozó peremeloszlásai:

$$X : \begin{cases} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{cases}$$

$$Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{cases} \qquad \text{egyszerűsítve:} \qquad Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{3}{18} & \frac{5}{18} & \frac{4}{18} & \frac{3}{18} & \frac{2}{18} & \frac{1}{18} \end{cases}.$$

A feladatban szereplő valószínűségi vektorváltozó esetében X eloszlása ugyanez lesz, Y eloszlása pedig:

$$Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{20}{36} & \frac{8}{36} & \frac{8}{36} \end{cases} \qquad \text{egyszerűsítve:} \qquad Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{cases}.$$

Az együttes eloszlásból egyértelműen meghatározhatóak a peremeloszlások, de fordítva ez már természetesen nem igaz. Ugyanazok a peremeloszlások származhatnak más együttes eloszlásokból is.

11.12. Példa.
Az X_1 és Y_1, valamint az X_2 és Y_2 valószínűségi változók együttes eloszlásai legyenek a következők:

$Y_1 \backslash X_1$	0	1	2
0	0,1	0,2	0,2
1	0,2	0,2	0,1

és

$Y_2 \backslash X_2$	0	1	2
0	0	0,3	0,2
1	0,3	0,1	0,1

A peremeloszlások:

$$X_1 = X_2 : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad Y_1 = Y_2 : \begin{cases} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{cases}.$$

Látható, hogy az együttes eloszlások eltérőek, de a peremeloszlások megegyeznek.

Emlékezzünk vissza a függetlenség definíciójára. Az A és B eseményeket akkor neveztük függetlennek, ha teljesült a $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ egyenlőség, vagyis az együttes bekövetkezés valószínűsége a valószínűségek szorzata. Két diszkrét valószínűségi változót akkor nevezünk függetlennek, ha ez minden velük kapcsolatos eseményre teljesül. Pontosabban

11.13. Definíció.
Az X és Y diszrét eloszlású valószínűségi változók függetlenek, ha

$$P(X = x_i,\, Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k)$$

teljesül minden x_i, y_k esetén.

11.14. Példa.
Legyen X_1 és Y_1, valamint X_2 és Y_2 együttes eloszlása a következő:

$Y_1 \backslash X_1$	0	1	2
-1	0,02	0,03	0,05
0	0,10	0,15	0,25
1	0,08	0,12	0,20

és

$Y_2 \backslash X_2$	0	1	2
-1	0,02	0,03	0,05
0	0,10	0,12	0,28
1	0,08	0,15	0,17

A peremeloszlások:

$$X_1 = X_2 : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad Y_1 = Y_2 : \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{cases}.$$

Könnyen leellenőrizhetjük, hogy X_1 és Y_1 függetlenek, hiszen az együttes bekövetkezés valószínűsége (a táblázat valamely cellájának értéke) mindig megegyezik a peremvalószínűségek szorzatával. X_2 és Y_2 viszont nem függetlenek, például

$$P(X_2 = 1,\, Y_2 = 0) = 0{,}12 \quad \neq \quad P(X_2 = 1) \cdot P(Y_2 = 0) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15\,.$$

11.15. Feladat.
Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlása az alábbi:

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Legyen $W = X + Y$, $Z = X \cdot Y$. Határozzuk meg W és Z együttes eloszlását! Független-e W és Z? És X és Y?

Megoldás:
W lehetséges értékei 0, 1 és 2, Z lehetséges értékei 0 és 1.

- $W = 0$ és $Z = 0$ akkor lehet, ha $X = 0$ és $Y = 0$. Ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$.
- $W = 1$ és $Z = 0$ akkor lehet, ha $X = 1$ és $Y = 0$ vagy $X = 0$ és $Y = 1$. Ennek valószínűsége $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.

- $W = 2$ és $Z = 0$ nem fordulhat elő, tehát a valószínűsége 0.
- $W = 0$ és $Z = 1$ nem fordulhat elő, tehát a valószínűsége 0.
- $W = 1$ és $Z = 1$ nem fordulhat elő, tehát a valószínűsége 0.
- $X = 2$ és $Z = 1$ akkor fordulhat elő, ha $X = 1$ és $Y = 1$, ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$.

Foglaljuk össze táblázatban is:

$Z\backslash W$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	$\frac{1}{4}$

A peremeloszlások:

$$W : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad Z : \begin{cases} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{cases} .$$

W és Z nem függetlenek, hiszen például

$$P(W = 1,\, Z = 1) = 0 \quad \neq \quad P(W = 1) \cdot P(Z = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} .$$

X és Y eloszlása:

$$X : \begin{cases} 0 & 1 \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad Y : \begin{cases} 0 & 1 \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{cases} .$$

X és Y sem függetlenek, hiszen például

$$P(X = 1,\, Y = 1) = \frac{1}{4} \quad \neq \quad P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{35}{144} .$$

11.2. Két folytonos valószínűségi változó együttes eloszlása

Egyetlen folytonos valószínűségi változó esetében a vele kapcsolatos valószínűségeket általában az eloszlásfüggvénye alapján határoztuk meg. Az X valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye annak valószínűségét adta meg, hogy $X < x$, tehát ilyenkor X értékei az x-től balra eső félegyenesen helyezkednek el, a nem nulla valószínűségű események pedig a valós tengely bizonyos részintervallumai. Két (X és Y) valószínűségi változó esetén is definiálhatjuk az eloszlásfüggvény fogalmát, mely az $X < x$ és $Y < y$ események együttes bekövetkezésének valószínűségét adja meg. Ekkor az (X, Y) számpárok lehetséges értékei pedig az x-től balra és az y-tól lefelé elhelyezkedő negyedsíkon helyezkednek el, a nem nulla valószínűségű események pedig nem nulla területű tartományok a síkon.

11.16. Definíció.
Azt a függvényt, amely minden valós (x, y) számpárhoz hozzárendeli annak valószínűségét, hogy az $X < x$ és $Y < y$ események együttesen bekövetkeznek, az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényének (az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényének) nevezzük. Azaz

$$F(x, y) = P(X < x,\, Y < y) .$$

11.17. Definíció.
Az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó első (második) komponensének eloszlását az X-hez (Y-hoz) tartozó peremeloszlásnak nevezzük, eloszlásfüggvényét pedig F_X-szel (F_Y-nal) jelöljük.

Az együttes eloszlásfüggvény rendelkezik néhány érdekes tulajdonsággal, melyek közvetlen következményei a definíciónak. Például ha csak az $X < x$ eseményt tekintjük, akkor az Y valószínűségi változó értéke bármi lehet. Ez annak az eseménynek felel meg, hogy $X < x$, $Y < \infty$. Így

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x,\, Y < \infty) = \lim_{y\to\infty} F(x, y)\,.$$

Ez alapján beláthatjuk azt is, hogy az együttes eloszlásfüggvény határértéke nulla, ha valamelyik változója $-\infty$-hez tart. Ugyanis

$$F(x, y) = P(X < x,\, Y < y) \leq P(X < x,\, Y < \infty) = F_X(x)\,.$$

Mivel $F_X(x)$ határértéke $-\infty$-ben nulla, így a fenti reláció miatt ebből már következik az állítás.

11.18. Tétel. (Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai)
Tetszőleges kétdimenziós (X, Y) valószínűségi vektorváltozó F eloszlásfüggvénye rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. Mindkét változójában monoton növő, azaz
$$\begin{aligned} &\text{ha } x_1 < x_2, \text{ akkor } F(x_1, b) \leq F(x_2, b)\\ &\text{ha } y_1 < y_2, \text{ akkor } F(a, y_1) \leq F(a, y_2)\,. \end{aligned}$$
3. Értéke nullához tart, ha bármelyik változója $-\infty$-hez tart, azaz
$$\lim_{x\to-\infty} F(x, y) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{y\to-\infty} F(x, y) = 0\,.$$
4. Értéke egyhez tart, ha mindkét változója ∞-hez tart, azaz
$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} F(x, y) = \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty} F(x, y) = 1\,.$$
5. Ha az egyik változóját rögzítjük és a másik ∞-hez tart, akkor az értéke a rögzített változó által meghatározott peremeloszlásfüggvény értékéhez tart, azaz
$$\lim_{x\to\infty} F(x, y) = F_Y(y) \quad \text{és} \quad \lim_{y\to\infty} F(x, y) = F_X(x)\,.$$

Egyetlen valószínűségi változó esetén a $\{a \leq X < b\}$ esemény valószínűsége $F(b) - F(a)$, vagyis az adott intervallumba esés valószínűsége meghatározható az eloszlásfüggvénynek az intervallum végpontjaiban felvett értékeiből. Ennek megfelelője két valószínűségi változó esetén az, hogy (X, Y) egy adott téglalapba esésének valószínűsége meghatározható az együttes eloszlásfüggvénynek a téglalap csúcsaiban felvett értékeiből. Pontosabban:

11.19. Tétel.
Legyen F az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye. Ekkor

$$P(a_1 \leq X < a_2\,,\, b_1 \leq Y < b_2) = F(a_2,b_2) - F(a_2,b_1) - F(a_1,b_2) + F(a_1,b_1)\,.$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz első lépésként az $\{X < a_2, Y < b_2\}$ eseményt fogjuk diszjunkt események összegére bontani:

$$\{X < a_2, Y < b_2\} = \{a_1 \leq X < a_2, b_1 \leq Y < b_2\} + \{X < a_1, Y < b_2\} + \{a_1 \leq X < a_2, Y < b_1\}$$

Az utolsó tagot még tovább lehet bontani, ezzel:

$$= \{a_1 \leq X < a_2, b_1 \leq Y < b_2\} + \{X < a_1, Y < b_2\} + \{X < a_2, Y < b_1\} - \{X < a_1, Y < b_1\}\,.$$

A valószínűségszámítás 3. axiómája szerint diszjunkt események összegének valószínűsége megegyezik a valószínűségeik összegével. A fent szereplő események valószínűsége kifejezhető az együttes eloszlásfüggvénnyel:

$$\begin{aligned} P(X < a_2, Y < b_2) &= F(a_2,b_2) \qquad & P(X < a_1, Y < b_2) &= F(a_1,b_2) \\ P(X < a_2, Y < b_1) &= F(a_2,b_1) \qquad & P(X < a_1, Y < b_1) &= F(a_1,b_1) \end{aligned}$$

Rendezés után azt kapjuk a valószínűségre, hogy

$$\begin{aligned} &P(a_1 \leq X < a_2\,,\, b_1 \leq Y < b_2) = \\ &\qquad = P(X < a_2, Y < b_2) - P(X < a_1, Y < b_2) - P(X < a_2, Y < b_1) + P(X < a_1, Y < b_1) = \\ &\qquad = F(a_2,b_2) - F(a_1,b_2) - F(a_2,b_1) + F(a_1,b_1)\,. \end{aligned}$$

□

Bár az együttes eloszlásfüggvényt elég egyszerűen definiáljuk, mégis csak ritkán használjuk valószínűségek meghatározására. Ennek oka a fenti tételből is sejthető. A tétel annak valószínűségét adja meg, hogy az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó értéke egy megadott téglapba esik. Már ebben a viszonylag egyszerű esetben is elég összetetten fejezhető ki a valószínűség az együttes eloszlásfüggvénnyel, de ha a tartomány bonyolultabb, akkor az eloszlásfüggvénnyel történő megadás már sokkal nehézkesebb. Ezért általában az együttes sűrűségfüggvényt használjuk, mely az egyváltozós esethez hasonlóan definiálható.

11.20. Definíció.
Az (X, Y) folytonos eloszlású valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye az az f függvény, melyre

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,.$$

A valószínűségszámítás axiómáiból és az együttes sűrűségfüggvény definíciójából azonnal következnek az együttes sűrűségfüggvény egyszerűbb tulajdonságai:

11.21. Tétel. (Az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai)
Tetszőleges folytonos eloszlású (X, Y) valószínűségi vektorváltozó f sűrűségfüggvénye rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. Értékei nem negatívok, azaz $f(x, y) \geq 0$.
2. Ha az eloszlásfüggvényt minden változója szerint egyszer parciálisan deriváljuk, akkor a sűrűségfüggvényt kapjuk, azaz
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = f(x,y)\,.$$
3. Ha mindegyik változójában $-\infty$-től ∞-ig integrálunk, akkor az integrál értéke egy:
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Tekintsünk egy kísérletet, melynek kimenetele az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó egy értéke, azaz egy számpár. Ekkor minden egyes eseménynek megfeleltethető a sík pontjainak olyan halmaza (A), melynél a pontok koordinátái az eseménynek megfelelő számpárok. Ilyenkor az esemény valószínűségét az együttes sűrűségfüggvény A tartomány feletti integrálásával kaphatjuk meg.

11.22. Tétel.
Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye f. Ekkor annak valószínűsége, hogy (X, Y) értéke az A tartományba esik:
$$P(A) = \iint\limits_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

11.23. Példa.
Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye legyen az alábbi:
$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{ha } 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$
Határozzuk meg a $P(1 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq 3)$ valószínűséget!

A kérdéses valószínűséget a sűrűségfüggvény megfelelő tartományon vett integrálja adja meg, azaz
$$P(1 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq 3) = \int\limits_{2}^{3} \int\limits_{1}^{3} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Először meg kell határoznunk a c paraméter értékét. Az együttes sűrűségfüggvény egyik alaptulajdonsága, hogy a teljes síkon vett integrálja 1, így

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{5}\int_{0}^{3} c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 15\cdot c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{15}.$$

Ezzel a keresett valószínűség

$$P(1 \le x \le 3,\, 2 \le y \le 3) = \int_{2}^{3}\int_{1}^{3} \frac{1}{15}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{15}.$$

Emlékezünk vissza arra, hogy ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye egy bizonyos intervallumon konstans (nem nulla) azon kívül pedig 0, akkor X egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Hasonló igaz kétdimenzióban is: ha (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye egy bizonyos tartományon nem nulla konstans, azonkívül pedig 0, akkor (X,Y) egyenletes eloszlású az adott tartományon. A fenti példában tehát egyenletes eloszlásról van szó. Arra is emlékezhetünk, hogy egyenletes eloszlásnál az intervallumok aránya alapján is meghatározható egy esemény valószínűsége. Hasonló igaz kétdimenzióban is: a jó esetnek és az összes esetnek megfelelő területek aránya adja meg egy esemény valószínűségét. Itt az összes esetnek megfeleltethető az a ponthalmaz, ahol $f(x,y)$ nem nulla, tehát egy 3×5-ös téglalap. Ezen belül a jó eseteknek megfelelő rész egy 2×1-es téglalap, így a valószínűség ezek területének hányadosa, azaz $\frac{2}{15}$.

11.24. Példa.

Ebben a példában az együttes sűrűségfüggvényből fogjuk az együttes eloszlásfüggvényt meghatározni. Ehhez az együttes sűrűségfüggvényt kell néhány alkalmas tartományon integrálni. Itt a legnehezebb feladat gyakran az integrálási határok megállapítása. Bár maga a sűrűségfüggvény nagyon egyszerű, a tartomány alakja miatt mégis öt különböző esetet kell majd vizsgálnunk. Ez is azt mutatja, hogy az együttes sűrűségfüggvény általában sokkal megfelelőbb a valószínűségi modell jellemzésére, mint az együttes eloszlásfüggvény.

Legyen tehát az együttes sűrűségfüggvény a következő:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{ha } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Ez azt jelenti, hogy az együttes sűrűségfüggvény egy olyan háromszög alakú tartományon nem nulla, melynek csúcsai a (0,0), (1,0) és (1,1) pontok. A háromszöget határoló egyenesek: $y=0$, $x=1$ és $y=x$. Az együttes eloszlásfüggvény meghatározásához $f(x,y)$-t kell integrálnunk a megfelelő tartományon. A probléma az, hogy a tartomány jellege x és y értékétől függ. A következő eseteket kell vizsgálnunk:

- $x \le 0$ vagy $y \le 0$ (legalább az egyik, de lehet mindkettő is),
- $0 \le y \le x \le 1$,
- $0 \le x \le y$ és $0 \le x \le 1$,
- $0 \le y \le 1$ és $x \ge 1$,
- $x \ge 1$ és $y \ge 1$.

Ha $x \le 0$ vagy $y \le 0$, akkor az integrálási tartomány teljesen kívül esik a háromszögön, tehát ekkor $F(x,y) = 0$.

