

TARTÓSZERKEZETEK II.

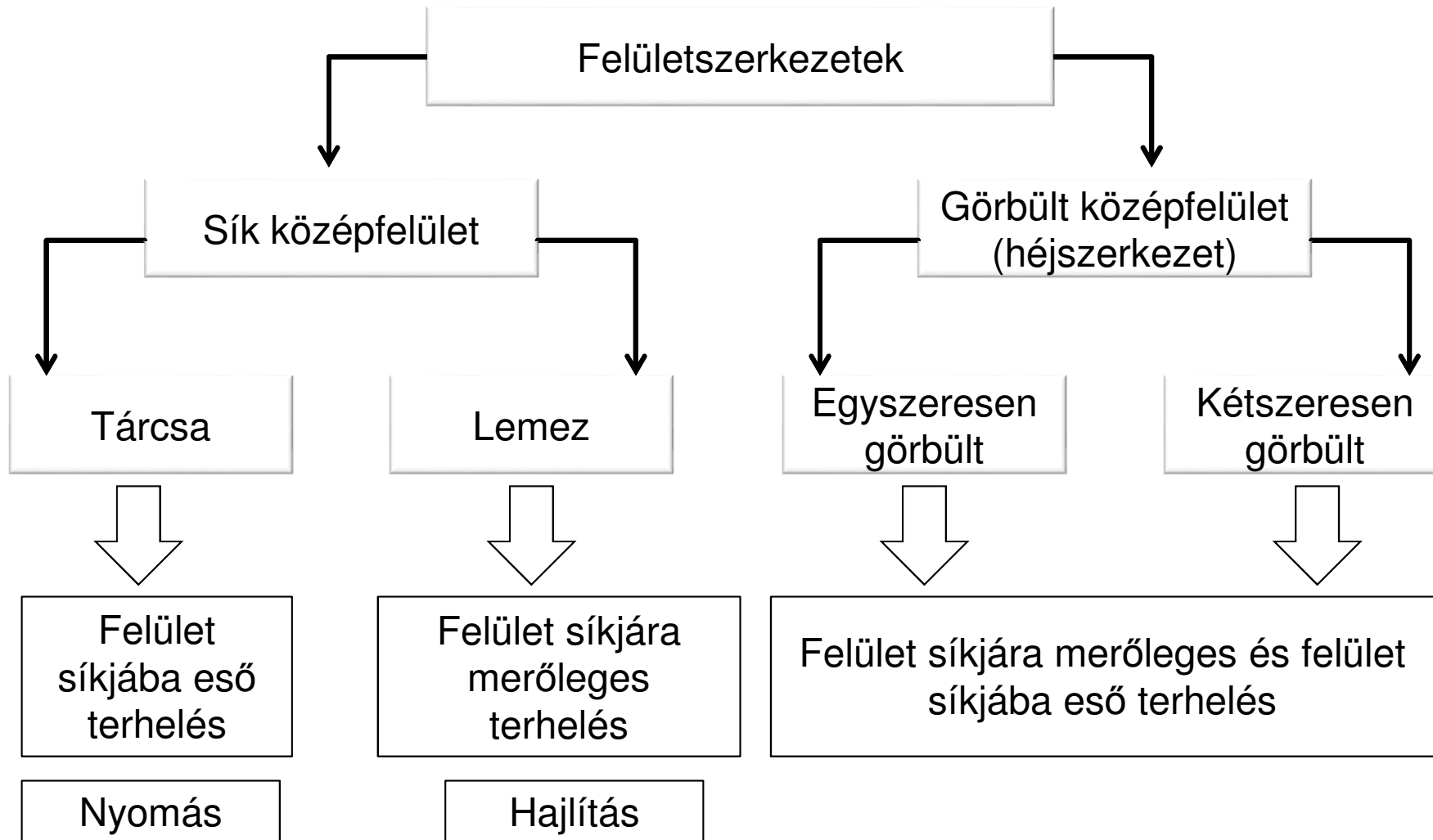
VASBETONSZERKEZETEK

2017.02.14.

Tartószerkezeti elemek

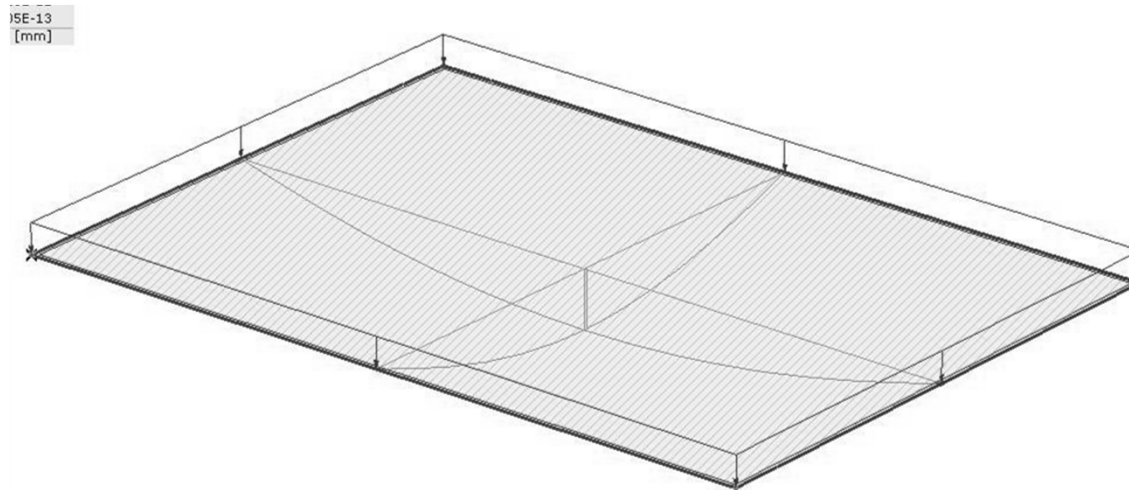
- Rúdszerkezetek
 - Gerenda
 - Oszlop, pillér
- Felületszerkezetek
 - Lemez
 - Fal
 - Faltartó
 - Héj

A felületszerkezetek csoportosítása



Vasbeton lemezek

Lemez: olyan sík középfelületű és erre merőlegesen terhelt tartószerkezetet, amelyek vastagsága a másik két méretéhez viszonyítva csekély.



A vasbeton lemez mind a magas, mind a mély, mind pedig a hídépítésben rendkívül gyakran előforduló szerkezeti elem.

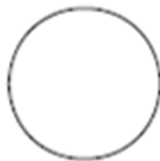
Vasbeton lemezek, előnyök :

- kétirányú teherviselés - nagy teherbírás,
- Keresztirányú merevsége miatt a kis felületen megoszló terhekből (pld. koncentrált terhek, kis felületen megoszló, pontszerű terhek) keletkező igénybevételei kedvezőbbek (jobb teherelosztás)
- kis szerkezeti magasság (magasépítés: $l/20$ - $l/40$, hídépítés: $l/12$ - $l/20$),
- könnyű zsaluzás, vasalás és betonozás
- a lemezek vasalása viszonylag egyszerű
- a lemezek betonozása viszonylag egyszerűen elvégezhető, a beton bedolgozhatósága a viszonylag ritka vasalás következtében akadálytalan.

Vasbeton lemezek

A lemezmezők alakja szerint:

- háromszög alaprajzú,
- négyszög alaprajzú,
- kör alaprajzú,
- tetszőleges alaprajzú lemezek



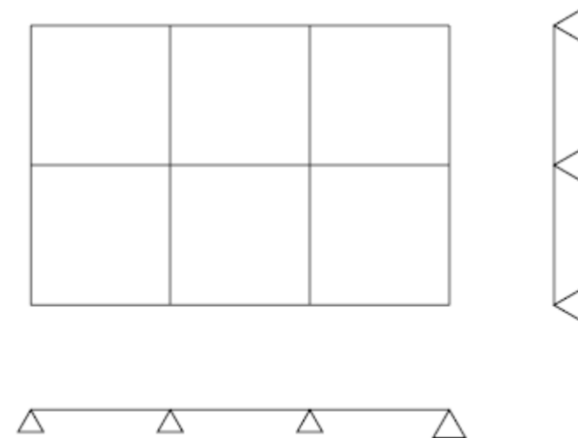
Vasbeton lemezek

- A lemezek osztályozása: a megtámasztás módja szerint, pereme mentén:
 - szabad szélű,
 - csuklós,
 - befogott,
 - mindegyik megtámasztás lehet fix, vagy süllyedő
- a befogás elvileg lehet merev befogás, de ez nehezen megvalósítható, vastag beton falakba lehetséges.
- A csatlakozó szomszédos födémmezőkbe – többtámaszúsítás esetén - a födém rugalmasan befogott.

