FIZIKA I
Villamosságtan

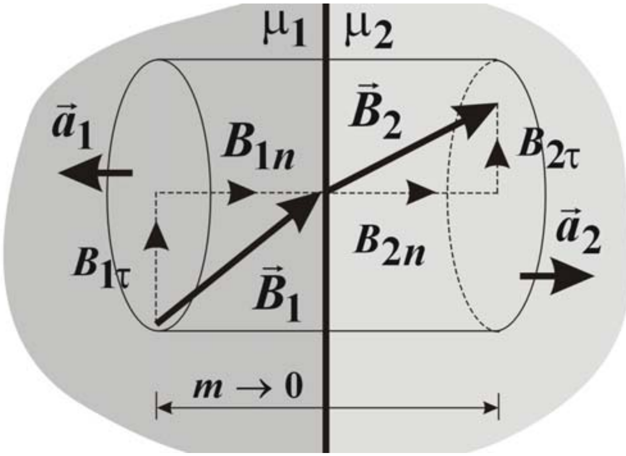
Dr. Iványi Miklósné
egyetemi tanár

8. óra

Készült az ERFO-DD2002-Hu-B-01 szerződésszámú projekt támogatásával, 2004.
PTE PMMK Műszaki Informatika Tanszék

10. Folytonossági feltételek-két mágneses anyag határfelületén

(a) A $\vec{B}$ mágneses indukció vektor viselkedése közeghatáron



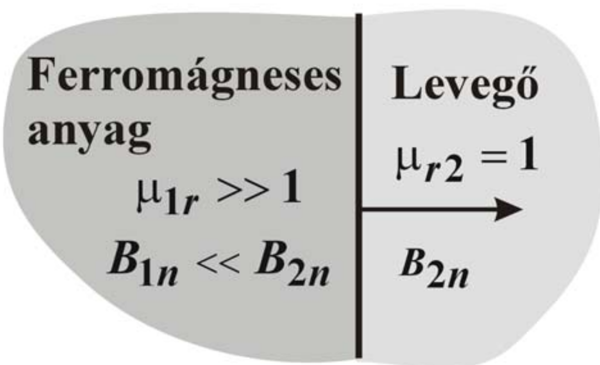
$$\oint_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$-B_{1n}a + B_{2n}a + B_n a_{palást} = 0$$

ha $m \to 0$, $a_1 = a_2 = a$, $B_{2n} - B_{1n} = 0$

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}} \qquad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

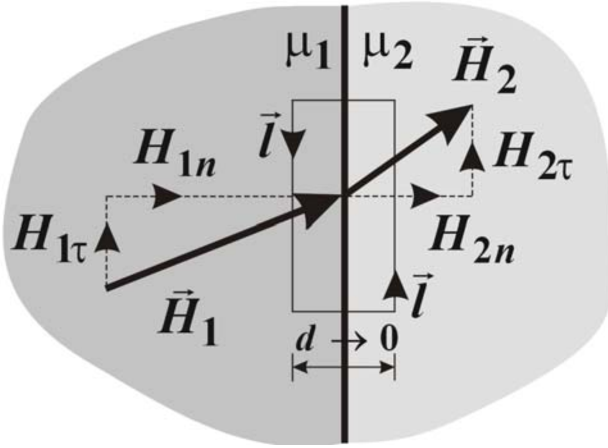
(i) a mágneses fluxussűrűség, a mágneses indukció vektor normális komponense folytonosan megy át két közeg határán,



(ii) ha $\mu_{r1} >> \mu_{r2} \longrightarrow B_{1n} << B_{2n}$

a ferromágneses anyag belsejében a mágneses indukció vektor normális komponense elhanyagolhatóan kicsi

(b) Az $\vec{H}$ mágneses térerősség viselkedése közeghatáron



Gerjesztési törvény

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = \int_a \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$l \longrightarrow a$$

$$-H_{1\tau} l + H_{2\tau} l + H_\tau\, d = I_n$$

ha $d \to 0$ $\quad -H_{1\tau} l + H_{2\tau} l + \underset{d \to 0}{H_\tau \cancel{d}} = I_n$