Ha $x \ge 1$ és $y \ge 1$, akkor pedig a tartomány teljes mértékben tartalmazza a háromszöget, tehát $F(x,y) = 1$.

Ha $0 \le y \le x \le 1$, akkor a tartomány csúcsa a háromszög belsejében van, így az eloszlásfüggvény (vagyis a tartomány háromszögbe eső részének területe):

$$F(x,y) = \int_0^y \int_t^x 2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_0^y 2 \cdot (x-t) \,\mathrm{d}t = 2 \cdot \left[x \cdot t - \frac{t^2}{2} \right]_0^y = 2xy - y^2 .$$

Ha $0 \le x \le y$ és $0 \le x \le 1$, akkor a tartomány csúcsa a háromszög áfogója felett van, így az eloszlásfüggvény (vagyis a tartomány háromszögbe eső részének területe):

$$F(x,y) = \int_0^x \int_t^x 2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_0^x 2 \cdot (x-t) \,\mathrm{d}t = 2 \cdot \left[x \cdot t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = x^2 .$$

Ha $0 \le y \le 1$ és $x \ge 1$, akkor a tartomány csúcsa a háromszög függőleges befogójától jobbra esik, így az eloszlásfüggvény (vagyis a tartomány háromszögbe eső részének területe):

$$F(x,y) = \int_0^y \int_t^1 2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_0^y 2 \cdot (1-t) \,\mathrm{d}t = 2 \cdot \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^y = 2y - y^2 .$$

A fentieket összegezve az együttes eloszlásfüggvény:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \text{ vagy } y \le 0 \\ 2xy - y^2 & \text{ha } 0 \le y \le x \le 1 \\ x^2 & \text{ha } 0 \le x \le y \text{ és } 0 \le x \le 1 \\ 2y - y^2 & \text{ha } 0 \le y \le 1 \text{ és } x \ge 1 \\ 1 & \text{ha } x \ge 1 \text{ és } y \ge 1 \end{cases} .$$

Az együttes sűrűségfüggvénnyel összehasonlítva az együttes eloszlásfüggvényre kapott eredmény sokkal összetettebb, az (X,Y)-ra vonatkozó egyik legfontosabb tulajdonság csak nehezen olvasható ki belőle: az egyenletes eloszlás miatt a háromszögön belül azonos területű részekbe azonos valószínűséggel eshet (X,Y) értéke.

11.25. Feladat.
X és Y együttes sűrűségfüggvénye legyen a következő:

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

a) Mennyi a c konstans értéke? *b)* $P(X^2 + Y^2 \le 1) = ?$

Megoldás:

a) Mivel $f(x,y)$ sűrűségfüggvény, ezért a c konstans értéke annyi kell legyen, hogy $f(x,y)$ integrálja 1 legyen, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^1 cxy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = c \cdot \int_0^2 \int_0^1 xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = c \cdot \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_0^1 \mathrm{d}y = c \cdot \int_0^2 \frac{1}{2} y \,\mathrm{d}y =$$

$$= c \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = c \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1 .$$

b) A valószínűség meghatározásához azon a tartományon kell integrálni a sűrűségfüggvényt, ahol $x^2+y^2 \le 1$ teljesül. A feltételnek megfelelő ponthalmaz egy egységnyi sugarú körlap, de mivel a sűrűségfüggvény csak akkor különbözik nullától, ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 2$, ezért a körlapnak csak azt a darabját kell figyelembe venni, amely ebbe a tartományba esik.

$$P(X^2+Y^2 \le 1) = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)\cdot x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x - x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8}\,.$$

11.26. Definíció.
Az (X,Y) folytonos eloszlású valószínűségi vektorváltozó első (második) komponensének sűrűségfüggvényét az X-hez (Y-hoz) tartozó perem-sűrűségfüggvénynek nevezzük, és f_X-szel (f_Y-nal) jelöljük.

11.27. Tétel.
Ha X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y)$, akkor

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bizonyítás: A bizonyítást csak az egyik változóra mutatjuk be, a másikra természetesen ugyanúgy működik. Az együttes sűrűségfüggvény definíciója alapján:

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}s\,.$$

Képezzük mindkét oldal x szerinti deriváltját:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

□

11.28. Példa.
X és Y együttes sűrűségfüggvénye legyen az alábbi:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}\cdot(x+y^2) & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

A perem-sűrűségfüggvények meghatározása előtt igazoljuk azt, hogy valóban sűrűségfüggvényről van szó. Ehhez az kell, hogy a függvény legyen nemnegatív (ez láthatólag teljesül), továbbá az integrálja legyen 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}\cdot(x+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\cdot\int_0^1\int_0^1 x+y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{6}{5}\cdot\int_0^1\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]_0^1\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\cdot\int_0^1 x+\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\cdot\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6} = 1\,.$$

Tehát $f(x,y)$ valóban sűrűségfüggvény. A perem-sűrűségfüggvények meghatározásakor használjuk fel, hogy elég csak ott integrálni, ahol a függvény nem nulla. Így a perem-sűrűségfüggvények nullától különböző része:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{6}{5}\cdot(x+y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{6}{5}\cdot\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{5}x+\frac{2}{5}\,,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{6}{5}\cdot(x+y^2)\,\mathrm{d}x = \frac{6}{5}\cdot\left[\frac{x^2}{2}+xy^2\right]_0^1 = \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+y^2\right) = \frac{6}{5}y^2+\frac{3}{5}\,.$$

A perem-sűrűségfüggvények teljes alakja:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x+\frac{2}{5} & \text{ha } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{5}y^2+\frac{3}{5} & \text{ha } 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

11.29. Feladat.
X és Y együttes sűrűségfüggvénye legyen az alábbi:

$$f(x,y) = \begin{cases} c\cdot x^2y & \text{ha } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \text{ és } y\le 2x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

a) Mennyi a c konstans értéke?

b) Határozzuk meg a perem-sűrűségfüggvényeket!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény megadásából az látszik, hogy az csak a $(0;0)$, $(1;0)$ és $(1;2)$ pontok által meghatározott háromszögön különbözik nullától. A tartomány határoló egyenesei: $y=0$, $x=1$ és $y=2x$. Ezeknek az integrálási határok megállapításánál lesz fontos szerepük.

a) Mivel $f(x,y)$ sűrűségfüggvény, ezért c értéke abból határozható meg, hogy a függvény integrálja 1 kell, hogy legyen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{2x} c\cdot x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = c\cdot\int_0^1\left[x^2\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x}\mathrm{d}x = c\cdot\int_0^1 x^2\cdot\frac{4x^2}{2}\,\mathrm{d}x = c\cdot\int_0^1 2x^4\,\mathrm{d}x =$$

$$= c\cdot\left[2\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = c\cdot\frac{2}{5} = 1 \quad\Rightarrow\quad c = \frac{5}{2}\,.$$

b) Az együttes sűrűségfüggvényből könnyen megállapítható, hogy $f_X(x)$ 0 és 1, $f_Y(y)$ pedig 0 és 2 között vehet fel nullától eltérő értékeket. A háromszög alakú tartomány miatt viszont az integrálási határok már nem ezek lesznek. A vízszintes (x) koordináta a derékszögű háromszög átfogójától ($y = 2x$) a függőleges befogóig ($x = 1$) változhat, a függőleges (y) koordináta pedig a vízszintes befogótól ($y = 0$) az átfogóig ($y = 2x$). Így x szerint integrálva a határok $\frac{y}{2}$ és 1, y szerint integrálva pedig 0 és $2x$. Ezzel a perem-sűrűségfüggvények fő része:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2x} \frac{5}{2}\cdot x^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\cdot\left[x^2\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x} = \frac{5}{2}\cdot 2x^4 = 5\cdot x^4\,,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{y/2}^{1} \frac{5}{2}\cdot x^2 y\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}y\right]_{y/2}^{1} = \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{y}{3}-\frac{y^4}{24}\right) = \frac{5}{6}y\cdot\left(1-\frac{y^3}{8}\right).$$

A perem-sűrűségfüggvények teljes alakja:

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^4 & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{6}y\cdot\left(1-\frac{y^3}{8}\right) & \text{ha } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

11.30. Definíció.
Az X és Y valószínűségi változókat függetleneknek nevezük, ha az $X < x$ és $Y < y$ események minden x és y esetén függetlenek.

A függetlenség definíciójából azonnal következi az alábbi tétel:

11.31. Tétel.
Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor az együttes eloszlásfüggvény az egyes komponensek eloszlásfüggvényeinek a szorzata, azaz

$$F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)\,.$$

Bizonyítás:

$$F(x,y) = P(X<x,\,Y<y) = (\text{mert } X \text{ és } Y \text{ függetlenek}) = P(X<x)\cdot P(Y<y) = \\ = F_X(x)\cdot F_Y(y)\,.$$

□

Hasonló igaz független valószínűségi változóknál az együttes sűrűségfüggvényre is:

11.32. Tétel.
Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor az együttes sűrűségfüggvény az egyes komponensek sűrűségfüggvényeinek a szorzata, azaz

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)\,.$$

BIZONYÍTÁS: A bizonyításban az előző tételt használjuk fel, valamint azt, hogy az együttes sűrűségfüggvény az együttes eloszlásfüggvényből a változók szerinti parciális deriválással kapható meg:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \left[F_X(x) \cdot F_Y(y)\right]}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left[F_X(x) \cdot f_Y(y)\right]}{\partial x} = f_X(x) \cdot f_Y(y)\,.$$

□

11.33. Példa.
Függetlenség szempontjából vizsgáljuk meg az X és Y valószínűségi változókat, ha együttes sűrűségfüggvényük az alábbi:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

A függetlenség eldöntéséhez azt kell megvizsgálni, hogy teljesül-e az $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ egyenlőség. Ehhez meg kell határozni a perem-sűrűségfüggvényeket. A függvények fő része:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy \,\mathrm{d}y = 4 \cdot \left[x \cdot \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 4 \cdot \frac{x}{2} = 2x\,,$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4xy \,\mathrm{d}x = 4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot y\right]_0^1 = 4 \cdot \frac{y}{2} = 2y\,.$$

A perem-sűrűségfüggvények teljes alakja:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{ha } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

Látható, hogy teljesül az $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ egyenlőség, tehát X és Y függetlenek.

11.34. Példa.
Függetlenség szempontjából vizsgáljuk meg az X és Y valószínűségi változókat, ha együttes sűrűségfüggvényük az alábbi:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{ha } 0 \le x,\ 0 \le y \text{ és } x + y \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

Az együttes sűrűségfüggvény nagyon hasonlít az előzőre, így azt gondolnánk, hogy ahhoz hasonlóan a perem-sűrűségfügggvények szorzatára bomlik. Viszont ha egy kicsit jobban belegondolunk a függetlenség jelentésébe, akkor látszik, hogy X és Y nem lehetnek függetlenek. Ha pl. tudjuk, hogy $X = 0{,}5$, akkor a háromszög alakú tartomány miatt $P(Y \le 0{,}5) = 1$, míg ha $X = 0{,}8$, akkor $P(Y \le 0{,}2) = 1$, tehát X értékének ismerete információt nyújt Y értékéről (azon túl, hogy 0 és 1 közé esik), így nem lehetnek függetlenek.

Nézzük meg a perem-sűrűségfüggvényeket is. A háromszög alakú tartomány miatt az egyik változó szerinti integrálási határok függeni fognak a másik változótól. A vízszintes (x) koordináta a derékszögű háromszög függőleges befogójától ($x = 0$) az átfogójáig ($x = 1 - y$) változhat, a függőleges (y) koordináta pedig a vízszintes befogótól ($y=0$) az átfogóig ($y=1-x$). Így x szerint integrálva a határok 0 és $1-y$, y szerint integrálva pedig 0 és $1-x$.

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xy\,\mathrm{d}y = 24\cdot\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = 12\cdot x(1-x^2)\,,$$

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x = 24\cdot\left[\frac{x^2}{2}\cdot y\right]_0^{1-y} = 12\cdot y(1-y^2)\,.$$

A perem-sűrűségfüggvények teljes alakja:

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x(1-x^2) & \text{ha } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y^2) & \text{ha } 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

Mivel nem teljesül az $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ egyenlőség, így X és Y nem függetlenek.

11.3. Tételek, definíciók több valószínűségi változó együttes eloszlására

11.35. Definíció.
Azt a függvényt, amely minden valós $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ szám n-eshez hozzárendeli annak valószínűségét, hogy az

$$X_1<x_1,\quad X_2<x_2,\quad \ldots\quad X_n<x_n$$

események együttesen bekövetkeznek, az $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényének nevezzük. Azaz

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P(X_1<x_1, X_2<x_2,\ldots,X_n<x_n)\,.$$

11.36. Definíció.
Az $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ valószínűségi vektorváltozó i-edik komponensének eloszlását az X_i-hez tartozó peremeloszlásnak nevezzük, eloszlásfüggvényét pedig F_i-vel jelöljük.

11.37. Definíció.
Az $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ valószínűségi vektorváltozó folytonos eloszlású, ha az eloszlásfüggvénye integrálfüggvény, azaz van olyan f függvény, amelyre

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}t_n\ldots\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1\,.$$

Ezt az f függvényt a valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvényének nevezzük.

11.38. Definíció.
Az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ folytonos eloszlású valószínűségi vektorváltozó i-edik komponensének sűrűségfüggvényét az X_i-hez tartozó perem-sűrűségfüggvénynek nevezzük, és f_i-vel jelöljük.

11.39. Definíció.
Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változókat függetleneknek nevezük, ha az $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, ..., $X_n < x_n$ események minden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ esetén függetlenek.

A függetlenség definíciójából közvetlenül adódik az alábbi két állítás.

11.40. Tétel.
Ha az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó komponensei függetlenek, akkor az együttes eloszlásfüggvény az egyes komponensek eloszlásfüggvényeinek a szorzata, azaz

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_)=F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)\cdot\ldots\cdot F_n(x_n)\,.$$

11.41. Tétel.
Ha a folytonos eloszlású $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó komponensei függetlenek, akkor az együttes sűrűségfüggvény az egyes komponensek sűrűségfüggvényeinek a szorzata, azaz

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_)=f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot\ldots\cdot f_n(x_n)\,.$$

12. fejezet

Valószínűségi változók összege

Sokféle kérdésre választ kaphatunk az $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ valószínűségi változó vizsgálatával. Mint látható, Y_n n darab valószínűségi változó összegeként áll elő, így a teljes valószínűségi leíráshoz szükségünk lenne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ együttes eloszlására (eloszlásfüggvényére). Az alkalmazásokban azonban gyakorta találkozunk olyan esetekkel, amikor nincs szükség az általános n-dimenziós valószínűségi modell vizsgálatára, annak néhány jellemzője (várható értéke, szórása) felhasználásával már kielégítő választ kaphatunk a kérdésekre. Ebben a fejezetben valószínűségi változók összegének várható értékéről, szórásáról, sűrűségfüggvényéről lesz szó, a következő fejezetben pedig látni fogjuk, hogy valószínűségi változók összegének eloszlása bizonyos feltételek mellett normális eloszláshoz konvergál.

12.1. Valószínűségi változók összegének várható értéke és szórása

Először két valószínűségi változó összegének várható értékére mondunk ki tételt, amely szinte azonnal következik a várható érték definíciójából. Előtte nézzünk egy példát.

12.1. Példa.
Egy szabályos dobókockával dobunk. Ezzel kapcsolatban vezessünk be két valószínűségi változót:

$$X : \begin{cases} 0 & \text{, ha a dobott szám páros,} \\ 1 & \text{, ha a dobott szám páratlan.} \end{cases}$$

$$Y : \begin{cases} 0 & \text{, ha a dobott szám 1,} \\ 1 & \text{, ha a dobott szám 2, 3 vagy 4,} \\ 2 & \text{, ha a dobott szám 5 vagy 6.} \end{cases}$$

Mivel a dobókocka szabályos ezért X és Y eloszlása, majd pedig várható értéke is könnyen meghatározható.

$$X : \begin{cases} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(X) = \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(Y) = \frac{7}{6}.$$

Az összegük várható értékéhez írjuk fel X és Y együttes eloszlását.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

A táblázat segítségével nehézségek nélkül felírhatjuk $X+Y$ eloszlását.

$$X+Y: \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(X+Y) = \frac{10}{6}\,.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$E(X+Y) = \frac{10}{6} = \frac{3}{6} + \frac{7}{6} = E(X) + E(Y)\,.$$

A következő tételben látni fogjuk, hogy a kapott egyenlőség nem véletlen, hanem minden esetben fennáll.