Egyedi lemez, lemezrendszerek

„kéttámaszú” lemezek - egyedi lemezeknek

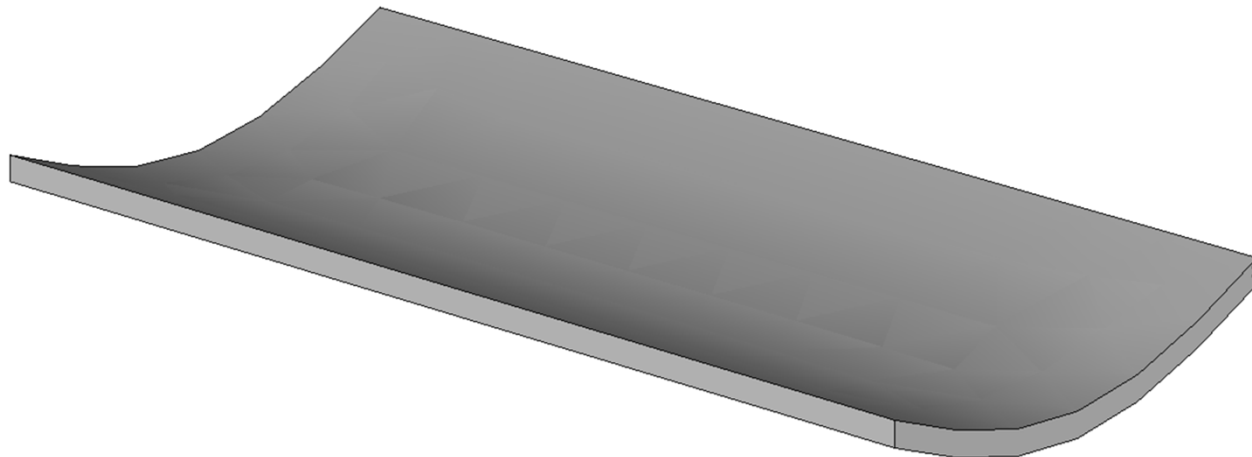
Lemezrendszer - több lemez összeépítése - többtámaszú



A lemezek osztályozása

teherhordás iránya szerint:

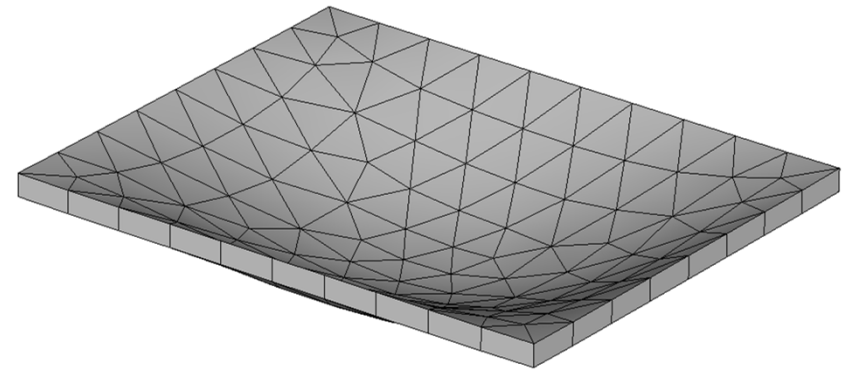
- egyirányban teherhordó lemez:
 - (közel) párhuzamos, vonalmenti támaszok
 - Egyszeresen görbült terhelt lemezalak
 - gerendaszerű viselkedés
 - 1,0m széles sáv vizsgálata gerendaként
 - Támaszok környezetében zavart zónák



A lemezek osztályozása

Két irányban teherhordó lemez:

- legalább két, egymással szöget bezáró vonalmenti támasz
- Terhelés hatására kétszeresen görbült felület
- Pontokon megtámasztott lemez:
 - pontszerű támaszok, oszlopok pillérek
- Számítás lemezelmélet alapján



Vasbeton lemezek

- A lemezek számításának módszerei:
 - rugalmas
 - törésmélelet

Lemezelméletek

- vastag lemezek elmélete,
- nagy lehajlású vékony lemezek elmélete,
- kis lehajlású vékony lemezek elmélete.

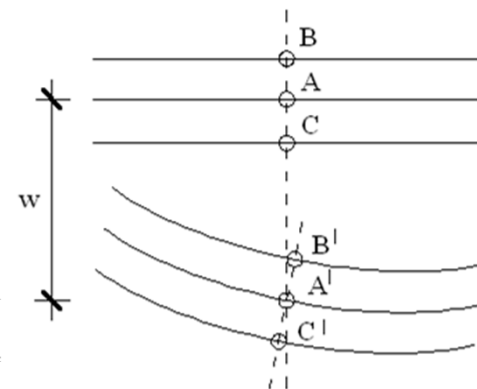
Rugalmas lemezelmélet

A vasbeton lemezek anizotróp viselkedésétől eltekintünk Berepedetlen (repedésmentes), és berepedt (II. feszültségállapotban lévő) vasbeton lemez lineárisan homogén viselkedése biztosított. A berepedt állapotot csökkentett inerciával (hajlítási merevséggel) kell figyelembe venni.

- Ez alapján kimondhatjuk, hogy a rugalmas lemezelmélet használati határállapotban elegendően pontos.

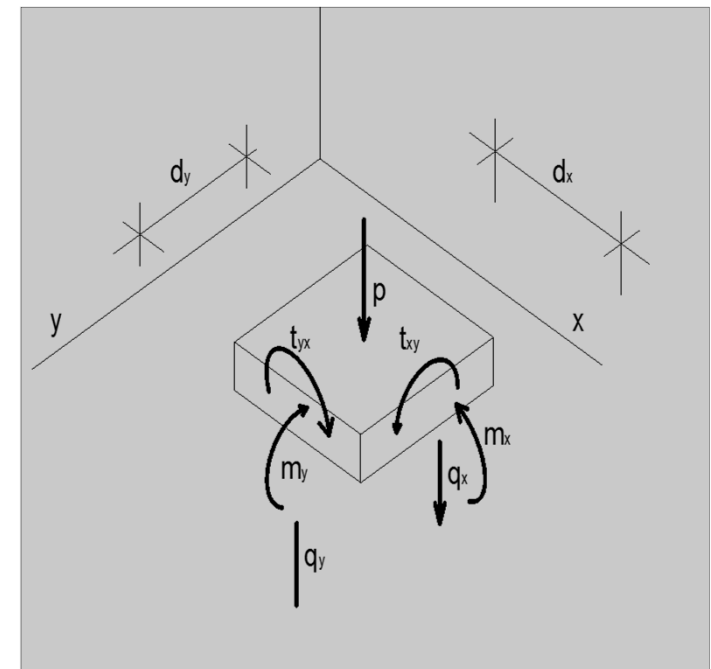
Rugalmas lemezelmélet

- alapfeltevések:
 - **Anyag**: ideálisan rugalmas, homogén izotróp
 - **Szerkezet**: a lemez vastagsága állandó és a másik két kiterjedéséhez képest kicsi ($\nu = \ell_{\min}/10$)
 - **Alakváltozások**: az alakváltozások kicsik, nem hatnak vissza a szerkezet erőjátékára
 - Érvényes a Kirchhoff-Love hipotézis, azaz a középsík valamely pontjának normálisán lévő pontja alakváltozás után is ugyanazon a normálison marad;
 - A lemez középsíkjának pontjai csak merőlegesen tolódnak el, a lemez síkjára merőleges alakváltozásoktól eltekintünk
 - Terhek: a lemez síkjára merőlegesek



IGÉNYBEVÉTELEK

- A lemezben a függőleges terhelés hatására hajlítás, nyírás és csavarás keletkezik.
- Az igénybevételeket célszerű 1,0m széles fődémsávokra osztás alapján meghatározni, ezért fajlagos igénybevételekről beszélhetünk:
- m_x, m_y : fajlagos hajlítónyomaték (kNm/m)
- v_x, v_y : fajlagos nyíróerő (kN/m)
- $t_{xy}=t_{yx}$: fajlagos csavarónyomaték (kNm/m)



Lemezegyenlet

A $p(x,y)$ teherrel terhelt lemez egy dx,dy eleme egyensúlyának vizsgálata alapján felírható egyensúlyi egyenlet:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = p$$

fizikai egyenlet (anyagtörvény):

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_c^2} (\varepsilon_x + \mu_c \varepsilon_y); \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu_c^2} (\varepsilon_y + \mu_c \varepsilon_x); \tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu_c)} \gamma_{xy}$$

összeférhetőségi (geometriai) egyenlet:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

Lemezegyenlet

- Az egyensúlyi egyenlet, a fizikai és a kompatibilitási egyenletek figyelembevételével:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{k}$$

alakú Lagrange féle negyedrendű, parciális, inhomogén differenciál-egyenletté alakítható, mely a rugalmas lemezelmélet alapegyenlete A fenti összefüggésekben:

E : a lemez anyagának, vb. lemez esetén a beton rugalmassági modulusa,

μ_c a harántnyúlási tényező (a Poisson tényező), melynek értéke vasbeton lemeznél $\mu_c = 0,15 - 0,20$

$$k = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \mu_c^2)}$$

a lemez hajlítómerevsége.