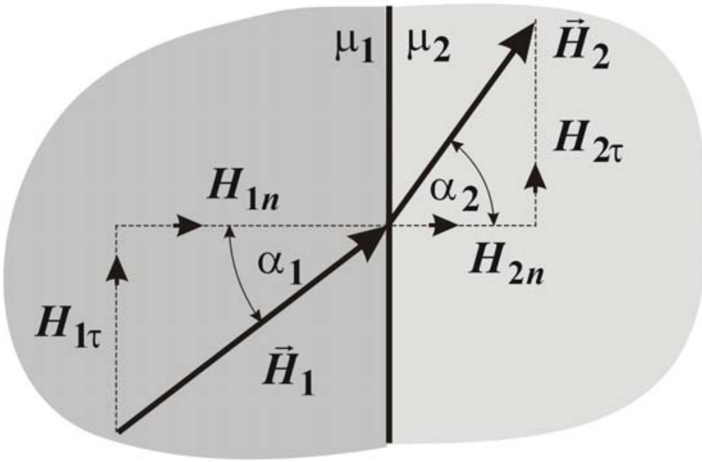
$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = I_n / l = K_n$$

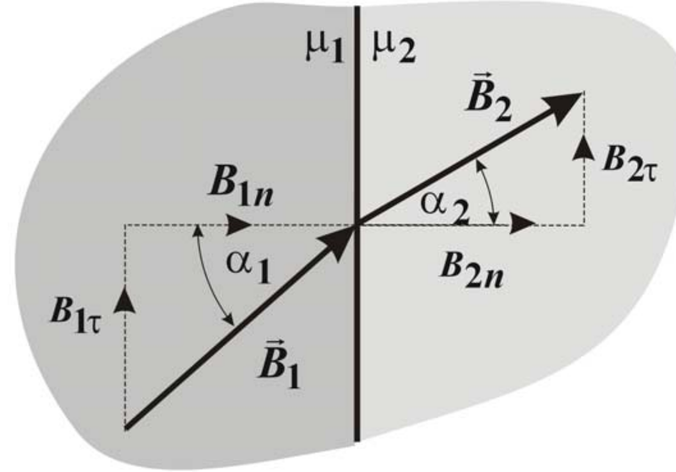
ha $K_n = 0 \longrightarrow \boxed{H_{1\tau} = H_{2\tau}}$ **a határfelületen a *H* mágneses térerősség tangenciális komponense folytonos,**

$$\boxed{\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

a *B* indukció vektor tangenciális komponensei a permeabilitások arányában ugrásszerűen változik

(c) Töréstörvények





$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n} \qquad B_{1n} = B_{2n} \quad B_{2\tau} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1\tau}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{H_{1\tau}}{H_{1n}} \frac{H_{2n}}{H_{2\tau}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{B_{2n}}{\mu_2} \frac{\mu_1}{B_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}} \frac{B_{2n}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1 H_{1\tau}}{\mu_2 H_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

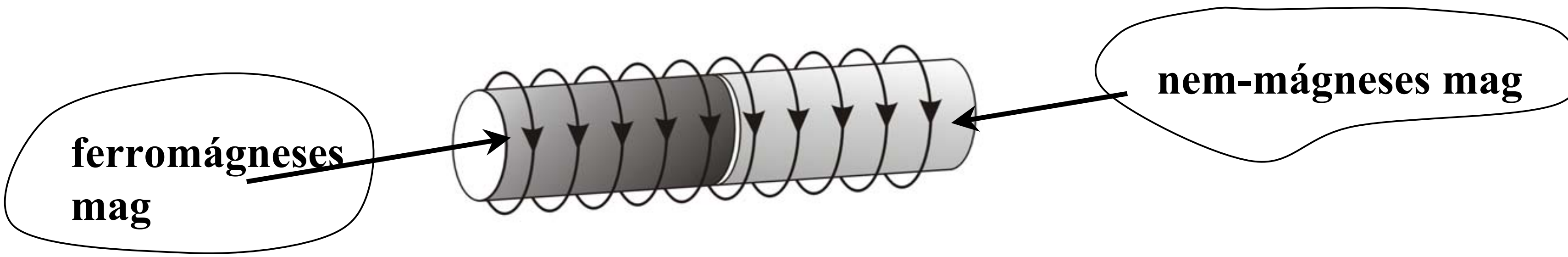
ha $\mu_1 >> \mu_2, \rightarrow \mathrm{tg}\alpha_1 >> \mathrm{tg}\alpha_2$