12.2. Tétel. (Összeg várható értéke)
Ha az X és Y valószínűségi változók várható értéke létezik, akkor létezik az összegük várható értéke is, és

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)\,.$$

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás külön-külön végezzük el diszkrét, illetve folytonos esetre.

1. Diszkrét esetben:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_i \sum_k (x_i + y_k) \cdot p_{ik} = \sum_i \sum_k x_i \cdot p_{ik} + \sum_i \sum_k y_k \cdot p_{ik} = \\ &= \sum_i x_i \sum_k p_{ik} + \sum_k y_k \sum_i p_{ik} = \sum_i x_i \cdot p_i + \sum_k y_k \cdot p_k = E(X) + E(Y)\,. \end{aligned}$$

2. Folytonos esetben:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= E(X) + E(Y)\,. \end{aligned}$$

□

12.3. Következmény.
Teljes indukcióval belátható, hogy ha az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *valószínűségi változók várható értéke létezik, akkor az összegük várható értéke is létezik, és*

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)\,.$$

12.4. Példa.
Ha n-szer hajtunk végre független kísérleteket egy p valószínűségű esemény megfigyelésére, akkor a sikeres kísérletek száma binomiális eloszlású, melynek várható értéke $n \cdot p$. De azt is megtehetjük, hogy minden egyes kísérlethez hozzárendelünk egy-egy indikátor változót, melynek értéke 1, ha a kísérlet sikeres, és 0, ha nem. A kapott indikátor változók összege megadja a sikeres kísérletek számát. Egy darab indikátor változó várható értéke p, az n darab összegének a várható értéke pedig $n \cdot p$.

12.5. Tétel.
Ha az X és Y *független* valószínűségi változók várható értéke létezik, akkor létezik a szorzatuk várható értéke is, és

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)\,.$$

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás most is külön-külön végezzük el diszkrét, illetve folytonos esetre.

1. Diszkrét esetben:

$$E(X \cdot Y) = \sum_i \sum_k (x_i \cdot y_k) \cdot p_{ik} = \sum_i \sum_k (x_i \cdot y_k) \cdot (p_i \cdot q_k) = \sum_i x_i \cdot p_i \sum_k y_k \cdot q_k = \\ = E(X) \cdot E(Y)\,.$$

2. Folytonos esetben:

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot y) \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot y) \cdot (f_1(x) \cdot f_2(y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = \\ = E(X) \cdot E(Y)\,.$$

□

12.6. Példa.
Egy szabályos dobókockát dobjunk fel kétszer egymás után. Legyen X_1 az első, X_2 pedig a második dobás eredménye. Mivel az egyes dobások eredményei egymástól függetlenek, így X_1 és X_2 független valószínűségi változók, tehát szorzatuk várható értéke:

$$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{21}{6} \cdot \frac{21}{6} = \frac{49}{4} = 12{,}25\,.$$

12.7. Következmény.
Teljes indukcióval belátható, hogy ha az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók várható értéke létezik, akkor a szorzatuk várható értéke is létezik, és

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \ldots \cdot E(X_n)\,.$$

12.8. Tétel.
Ha az X és Y *független* valószínűségi változók szórása létezik, akkor létezik az összegük szórása is, és
$$D(X+Y)=\sqrt{D^2(X)+D^2(Y)}\,.$$

BIZONYÍTÁS: A bizonyítást a szórásnégyzetre végezzük el, amiből az állítás gyökvonással adódik.
$$D^2(X+Y)=E[(X+Y)^2]-E^2[X+Y]=E[X^2+2XY+Y^2]-(E(X)+E(Y))^2=$$
Kihasználva azt, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, valamint azt, hogy függetlenek szorzatának várható értéke a várható értékek szorzata:
$$\begin{aligned}&=E(X^2)+2\cdot E(X)\cdot E(Y)+E(Y^2)-E^2(X)-2\cdot E(X)\cdot E(Y)-E^2(Y)=\\&=E(X^2)-E^2(X)+E(Y^2)-E^2(Y)=\\&=D^2(X)+D^2(Y)\,.\end{aligned}$$
□

Általános esetben, ha X és Y nem feltétlenül függetlenek, akkor az összegük szórásnégyzete a következőképpen alakul:

12.9. Tétel.
Ha az X és Y valószínűségi változók szórásnégyzete létezik, akkor létezik az összegük szórásnégyzete is, és
$$D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2\cdot(E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y))\,.$$

BIZONYÍTÁS:
$$\begin{aligned}D^2(X+Y)&=E\left[(X+Y-E(X+Y))^2\right]=E[(X+Y)^2]-E^2(X+Y)=\\&=E(X^2+Y^2+2\cdot X\cdot Y)-E^2(X)-E^2(Y)-2\cdot E(X)\cdot E(Y)=\\&=E(X^2)-E^2(X)+E(Y^2)-E^2(Y)+2\cdot(E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y))=\\&=D^2(X)+D^2(Y)+2\cdot(E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y))\,.\end{aligned}$$
□

Megjegyzések:

1. A fenti tételben szereplő $E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$ kifejezést az X és Y valószínűségi változók kovarianciájának nevezzük, jelölése $\mathrm{cov}(X,Y)$. Azaz
$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)\,.$$
2. Ezzel a jelöléssel az X és Y valószínűségi változók összegének szórásnégyzete a következő alakban írható:
$$D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+2\cdot\mathrm{cov}(X,Y)\,.$$

12.11. Tétel.
Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor kovarianciájuk nulla, azaz $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, feltéve persze, hogy az ehhez szükséges várható értékek léteznek.

BIZONYÍTÁS: A bizonyításhoz azt kell felhasználni, hogy ha X és Y függetlenek, akkor $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

$$\mathrm{cov(X,Y)} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y)\,.$$

□

A fenti tétel megfordítása már nem igaz: ha X és Y kovarianciája 0, abból nem következik, hogy függetlenek. Erre példa az alábbi eset.

12.12. Példa.
Legyen az X valószínűségi változó eloszlása a következő:

$$X : \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{cases}.$$

Könnyen látható, hogy $E(X) = 0$. Legyen $Y = X^2$. Ekkor X és Y nyilvánvalóan nem függetlenek, hiszen az egyik a másik függvénye. Az Y valószínűségi változó eloszlása és várható értéke:

$$Y : \begin{cases} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(Y) = 0{,}6\,.$$

Nézzük most $X \cdot Y$ eloszlását. $X \cdot Y = X \cdot X^2 = X^3$, így a szorzat eloszlása és várható értéke:

$$X \cdot Y : \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(X \cdot Y) = 0\,.$$

Ezzel a kovariancia:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot 0{,}6 = 0\,.$$

Tehát most a kovarinacia nulla, de X és Y mégsem függetlenek.

12.13. Következmény.
Teljes indukcióval belátható, hogy ha az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók szórása létezik, akkor az összegük szórása is létezik, és

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_n)}\,.$$

12.14. Példa.
Ha n-szer hajtunk végre *független* kísérleteket egy p valószínűségű esemény megfigyelésére, akkor a sikeres kísérletek száma binomiális eloszlású, melynek szórásnégyzete $n \cdot p \cdot (1-p)$. Most is megtehetjük, hogy minden egyes kísérlethez hozzárendelünk egy-egy indikátor változót. Egy darab indikátor változó szórásnégyzete $p \cdot (1-p)$, az n darab *független* összegének a szórásnégyzete pedig $n \cdot p \cdot (1-p)$.

12.15. Tétel.
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók, azonos várható értékkel és szórással, azaz $E(X_i) = m$ és $D(X_i) = \sigma$ ($i = 1,2,\ldots,n$). Ekkor

1. $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = n \cdot m$
2. $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sigma\sqrt{n}$.

Bizonyítás:

1. Azt kell felhasználni, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, így
$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = m + m + \ldots + m = n \cdot m\,.$$
2. Azt kell felhasználni, hogy függetlenek összegének szórása a szórásnégyzetek összegének négyzetgyöke, így
$$\begin{aligned} D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &= \sqrt{D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_n)} = \\ &= \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2} = \sqrt{n \cdot \sigma^2} = \sigma\sqrt{n}\,. \end{aligned}$$

□

12.16. Példa.
Egy szabályos dobókockát 100-szor elgurítunk. A dobott számok összegének várható értéke ekkor az egyes dobások várható értékeinek összege, azaz ha X_i jelöli az i-edik dobás kimenetelét, akkor
$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_{100}) = 100 \cdot 3{,}5 = 350\,.$$
Mivel az egyes dobások eredményei egymástól függetlenek, így a dobott számok összegének szórása a szórásnégyzetek összegének négyzetgyöke:
$$\begin{aligned} D(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}) &= \sqrt{D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_{100})} = \sqrt{\frac{105}{36} + \ldots + \frac{105}{36}} = \\ &= \sqrt{100 \cdot \frac{105}{36}} = \frac{10}{6}\sqrt{105} \approx 17{,}0783\,. \end{aligned}$$

12.17. Feladat.
Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlása legyen a következő:

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0,15	0,20	0,15
0	0,06	0,08	0,06
1	0,09	0,12	0,09

a) $E(X+Y)=?$ *b)* $\mathrm{cov}(X,Y)=?$ *c)* $D(X+Y)=?$

Megoldás:
Az együttes eloszlás alapján könnyen felírhatjuk a peremeloszlásokat, vagyis X és Y eloszlását:

$$X:\left\{\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{array}\right. \qquad \text{és} \qquad Y:\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array}\right. .$$

Figyeljük meg, hogy minden egyes $X=x_i, Y=y_k$ eseményre fennáll, hogy az együttes bekövetkezésük valószínűsége megegyezik a valószínűségeik szorzatával, azaz

$$P(X=x_i, Y=y_k) = P(X=x_i)\cdot P(Y=y_k)\,,$$

ezért az X és Y valószínűségi változók függetlenek. Ez nagyon megkönnyíti majd a számításokat.

a) Az összeg várható értéke meghatározható az egyes valószínűségi változók várható értékeiből:

$$\left.\begin{array}{l} E(X) = -1\cdot 0{,}5 + 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 = -0{,}2 \\ E(Y) = 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 = 1 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad E(X+Y) = E(X)+E(Y) = -0{,}2+1 = 0{,}8\,.$$

b) Mivel X és Y függetlenek, ezért a bizonyított tétel szerint a kovarianciájuk nulla, $\mathrm{cov}(X,Y)=0$.

c) A függetlenség miatt most $D(X+Y)=\sqrt{D^2(X)+D^2(Y)}$, tehát az egyes valószínűségi változók szórásnégyzetét kell meghatározni. Ahhoz először a négyzeteik várható értéke kell:

$$X^2:\left\{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad E(X^2)=0{,}8 \qquad \text{és} \qquad Y^2:\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad E(Y^2)=1{,}6\,.$$

A fenti eredmények felhasználásával a szórásnégyzetek:

$$D^2(X) = E(X^2)-E^2(X) = 0{,}8-(-0{,}2)^2 = 0{,}76 \qquad \text{és} \qquad D^2(Y) = E(Y^2)-E^2(Y) = 1{,}6-1^2 = 0{,}6\,.$$

Végül a valószínűségi változók összegének szórása:

$$D(X+Y) = \sqrt{D^2(X)+D^2(Y)} = \sqrt{0{,}76+0{,}6} = \sqrt{1{,}36} \approx 1{,}1662\,.$$

12.18. Feladat.

Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlása legyen ugyanaz, mint az 1. Példában, azaz

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

a) $\mathrm{cov}(X,Y)=?$ *b)* $D(X+Y)=?$

Megoldás:
A peremeloszlások és a várható értékek:

$$X:\left\{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad E(X)=\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad Y:\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad E(Y)=\frac{7}{6}\,.$$

Az előző feladattal ellentétben most X és Y nem lesznek függetlenek. Ennek oka az, hogy nem teljesül az, hogy az együttes bekövetkezés valószínűsége minden esetben az egyes valószínűségek szorzata. Erre egy példa:

$$P(X=0,Y=0)=0 \quad\neq\quad P(X=0)\cdot P(Y=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.$$

a) Először meg kell határoznunk $X \cdot Y$ várható értékét:

$$X \cdot Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(X \cdot Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

Ezzel a kovariancia:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} = -\frac{1}{12}\,.$$

b) Az általános formula szerint $D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot \operatorname{cov}(X,Y)}$, így még meg kell határoznunk X és Y szórásnégyzetét, amihez pedig a négyzetük várható értéke kell:

$$X^2 : \begin{cases} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(X^2) = \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad Y^2 : \begin{cases} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(Y^2) = \frac{11}{6}\,.$$

Ezzel a szórásnégyzetek:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \text{és} \qquad D^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{11}{6} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}\,.$$

Végül az összeg szórása:

$$D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot \operatorname{cov}(X,Y)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{17}{36} + 2 \cdot \frac{-1}{12}} = \sqrt{\frac{20}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}7454\,.$$

12.2. Valószínűségi változók átlagának várható értéke és szórása

A statisztikai alkalmazásokban elengedhetetlenül fontos az átlag (számtani közép) használata. A következő tétel független, azonos várható értékkel és szórással rendelkező valószínűségi változók esetére mutatja meg az átlagolás valószínűségelméleti, statisztikai létjogosultságát: az átlag várható értéke ugyanannyi, mint egyetlen valószínűségi változó várható értéke, szórása viszont drasztikusan (a $\sqrt{n}$-ed részére) csökken egyetlen valószínűségi változó szórásához képest. Ezek szerint minél több valószínűségi változót átlagolunk, a kapott valószínűségi változó értékei annál jobban koncentrálódnak a várható érték körül.

12.19. Tétel.
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók, azonos várható értékkel és szórással, azaz $E(X_i) = m$ és $D(X_i) = \sigma$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Ekkor

1. Az átlaguk várható értéke m, azaz

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = m\,.$$

2. Az átlaguk szórása $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, azaz

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Bizonyítás:

1. Az előző tételt kell felhasználni, és azt, hogy a konstans szorzó kiemelhető a várható értékből:

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m\,.$$

2. Most is az előző tételt kell felhasználni, és azt, hogy a konstans szorzó a szórásból is kiemelhető:

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot \sigma\sqrt{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

□

12.20. Példa.
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_{400}$ független valószínűségi változók, a várható értékük legyen 40, a szórásuk pedig 2 (azaz most $m = 40$ és $\sigma = 2$). Ekkor az átlaguk várható értéke és szórása:

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{400}}{400}\right) = 40$$
$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{400}}{400}\right) = \frac{2}{\sqrt{400}} = \frac{2}{20} = 0{,}1\,.$$

Ha csak egyetlen valószínűségi változót nézünk, akkor annak a valószínűsége, hogy az értéke 38 és 42 közé esik (a Csebisev-egyenlőtlenség alapján, $\lambda = 1$):

$$P(|X_i - 40| < 2) \geq 1 - \frac{1}{1^2} = 0\,.$$

Ez nyilván nem mond túl sokat, ezt eddig is tudtuk. Nézzük meg, hogy mi a valószínűsége annak, hogy az átlag esik ilyen határok közé. Mivel az átlag szórása 0,1, ezért a Csebisev-egyenlőtlenségben most $\lambda = 20$ áll, így

$$P(|\text{átlag} - 40| < 2) \geq 1 - \frac{1}{20^2} = 0{,}9975\,.$$

Érvényesül tehát az átlag „koncentráló” tulajdonsága: az adott intervallumba esés valószínűsége csaknem 1, vagyis az értékek (az átlag értékei) sokkal inkább koncentrálódnak a várható érték körül.

12.21. Feladat.
Adott sok-sok független valószínűségi változó, mindegyik várható értéke 22, mindegyik szórása 4. Legalább hány elem átlagát kell képezni ahhoz, hogy az átlag szórása kevesebb, mint 0,5 legyen?

Megoldás:
Az adatok szerint most $m = 22$ és $\sigma = 4$. Az előbb bizonyított tétel szerint az átlag szórása $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ennek kell kisebbnek lennie 0,5-nél:

$$\frac{4}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{0{,}5} < \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad 64 < n\,.$$

Tehát 64-nél több valószínűségi változó átlagát kell vennünk (vagyis legalább 65-öt).