Lemezegyenlet

- Az egyenletben egyedüli ismeretlen a $w(x,y)$ lehajlásfüggvény, melyet ha sikerül az adott kerületi feltételek mellett meghatározni akkor az igénybevételek ennek deriváltjaként előállíthatók:

$$m_x = -k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_y = -k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -k(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

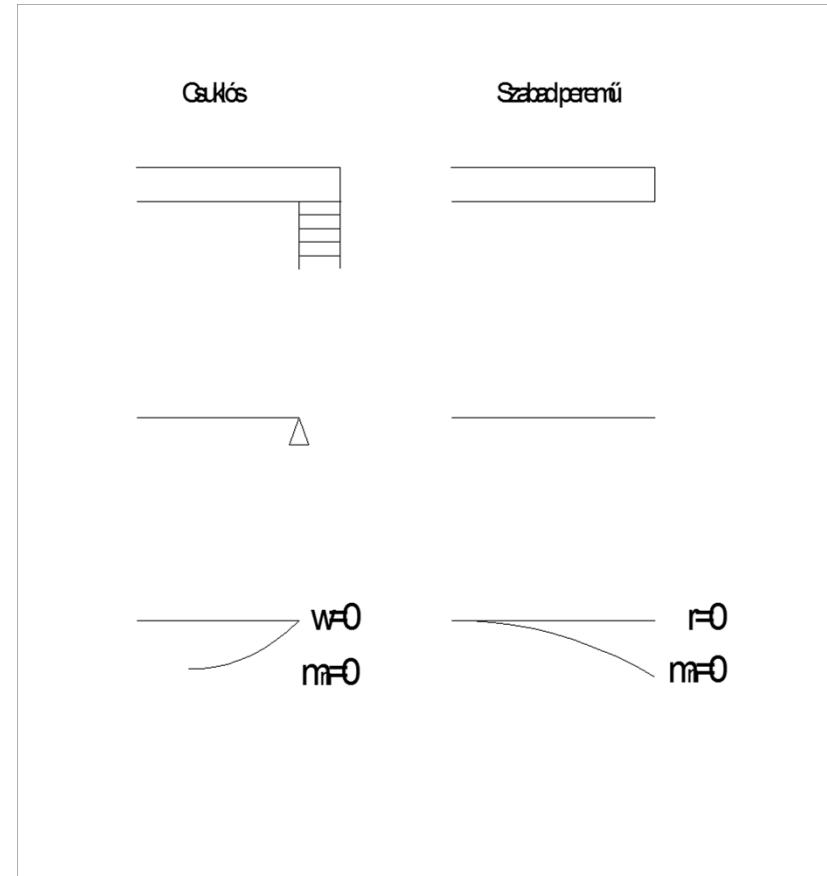
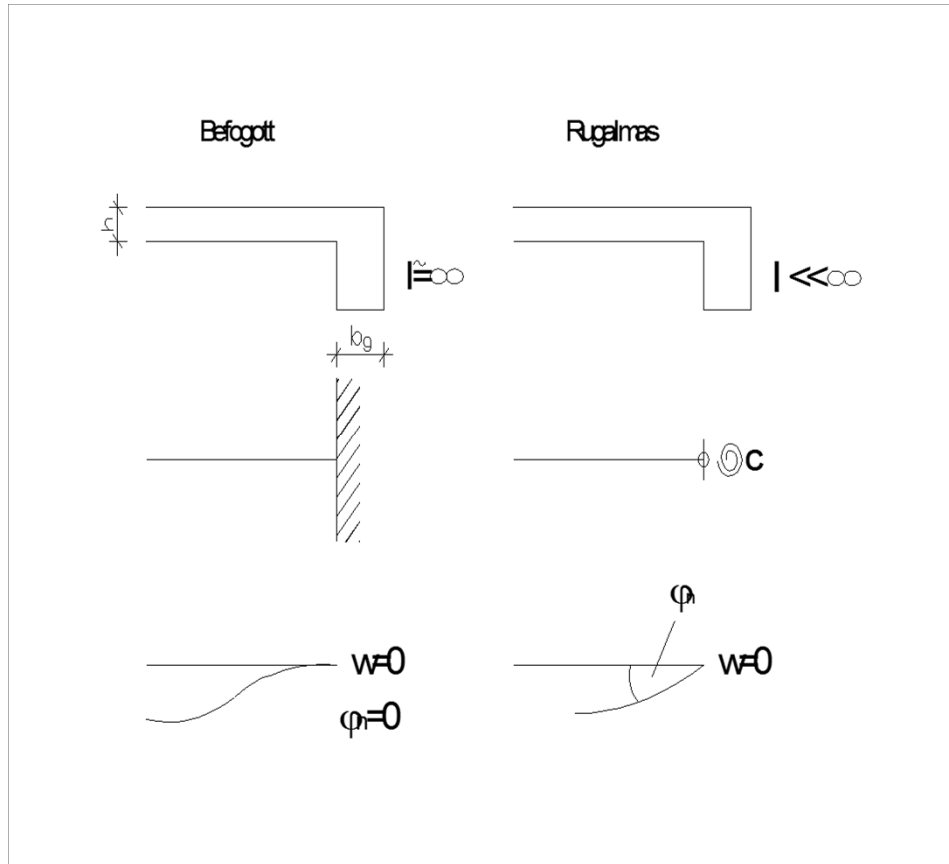
$$v_x = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$v_y = -k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

Lemezegyenlet

- A lemezegyenlet
 - Lagrange-féle,
 - negyedrendű, parciális (kétváltozós),
 - inhomogén differenciálegyenlet
- Megoldása
 - elegendő számú peremfeltétel
 - minden perempontban két peremfeltételt
 - a lemez megtámasztási viszonyainak megfelelően

Lemezgyenylenet - peremfeltételek



Lemezegyenlet - peremfeltételek

- Csuklós megtámasztás
 - Lehajlás $w=0$
 - A támasz vonalára merőleges hajlítónyomaték $m_n=0$
- Befogás
 - Lehajlás $w=0$
 - Normális irányú szögelfordulás
- Rugalmas befogás
 - Lehajlás $w=0$
 - Normális irányú szögelfordulás arányos a nyomatékkal
 - C rugóállandó
- Szabad perem
 - normális irányú nyomaték $m_n=0$
 - Peremreakció $r=0$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{c} m_n$$

Lemezegyenlet

- Mivel a differenciálegyenlet csak speciális peremfeltételek esetén oldható meg analitikusan, a kétirányban teherviselő lemezszerkezetek számítására az alábbi módok terjedtek el:
 - egyszerű esetek analitikus megoldása alapján készült táblázatok használata
 - ponthálózatra vonatkozó differenciaegyenletek számítógépes megoldása
 - végeslemes módszeren alapuló számítógépes megoldások
 - (AxisVm, FEM-design, Sofistic, Abaqus stb)

Lemezegyenlet

Ha differenciálegyenletben a lemez deformált alakjára nézve feltesszük, hogy „y” irányú görbülettel nem rendelkezik, továbbá elcsavarodása nincs. (hengeres hajlítás esete) akkor az egyenlet a hajlított gerenda diff. egyenletévé fajul.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\frac{p}{k}$$

Lemezegyenlet

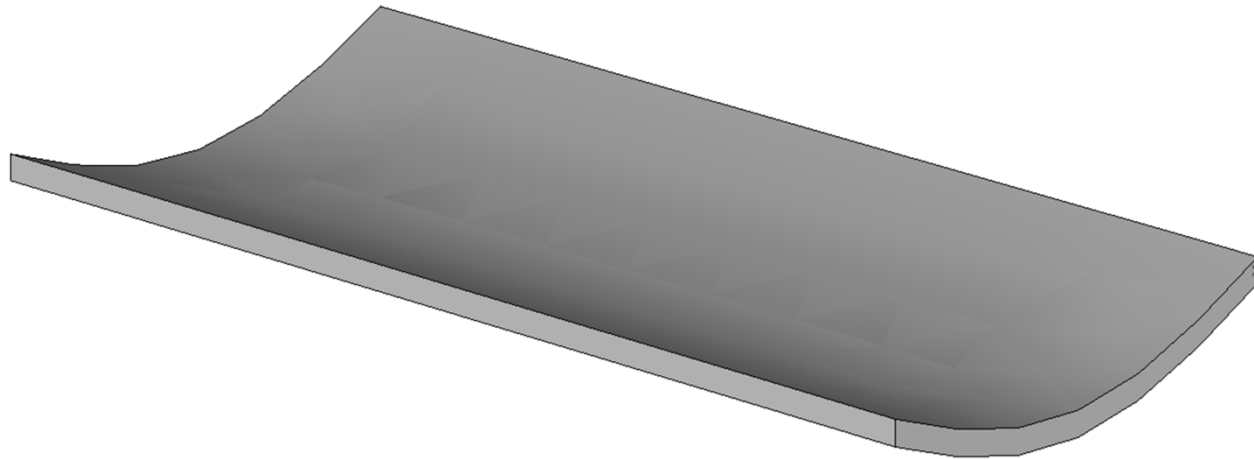
ez az eset akkor áll elő, ha
a megtámasztási feltételek
a lemez oldalarányi


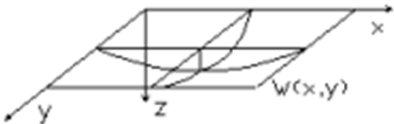
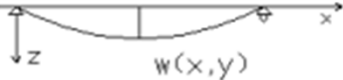
az említett alakváltozási feltételeket előidézik.