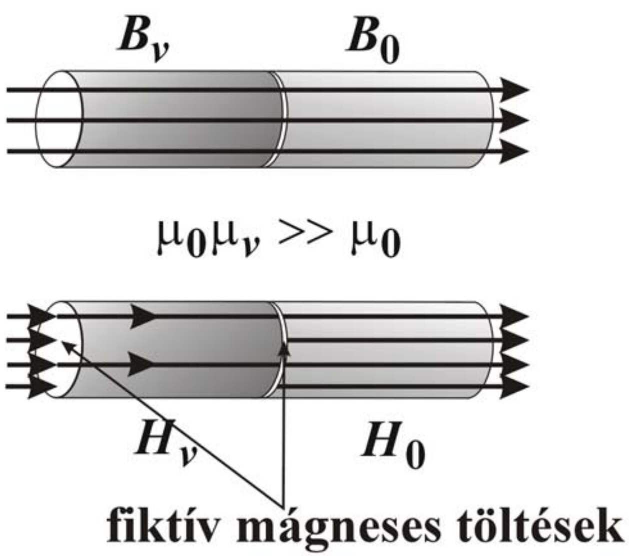
(d) Következmények

(i) Mágneses és nem-mágneses magú egyenes tekercs

(keresztirányú rétegezés)

$$B_{1n} = B_{2n} \longrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$





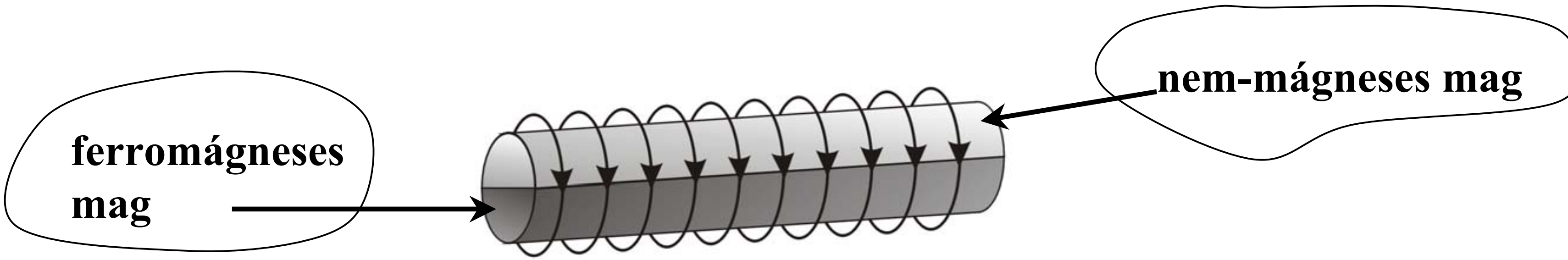
$$\mu_0 \mu_v >> \mu_0$$

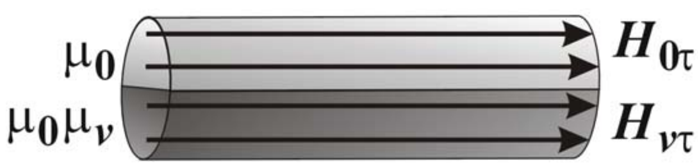
$$H_{vn} \mu_0 \mu_v = H_{0n} \mu_0$$

$$\boxed{H_{vn} << H_{0n}}$$

(d) Következmények

(ii) Mágneses és nem-mágneses magú egyenes tekercs
(hosszirányú rétegezés)