12.22. Feladat.
Adott n darab független valószínűségi változó, mindegyik várható értéke m, mindegyik szórása σ. A Csebisev-egyenlőtlenség felhasználásával adjunk becslést annak valószínűségére, hogy az átlaguk $m - \lambda \cdot \sigma$ és $m + \lambda \cdot \sigma$ közé esik $(\lambda > 0)$!

Megoldás:
Az átlag várható értéke m, szórása pedig $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, így

$$P(m - \lambda \cdot \sigma < \text{átlag} < m + \lambda \cdot \sigma) = P(|\text{átlag} - m| < \lambda \cdot \sigma) = P\left(|\text{átlag} - m| < \lambda \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\geq 1 - \frac{1}{(\lambda \cdot \sqrt{n})^2} = 1 - \frac{1}{\lambda^2 \cdot n}\,.$$

Tehát a szóban forgó esemény valószínűsége legalább $1 - \frac{1}{\lambda^2 \cdot n}$.

13. fejezet

A nagy számok törvényei

A köznyelvben gyakran előfordulnak homályos utalások valamiféle nagy számok törvényére. Sokak fejében ez nagyjából úgy él, hogy ha sokáig játszunk, akkor egyszer, valamikor majd *biztosan* nyerünk (ráadásul jó sokat, sőt még lottót sem kell hozzá venni ...).

Ebben a fejezetben a nagy számok törvényeiről lesz szó, természetesen matematikai, valószínűség elméleti értelemben. Általánosan nagy számok törvényének nevezünk minden olyan tételt, amely bizonyos valószínűségi változók számtani közepének (átlagának) stabilitását mondja ki, ha a valószínűségi változók száma minden határon túl nőhet. A valószínűség fogalmának szemléletes megalapozáskor láttuk, hogy ha nagyon sokszor, azonos körülmények között megismétlünk egy kísérletet, akkor a sikeres kísérletek relatív gyakorisága bizonyos stabilitást mutat, egy adott érték körül igadozik, melyet az esemény valószínűségének tekintünk. Hasonlóan igaz az is, hogy nagy számú kísérlet esetén az egyes kísérletek eredményeinek átlaga az elméleti várható érték körül ingadozik. A következőkben a Csebisev-egyenlőtlenség alapján az átlagra, majd a relatív gyakoriságra bizonyítjuk be a nagy számok törvényét.

13.1. A nagy számok törvénye az átlagra

A nagy számok törvényének Csebisev-féle alakja független, azonos várható értékű és szórású valószínűségi változók átlagának a közös várható értéktől való adott eltérésének valószínűségére ad becslést. Lényegileg arról van szó, hogy az átlag túlságosan nem térhet el a várható értéktől, olyan értelemben, hogy a nagy eltérés valószínűsége kicsi.

13.1. Tétel. (A nagy számok törvényének Csebisev-féle alakja)
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók, azonos várható értékkel és szórással, azaz $E(X_i) = m$ és $D(X_i) = \sigma$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Ekkor

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \cdot n}.$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz a Csebisev-egyenlőtlenséget kell alkalmazni az átlagra. Legyen $Y = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$. Ekkor a függetlenek átlagának várható értékére és szórására vonatkozó tétel alapján:

$$E(Y) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = m\,,$$
$$D(Y) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Ezzel a Csebisev-egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

$$P\left(|Y - m| \geq \lambda \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Legyen $\lambda = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$. Ezzel

$$\lambda \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \cdot n},$$

amiből a tétel állítása már közvetlenül adódik. □

13.2. Feladat.
Adjunk becslést arra, hogy legalább hányszor kell egy szabályos dobókockát feldobnunk ahhoz, hogy annak valószínűsége, hogy a dobott számok átlaga legalább 0,1-del eltér a várható értéktől, 0,05-nál kisebb legyen!

Megoldás:
Legyen X_i az i-edik dobás kimenetelét jelentő valószínűségi változó. Ekkor

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$
$$E(X_i^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$
$$D^2(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{105}{36}\,.$$

A nagy számok törvényének Csebisev-féle alakja szerint:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}\,.$$

Itt m egy darab valószínűségi várható értéke, azaz $m = E(X_i)$, σ^2 pedig egy darab valószínűségi változó szórásnégyzete, azaz $\sigma^2 = D^2(X_i)$. A feladat szerint az átlagnak a várható értéktől vett eltérése legalább 0,1, így most $\varepsilon = 0{,}1$. Olyan n-et kell találnunk, amelyre a bal oldalon álló valószínűség kisebb, mint 0,05. Ezt közvetve keressük meg: olyan n-et keresünk, amelyre a jobb oldalon álló kifejezés kisebb, mint 0,05, így a két oldal közötti reláció miatt a valószínűség is kisebb lesz, mint 0,05.

$$\frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} < 0{,}05 \qquad \text{behelyettesíve:}$$
$$\frac{\frac{105}{36}}{n \cdot 0{,}1^2} < 0{,}05 \qquad \text{rendezzük } n\text{-re:}$$
$$n > \frac{\frac{105}{36}}{0{,}05 \cdot 0{,}1^2} = \frac{210\,000}{36} = 5833{,}\dot{3}$$

n a dobások számát jelenti, ezért pozitív egész szám, így azt kapjuk, hogy $n \geq 5834$. Tehát ha legalább 5834-szer dobjuk fel a kockát, akkor annak valószínűsége, hogy a dobott számok átlaga legalább 0,1-del eltér a várható értéktől, 0,05-nál kisebb lesz. Figyelem: nem állítottuk azt, hogy ennél kevesebb dobással ez nem lehetséges!

13.3. Feladat.
Egy játékban 0,5 valószínűséggel nyerünk, vagy 0,5 valószínűséggel veszítünk 100 Ft-ot. Adjunk becslést arra, hogy hány játék után mondhatjuk el: a nyereményünk átlaga legalább 90%-os valószínűséggel 0,05-nál kevesebbel tér el a várható értéktől?

Megoldás:
Legyen X_i az i-edik játékban szerzett nyereményünket jelentő valószínűségi változó. X_i eloszlása:

$$X_i : \begin{cases} 100 & -100 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{cases}.$$

A várható értéke, a négyzetének várható értéke és a szórásnégyzete:

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 100 \cdot 0{,}5 + -100 \cdot 0{,}5 = 0 \\ E(X_i^2) &= 10\,000 \cdot 0{,}5 + 10\,000 \cdot 0{,}5 = 10\,000 \\ D^2(X_i) &= E(X_i^2) - E^2(X_i) = 10\,000 - 0^2 = 10\,000\,. \end{aligned}$$

A feladat szerint olyan n-et keresünk, amelyre teljesül, hogy:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - 0\right| < 0{,}05\right) \geq 0{,}9\,.$$

A valószínűségen belül fordított reláció áll, ezért a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakját is komplementer alakban írjuk fel:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}\,.$$

Most $m = 0$, $\sigma^2 = 10\,000$ és $\varepsilon = 0{,}05$. Olyan n-et keresünk, amelyre az egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés legalább 0,9, így a valószínűség is legalább 0,9 (azaz legalább 90%):

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} &\geq 0{,}9 && \text{behelyettesítve:} \\ 1 - \frac{10\,000}{n \cdot 0{,}05^2} &\geq 0{,}9 && \text{rendezzük } n\text{-re:} \\ n \geq \frac{10\,000}{0{,}1 \cdot 0{,}05^2} &= 40\,000\,000\,. \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy ha legalább 40 millió játékot jtszunk, akkor elmondhatjuk azt, hogy a nyereményünk átlaga legalább 90%-os valószínűséggel 0,05-nál kevesebbel tér el a várható értéktől. Most sem állítottuk azt, hogy ennél kevesebb nem elég.

13.2. A nagy számok törvénye a relatív gyakoriságra

A nagy számok Bernoulli-féle törvénye adott számú független kísérlet esetén a relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való adott eltérésének valószínűségére ad becslést. Kicsit pontatlanul megfogalmazva azt mondja ki a tétel, hogy a relatív gyakoriság nagyon nem térhet el az elméleti valószínűség értéktől, olyan értelemben, hogy a nagy eltérés valószínűsége kcsi.

13.4. Tétel. (A nagy számok Bernoulli-féle törvénye)
Végezzünk el n darab független kísérletet a p valószínűségű A esemény megfigyelésére. Tegyük fel, hogy a kísérletek során az A esemény k-szor következett be. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n}\,.$$

Bizonyítás: Rendeljünk minden egyes kísérlethez egy-egy karakterisztikus eloszlású valószínűségi változót:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } A \text{ esemény bekövetkezett az } i\text{-edik kísérletben} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

Ekkor X_i eloszlása, várható értéke és szórása:

$$X_i : \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{cases} \qquad E(X_i) = p \qquad D(X_i) = \sqrt{p \cdot (1-p)} .$$

Vegyük észre, hogy a sikeres kísérletek száma (k) az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók összege, így a $\frac{k}{n}$ hányados ezen valószínűségi változók átlaga. Alkalmazhatjuk tehát a nagy számok törvényének Csebisev-féle alakját az $m = p$ és $\sigma = \sqrt{p \cdot (1-p)}$ értékekkel, amiből a tétel állítása azonnal adódik. □

Megjegyzések:

1. A nagy számok Bernoulli-féle törvényét gyakran annak becslésére használjuk, hogy a relatív gyakoriság milyen valószínűséggel közelíti meg az adott A esemény p valószínűségét. Ehhez a tételt az alábbi formában alkalmazzuk:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n} .$$

2. A relatív gyakoriságok határértéke az esemény p valószínűségével egyezik meg, hiszen adott p és ε esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n} = 0 .$$

Pontosabban fogalmazva, a relatív gyakoriság sztochasztikusan konvergál az esemény p valószínűségéhez.

3. A nagy számok Bernoulli-féle törvényét akkor is használhatjuk a valószínűség becslésére, ha a megfigyelt A esemény p valószínűsége nem ismert. Mivel tetszőleges $0 \leq p \leq 1$ esetén teljesül, hogy $p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4}$, ezért

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n} \leq \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} .$$

Vagyis ismeretlen p esetén az alábbi alakokban használhatjuk a tételt:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} ,$$
$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} .$$

13.6. Feladat.

Egy pakli magyar kártyából 1000-szer húzunk visszatevéssel. Adjunk becslést annak valószínűségére, hogy a kihúzott pirosak számának relatív gyakorisága legalább 0,1-del eltér a piros húzás valószínűségétől, azaz 0,25-tól!

Megoldás:

A nagy számok Bernoulli-féle törvénye szerint:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}\,.$$

Esetünkben $\varepsilon = 0{,}1$, $p = 0{,}25$ és $n = 1000$. Ezeket a jobb oldalon behelyettesítve azt kapjuk, hogy a kérdéses valószínűség legfeljebb 0,01875 lehet.

13.7. Feladat.

Egy szabályos pénzérmét 10 000-szer feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az írások relatív gyakorisága 0,01-nál kevesebbel tér el az elméleti 0,5 valószínűségtől?

Megoldás:

A nagy számok Bernoulli-féle törvényének fordított alakja szerint:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| < \varepsilon\right) \geq 1-\frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}\,.$$

Esetünkben $\varepsilon = 0{,}01$, $p = 0{,}5$ és $n = 10\,000$. Ezeket a jobb oldalon behelyettesítve azt kapjuk, hogy a kérdéses valószínűségnek legalább 0,75-nak kell lennie.

13.8. Feladat.

Adjunk becslést arra, hogy legalább hányszor kell egy szabályos dobókockát feldobni ahhoz, hogy a négyesek relatív gyakorisága legalább 0,9 valószínűséggel 0,02-nál kevesebbel tér el $\dfrac{1}{6}$-tól!

Megoldás:

A feladat szerint olyan n-et kell keresnünk, amely esetén teljesül, hogy

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-\frac{1}{6}\right| < 0{,}02\right) \geq 0{,}9\,.$$

Használjuk ehhez a Bernoulli-féle törény fordított alakját:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| < \varepsilon\right) \geq 1-\frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}\,.$$

Most $\varepsilon = 0{,}02$ és $p = \frac{1}{6}$. Olyan n-et fogunk keresni, melyre a jobb oldalon álló kifejezés értéke legalább 0,9, így a relációk miatt a valószínűség értéke is legalább 0,9 lesz.

$$1-\frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2} \geq 0{,}9 \qquad \text{behelyettesítve:}$$

$$1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n \cdot 0{,}02^2} \geq 0{,}9 \qquad n\text{-re rendezve:}$$

$$n \geq \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{0{,}1 \cdot 0{,}02^2} = \frac{125\,000}{36} = 3472{,}\dot{2}\,.$$

Mivel n a dobások számát jelenti, így értéke csak egész szám lehet, tehát $n \geq 3473$. Ha legalább 3473-szor dobunk, akkor legalább 0,9 a valószínűsége annak, hogy a négyesek relatív gyakorisága 0,02-nál kevesebbel tér el $\dfrac{1}{6}$-tól.

13.9. Feladat.

Mi a helyzet az előző feladatban, ha a dobókockáról nem tudjuk, hogy szabályos?

Megoldás:

Ha nem tudjuk, hogy szabályos-e a dobókocka, akkor nem használhatjuk a $p = \frac{1}{6}$ értéket. Viszont tudjuk, azt, hogy $p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4}$, ezért:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4 \cdot n \cdot \varepsilon^2}\,.$$

Az eredeti feladathoz hasonlóan most is a fordított alakra lesz szükségünk:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{1}{4\cdot n\cdot\varepsilon^2}\,.$$

Olyan n-et keresünk, melyre teljesül, hogy a jobb oldalon álló kifejezés értéke legalább 0,9, így az is teljesül, hogy a valószínűség is legalább 0,9:

$$1-\frac{1}{4\cdot n\cdot\varepsilon^2}\geq 0{,}9 \qquad \text{behelyettesítve:}$$

$$1-\frac{1}{4\cdot n\cdot 0{,}02^2}\geq 0{,}9 \qquad n\text{-re rendezve:}$$

$$n\geq\frac{1}{4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}02^2}=6250\,.$$

Ekkor tehát ha legalább 6250-szer dobunk, akkor legalább 0,9 a valószínűsége annak, hogy a négyesek relatív gyakorisága 0,02-nál kevesebbel tér el az elméleti valószínűségtől.

13.10. Feladat.

Egy tömegtermelésben készülő terméket vizsgálunk, hatalmas mennyiség áll rendelkezésünkre. Becsüljük meg, hogy legalább hány elemű mintát kell venni ahhoz, hogy a hibás termékek arányát 99%-os biztonsággal, 0,05-nál kisebb eltéréssel meg tudjuk adni!

Megoldás:

Mivel hatalmas mennyiségről van szó és a minta nagysága várhatóan ennél sokkal kisebb lesz, ezért mindegy, hogy visszatevéses vagy visszatevés nélküli mintavétellel számolunk. A hibás termékek arányának megállapításkor tulajdonképpen azt keressük, hogy mi a valószínűsége annak, hogy hibás terméket választunk. Legyen ez az ismeretlen valószínűség p. A p valószínűségű esemény megfigyelésére hajtunk végre n darab kísérletet. Olyan n-et keresünk, melyre a relatív gyakoriságnak az elméleti valószínűségtől vett eltérése legalább 0,99 valószínűséggel 0,05-nál kisebb. A nagy számok Bernoulli-féle törvénye szerint a relatív gyakoriság és az elméleti valószínűség eltérése nagy valószínűséggel nem lehet akármekkora, azaz

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{p\cdot(1-p)}{n\cdot\varepsilon^2}\,.$$

Most p értéke nem ismert, ezért azt az alakot kell használnunk, amit az előző feladatban:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{1}{4\cdot n\cdot\varepsilon^2}\,.$$

Olyan n-et fogunk keresni, melyre teljesül, hogy a jobb oldalon álló kifejezés értéke legalább 0,99, így az is teljesül, hogy a valószínűség is legalább 0,99. Esetünkben $\varepsilon=0{,}05$. Ezzel:

$$1-\frac{1}{4\cdot n\cdot\varepsilon^2}\geq 0{,}99 \qquad \text{behelyettesítve:}$$

$$1-\frac{1}{4\cdot n\cdot 0{,}05^2}\geq 0{,}99 \qquad n\text{-re rendezve:}$$

$$n\geq\frac{1}{4\cdot 0{,}01\cdot 0{,}05^2}=10\,000\,.$$

Tehát ha legalább 10 000 elemű mintát veszünk, akkor a kapott relatív gyakoriság 99%-os biztonsággal 0,05-nál kevesebbel tér el a hibás termékek tényleges arányától.