Négy oldalon megtámasztott lemezeknél az általános gyakorlati szabály, hogy $0,5 < \ell_y / \ell_x < 2$ esetben a lemez egyirányban teherviselőnek vehető.

$$m_y = -k \left(\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{=0} + \mu_c \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\neq 0} \right)$$

Egyirányban teherviselő lemez



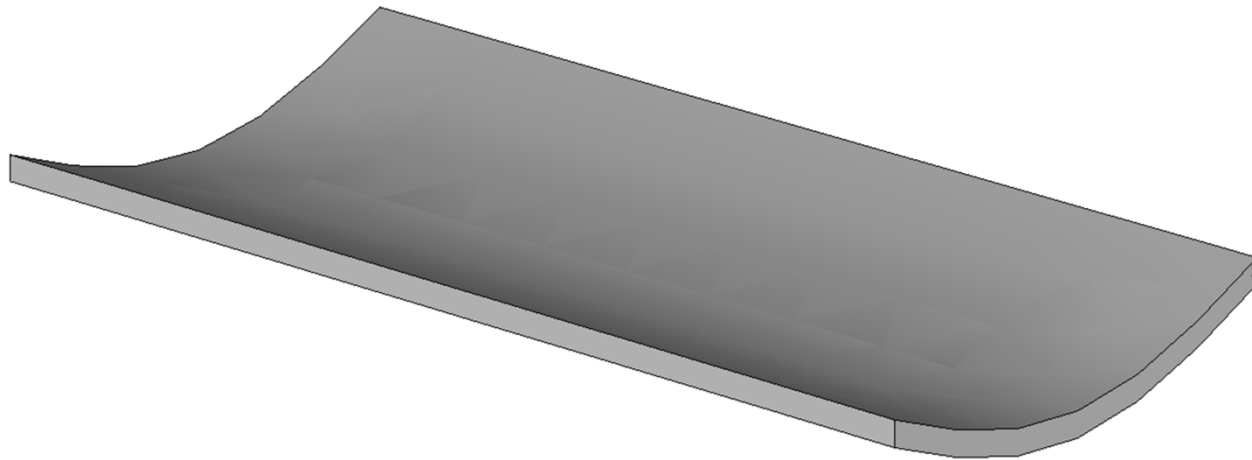
| Jellemző mennyiség | állandó t vastagságú lemez | gerenda  |
|--|--|--|
| teher | felületen működő $q(x,y)$ | vonal mentén működő $q(x)$ |
| lehajlás |  |  |
| alapegyenlet | $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{k}$ | $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{K}$ |
| hajlítási merevség | $K = \frac{E \cdot I}{1 - \mu_c^2} ; I = \frac{t^3}{12}$ | $K = E \cdot I ; I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ |
| hajlító nyomaték | $m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ | $M_x = -K \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$ $M_y \equiv 0$ |
| csavaró nyomaték | $m_{xy} = m_{yx} = -K \cdot (1 - \mu_c) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ | $M_{xy} = 0$ ha a teher a szim. tengelyben hat |
| nyíróerő | $v_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ $v_y = -K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$ | $V_x = -K \frac{d^3 w}{dx^3}$ $V_y \equiv 0$ |
| nyíróerő - hajlítónyomaték összefüggés | $v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$ $v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$ | $V_x = \frac{dM_x}{dx}$ $V_y = 0$ |
| nyíróerő - teher összefüggés | $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0$ | $\frac{dV_x}{dx} + q = 0$ |
| hajlítónyomaték - teher összefüggés | $\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + q = 0$ | $\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$ |
| megoszló teher dim. | kN/m ² | kN/m |
| nyomaték dim. | kNm/m | kNm |
| nyíróerő dim. | kN/m | kN |

Lemezegyeneslet

- A lemez y irányú folytonossága révén az elemi gerendacsíkok harántirányú kontrakciója meg van gátolva, és ez a főiránybeli nyomaték μ -szőrösével megegyező nyomatékot ébreszt.
- Ennek felvételére - pontosabb méretezés nélkül - “elosztóvasakat” építünk be a lemezbe a fővasakra keresztirányban. Ezek 1,0 m-es szakaszra jutó keresztmetszete a fővassal azonos szilárdság esetében nem lehet kevesebb a fővasbetétek 1,0 m-re jutó keresztmetszetének 20%-ánál, és az egyes szálak legfeljebb 40 cm-re lehetnek egymástól. Az elosztóvasalás mennyisége nem lehet kevesebb a minimális vasalásnál, azaz mintegy a hatékony betonkeresztmetszet 1,5 ezrelékénél.
- Az elosztóvasakat a fővasakhoz kötik, így azok helyzet rögzítését is szolgálják, és ezért szerelővasnak is szokták nevezni őket.

Igénybevételek

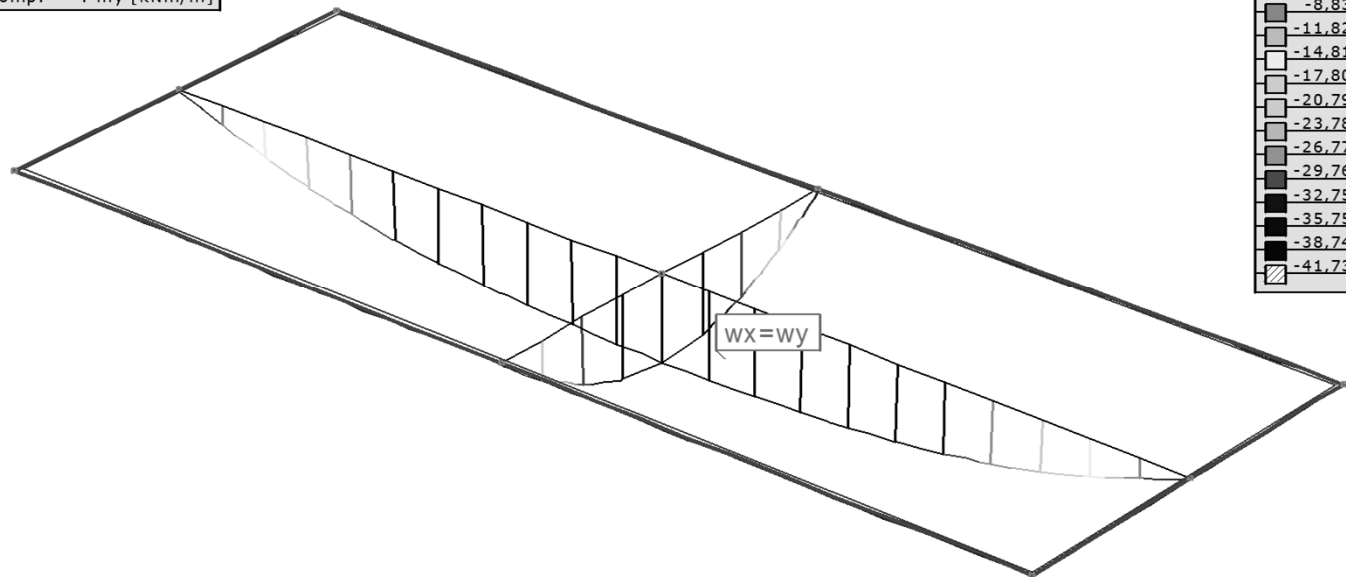
- Egyirányban teherhordó lemezekben csak m_x és v_x keletkezik. (lemezek esetén az index a nyomaték változásának irányát jelöli)



Közelítő módszerek sávmódszer

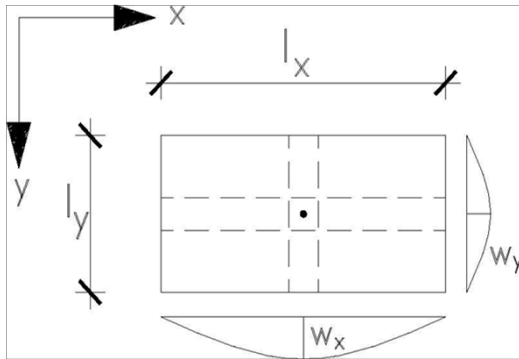
Az alapötlete az, hogy a lemezből a maximális lehajlás helyén x és y irányában egy-egy egymást keresztező, egységnyi szélességű lemezsávot vágunk ki, melyeket a saját irányukban önállóan működő gerendáknak tekintünk.

E (ER) : 3,06E-12
Komp. : my [kNm/m]



Sávmódeszer

Ezzel, a csavarási ellenállást figyelembe vevő tag elhanyagolása miatt, a rugalmas lemezek Lagrange féle differenciálegyenlete:



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{p}{k}$$

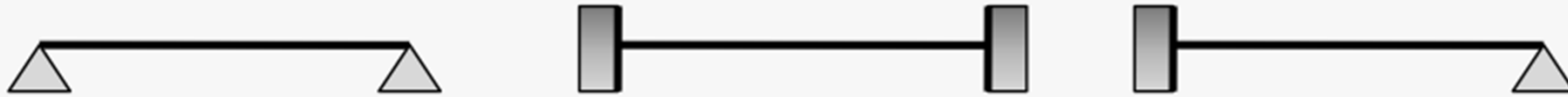
ahol a baloldal első tagja egységnyi szélességű x irányú, a második pedig szintén egységnyi szélességű, de y irányú gerenda alakváltozás-teher összefüggéseként értelmezhető.