$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \qquad \boxed{H_{v\tau} = H_{0\tau}}$$

$$\mu_0\mu_v >> \mu_0$$

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2} \qquad \boxed{B_{v\tau} >> B_{0\tau}}$$

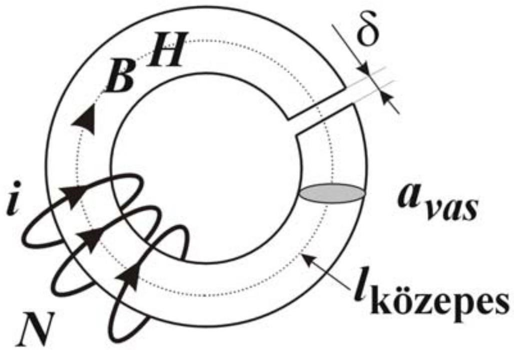
11. Mágneses körök számítása

(i) Térszámítással

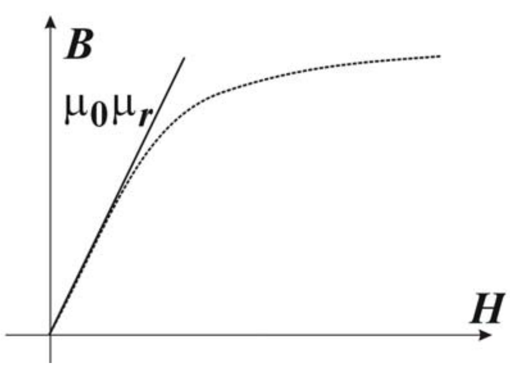
(a) A gerjesztési törvény $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$

Közepes erővonal hosszal számolva $\sum_k H_k l_k = Ni$

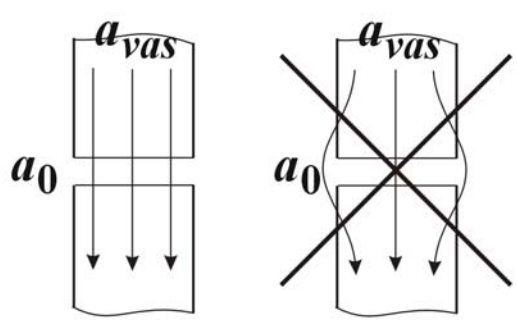
$$\boxed{H_v l_k + H_0 \delta = Ni}$$



(b) A fluxus törvényből $\oint_a \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$



a szórástól eltekintve $a_{vas} = a_0 \longrightarrow \Phi_{vas} = \Phi_0$

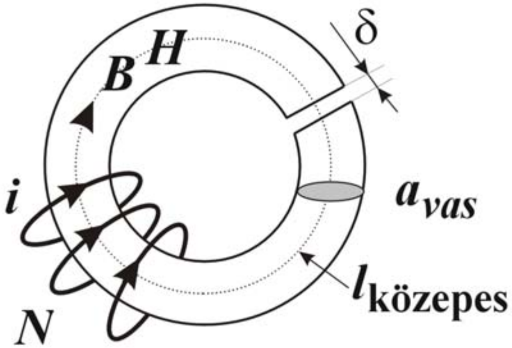


$$B_v a_{vas} = B_0 a_0$$

$$B_v = B_0$$

$$\frac{B_v}{\mu_0 \mu_r} l_k + \frac{B_0}{\mu_0} \delta = Ni \qquad B_v = \frac{N\, i\, \mu_0 \mu_r}{l_k + \mu_r \delta} \qquad L = \frac{N \Phi_{vas}}{i} = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r\, a}{l_k + \mu_r \delta}$$