Ha kevésbé biztos eredményt akarunk, akkor jóval kisebb elemszámú minta is elég. Az $\varepsilon=0{,}05$ értékhez 95%-os biztonság esetén $n\geq 2000$, 90%-os biztonság esetén pedig $n\geq 1000$ adódik.

14. fejezet

A központi határeloszlás tétel

A normális eloszlás a gyakorlatban (és az elméletbe is) az egyik legtöbbet használt eloszlás. Ennek egyik oka a központi határeloszlás tétel, melyek azt fejezi ki, hogy sok, független valószínűségi változó összege igen általános feltételek közelítőleg normális eloszlású. Erre egy példa a mérések pontatlansága: a teljes mérési hiba ugyanis sok apró hibából áll össze. A központi határeloszlás tétel miatt így a teljes mérési hiba normális eloszlású, ezért a normális eloszlást normális hibatörvénynek is szokás nevezni.

A központi határeloszlás tételt centrális határeloszlás tételnek is szokás nevezni, innen ered a gyakori CHT rövidítés.

14.1. A központi határeloszlás tétel

Az alábbi tétel a központi határeloszlás tétel legegyszerűbben megfogalmazott alakja.

14.1. Tétel. (Központi határeloszlás tétel)
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, azonos várható értékkel és szórással, azaz $E(X_i) = m$ és $D(X_i) = \sigma$. Ekkor az összegük standardizáltja határesetben ($n \to \infty$) standard normális eloszlású, azaz

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n \cdot m}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \Phi(x)\,.$$

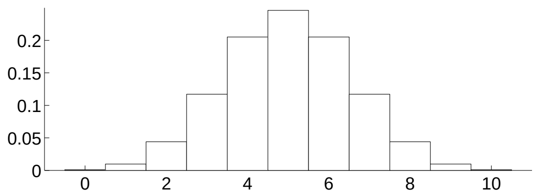
14.2. Következmény.

1. *Ha n elég nagy, akkor független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegének standardizáltja közelítőleg standard normális eloszlású, azaz*

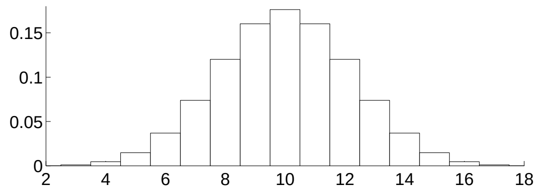
$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n \cdot m}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \approx \Phi(x)\,.$$

2. *Ha n elég nagy, akkor független, azonos eloszlású valószínűségi változók összege olyan normális eloszlással közelíthető, melynek várható értéke $n \cdot m$, szórása pedig $\sigma\sqrt{n}$.*

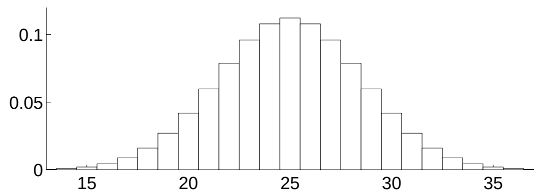
14.3. Példa.
Tudjuk, hogy az n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó felfogható n darab független, p paraméterű karakterisztikus eloszlású valószínűségi változó összegeként. Így a tétel szerint ha n elég nagy, akkor a binomiális eloszlás közelíthető normális eloszlással (ezt részletesebben is tárgyalni fogjuk a fejezetben).



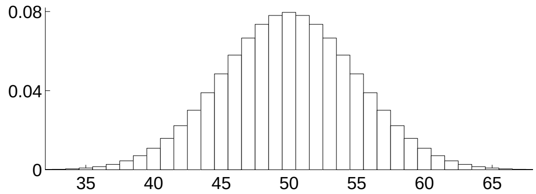
(a) $n = 10$



(b) $n = 20$



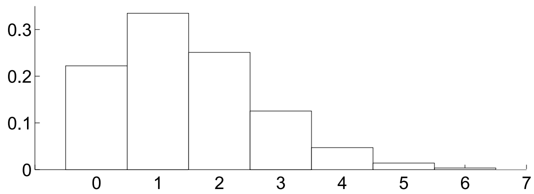
(c) $n = 50$



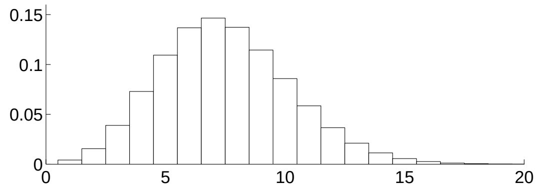
(d) $n = 100$

14.1. ábra. A n, $p = 0{,}5$ paraméterű binomiális eloszlás különböző n-ek esetén. Látható, hogy az eloszlás alakja n növekedésével egyre inkább hasonlít a haranggörbére.

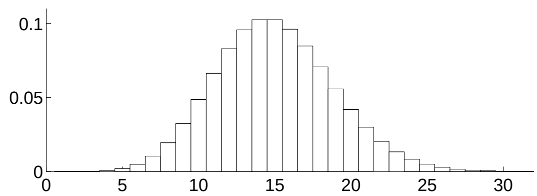
14.4. Példa.
Tudjuk, hogy két független, λ_1 és λ_2 paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó összege szintén Poisson-eloszlású, a paramétere pedig $\lambda_1 + \lambda_2$. Ebből következik, hogy n darab független, λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson-eloszlású az $n{\cdot}\lambda$ paraméterrel. A tétel állítása szerint az eloszlás n növekedésével egyre inkább közelít a normális eloszláshoz.



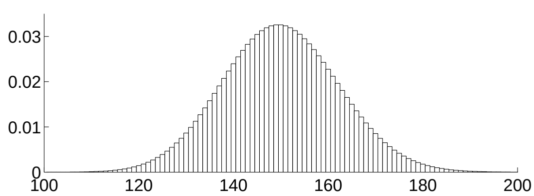
(a) $n = 1$



(b) $n = 5$



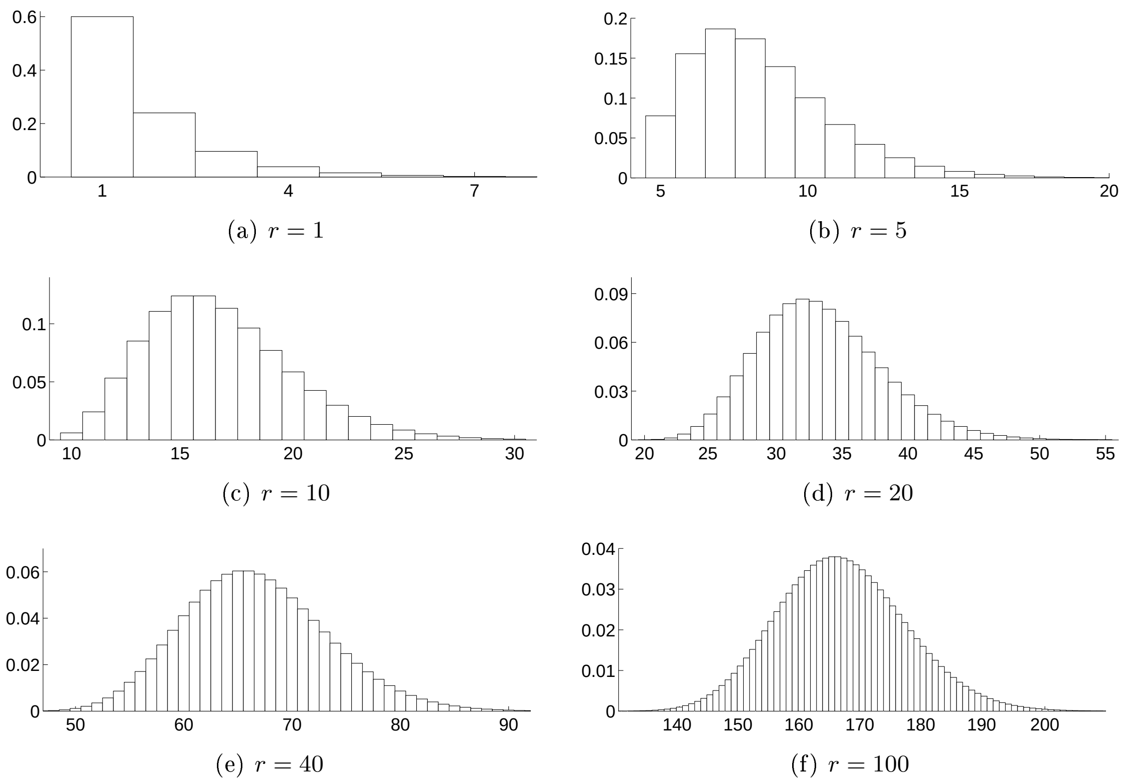
(c) $n = 10$



(d) $n = 100$

14.2. ábra. n darab, független, $\lambda = 1{,}5$ paraméterű Poisson-eloszlás összege különböző n-ek esetén. Látható, hogy az eloszlás alakja n növekedésével egyre inkább hasonlít a haranggörbére.

14.5. Példa.
Ha addig hajtunk végre független kísérleteket egy p valószínűségű esemény megfigyelésére, amíg az be nem következik, akkor a szükséges kísérletek száma p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó. Ha nem az első, hanem az r-edik sikeres kísérletig próbálkozunk, akkor a kísérletek száma r és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó, amely így értelmezhető r darab független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó összegeként is. Így ha r nagy, akkor a negatív binomiális eloszlás közelíthető normális eloszlással.



(a) $r = 1$ (b) $r = 5$ (c) $r = 10$ (d) $r = 20$ (e) $r = 40$ (f) $r = 100$

14.3. ábra. Az r, $p = 0{,}6$ paraméterű negatív binomiális eloszlás különféle r-ek esetén. Az eloszlás alakja r növekedtével itt is egyre inkább hasonlít a haranggörbére.

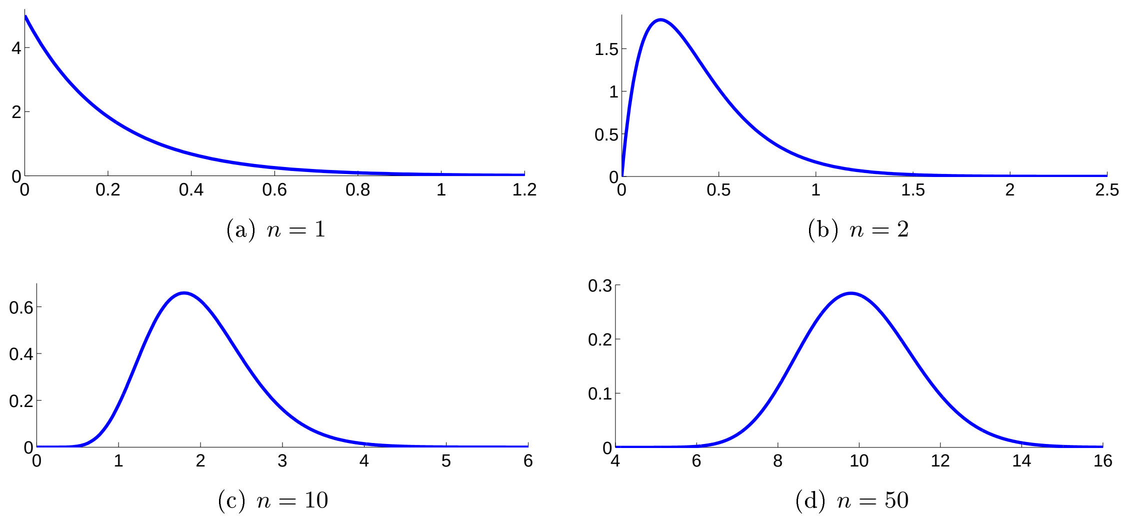
14.6. Példa.
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, és legyen $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Ekkor Y eloszlása λ, n paraméterű gamma-eloszlás.
A sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda^n \cdot x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}.$$

A várható értéke és a szórása:

$$E(Y) = \frac{n}{\lambda} \qquad D(Y) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}.$$

Ha X_i valamely esemény $i - 1$-edik és i-edik bekövetkezése között eltelt időt jelenti, akkor Y az n-edik bekövetkezésig eltelt teljes időt adja meg. Azaz, ha a két esemény között eltelt idő λ paraméterű exponenciális eloszlású, akkor az az időtartam, amely alatt az esemény n-szer bekövetkezik λ, n paraméterű gamma-eloszlású. Mivel a gamma-eloszlás független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegeként állítható elő, ezért a központi határeloszlástétel miatt $n \to \infty$ esetén a gamma-eloszlás normális eloszláshoz tart.



14.4. ábra. n darab, független, $\lambda = 5$ paraméterű exponenciáls eloszlás összege különböző n-ek esetén. Látható, hogy az eloszlás alakja n növekedésével egyre inkább hasonlít a haranggörbére.

14.7. Feladat.

Adott 400 darab független, azonos eloszlású valószínűségi változó, melyek várható értéke 8, szórása 3. Mekkora lehet annak valószínűsége, hogy ezek összege kevesebb, mint 3800?

Megoldás:
Legyen X_i az i-edik valószínűségi változó ($i = 1{,}2, \ldots, 400$). A feladat az $X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} < 3800$ esemény valószínűségének meghatározása. A központi határeloszlás tétel alapján:

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n \cdot m}{\sigma \cdot \sqrt{n}} < x\right) \approx \Phi(x)\,.$$

A zárójelben álló kifejezést átalakítva:

$$P\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n < x \cdot \sigma\sqrt{n} + n \cdot m\right) \approx \Phi(x)\,.$$

Esetünkben 400 valószínűségi változóról van szó, így $n = 400$, a várható értékük $m = E(X_i) = 8$, a szórásuk $\sigma = D(X_i) = 3$, így $n \cdot m = 400 \cdot 8 = 3200$ és $\sigma\sqrt{n} = 3 \cdot \sqrt{400} = 60$. Most $x \cdot \sigma\sqrt{n} + n \cdot m = 3800$, ebből pedig az előzőek behelyettesítésével az következik, hogy $x = 10$, így a keresett valószínűség:

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} < \underbrace{10}_{x} \cdot \underbrace{60}_{\sigma\sqrt{n}} + \underbrace{3200}_{n \cdot m}) \approx \Phi(10) \approx 1\,.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ez a valószínűség gyakorlatilag 1.

14.8. Feladat.

Adott 625 darab független, azonos eloszlású valószínűségi változó, melyek várható értéke 20, szórása 4. Mekkora lehet annak valószínűsége, hogy ezek átlaga kevesebb, mint 19,8?

Megoldás:
Legyen X_i az i-edik valószínűségi változó ($i = 1{,}2, \ldots, 625$). A feladat az $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{625}}{625} < 19{,}8$ esemény valószínűségének meghatározása. A központi határeloszlás tétel alapján:

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n \cdot m}{\sigma \cdot \sqrt{n}} < x\right) \approx \Phi(x)\,.$$

Osszuk el a tört számlálóját és nevezőjét is n-nel:

$$P\left(\frac{\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n \cdot m}{n}}{\dfrac{\sigma \cdot \sqrt{n}}{n}} < x\right) = P\left(\frac{\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < x\right).$$

Ebből kifejezhető az átlagra vonatkozó valószínűség:

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} < x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m\right).$$

A feladat szerint $n = 625$, $m = E(X_i) = 20$ és $\sigma = D(X_i) = 4$. Most

$$x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m = 19{,}8 \qquad \text{Ebbe behelyettesítve az előzőeket:}$$

$$x \cdot \frac{4}{\sqrt{625}} + 20 = 19{,}8 \qquad x\text{-et kifejezve:}$$

$$x = -0{,}2 \cdot 254 = -1{,}25\,.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{625}}{625} < 19{,}8\right) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{625}}{625} < \underbrace{-1{,}25}_{x} \cdot \underbrace{0{,}16}_{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + \underbrace{20}_{m}\right)$$

$$\approx \Phi(-1{,}25) = 1 - \Phi(1{,}25) \approx 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056\,.$$

14.9. Feladat.

Egy fűrésztelepen 100 darab, azonos fajtájú deszkát fektetnek egymásra és kötnek össze. A deszkák átlagos vastagsága 1 cm, 1 mm szórással. Jelölje Y egy ilyen köteg centiméterben mért vastagságát.

a) Határozzuk meg közelítőleg a $P(Y < 98)$ és $P(97 < Y < 103)$ valószínűségeket!

b) Adjuk meg annak a tárolóhelynek a legkisebb d magasságát, amelyben a fenti típusú kötegeket legalább 99%-os valószínűséggel tárolni tudjuk!