Sávmódszer

- Ha az x irányú tartó által viselt megoszló teherrész p_x és az y irányú tartó által viselt teherrész p_y , és a lemez felületére q egyenletesen megoszló teher működik, akkor az egyensúly alapján:
 - $p_x + q_y = p = \text{const.}$
- A két sáv kereszteződési pontjában a lehajlás azonos értékű, ezért a kompatibilitási feltétel : $w_x = w_y$
- A lemezsávok rugalmas vonalának differenciálegyenlete alapján a lehajlások értékei:

$$w_x = c_x \frac{p_x \ell_x^4}{EI_x}; w_y = c_y \frac{p_y \ell_y^4}{EI_y}$$

Megtámasztási viszonyok



Lehajlás



$$w = \frac{5}{384} \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$



$$w = \frac{1}{384} \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$



$$w = \frac{2}{384} \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$

Hajlítónyomaték

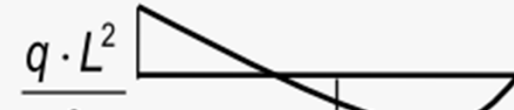


$$\frac{q \cdot L^2}{8}$$



$$\frac{q \cdot L^2}{12}$$

$$\frac{q \cdot L^2}{24}$$



$$\frac{q \cdot L^2}{8}$$

$$\frac{q \cdot L^2}{16}$$

sávmódszer

Figyelembe véve, hogy $l_x \approx l_y$, a két egyenletet egyenlővé téve:

$$c_x p_x l_x^4 = c_y p_y l_y^4$$

ebből:
$$p_x = \frac{c_y l_y^4}{c_x l_x^4} p_y$$

bevezetve:

$$a = \frac{c_y l_y^4}{c_x l_x^4}$$

jelölést

$$p_x = a \cdot p_y$$

figyelembe véve, hogy:

$$p = p_x + p_y \rightarrow p = a \cdot p_y + p_y \rightarrow p = (1 + a) p_y$$

tehát:

$$p_y = \frac{1}{1 + a} p$$
$$p_x = \frac{a}{1 + a} p$$

A lemezsávok maximális nyomatékai ezután az adott irányú sávra működő teherrészből a megtámasztási viszonyok függvényében számíthatók.

sávmódszer

- A kétirányú teherviselést mindkét irányban azonos megtámasztású lemezsávok esetén csak $0,5 < \ell_x / \ell_y > 2,0$ esetben érdemes figyelembe venni, mivel ha:

$$\frac{c_y}{c_x} = 1, \frac{\ell_y}{\ell_x} = 2$$

$$a = 16$$

$$p_y = \frac{1}{1+16} p = \frac{1}{17} p$$

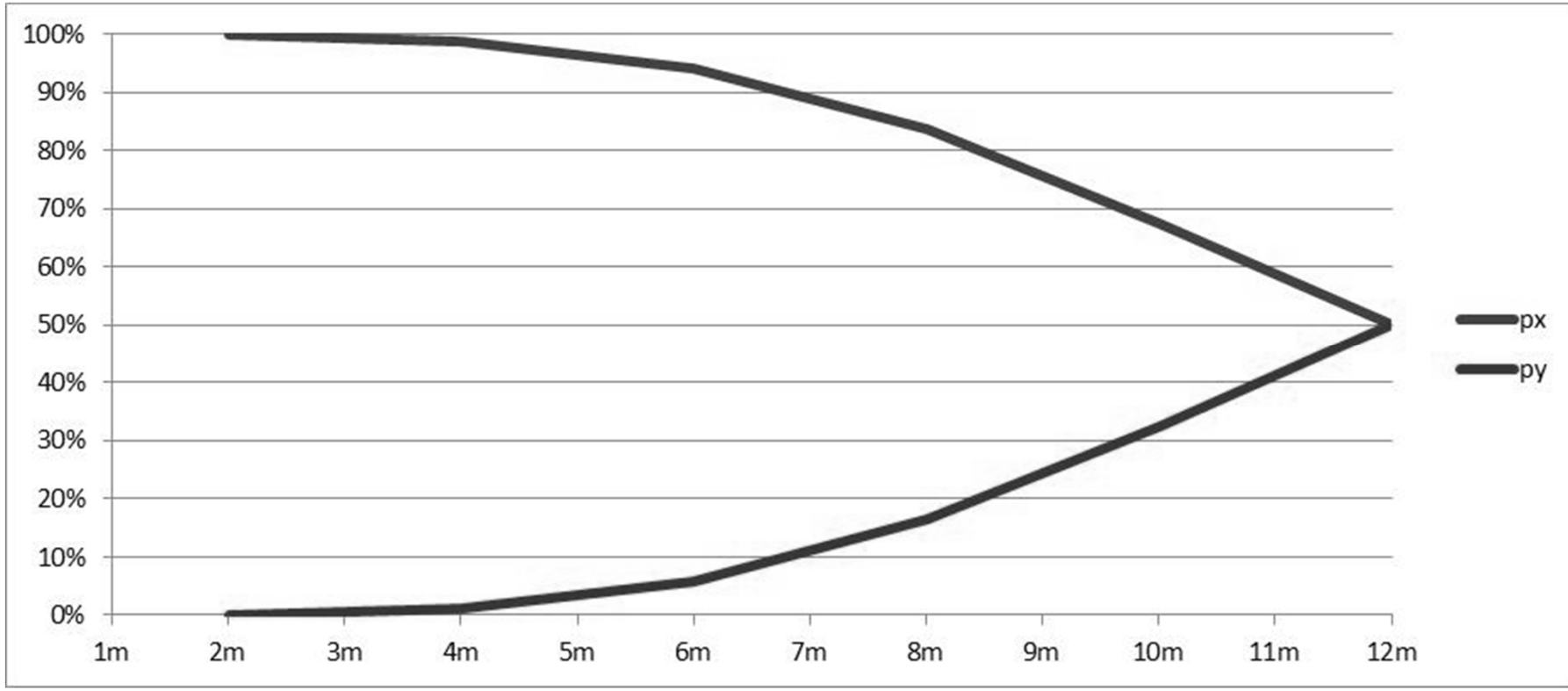
az összteher 6%-a

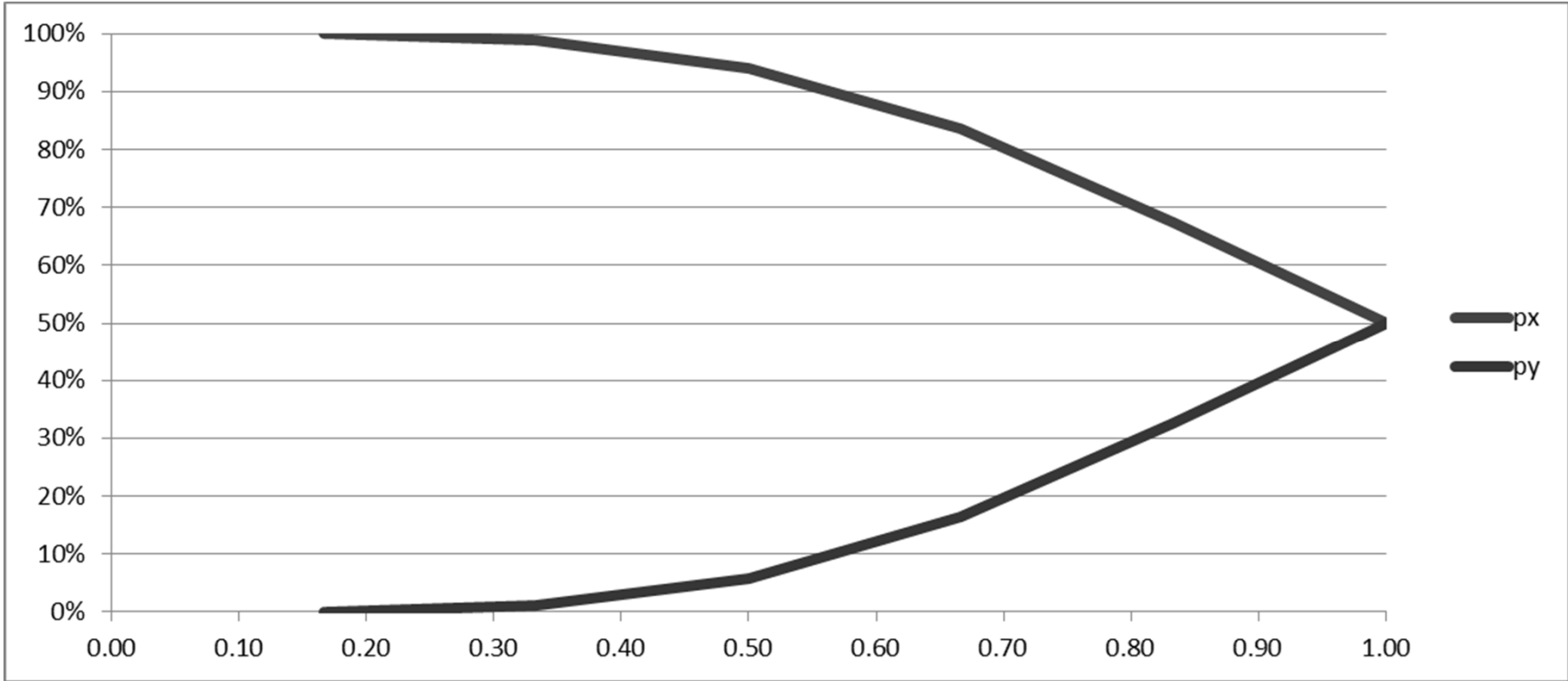
$$p_x = \frac{16}{1+16} p = \frac{16}{17} p$$

az összteher 94%-a

A sávmódszer elhanyagolja a keresztező lemezsávok egymásra gyakorolt hatásából fellépő csavarónyomatékokat, ezért a hajlítónyomatékokat a biztonság javára szolgáló közelítéssel állapítja meg

| | | p= | 20kN/m ² | | | | | | |
|----------------|-----|---------|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|------------------------|-------|-------|--|
| ℓ _y | | a | p _x [kN/m ²] | p _y [kN/m ²] | m _x [kNm/m] | m _y [kNm/m] | x | y | |
| | 12m | | | | | | | | |
| ℓ _x | 12m | 1.00 | 10.00 | 10.00 | 180.00 | 180.00 | 50.0% | 50.0% | |
| | 10m | 2.07 | 13.49 | 6.51 | 168.66 | 117.13 | 67.5% | 32.5% | |
| | 8m | 5.06 | 16.70 | 3.30 | 133.61 | 59.38 | 83.5% | 16.5% | |
| | 6m | 16.00 | 18.82 | 1.18 | 84.71 | 21.18 | 94.1% | 5.9% | |
| | 4m | 81.00 | 19.76 | 0.24 | 39.51 | 4.39 | 98.8% | 1.2% | |
| | 2m | 1296.00 | 19.98 | 0.02 | 9.99 | 0.28 | 99.9% | 0.1% | |





Marcus módszer

- Marcus dolgozta ki a sávmódszer alapján a csavarónyomaték hatásának figyelembevételével.
- A lemezre működő terheket Marcus az alábbiak szerint
 - $p'_x + p'_y + p''_x + p''_y = p = \text{const.}$ alakban bontotta fel,
 - Ahol a $p''_x + p''_y = p_{xy}$ tag a csavarási ellenállásnak megfelelő teherrészt veszi figyelembe.