(ii) Hálózati modellel



A gerjesztési törvény $\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I$

Közepes erővonal hosszal számolva $\sum_k H_k l_k = Ni$

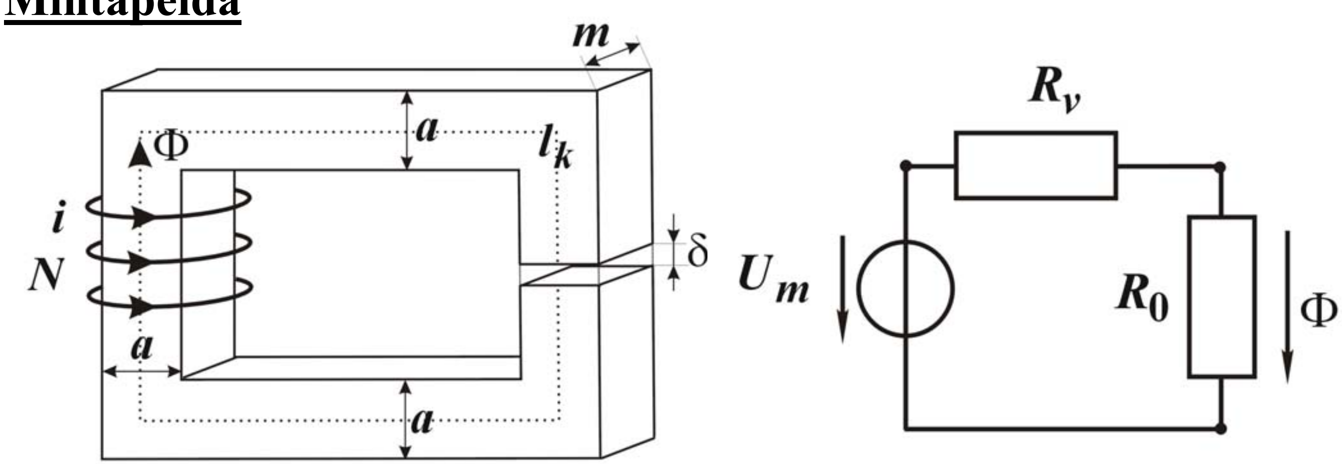
$$Ni = \sum_k H_k l_k = \sum_k \frac{B_k}{\mu_k} l_k = \sum_k \frac{\Phi_k}{a_k \mu_k} l_k = \sum_k \Phi_k \frac{l_k}{a_k \mu_k} = \sum_k \Phi_k R_{k,mág}$$

$$\boxed{U_{k,mág} = \Phi_k \; R_{k,mág}}$$

$$\boxed{R_{k,mág} = \frac{l_k}{a_k \mu_k}}$$

mágneses Ohm törvény

Mintapélda



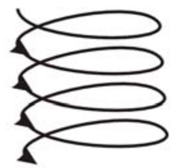
$$\Phi = \frac{U_m}{R_v + R_0}$$

$$R_m = \frac{l_k}{a \cdot m \mu_0 \mu_v}$$

$$R_0 = \frac{\delta}{a \cdot m \mu_0}$$

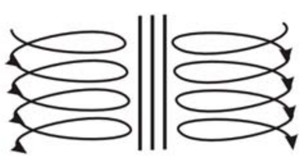
12. Mágneses tér energiája

(i) L indukció együtthatójú tekercs energiája

I_1 

$$W = \frac{1}{2}\Psi\, I \qquad \Psi = L\; I \qquad W = \frac{1}{2} L\, I^2$$

(ii) Csatolt tekercsek energiája

I_1  I_2

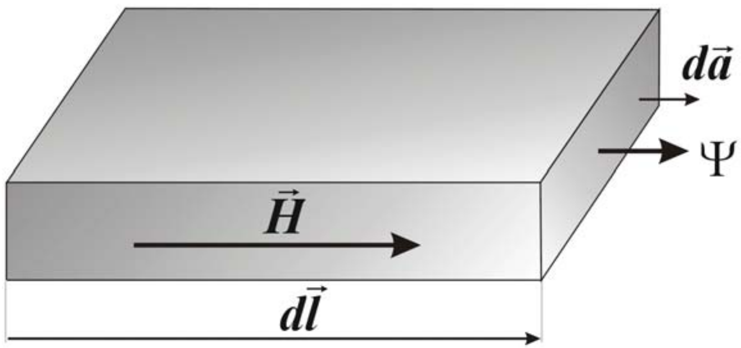
$L_{12} = L_{21}$

$$\Psi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2$$
$$\Psi_2 = L_{22} I_2 + L_{12} I_1$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\Psi_1 I_1 + \Psi_2 I_2\right) \qquad W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2$$