Megoldás:

a) Legyen X_i az i-edik deszka vastagságát jelentő valószínűségi változó, $m = E(X_i) = 1$, $\sigma = D(X_i) = 0{,}1$ (cm-ben). Ekkor $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$. A deszkák vastagságai tekinthetőek független, azonos eloszlású valószínűségi változóknak (független: az egyik vastagsága nem befolyásolja a másikét; azonos eloszlású: ugyanazon a gépen vágták). A feladat megoldható ugyanolyan eljárással, mint tettük azt az ehhez hasonló első feladatban, de a változatosság kedvéért most fordítva fogunk eljárni. A CHT szerint független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegének standardizáltja közelítőleg standard normális eloszlású. A standardizáláshoz szükségünk lesz Y várható értékére és szórására. Tudjuk, hogy független valószínűségváltozók összegének várható értéke a várható értékek összege, így

$$E(Y) = E(X_1) + \ldots + E(X_{100}) = 100 \cdot 1 = 100\,.$$

Továbbá független valószínűségváltozók összegének szórása a szórásnégyzetek összegének négyzetgyöke, így

$$D(Y) = \sqrt{D^2(X_1) + \ldots + D^2(X_{100})} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1^2} = 1\,.$$

Ezzel a keresett valószínűségek:

$$P(Y < 98) = P\left(\frac{Y - E(Y)}{D(Y)} < \frac{98 - E(Y)}{D(Y)}\right) = P\left(\frac{Y - 100}{1} < \frac{98 - 100}{1}\right) =$$
$$= P(Y^* < -2) \approx \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228\,.$$

$$P(97 < Y < 103) = P\left(\frac{97 - E(Y)}{D(Y)} < \frac{Y - E(Y)}{D(Y)} < \frac{103 - E(Y)}{D(Y)}\right) =$$
$$= P\left(\frac{97 - 100}{1} < \frac{Y - 100}{1} < \frac{103 - 100}{1}\right) = P(-3 < Y^* < 3) \approx$$
$$\approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 2 \cdot \Phi(3) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9987 - 1 = 0{,}9974\,.$$

b) Tehát keressük azt a d-t, amelyre $Y < d$ legalább 0,99 valószínűséggel.

$$P(Y < d) = P\left(\frac{Y - E(Y)}{D(Y)} < \frac{d - E(Y)}{D(Y)}\right) = P\left(\frac{Y - 100}{1} < \frac{d - 100}{1}\right) =$$
$$= P(Y^* < d - 100) \approx \Phi(d - 100)\,.$$

Vagyis olyan d-t keresünk, melyre $\Phi(d - 100) \geq 0{,}99$. Ebből az következik, hogy $d - 100 \geq 2{,}32$, tehát $d \geq 102{,}32$.

14.10. Feladat.

Egy tömegkiszolgáló rendszerbe reggel nyolctól egymástól függetlenül, véletlenszerű időpontokban érkeznek az igények. Az igények beérkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2 perc várható értékkel.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy a 100. igény beérkezéséig legalább három és fél órát kell várni?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy a 100. igény beérkezése 11 és fél tizenkettő között történik?

c) Átlagosan mennyit kell várni a 100. igény beérkezéséig?

Megoldás:

a) Legyen az X_i az $i-1$-edik és az i-edik igény beérkezése között eltelt idő percekben (X_1 pedig reggel nyolctól az első igény beérkezéséig eltelt idő). Ekkor X_i $(i = 1,2,\ldots)$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, így a várható értéke és a szórása megegyezik, tehát percekben számolva $E(X_i) = 2$ és $D(X_i) = 2$. A századik igény beérkezéséig összesen $X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ idő telik el, a kérdés pedig annak a valószínűsége, hogy ez legalább 210 perc (azaz három és fél óra). A feladatot az előzőhöz hasonlóan oldjuk meg, így szükségünk lesz az összeg várható értékére és szórására:

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_{100}) = 200$$
$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}) = \sqrt{D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_{100})} = 20\,.$$

A keresett valószínűségpedig:

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} \geq 210) = 1 - P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} < 210) =$$
$$= 1 - P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} - 200}{20} < \frac{210 - 200}{20}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{210 - 200}{20}\right) =$$
$$= 1 - \Phi(0{,}5) \approx 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085\,.$$

A gamma-eloszlás alapján számolt (tehát a pontos) érték 0,2998. Ettől a becsléssel kapott eredmény kevesebb, mint 0,01-dal tér el.

b) Ekkor a századik igény beérkezéséig eltelt idő percekben számolva 180 és 210 közé esik. Hasonlóan járhatunk el, mint előbb:

$$P(180 < X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} < 210) =$$
$$= P\left(\frac{180 - 200}{20} < \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} - 200}{20} < \frac{210 - 200}{20}\right) \approx$$
$$\approx \Phi(0{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(0{,}5) - (1 - \Phi(1)) \approx 0{,}6915 + 0{,}8413 - 1 = 0{,}5328\,.$$

A gamma-eloszlás alapján számolt érték 0,5420. Ettől a becsléssel kapott eredmény most is kevesebb, mint 0,01-dal tér el.

c) Mivel a két igény beérkezése között eltelt idő várható értéke 2 perc, így a 100. igény beérkezéséig eltelt idő várható értéke (amit persze már többször felhasználtunk) 200 perc, tehát átlagosan 200 percet kell várni.

14.11. Feladat.
Egy szelet tortában átlagosan 4 szem mazsola van. Az egy szeletben lévő mazsolák száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető. A cukrászdában egy nagy tálcán 100 szelet torta van. Adjunk becslést annak valószínűségére, hogy legalább 370 szem mazsola van a tálcán!

Megoldás:
Az i-edik tortaszeletben levő mazsolák száma legyen X_i ($i = 1{,}2, \ldots, 100$). Ekkor X_i Poisson eloszlású valószínűségi változó, $E(X_i) = 4 = \lambda$ és $D(X_i) = 2 = \sqrt{\lambda}$. A nagy tálcán levő mazsolák száma az egyes szeletekben levő mazsolák számának összege, azaz $X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$. A feladat tehát a következő valószínűség meghatározása (becslése):

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} \geq 370) = ?$$

A központi határeloszlás tétel szerint független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegének standardizáltja közelítőleg standard normális eloszlású. Az X_i valószínűségi változók összegének várható értéke $100 \cdot 4 = 400$, az összegük szórása pedig $2 \cdot \sqrt{100} = 20$. Ezzel

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} \geq 370) &= P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} - 400}{20} \geq \frac{370 - 400}{20}\right) = \\ &= P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100} - 400}{20} \geq -1{,}5\right) \approx 1 - \Phi(-1{,}5) = 1 - (1 - \Phi(1{,}5)) = \\ &= \Phi(1{,}5) \approx 0{,}9332\,. \end{aligned}$$

Elég jó közelítést kaptunk, mert a pontos érték kb. 0,9378.

14.2. A Moivre-Laplace tétel

14.12. Tétel. (Moivre-Laplace tétel)
Legyen X binomiális eloszlású valószínűségi változó az n és p paraméterekkel. Ekkor

1. Annak valószínűsége, hogy X értéke pontosan k (a Moivre-Laplace tétel lokális alakja):

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \varphi\left(\frac{k - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot e^{-\frac{(k-n\cdot p)^2}{2np(1-p)}}\,.$$

2. Annak a valószínűsége, hogy X értéke a és b közé esik (a Moivre-Laplace tétel globális alakja):

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p}}\right)\,.$$

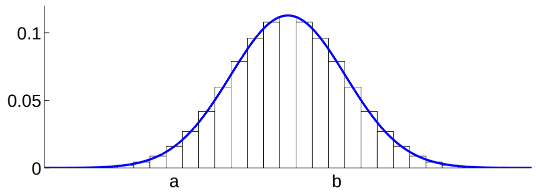
Megjegyzések:

1. A fenti tételben a közelítés annál jobb, minél nagyobb n értéke, és minél közelebb van p értéke 0,5-hez.

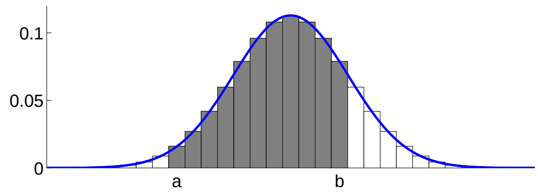
2. A tételben diszkrét valószínűségi változót közelítünk folytonossal. Jobb közelítés kapunk, ha alkalmazzuk az úgynevezett folytonossági korrekciót, azaz a helyett $a - 0{,}5$, b helyett pedig $b + 0{,}5$ kerül a formulába:

$$P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b + 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p}}\right).$$

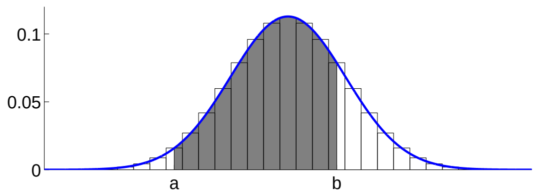
3. Mivel a binomiális eloszlású valószínűségi változó tekinthető n darab indikátor eloszlású valószínűségi változó összegének, ezért a Moivre-Laplace tétel valójában a központi határeloszlás tétel speciális esete, amikoris az X_i-k karakterisztikus eloszlásúak, $E(X_i) = p$ és $D(X_i) = \sqrt{p(1-p)}$.



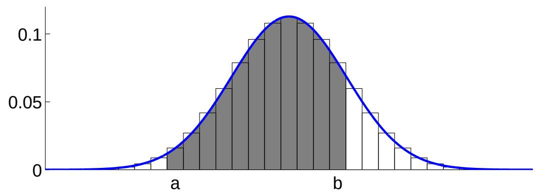
(a) Az n és p paraméterű binomiális eloszlás, valamint az $m = n \cdot p$ és $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye.



(b) Az $a \le X \le b$ esemény valószínűsége a binomiális eloszlás megfelelő tagjainak összegével, azaz a satírozott területek összegével egyenlő.



(c) Ez a valószínűség közelíthető a sűrűségfüggvény alatti terület a és b közötti részével.



(d) A valószínűség jobb közelítését kapjuk, ha a sűrűségfüggvény alatti terület $a - 0{,}5$ és $b + 0{,}5$ közötti részét vesszük.

14.5. ábra. Ha X n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor a $P(a \le X \le b)$ valószínűség a Moivre-Laplace tétel alapján normális eloszlás segítségével közelíthető.

14.14. Feladat.

Egy szabályos pénzérmét sokszor feldobunk. Annak nagyobb a valószínűsége, hogy legalább 55 fejet kapunk az első 100 dobásból, vagy pedig annak, hogy legalább 220 fejet kapunk az első 400 dobásból?

Megoldás:

Jelentse a dobott fejek számát az első esetben X_1, a másodikban X_2. Mindkét esetben előre rögzített számú kísérletet hajtunk végre, a sikeres kísérlet valószínűsége végig ugyanannyi, így X_1 és X_2 is binomiális eloszlású valószínűségi változó az $n_1 = 100$, $p = 0{,}5$, illetve az $n_2 = 400$, $p = 0{,}5$ paraméterekkel. A kérdéses valószínűségek:

$$P(X_1 \ge 55) = \sum_{k=55}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{100-k} \approx 0{,}1841$$
$$P(X_2 \ge 220) = \sum_{k=220}^{400} \binom{400}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{400-k} \approx 0{,}0255\,.$$

Ezeket a valószínűségeket egyszerű számológéppel kissé nehézkes kiszámítani, de az igazán ponos eredményre általában nincs is szükség. Mivel binomiális eloszlású valószínűségi változókról van szó, ezért a kérdéses valószínűségeket közelíthetjük a Moivre–Laplace tétel segítségével:

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 55) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{55 - n_1 \cdot p}{\sqrt{n_1 p(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{55 - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = 1 - \Phi\left(1\right) \approx \\ &\approx 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587\,. \\ P(X_2 \geq 220) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{220 - n_2 \cdot p}{\sqrt{n_2 p(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{220 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = 1 - \Phi(2) \approx \\ &\approx 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228\,. \end{aligned}$$

Jobb közelítést kapunk, ha használjuk a folytonossági korrekciót is:

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 55) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{55 - 0{,}5 - n_1 \cdot p}{\sqrt{n_1 p(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{55 - 0{,}5 - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(0{,}9\right) \approx 1 - 0{,}8159 = 0{,}1841\,. \\ P(X_2 \geq 220) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{220 - 0{,}5 - n_2 \cdot p}{\sqrt{n_2 p(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{220 - 0{,}5 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = \\ &= 1 - \Phi(1{,}95) \approx 1 - 0{,}9744 = 0{,}0256\,. \end{aligned}$$

A kapott eredményekből látható, hogy a Moivre–Laplace tétel segítségével megfelelő közelítést kaptunk, továbbá az is megfigyelhető, hogy a folytonossági korrekció tovább csökkentette a közelítés hibáját. A valószínűségek kiszámítása nélkül is el lehetett volna dönteni, hogy a két eset közül melyik valószínűbb. Mindkét esetben binomiális eloszlásról volt szó, ami közelíthető normálissal. Az elsőben legalább egy, a másodikban pedig legalább két szórással kellett volna meghaladni a várható értéket. Nyilvánvaló, hogy az utóbbinak jóval kisebb a valószínűsége.

14.15. Feladat.

Az egyik félévben a 150 fős évfolyam számára kiírt *Valószínűség-számítás és matematikai statisztika* című előadást tévedésből egy 100 fő befogadására alkalmas terembe tették. A hallgatók egymástól függetlenül 0,6 valószínűséggel mennek el az órára.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy alkalommal nem fér be minden megjelent hallgató a terembe?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy a félév során mindig minden megjelent befér a terembe?

Megoldás:

a) Legyen a megjelent hallgatók számát jelentő valószínűségi változó X. Összesen 150 hallgató van, akik egymástól függetlenül 0,6 valószínűséggel jönnek el, így X binomiális eloszlású valószínűségi változó az $n = 150$ és $p = 0{,}6$ paraméterekkel. Akkor nem fér be minden megjelent, ha legalább 101 fő jelenik meg. Ennek valószínűsége:

$$P(X \geq 101) = \sum_{k=101}^{150} \binom{150}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{150-k} \approx 0{,}0389\,.$$

A Moivre–Laplece tétel alapján közelítve:

$$\begin{aligned} P(X \geq 101) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{101 - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{101 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{150 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{11}{6}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}83) \approx 1 - 0{,}9664 = 0{,}0336\,. \end{aligned}$$

Ha a folytonossági korrekciót is használjuk:

$$P(X \geq 101) \approx 1 - \Phi\left(\frac{101 - 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{101 - 0{,}5 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{150 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{10{,}5}{6}\right) = 1 - \Phi(1{,}75) \approx 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401\,.$$

A korrekciós tagot is tartalmazó kifejezés most is jobban közelíti a valószínűséget.

b) Ez akkor történik meg, ha a megjelentek száma minden héten (14 hétből áll a szorgalmi időszak) legfeljebb 100. Ennek valószínűsége $[P(X \leq 100)]^{14}$.

Binomiális eloszlással számolva:

$$[P(X \leq 100)]^{14} = \left[\sum_{k=0}^{100} \binom{150}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{150-k}\right]^{14} \approx 0{,}5741\,.$$

A Moivre–Laplece tétel alapján közelítve:

$$[P(X \leq 100)]^{14} \approx \left[\Phi\left(\frac{100 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{150 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right)\right]^{14} = \left[\Phi\left(\frac{10}{6}\right)\right]^{14} \approx [\Phi(1{,}67)]^{14} \approx$$

$$\approx \Phi(1{,}67) \approx [0{,}9525]^{14} \approx 0{,}5060\,.$$

Ha a folytonossági korrekciót is használjuk:

$$[P(X \leq 100)]^{14} \approx \left[\Phi\left(\frac{100 + 0{,}5 - 150 \cdot 0{,}6}{\sqrt{150 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right)\right]^{14} = \left[\Phi\left(\frac{10{,}5}{6}\right)\right]^{14} =$$

$$= [\Phi(1{,}75)]^{14} \approx [0{,}9599]^{14} \approx 0{,}5638\,.$$

A hatványozás miatt a közelítés hibája megnőtt, így még inkább látszik, hogy érdemesebb a korrekciós tagot is használni.