Marcus módszer

Az x és y irányú csavarási tagokra Marcus a következő összefüggést vezette le:

$$p_x'' = \frac{5}{6} \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 \frac{m_x}{m_{ox}} p_x$$
$$p_y'' = \frac{5}{6} \left(\frac{l_y}{l_x} \right)^2 \frac{m_y}{m_{oy}} p_y$$

- m_x és m_y a sávmódszerrel meghatározható mezőközépi fajlagos hajlítónyomatékok,
- m_{ox} és m_{oy} a kéttámaszúnak tekintett x és y irányú lemezsávok maximális nyomatékai a teljes q teherből,
- p_x és p_y a sávmódszerrel meghatározható teherrészek

Fentiek alapján a p'_x és p'_y hajlítási teherhányadok a $p'_x = p_x - p''_x$ és $p'_y = p_y - p''_y$ kifejezések segítségével számíthatók, melyekből a lemez hajlítónyomatékai a megtámasztási viszonyoktól függően határozhatók meg.

MARCUS MÓDSZER

- A csavarási taggal módosított hajlítási teherhányad, illetve az abból számítható nyomatékok meghatározására Marcus az alábbi ábrán feltüntetett alapesetekre dolgozott ki táblázatokat.



SEGÉDTÁBLÁZATOK

- Ma már a Marcus féle táblázatok nem használatosak, de a számítás egyszerűsége miatt sok esetben hasznos segítséget adhatnak.
- Korszerűbb módszert jelentenek a Bares és a Czerny féle segédtáblázatok, amelyek a lemezegyenlet pontos megoldásán, de egyúttal $\mu=0$ egyszerűsítő feltevésen alapulnak. Megjegyzendő, hogy a harántkontrakció elhanyagolása nem jelent durva közelítést mert a lemez repedt-rugalmas állapotában a μ értéke a húzott övben nagymértékben lecsökken.

SEGÉDTÁBLÁZATOK

L₁ lemez:

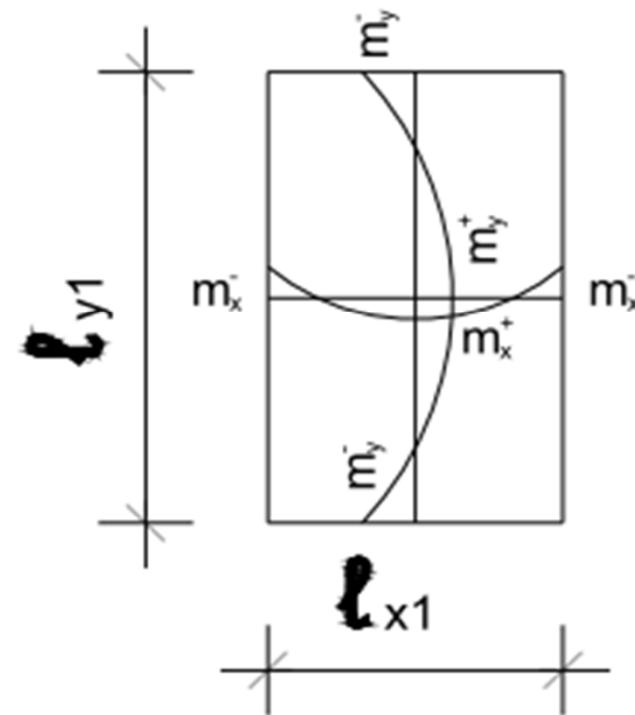
$$m_x^- = -\frac{p'_m \times l_{x1}^2}{\alpha_1}$$

$$m_x^+ = -\frac{p'_m \times l_{x1}^2}{\alpha_2}$$

$$m_y^- = -\frac{p'_m \times l_{x1}^2}{\alpha_3}$$

$$m_y^+ = -\frac{p'_m \times l_{x1}^2}{\alpha_4}$$

L₁ lemez



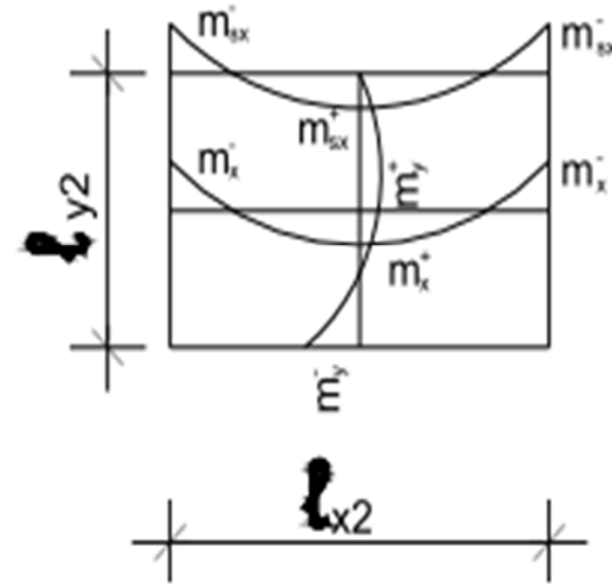
| l_y/l_x | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| α_1 | 19,4 | 17,1 | 15,5 | 14,5 | 13,7 | 13,2 | 12,8 | 12,5 | 12,3 | 12,1 | 12,0 |
| α_2 | 56,8 | 46,1 | 39,4 | 34,8 | 31,9 | 30,6 | 28,1 | 26,9 | 26,0 | 25,4 | 25,0 |
| α_3 | 19,4 | 18,4 | 17,9 | 17,6 | 17,5 | 17,5 | 17,5 | 17,5 | 17,5 | 17,5 | 17,5 |
| α_4 | 56,3 | 60,3 | 65,8 | 73,6 | 83,4 | 93,5 | 98,1 | 101,3 | 103,3 | 104,0 | 103,0 |

SEGÉDTÁBLÁZATOK

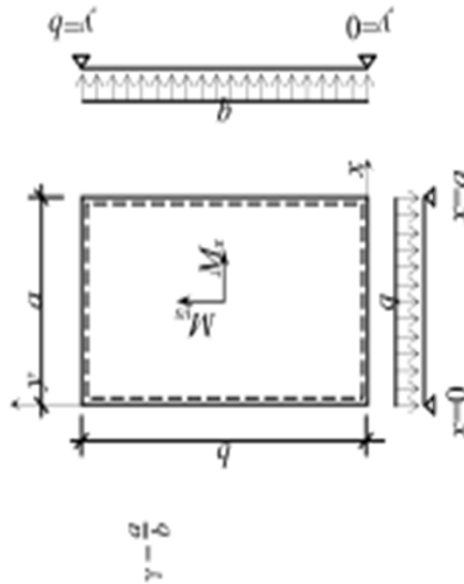
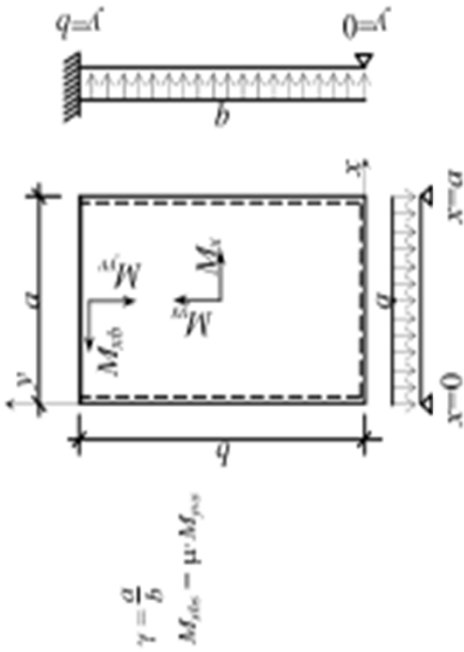
$$m_x^- = -\frac{p'_m \times l_{x2}^2}{\beta_1} \quad m_x^+ = -\frac{p'_m \times l_{x2}^2}{\beta_2}$$

$$m_{xs}^- = -\frac{p'_m \times l_{x2}^2}{\beta_3} \quad m_{xs}^+ = -\frac{p'_m \times l_{x2}^2}{\beta_4}$$

$$m_y^- = -\frac{p'_{ms} \times l_{x2}^2}{\beta_5} \quad m_y^+ = -\frac{p'_{ms} \times l_{x2}^2}{\beta_6}$$



| l_y/l_x | 0,25 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| β_1 | 6,79 | 6,89 | 7,26 | 7,89 | 8,79 | 9,98 | 11,98 | 13,08 | 14,98 |
| β_2 | 57,08 | 37,91 | 25,43 | 22,78 | 23,16 | 24,92 | 27,49 | 30,65 | 34,30 |
| β_3 | 2,15 | 2,27 | 2,71 | 3,43 | 4,45 | 5,77 | 7,41 | 9,35 | 11,59 |
| β_4 | 19,24 | 18,91 | 10,69 | 10,64 | 11,87 | 13,94 | 16,73 | 20,18 | 24,29 |
| β_5 | 2,41 | 2,71 | 3,61 | 4,93 | 6,66 | 8,81 | 11,34 | 14,29 | 17,59 |
| β_6 | 104,2 | 62,46 | 43,24 | 41,67 | 48,00 | 58,45 | 72,73 | 89,55 | 108,70 |