Készült az ERFO-DD2002-Hu-B-01 szerződésszámú projekt támogatásával, 2004.
PTE PMMK Műszaki Informatika Tanszék

(iii) A mágneses tér energiasűrűsége



$$dW = \frac{1}{2}\Psi\, I$$

$$I = \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} \qquad \Psi = \int_a \vec{B}\cdot d\vec{a}$$

$$dW = \int_v \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}\,dv = \int_v w\,dv \qquad d\vec{a}\cdot d\vec{l} = dv$$

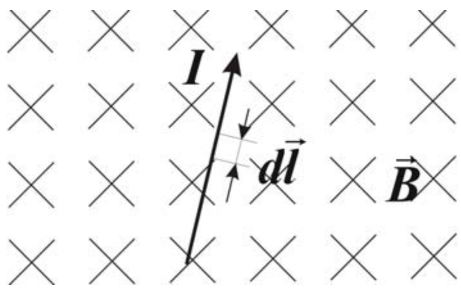
$$dW = \frac{1}{2} I\Psi = \frac{1}{2}\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}\int_a \vec{B}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{2}\oint_l\int_a \vec{H}\vec{B}\,d\vec{a}\,d\vec{l}$$

a mágneses energiasűrűség

$$\boxed{w\,\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right]}$$

13. Mágneses erőhatás

(i) I áramú vezető mágneses térben

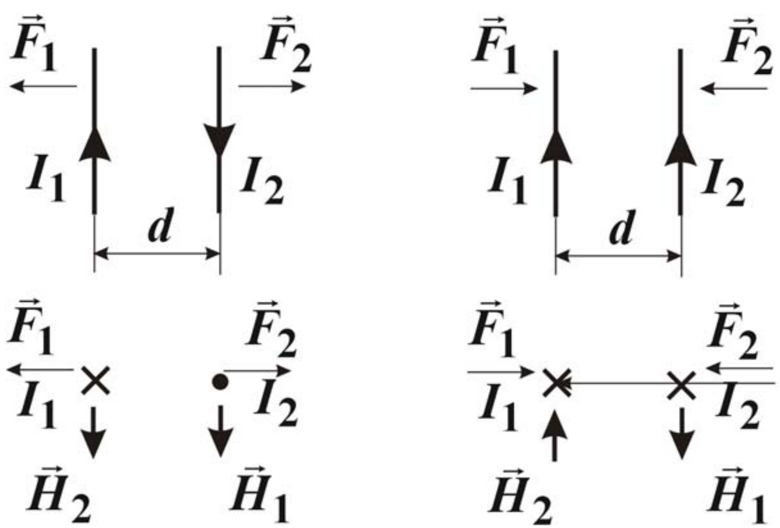


A Lorentz erőtörvény felhasználásával a mágneses térbe helyezett elemi vezetődarabra ható erő

$$d\vec{F} = dQ\,\vec{v} \times \vec{B} = dQ\,\frac{d\vec{l}}{dt} \times B = \frac{dQ}{dt}\,d\vec{l} \times B = I\,d\vec{l} \times B$$

a vezetőre ható erő $\boxed{\vec{F} = I\,\vec{l} \times B}$

(ii) Következménye, párhúzamos áramvezetők között erőhatás lép fel

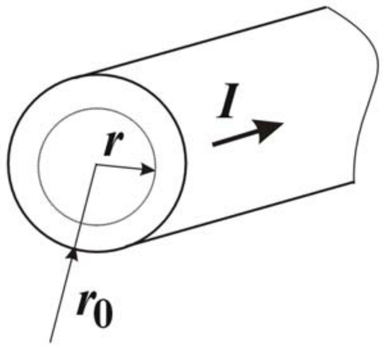


két párhúzamos, ellntétes áramirányú vezetők között taszítóerő lép fel

két párhúzamos, azonos áramirányú vezetők között vonzóerő lép fel

Készült az ERFO-DD2002-Hu-B-01 szerződésszámú projekt támogatásával, 2004.
PTE PMMK Műszaki Informatika Tanszék