14.16. Feladat.

Egy szabályos pénzérmét 10 000-szer feldobunk. Határozzuk meg azt az m számot, melyre a fejek száma kb. 0,9 valószínűséggel esik $5000 - m$ és $5000 + m$ közé!

Megoldás:

Legyen a dobott fejek száma X, ami természetesen binomiális eloszlású valószínűségi változó az $n = 10\,000$ és $p = 0{,}5$ paraméterekkel. Annak valószínűsége, hogy a fejek száma $5000 - m$ és $5000 + m$ közé esik:

$$P(5000 - m \leq X \leq 5000 + m) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{5000 + m + 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{5000 - m - 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{5000 + m + 0{,}5 - 5000}{50}\right) - \Phi\left(\frac{5000 - m - 0{,}5 - 5000}{50}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{m + 0{,}5}{50}\right) - \Phi\left(\frac{-m - 0{,}5}{50}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{m + 0{,}5}{50}\right) - 1\,.$$

Ennek a kifejezésnek kell kb. 0,9-nek lennie. Tehát:

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{m + 0{,}5}{50}\right) - 1 = 0{,}9$$

$$\Phi\left(\frac{m + 0{,}5}{50}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{m + 0{,}5}{50} = 1{,}645 \qquad \Longrightarrow \qquad m = 81{,}75 \approx 82$$

Azt kaptuk, hogy $P(4918 \leq X \leq 5082) \approx 0{,}9$. Elfogadható a megoldás, mert a valószínűség pontos értéke:

$$\sum_{k=4918}^{5082} \binom{10\,000}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{10\,000-k} \approx 0{,}9011\,.$$

($m = 81$ esetén pedig kb. 0,8969.)

14.17. Feladat.
Egy szabályos dobókockát 6000-szer feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a dobott hatosok száma legfeljebb 30-cal tér el 1000-től?

Megoldás:
Legyen a dobott hatosok száma X. Ekkor X binomiális eloszlású valószínűségi változó az $n = 6000$ és $p = \frac{1}{6}$ paraméterekkel. A várható értéke $E(X) = np = 1000$, a szórása $D(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 28{,}87$. A feladat a $P(970 \le X \le 1030)$ valószínűség meghatározása. A valószínűség pontos értékét a következő összeg adja:

$$P(970 \le X \le 1030) = \sum_{k=970}^{1030} \binom{6000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6000-k}.$$

Az összeg meghatározása nagyon sok számolással jár, ezért a valószínűséget a Moivre-Laplace tétel segítségével becsüljük, így

$$\begin{aligned} P(970 \le X \le 1030) &\approx \Phi\left(\frac{1030 + 0{,}5 - 1000}{28{,}87}\right) - \Phi\left(\frac{970 - 0{,}5 - 1000}{28{,}87}\right) \\ &\approx \Phi(1{,}0565) - \Phi(-1{,}0565) = 2 \cdot \Phi(1{,}0565) - 1 \approx 0{,}7092\,. \end{aligned}$$

Nagyon jó közelítést kaptunk, mert a fenti összegből számított érték kb. 0,7093.

14.18. Feladat.
Egy szabályos dobókockát hatszázszor feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a hatosok számának relatív gyakorisága 1/9 és 2/9 közé esik?

Megoldás:
A hatosok számát jelölje X, ami $n = 600$ és $p = \frac{1}{6}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. A hatosok relatív gyakorisága $\frac{X}{600}$. A kérdés a $P\left(\frac{1}{9} \le \frac{X}{600} \le \frac{2}{9}\right)$ valószínűség.

Mivel $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$ és $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$, továbbá $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$, ezért az, hogy a hatosok számának relatív gyakorisága $\frac{1}{9}$ és $\frac{2}{9}$ közé esik, tulajdonképpen azt jelenti, hogy a relatív gyakoriságnak az elméleti valószínűségtől (az $\frac{1}{6}$-tól) vett eltérése legfeljebb $\frac{2}{36}$ lehet. Idézzük fel a nagy számok Bernoulli-féle törvényének idevágó alakját:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n}\,.$$

Nálunk most $n = 600$, $p = \frac{1}{6}$ és $\varepsilon = \frac{2}{36}$. Ezeket behelyetesítve:

$$1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n} = 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\left(\frac{2}{36}\right)^2 \cdot 600} = 0{,}925\,.$$

Tehát a nagy számok Bernoulli-féle törvényével becsülve azt kaptuk, hogy ez a valószínűség legalább 0,925.

Ha azonban a Moivre–Laplace tételt hívjuk segítségül (és rögtön a folytonossági korrekcióval), akkor ennél jóval pontosabb információt kapunk. A relatív gyakorság akkor esik 1/9 és 2/9 közé, ha a hatosok száma $600/9 \approx$ $\approx 66{,}67$ és $1200/9 \approx 133{,}33$ közé esik, ami nyilván azt jelenti, hogy legalább 67, de legfeljebb 133 hatost dobunk. Ennek valószínűsége:

$$\begin{aligned} P(67 \le X \le 133) &\approx \Phi\left(\frac{133 + 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{67 - 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{133 + 0{,}5 - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{67 - 0{,}5 - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) \approx \\ &\approx \Phi(3{,}6697) - \Phi(-3{,}6697) = 2 \cdot \Phi(3{,}6697) - 1 \approx 2 \cdot \Phi(3{,}67) - 1 = 2 \cdot 0{,}9999 - 1 = 0{,}9998\,. \end{aligned}$$

A binomiális eloszlásból számolt pontosabb érték pedig:

$$P(67 \leq X \leq 133) = \sum_{k=67}^{133} \binom{600}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{600-k} \approx 0{,}999739 \approx 0{,}9997\,.$$

A Moivre–Laplace tétel (valójában a központi határeloszlás tétel) segítségével jóval pontosabban meg tudtuk határozni ezt a valószínűséget, mint a nagy számok törvénye alapján.

15. fejezet

Korreláció és regresszió

A korrelációelmélet feladata a valószínűségi változók közötti függőségi kapcsolat szorosságának jellemzése. A kapcsolat szorosságának matematikai leíráshoz a valószínűségi változók jellemezőiből (eloszlás, eloszlásfüggvény, várható érték, szórás, stb.) konstruált számértéket használunk. Ilyen mérőszámok például a korrelációs együttható, kovariancia, korrelációs hányados, stb. Ebben a fejezetben a legelterjedtebb függőségi mérőszámmal, a korrelációs együtthatóval ismerkedünk meg.

A regresszióelméletben a valószínűségi változók közötti kapcsolat függvényalakját vizsgáljuk. A fejezet második részében a korrelációs együtthatóval szoros kapcsolatban álló regressziós egyenessel foglalkozunk.

15.1. A korrelációs együtható

A korrelációs együttható bevezetése előtt elevenítsük fel a kovariancia fogalmát és tulajdonságait, melyekkel már találkoztunk a 12. fejezetben, a valószínűségi változók összegének szórása kapcsán.

15.1. Definíció.
Az X és Y valószínűségi változók kovaranciáján az $X - E(X)$ és $Y - E(Y)$ valószínűségi változók szorzatának várható értékét értjük (feltéve, hogy az itt szereplő várható értékek léteznek), azaz

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]\,.$$

A kovarianciát kifejezhetjük egy kicsit egyszerűbb alakban is:

15.2. Tétel.
Ha az X és Y valószínűségi változók kovaranciája létezik, akkor

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)\,.$$

BIZONYÍTÁS: A bizonyításhoz csupán a várható érték tulajdonságait kell kihasználni:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))] = \\ &= E\left[X\cdot Y - X\cdot E(Y) - E(X)\cdot Y + E(X)\cdot E(Y)\right] = \\ &= E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) - E(X)\cdot E(Y) + E(X)\cdot E(Y) = \\ &= E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)\,.\end{aligned}$$

□

A kovariancia definíciójából közvetlenül adódik az alábbi fontos tulajdonság:

15.3. Tétel.
Legyenek X és Y *független* valószínűségi változók. Ekkor X és Y kovarianciája 0 (feltéve persze, hogy létezik).

BIZONYÍTÁS: Ha X és Y függetlenek, akkor $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$, így

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = E(X)\cdot E(Y) - E(X)\cdot E(Y) = 0\,.$$

□

A fenti tulajdonság miatt a kovariancia már alkalmas lehet valószínűségi változók közötti függőségi viszony számszerű jellemzésére. Vigyázzunk azonban: ha két valószínűségi változó független, akkor a kovarianciájuk nulla, de ha a kovarianciájuk nulla, akkor még nem biztos, hogy függetlenek, erre láttunk példát a 12. fejezetben. Az alábbi tétel azt mutatja, hogy a kovariancia alkalmazása különösen hasznos lehet valószínűségi változók közötti lineáris kapcsolat kimutatására.

15.4. Tétel.
Ha az X és Y valószínűségi változókra igaz, hogy $Y = a\cdot X + b$ $(a,b\in\mathbb{R})$, akkor a kovarianciájuk abszolút értéke megegyezik a szórásaik szorzatával (feltéve, hogy a kovariancia létezik), azaz

$$|\operatorname{cov}(X,Y)| = D(X)\cdot D(Y)\,.$$

BIZONYÍTÁS: A bizonyításban a várható érték tulajdonságait, valamint az $Y = a\cdot X + b$ valószínűségi változó szórására vonatkozó tételt kell felhasználni:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = E[X\cdot(a\cdot X+b)] - E(X)\cdot E(a\cdot X+b) = \\ &= a\cdot E(X^2) + b\cdot E(X) - a\cdot E(X)\cdot E(X) - b\cdot E(X) = \\ &= a\cdot E(X^2) - a\cdot E^2(X) = a\cdot D^2(X)\,.\end{aligned}$$

Az abszolút érték pedig:

$$|\operatorname{cov}(X,Y)| = |a|\cdot D^2(X) = |a|\cdot D(X)\cdot D(X) = D(Y)\cdot D(X)\,.$$

□

15.5. Tétel.
Ha az X és Y valószínűségi változók kovarianciája létezik, akkor annak abszolút értéke nem nagyobb a szórásuk szorzatánál, azaz

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \le D(X) \cdot D(Y)\,.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $W = X - a \cdot Y$, ahol a konstans. Ekkor W szórásnégyzete:

$$\begin{aligned}
D^2(W) &= E[(X - a \cdot Y)^2] - E^2[X - a \cdot Y] = \\
&= E[X^2 - 2aXY + a^2Y^2] - [E^2(X) + a^2E^2(Y) - 2aE(X)E(Y)] = \\
&= E(X^2) - 2aE(XY) + a^2E(Y^2) - E^2(X) - a^2E^2(Y) + 2aE(X)E(Y) = \\
&= E(X^2) - E^2(X) + a^2E(Y^2) - a^2E^2(Y) - 2aE(XY) + 2aE(X)E(Y) = \\
&= D^2(X) + a^2D^2(Y) - 2a \cdot \mathrm{cov}(X,Y)\,.
\end{aligned}$$

Mivel tetszőleges a esetén $D^2(W) \ge 0$, ezért

$$2a \cdot \mathrm{cov}(X,Y) \le D^2(X) + a^2D^2(Y)\,.$$

Ha $a = D(X)/D(Y)$, akkor

$$2 \cdot \frac{D(X)}{D(Y)} \cdot \mathrm{cov}(X,Y) \le D^2(X) + \frac{D^2(X)}{D^2(Y)}D^2(Y) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cov}(X,Y) \le D(X) \cdot D(Y)\,.$$

Ha $a = -D(X)/D(Y)$, akkor pedig

$$-2 \cdot \frac{D(X)}{D(Y)} \cdot \mathrm{cov}(X,Y) \le D^2(X) + \frac{D^2(X)}{D^2(Y)}D^2(Y) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cov}(X,Y) \ge -D(X) \cdot D(Y)\,.$$

Azt kaptuk, hogy $-D(X) \cdot D(Y) \le \mathrm{cov}(X,Y) \le D(X) \cdot D(Y)$, azaz $|\mathrm{cov}(X,Y)| \le D(X) \cdot D(Y)$.
□

A fenti tétel alapján definiálhatunk valószínűségi változók között egy olyan függőségi mérőszámot, amelynek értéke X-től és Y-tól függetlenül mindig -1 és 1 közé esik. Ez utóbbi tulajdonság azért fontos, mert így a különféle valószínűségi változók közötti kapcsolatok mérőszámai összehasonlíthatóak lesznek.

15.6. Definíció.
Az X és Y valószínűségi változók korrelációs együtthatóján az alábbi hányadost értjük (feltéve, hogy a benne szereplő várható értékek és szórások léteznek):

$$\mathrm{r}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X) \cdot D(Y)} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{D(X) \cdot D(Y)}\,.$$

A kovariancia tulajdonságaiból a korrelációs együtthatóra közvetlenül adódnak az alábbi tulajdonságok:

15.7. Tétel.
Ha az X és Y valószínűségi változók korrelációs együtthatója létezik, akkor

1. A korrelációs együttható értéke mindig -1 és 1 közé esik, azaz $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$.
2. Ha a X és Y függetlenek, akkor a korrelációs együttható értéke 0, azaz $r(X,Y) = 0$.
3. A korrelációs együttható abszolút értéke akkor és csak akkor 1, ha a két valószínűségi változó között lineáris kapcsolat áll fenn, azaz $Y = a \cdot X + b$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$. Ebben az esetben
   - ha $a > 0$, akkor $\mathrm{r}(X,Y) = 1$,
   - ha $a < 0$, akkor $\mathrm{r}(X,Y) = -1$.

Két valószínűségi változó korrelációs együtthatójának meghatározása elég sok számolással jár. Diszkrét esetben az együttes eloszlásból meg kell határoznunk a szorzat várható értékét, a peremeloszlásokat, a valószínűségi változók várható értékét és szórását, folytonos esetben az együttes sűrűségfüggvényből a szorzat várható értékét, a perem-sűrűségfüggvényeket, abból a valószínűségi változók várható értékét és szórását.

15.8. Példa.
Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlása legyen a következő:

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0,15	0,15	0,15
0	0,04	0,06	0,08
1	0,12	0,12	0,13

Az együttes eloszlás alapján felírhatjuk a peremeloszlásokat, vagyis X és Y eloszlását, azokból pedig a várható értékeket:

$$X : \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}45 & 0{,}18 & 0{,}37 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad E(X) = -0{,}08$$

$$Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}31 & 0{,}33 & 0{,}36 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad E(Y) = 1{,}05\,.$$

X^2 és Y^2 eloszlása és várható értéke:

$$X^2 : \begin{cases} 0 & 1 \\ 0{,}18 & 0{,}82 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad E(X^2) = 0{,}82$$

$$Y^2 : \begin{cases} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}31 & 0{,}33 & 0{,}36 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad E(Y^2) = 1{,}77\,.$$

$X \cdot Y$ eloszlása és várható értéke:

$$X \cdot Y : \begin{cases} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}45 & 0{,}12 & 0{,}13 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad E(X \cdot Y) = -0{,}17\,.$$

A szórások:

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0{,}82 - (-0{,}08)^2 = 0{,}8136 \qquad \Rightarrow \quad D(X) \approx 0{,}9020$$
$$D^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 1{,}77 - (1{,}05)^2 = 0{,}6675 \qquad \Rightarrow \quad D(Y) \approx 0{,}8170\,.$$

Végül a korrelációs együttható:

$$\mathrm{r}(X,Y) = \frac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{D(X)\cdot D(Y)} = \frac{-\,0{,}17 - (-0{,}08)\cdot 1{,}05}{\sqrt{0{,}8136}\cdot\sqrt{0{,}6675}} \approx -0{,}1167\,.$$

A korrekációs együttható alapján azt mondhatjuk, hogy X és Y között igen gyenge lineáris kapcsolat áll fenn.