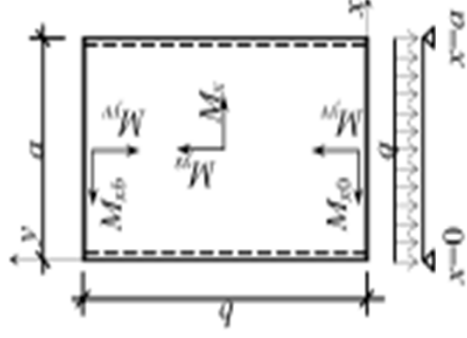


Tab. 1.8

| γ | w_x | M_{xx} | | $\mu=0,15$ | M_{xy} |
|----------|-----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | M_{xx} | M_{yy} | | |
| 0,50 | 0,1087 | 0,0908 | 0,0084 | -0,0305 | -0,0305 |
| 0,55 | 0,0981 | 0,0826 | 0,0109 | -0,0362 | -0,0362 |
| 0,60 | 0,0881 | 0,0747 | 0,0135 | -0,0421 | -0,0421 |
| 0,65 | 0,0786 | 0,0670 | 0,0162 | -0,0479 | -0,0479 |
| 0,70 | 0,0698 | 0,0599 | 0,0192 | -0,0537 | -0,0537 |
| 0,75 | 0,0618 | 0,0533 | 0,0221 | -0,0594 | -0,0594 |
| 0,80 | 0,0544 | 0,0472 | 0,0249 | -0,0650 | -0,0650 |
| 0,85 | 0,0479 | 0,0417 | 0,0277 | -0,0703 | -0,0703 |
| 0,90 | 0,0421 | 0,0369 | 0,0304 | -0,0750 | -0,0750 |
| 0,95 | 0,0370 | 0,0327 | 0,0330 | -0,0797 | -0,0797 |
| 1,00 | 0,0326 | 0,0291 | 0,0354 | -0,0840 | -0,0840 |
| 1,10 | 0,0253 | 0,0228 | 0,0399 | -0,0917 | -0,0917 |
| 1,20 | 0,0197 | 0,0180 | 0,0438 | -0,0980 | -0,0980 |
| 1,30 | 0,0155 | 0,0143 | 0,0471 | -0,1032 | -0,1032 |
| 1,40 | 0,0123 | 0,0115 | 0,0500 | -0,1075 | -0,1075 |
| 1,50 | 0,0099 | 0,0094 | 0,0524 | -0,1109 | -0,1109 |
| 1,60 | 0,0079 | 0,0076 | 0,0544 | -0,1136 | -0,1136 |
| 1,70 | 0,0063 | 0,0062 | 0,0561 | -0,1160 | -0,1160 |
| 1,80 | 0,0052 | 0,0052 | 0,0575 | -0,1184 | -0,1184 |
| 1,90 | 0,0043 | 0,0044 | 0,0586 | -0,1203 | -0,1203 |
| 2,00 | 0,0036 | 0,0037 | 0,0594 | -0,1213 | -0,1213 |
| | $\frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot b^2$ | $q \cdot b^2$ | $q \cdot b^2$ |

Tab. 1.7

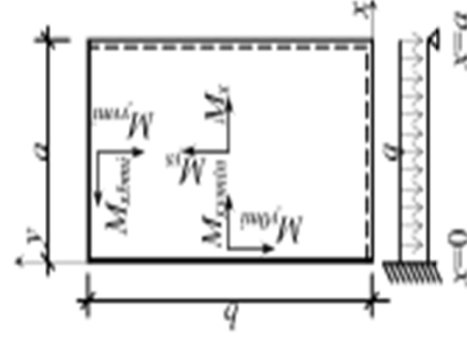
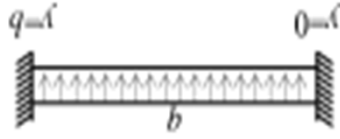
| γ | w_x | M_{xx} | | $\mu=0,15$ | M_{xy} |
|----------|-----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | M_{xx} | M_{yy} | | |
| 0,50 | 0,1189 | 0,0991 | 0,0079 | 0,0079 | 0,0079 |
| 0,55 | 0,1101 | 0,0923 | 0,0103 | 0,0103 | 0,0103 |
| 0,60 | 0,1015 | 0,0857 | 0,0131 | 0,0131 | 0,0131 |
| 0,65 | 0,0931 | 0,0792 | 0,0162 | 0,0162 | 0,0162 |
| 0,70 | 0,0851 | 0,0730 | 0,0194 | 0,0194 | 0,0194 |
| 0,75 | 0,0777 | 0,0669 | 0,0230 | 0,0230 | 0,0230 |
| 0,80 | 0,0708 | 0,0611 | 0,0269 | 0,0269 | 0,0269 |
| 0,85 | 0,0644 | 0,0557 | 0,0307 | 0,0307 | 0,0307 |
| 0,90 | 0,0584 | 0,0507 | 0,0344 | 0,0344 | 0,0344 |
| 0,95 | 0,0529 | 0,0462 | 0,0383 | 0,0383 | 0,0383 |
| 1,00 | 0,0476 | 0,0423 | 0,0423 | 0,0423 | 0,0423 |
| 1,10 | 0,0390 | 0,0353 | 0,0500 | 0,0500 | 0,0500 |
| 1,20 | 0,0320 | 0,0293 | 0,0575 | 0,0575 | 0,0575 |
| 1,30 | 0,0262 | 0,0244 | 0,0644 | 0,0644 | 0,0644 |
| 1,40 | 0,0216 | 0,0204 | 0,0710 | 0,0710 | 0,0710 |
| 1,50 | 0,0179 | 0,0173 | 0,0772 | 0,0772 | 0,0772 |
| 1,60 | 0,0149 | 0,0146 | 0,0826 | 0,0826 | 0,0826 |
| 1,70 | 0,0124 | 0,0124 | 0,0874 | 0,0874 | 0,0874 |
| 1,80 | 0,0105 | 0,0107 | 0,0916 | 0,0916 | 0,0916 |
| 1,90 | 0,0088 | 0,0091 | 0,0954 | 0,0954 | 0,0954 |
| 2,00 | 0,0074 | 0,0079 | 0,0991 | 0,0991 | 0,0991 |
| | $\frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot b^2$ | $q \cdot b^2$ |



$$\gamma = \frac{a}{b}$$

$$M_{x0b} = M_{x0a}$$

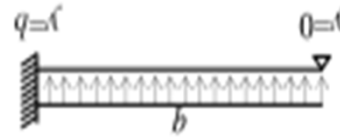
$$M_{x0a} = \mu \cdot M_{y0b}$$



$$\gamma = \frac{a}{b}$$

$$M_{x0b0} = \mu \cdot M_{y0b0}$$

$$M_{x0b0} = \mu \cdot M_{y0a0}$$

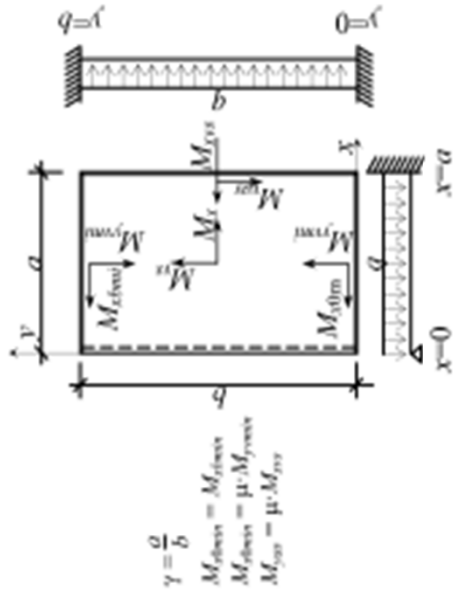
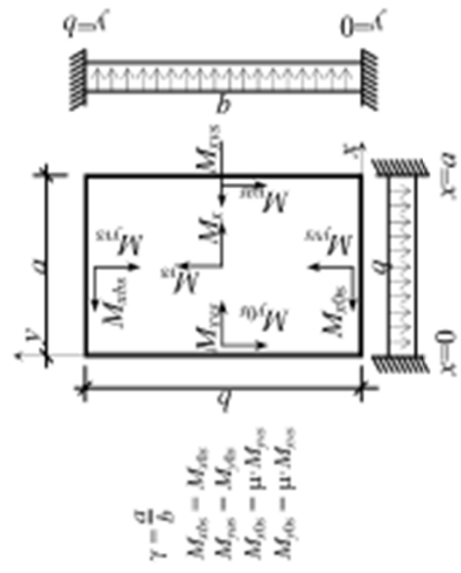