14. Belső indukció együttható számítása



$$w = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} = \frac{1}{2}\left|\vec{H}\right|^2 \mu = \frac{1}{2}\frac{\left|\vec{B}\right|^2}{\mu}$$

$$W = \frac{1}{2} L_b I^2 = \int_v w\, dv = \int_v \frac{1}{2}\left|\vec{H}\right|^2 \mu\, dv$$

a vezető belsejében

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I$$

$$H\, 2r\pi = \frac{I}{r_0^2\pi} r^2\pi \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r_0^2} r, \quad 0 < r < r_0$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{r_0} \pi\left(\frac{I}{2\pi r_0^2} r\right)^2 2r\pi\, l\, dr = \frac{1}{2}\frac{I^2 l}{2\pi r_0^4}\mu\frac{r_0^4}{4} = \frac{1}{2} L_b I^2$$

$$dv = 2r\pi\, l\, dr$$

maple

$$\boxed{L_b = \frac{\mu l}{8\pi}}$$

Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse a mágneses térjellemzőkre vonatkozó folytonossági feltételeket,
2. Ismertesse a mágneses közök számítási elveit,
3. Foglalja össze a mágneses tér energiájára és a mágneses térben fellépő erőhatásokra vonatkozó összefüggéseket.

Irodalom

•Hevesi Imre, Elektromosságtan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
pp.,
•Litz József, Elektromosságtan és mágnességtan, Műszaki Könyvkiadó, 1998.
pp.,
•Elmer György, www.morpheus.pte.hu

Gyakorló feladatok

1. Egy $\mu_r = 1500$ relatív permeabilitású ferromágneses vasmag külső felületén $B_0 = 1{,}2\,\mathrm{T}$ mágneses indukciót mérünk. Hatásozza meg a vasmag belsejében a mágneses térerősség normális komponensének értékét.
2. Egy $a = 24\,\mathrm{cm}^2$ keresztmetszetű, $l = 12\,\mathrm{cm}$ hosszúságú, $N = 750$ menetszámú egyenes tekercs $\mu_r = 2500$ relatív permeabilitású ferromágneses vasmaggal rendelkezik. Határozza meg a tekercs fluxusát, ha $I = 2{,}2\,\mathrm{A}$ árammal gerjesztjük.
3. Mekkora energiát tárol az $L_1 = 2\,\mathrm{mH}$, $L_2 = 6\,\mathrm{mH}$, $L_{12} = 15\,\mathrm{mH}$ ön-, és kölcsönös indukció együtthatóval rendelkező csatolt tekercs amelyet $I_1 = 12\,\mathrm{A}$, $I_2 = 8\,\mathrm{A}$ árammal táplálunk.
4. Mekkora árammal tápláltuk azt az $L = 8{,}6\,\mathrm{mH}$ önindukció együtthatójú tekercset, amely $W = 12\,\mathrm{mW}$ mágneses energiát tárol.
5. Mekkora mágneses energiát tárol az a $\mu_r = 12\,000$ mágneses permeabilitású anyag egységnyi térfogata, ha benne $B = 1{,}8\,\mathrm{T}$ mágneses indukció van jelen.
6. Mekkora a mágneses fluxusa annak az $L = 5\,\mathrm{mH}$ önindukció együtthatójú tekercsnek, amely $W = 38\,\mathrm{mW}$ mágneses energiát tárol.
7. Mekkora erővel hat az $I = 12\,\mathrm{A}$ áramú egyenes vezető $l = 32\,\mathrm{cm}$ hosszú szakaszára a vezetőre merőleges $B = 1{,}4\,\mathrm{T}$ indukciójú mágneses tér.
8. Egy toroid alakú, $\mu_r = 12500$ relatív permeabiltású vasmag közepes hossza $l = 32\,\mathrm{cm}$, keresztmetszete $a = 2{,}6\,\mathrm{cm}^2$. Határozza meg, mekkora az indukció együtthatója a vasmagon elhelyezett $N = 820$ menetszámú tekercsnek.
9. Határozza meg mekkora a levegőben elhelyezett $I = 6{,}2\,\mathrm{A}$ áramú egyenes vezetőre merőleges mágneses tér térerőssége, ha az egyenes vezető $l = 12\,\mathrm{cm}$ hosszú szakaszára $F = 0{,}016\,\mathrm{N}$ erő hat.
10. Határozza meg mekkora erő hat az $I = 8{,}2\,\mathrm{A}$ áramú, egymással párhuzamos és azonos áramirányú két egyenes vezető $l = 53\,\mathrm{cm}$ hosszúságú szakaszára, ha a vezetők távolsága $d = 24\,\mathrm{cm}$.
11. Határozza az erőhatást a fenti feladatban, ha a két vezetőben az áramok ellentétes irányúak.