15.9. Példa.

Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye a $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $x^2 < y < < x$ tartományon, vagyis az $y = x^2$ és az $y = x$ egyenletű görbék közötti véges tartományon különbözzön nullától és legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{ha } 0 < x, y < 1 \text{ és } x^2 < y < x \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Először ellenőrizzük le, hogy ez tényleg sűrűségfüggvény-e. Ehhez az kell, hogy legyen nemnegatív (ez láthatóag teljesül), továbbá az integrálja legyen 1:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x 24xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 24\cdot\int_0^1 \left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x \mathrm{d}x = 24\cdot\int_0^1 \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2}\,\mathrm{d}x = 24\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 1\,.$$

Határozzuk meg a perem-sűrűségfüggvényeket. Ehhez y szerint x^2 és x között, x szerint pedig y és $\sqrt{y}$ között kell integrálni az együttes sűrűségfüggvényt. Így a perem-sűrűségfüggvények fő részei:

$$f_X(x) = \int_{x^2}^x 24xy\,\mathrm{d}y = 24\cdot\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x = 12\cdot(x^3 - x^5),$$
$$f_Y(y) = \int_y^{\sqrt{y}} 24xy\,\mathrm{d}y = 24\cdot\left[\frac{x^2}{y}\cdot y\right]_y^{\sqrt{y}} = 12\cdot(y^2 - y^3)\,.$$

A perem-sűrűségfügvények teljes alakja:

$$f_X(x) = \begin{cases} 12\cdot(x^3 - x^5) & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} 12\cdot(y^2 - y^3) & \text{ha } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

X és Y várható értéke:

$$E(X) = \int_0^1 x\cdot 12\cdot(x^3 - x^5)\,\mathrm{d}x = 12\cdot\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{24}{35}$$
$$E(Y) = \int_0^1 y\cdot 12\cdot(y^2 - y^3)\,\mathrm{d}y = 12\cdot\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}\,.$$

X^2 és Y^2 várható értéke:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 12 \cdot (x^3 - x^5)\,\mathrm{d}x = 12 \cdot \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 12 \cdot (y^2 - y^3)\,\mathrm{d}y = 12 \cdot \left[\frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{5}\,.$$

A fenti eredményekből meghatározható X és Y szórása:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{24}{35}\right)^2} = \frac{\sqrt{146}}{70} \approx 0{,}1726$$

$$D(Y) = \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)} = \sqrt{\frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\,.$$

X és Y szorzatának várható értéke:

$$E(X{\cdot}Y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy{\cdot}24xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 24{\cdot}\int_0^1 \left[x^2 \cdot \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x = 24{\cdot}\int_0^1 \frac{x^5}{3} - \frac{x^8}{3}\,\mathrm{d}x = 8{\cdot}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{4}{9}\,.$$

A kapott részeredmények alapján meghatározható X és Y korrelációs együtthatója:

$$\mathrm{r}(X,Y) = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{D(X) \cdot D(Y)} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{24}{35} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{146}}{70} \cdot \frac{1}{5}} \approx 0{,}9563\,.$$

Az eredmény igen közel van egyhez, így azt mondhatjuk, hogy X és Y között erős lineáris kapcsolat áll fenn.

15.10. Példa.

Legyen most X és Y együttes eloszlása egyenletes azon a tartományon, melyre $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ és $y < x^2$. A tartomány így most az $y = x^2$ egyenletű parabola és az x-tengely közötti rész, ahol $0 < x < 1$. Mivel egyenletes eloszlásról van szó, így az együttes sűrűségfüggvény értéke a tartományon konstans. A konstans értéke megegyezik a tartomány területének reciprokával, a terület pedig a legegyszerűbben úgy kapható meg, hogy az x^2 függvényt integráljuk 0 és 1 között:

$$T = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Így az együttes sűrűségfüggvény:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3 & \text{ha } 0 < x, y < 1 \text{ és } y < x^2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}\,.$$

A perem-sűrűségfüggvények fő részei:

$$f_X(x) = \int_0^{x^2} 3\,\mathrm{d}y = 3x^2 \qquad \text{és} \qquad f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^{1} 3\,\mathrm{d}y = 3 \cdot (1 - \sqrt{y})\,.$$

A perem-sűrűségfüggvények teljes alakja:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3 \cdot (1 - \sqrt{y}) & \text{ha } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} .$$

X és Y várható értéke:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 3 \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = 3 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot 3 \cdot (1 - \sqrt{y}) \,\mathrm{d}y = 3 \cdot \left[\frac{y^2}{2} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{3}{10} .$$

X^2 és Y^2 várható értéke:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 3 \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = 3 \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 3 \cdot (1 - \sqrt{y}) \,\mathrm{d}y = 3 \cdot \left[\frac{y^3}{3} - \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{7} .$$

A fenti eredményekből meghatározható X és Y szórása:

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} = \sqrt{\frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0{,}1936$$

$$D(Y) = \sqrt{E(Y^2) - E^2(Y)} = \sqrt{\frac{1}{7} - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{700}} \approx 0{,}2299 .$$

X és Y szorzatának várható értéke:

$$E(X \cdot Y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} 3 \cdot xy \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 3 \cdot \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} \mathrm{d}x = 3 \cdot \int_0^1 \frac{x^5}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{4} .$$

A kapott részeredmények alapján meghatározható X és Y korrelációs együtthatója:

$$\mathrm{r}(X, Y) = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{D(X) \cdot D(Y)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{10}}{\sqrt{\frac{3}{80}} \cdot \sqrt{\frac{37}{700}}} \approx 0{,}5617 .$$

A korrelációs együttható alapján azt mondhatjuk, hogy X és Y között gyenge lineáris kapcsolat van.

15.2. A lineáris regresszió

A lineáris regressziót akkor használjuk, ha feltételezhetjük, hogy az X és Y valószínűségi változók közötti kapcsolat közel lineáris. Ekkor keressük azon a és b értékeket, melyek esetén az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó értékei a legkevésbé térnek el az $y = a \cdot x + b$ egyenestől. Ezt a következőképpen tesszük:

Keressük azon a és b értékeket, melyekre az

$$E\left[(Y - (a \cdot X + b))^2\right]$$

kifejezés minimális lesz. A fenti kifejezés a és b függvénye:

$$\begin{aligned} S(a,b) &= E\left[(Y - (a \cdot X + b))^2\right] = E[Y^2 + a^2 \cdot X^2 + b^2 + 2ab \cdot X - 2a \cdot Y \cdot X - 2b \cdot Y] = \\ &= E(Y^2) + a^2 \cdot E(X^2) + b^2 + 2ab \cdot E(X) - 2a \cdot E(X \cdot Y) - 2b \cdot E(Y)\,. \end{aligned}$$

Tehát az $S(a, b)$ minimum helyét (helyeit) keressük. Egy kétváltozós függvény csak ott veheti fel a szélsőértékét, ahol az elsőrendő parciális deriváltjai nullák:

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0\,.$$

A parciális deriválásokat elvégezve a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(a,b)}{\partial a} &= 2a \cdot E(X^2) + 2b \cdot E(X) - 2 \cdot E(X \cdot Y) = 2 \cdot \big(a \cdot E(X^2) + b \cdot E(X) - E(X \cdot Y)\big) \\ \frac{\partial S(a,b)}{\partial b} &= 2b + 2a \cdot E(X) - 2 \cdot E(Y) = 2 \cdot (b + a \cdot E(X) - E(Y)) \end{aligned}$$

A szélsőérték helyének megtalálásához megoldandó tehát az alábbi kétismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a \cdot E(X^2) + b \cdot E(X) - E(X \cdot Y) = 0 \\ b + a \cdot E(X) - E(Y) = 0\,. \end{aligned}$$

A második egyenletből $b = E(Y) - a \cdot E(X)$, ezt visszahelyettesítve az elsőbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot E(X^2) + (E(Y) - a \cdot E(X)) \cdot E(X) - E(X \cdot Y) \Longrightarrow \\ 0 &= a \cdot E(X^2) - a \cdot E^2(X) + E(X) \cdot E(Y) - E(X \cdot Y) \Longrightarrow \\ a \cdot (E(X^2) - E^2(X)) &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \Longrightarrow \\ a \cdot D^2(X) &= \operatorname{cov}(X, Y) \Longrightarrow \\ a &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2(X)} = r(X,Y) \cdot \frac{D(Y)}{D(X)}\,. \end{aligned}$$

A kapott eredményt visszahelyettesítve az $E(Y) - a \cdot E(X)$ kifejezésbe megkapjuk b értékét:

$$b = E(Y) - r(X,Y) \cdot \frac{D(Y)}{D(X)} \cdot E(X)\,.$$

Ahhoz, hogy a kapott (a, b) valóban minimum hely legyen, teljesülni kell a következőknek:

$$\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a \partial b}\right)^2 > 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a^2} > 0\,.$$

Ki kell tehát számítanunk a másodrendű parciáls deriváltakat:

$$\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a^2} = 2 \cdot E(X^2) \qquad \frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a \partial b} = 2 \cdot E(X)$$

$$\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial b \partial a} = 2 \cdot E(X) \qquad \frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial b^2} = 2\,.$$

Ezekből meghatározhatjuk a kívánt értékeket:

$$\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4 \cdot E(X^2) - 4 \cdot E^2(X) = 4 \cdot D^2(X) > 0$$

$$\frac{\partial^2 S(a,b)}{\partial a^2} = 2 \cdot E(X^2) > 0\,.$$

Tehát a kapott (a,b) tényleg minimum hely. Így a regressziós egyenes egyenlete:

$$y = r(X,Y) \cdot \frac{D(Y)}{D(X)} \cdot x + E(Y) - r(X,Y) \cdot \frac{D(Y)}{D(X)} \cdot E(X)\,.$$

15.11. Példa.
A korrelációs együtthatónál látott példáknál a regressziós egyenes egyenlete:

a) $E(X) = -0{,}08$, $E(Y) = 1{,}05$, $D(X) \approx 0{,}9020$, $D(Y) \approx 0{,}8170$, $r(X,Y) \approx -0{,}1167$.
A regressziós egyenes egyenlete:

$$y = -0{,}2334 \cdot x + 2{,}2334\,.$$

b) $E(X) = \frac{24}{35}$, $E(Y) = \frac{2}{5}$, $D(X) \approx 0{,}1726$, $D(Y) = \frac{1}{5}$, $r(X,Y) \approx 0{,}9569$.
A regressziós egyenes egyenlete:

$$y = 1{,}1088 \cdot x - 0{,}36032\,.$$

c) $E(X) = \frac{3}{4}$, $E(Y) = \frac{3}{10}$, $D(X) \approx 0{,}1936$, $D(Y) \approx 0{,}2299$, $r(X,Y) \approx 0{,}5617$.
A regressziós egyenes egyenlete:

$$y = 0{,}6670 \cdot x - 0{,}2003\,.$$

16. fejezet

A matematikai statisztikában használatos eloszlások

A matematikai statisztikában a leggyakrabban használt eloszlás a már ismert standard normális eloszlás. Az itt szereplő többi nevezetes eloszlás független, standard normális eloszlású valószínűségi változókból származtatható. Emlékezzünk rá, hogy a standard normális eloszlással kapcsolatos feladatokat az eloszlásfüggvény értékeit tartalmazó táblázat segítségével oldottuk meg. A belőle származtatott, még bonyolultabb eloszlások esetén szintén a táblázatokba foglalt értékek alapján dolgozhatunk.

A standard normális eloszlásból származtatott eloszlások jellemzéséhez szükségünk lesz az úgynevezett Euler-féle gammafüggvényre.

16.1. Definíció.
A $\Gamma(x)$ függvényt Euler-féle gammafüggvénynek nevezzük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} \mathrm{d}t\,, \qquad x > 0\,.$$

A gammafüggvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, $x > 0$.
2. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\Gamma(n+1) = n!\,$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

16.1. A χ^2 eloszlás

16.2. Definíció.
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a belőlük képzett

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

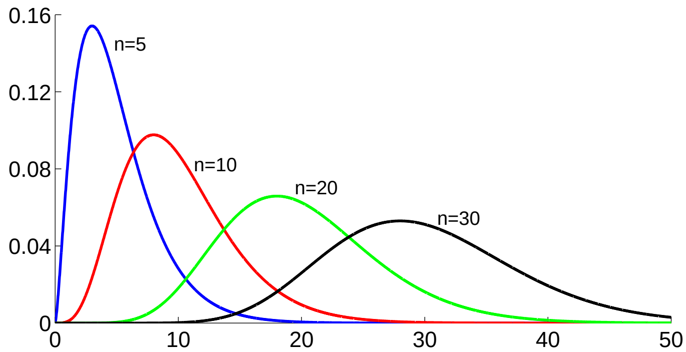
valószínűségi változó eloszlását n szabadsági fokú χ^2 (khí négyzet) eloszlásnak nevezzük.

Az n szabadsági fokú χ^2 eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Az n szabadsági fokú χ^2 eloszlású valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete:

$$E(\chi_n^2) = n \qquad \text{és} \qquad D^2(\chi_n^2) = 2n\,.$$



16.1. ábra. A χ^2 eloszlás sűrűségfüggvénye különféle szabadsági fokok (n) esetén.

16.2. A Student-eloszlás

A Student-eloszlás (vagy másnéven t-eloszlás) adja a matematikai statisztikában használatos t-próba alapját.

16.3. Definíció.
Legyenek Y és $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a belőlük képzett

$$t_n = \frac{Y}{\sqrt{\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{n}}}$$

valószínűségi változó eloszlását n szabadsági fokú Student-eloszlásnak (t-eloszlásnak) nevezzük.

Az n szabadsági fokú t-eloszlás sűrűségfüggvénye:

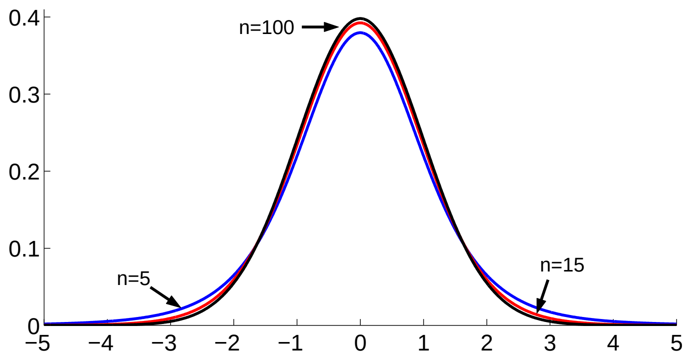
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Az n szabadsági fokú t-eloszlású valószínűségi változó várható értéke:

$$E(t_n) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \geq 2, \\ \text{nem létezik} & \text{ha } n = 1. \end{cases}$$

Szórásnégyzete:

$$D^2(t_n) = \begin{cases} \dfrac{n}{n-2} & \text{ha } n \geq 3, \\ \text{nem létezik} & \text{ha } n = 1,\, 2. \end{cases}$$



16.2. ábra. A Student-eloszlás sűrűségfüggvénye különféle szabadsági fokok (n) esetén.

16.3. F-eloszlás

16.4. Definíció.
Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_m$ és $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a belőlük képzett

$$F_{m,n} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_m^2}{Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2}$$

valószínűségi változó eloszlását (m, n) szabadsági fokú F-eloszlásnak nevezzük.

Az (m, n) szabadsági fokú F-eloszlás sűrűségfüggvénye:

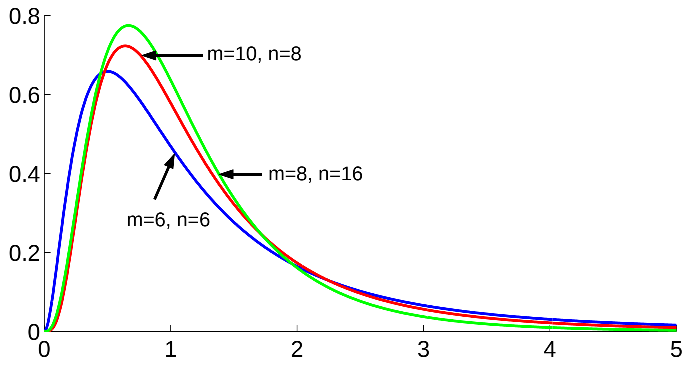
$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Az (m, n) szabadsági fokú F-eloszlású valószínűségi változó várható értéke:

$$E(F_{m,n}) = \begin{cases} \dfrac{n}{n-2} & \text{ha } n \geq 3, \\ \text{nem létezik} & \text{ha } n = 1,\ 2. \end{cases}$$

Szórásnégyzete:

$$D^2(F_{m,n}) = \begin{cases} 2\left(\dfrac{n}{n-2}\right)^2 \dfrac{(m+n-2)}{m \cdot (n-4)} & \text{ha } n \geq 5, \\ \text{nem létezik} & \text{ha } n = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \end{cases}$$



16.3. ábra. Az F-eloszlás sűrűségfüggvénye különféle szabadsági fokok $(m,\ n)$ esetén.