Gyakorló feladatok megoldása

1. Minthogy a ferromágneses anyagokból a mágneses indukcióvektor normális komponense megy át folytonosan a vasmagban az indukcióvektor normális komponense megegyezik a mért értékkel $B_{vn} = B_0$. Minthogy a vas mágneses permeabilitása ismert a mágneses térerősség meghatározható $H_{vn} = \dfrac{B_{vn}}{\mu_0 \mu_r} = 636{,}6198 \text{ A/m}$.
2. Feltételezve, hogy az egyenes tekercs keresztmetszete elhanyagolhatóan kicsi a hosszához viszonyítva, a gerjesztési törvényt alkalmazva a mágneses térerősség meghatározható $H \cong \dfrac{NI}{l}$, ahonnan a tekercs fluxusa

$$\Psi = N\Phi = NaB = Na\mu\frac{NI}{l} = \mu_0\mu_r\frac{N^2 Ia}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} 2500 \frac{750^2 2{,}2}{0{,}12} 24 \cdot 10^{-4} = 0{,}0400 \text{ Vs}.$$

3. Minthogy a tekercsrendszer energiája $W = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} L_{kl} I_k I_l$, a jelen esetben a csatolt tekercs energiája

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = 1776 \text{ mW} = 1{,}776 \text{ W}.$$

4. Minthogy a tekercs energiája $W = \dfrac{1}{2}LI^2$, ahonnan $I = \sqrt{\dfrac{2W}{L}} = 1{,}6705 \text{ A}$.
5. Az egységnyi térfogatban az energiasűrűség $w = \dfrac{1}{2}BH = \dfrac{B^2}{2\mu_0\mu_r} = 107{,}4296 \text{ Ws/m}^3$.

6. A tekercs energiája $W = \frac{1}{2}LI^2$, ahonnan a tekercs árama meghatározható $I = \sqrt{\frac{2W}{L}}$, így a tekercs fluxusa

$$\Psi = LI = L\sqrt{\frac{2W}{L}} = \sqrt{2WL} = 0{,}0195\ \mathrm{Vs}.$$

7. Minthogy a mágneses indukció merőleges a vezetőre, így a vektori szorzatból $F = IlB = 5{,}3760\ \ \mathrm{N}$.

8. Minthogy $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N}{I}aB = \frac{N}{I}a\mu_0\mu_r\frac{NI}{l} = \mu_0\mu_r\frac{N^2}{l}a = 858{,}1653\ \mathrm{H}$.

9. Minthogy $F = IlB$, a mágneses térerősség $H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{F}{\mu_0 Il} = 1{,}7113\cdot 10^4\ \ \mathrm{A/m}$.

10. Minthogy a párhuzamos vezetők egyikének a helyén a másik áramvezető mágneses tere merőleges a vezetőben folyó áramra, így $F = Il\mu_0\frac{I}{2\pi d} = \mu_0\frac{I^2}{2\pi d}l = 2{,}9698\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} = 29{,}698\ \mathrm{mN}$ vonzóerő lép fel.

11. Amennyiben az egyik vezetőben az áramirány megfordul a vonzóerőből ugyanekkora taszítóerő lép fel.