Tab. 1.9

| γ | w_s | M_{x0} | | M_{y0} | | $\mu=0,15$ |
|----------|-----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------|
| | | M_{x0b} | M_{x0a} | M_{y0b} | M_{y0a} | |
| 0,50 | 0,0990 | 0,0835 | 0,0088 | -0,0297 | | |
| 0,55 | 0,0872 | 0,0738 | 0,0113 | -0,0350 | | |
| 0,60 | 0,0759 | 0,0647 | 0,0137 | -0,0400 | | |
| 0,65 | 0,0657 | 0,0563 | 0,0166 | -0,0450 | | |
| 0,70 | 0,0565 | 0,0489 | 0,0187 | -0,0497 | | |
| 0,75 | 0,0484 | 0,0423 | 0,0212 | -0,0540 | | |
| 0,80 | 0,0414 | 0,0363 | 0,0233 | -0,0578 | | |
| 0,85 | 0,0355 | 0,0313 | 0,0254 | -0,0612 | | |
| 0,90 | 0,0305 | 0,0270 | 0,0274 | -0,0644 | | |
| 0,95 | 0,0262 | 0,0232 | 0,0292 | -0,0677 | | |
| 1,00 | 0,0225 | 0,0201 | 0,0309 | -0,0699 | | |
| 1,10 | 0,0167 | 0,0151 | 0,0335 | -0,0741 | | |
| 1,20 | 0,0126 | 0,0113 | 0,0357 | -0,0770 | | |
| 1,30 | 0,0096 | 0,0088 | 0,0374 | -0,0793 | | |
| 1,40 | 0,0073 | 0,0068 | 0,0386 | -0,0811 | | |
| 1,50 | 0,0057 | 0,0053 | 0,0396 | -0,0815 | | |
| 1,60 | 0,0045 | 0,0042 | 0,0404 | -0,0825 | | |
| 1,70 | 0,0036 | 0,0034 | 0,0410 | -0,0830 | | |
| 1,80 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0414 | -0,0832 | | |
| 1,90 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0416 | -0,0833 | | |
| 2,00 | 0,0018 | 0,0019 | 0,0417 | -0,0833 | | |
| | $\frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot b^2$ | |

Tab. 1.10

| γ | w_s | M_{x0} | | M_{y0} | | $\mu=0,15$ |
|----------|-----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | M_{x0b} | M_{x0a} | M_{y0b} | M_{y0a} | |
| 0,50 | 0,0549 | 0,0570 | -0,1189 | 0,0040 | -0,0205 | |
| 0,55 | 0,0520 | 0,0543 | -0,1148 | 0,0054 | -0,0249 | |
| 0,60 | 0,0490 | 0,0514 | -0,1104 | 0,0072 | -0,0294 | |
| 0,65 | 0,0458 | 0,0483 | -0,1057 | 0,0092 | -0,0341 | |
| 0,70 | 0,0425 | 0,0451 | -0,1008 | 0,0114 | -0,0390 | |
| 0,75 | 0,0393 | 0,0418 | -0,0957 | 0,0139 | -0,0442 | |
| 0,80 | 0,0361 | 0,0385 | -0,0905 | 0,0164 | -0,0496 | |
| 0,85 | 0,0330 | 0,0354 | -0,0852 | 0,0191 | -0,0548 | |
| 0,90 | 0,0301 | 0,0324 | -0,0798 | 0,0217 | -0,0598 | |
| 0,95 | 0,0273 | 0,0295 | -0,0745 | 0,0243 | -0,0648 | |
| 1,00 | 0,0246 | 0,0269 | -0,0699 | 0,0269 | -0,0699 | |
| 1,10 | 0,0201 | 0,0221 | -0,0608 | 0,0319 | -0,0787 | |
| 1,20 | 0,0164 | 0,0182 | -0,0530 | 0,0365 | -0,0869 | |
| 1,30 | 0,0133 | 0,0148 | -0,0462 | 0,0406 | -0,0937 | |
| 1,40 | 0,0108 | 0,0122 | -0,0405 | 0,0442 | -0,0993 | |
| 1,50 | 0,0089 | 0,0100 | -0,0358 | 0,0473 | -0,1041 | |
| 1,60 | 0,0072 | 0,0081 | -0,0317 | 0,0499 | -0,1082 | |
| 1,70 | 0,0059 | 0,0066 | -0,0282 | 0,0521 | -0,1116 | |
| 1,80 | 0,0048 | 0,0055 | -0,0252 | 0,0540 | -0,1143 | |
| 1,90 | 0,0040 | 0,0046 | -0,0226 | 0,0556 | -0,1167 | |
| 2,00 | 0,0034 | 0,0040 | -0,0205 | 0,0570 | -0,1189 | |
| | $\frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot b^2$ | $q \cdot b^2$ |



Tab. 1.12

| γ | w_s | M_{xy} | | M_{yx} | | $\mu=0,15$ |
|----------|-----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | M_{xy} | M_{yx} | M_{xy} | M_{yx} | |
| 0,50 | 0,0296 | 0,0405 | 0,0833 | 0,0024 | 0,0143 | M_{xy0ab} |
| 0,55 | 0,0286 | 0,0394 | 0,0817 | 0,0033 | 0,0172 | |
| 0,60 | 0,0275 | 0,0378 | 0,0794 | 0,0046 | 0,0206 | |
| 0,65 | 0,0261 | 0,0360 | 0,0767 | 0,0061 | 0,0242 | |
| 0,70 | 0,0246 | 0,0339 | 0,0737 | 0,0079 | 0,0280 | |
| 0,75 | 0,0231 | 0,0315 | 0,0704 | 0,0098 | 0,0320 | |
| 0,80 | 0,0214 | 0,0293 | 0,0668 | 0,0103 | 0,0360 | |
| 0,85 | 0,0196 | 0,0269 | 0,0631 | 0,0139 | 0,0400 | |
| 0,90 | 0,0180 | 0,0247 | 0,0593 | 0,0160 | 0,0440 | |
| 0,95 | 0,0164 | 0,0224 | 0,0554 | 0,0181 | 0,0480 | |
| 1,00 | 0,0149 | 0,0202 | 0,0515 | 0,0202 | 0,0515 | |
| 1,10 | 0,0121 | 0,0164 | 0,0449 | 0,0242 | 0,0585 | |
| 1,20 | 0,0098 | 0,0131 | 0,0388 | 0,0287 | 0,0643 | |
| 1,30 | 0,0078 | 0,0105 | 0,0336 | 0,0306 | 0,0690 | |
| 1,40 | 0,0063 | 0,0084 | 0,0291 | 0,0332 | 0,0728 | |
| 1,50 | 0,0051 | 0,0066 | 0,0254 | 0,0353 | 0,0757 | |
| 1,60 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0223 | 0,0369 | 0,0779 | |
| 1,70 | 0,0033 | 0,0042 | 0,0198 | 0,0383 | 0,0797 | |
| 1,80 | 0,0027 | 0,0035 | 0,0176 | 0,0392 | 0,0812 | |
| 1,90 | 0,0022 | 0,0028 | 0,0158 | 0,0399 | 0,0824 | |
| 2,00 | 0,0018 | 0,0024 | 0,0143 | 0,0405 | 0,0833 | |
| | $\frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot b^2$ | $q \cdot b^2$ | $q \cdot b^2$ |

Tab. 1.11

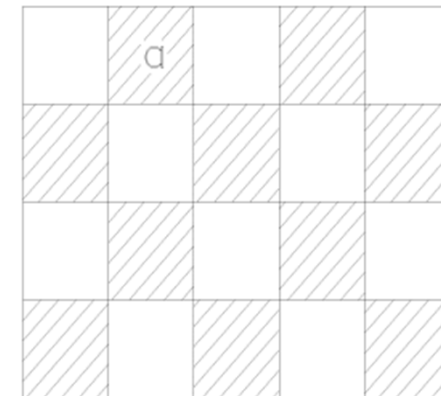
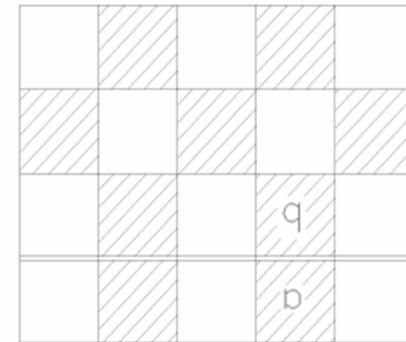
| γ | w_s | M_{xy} | | M_{yx} | | $\mu=0,15$ |
|----------|-----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | M_{xy} | M_{yx} | M_{xy} | M_{yx} | |
| 0,50 | 0,0528 | 0,0550 | 0,1135 | 0,0045 | 0,0203 | M_{xy0ab} |
| 0,55 | 0,0489 | 0,0514 | 0,1078 | 0,0062 | 0,0247 | |
| 0,60 | 0,0450 | 0,0476 | 0,1021 | 0,0081 | 0,0291 | |
| 0,65 | 0,0411 | 0,0436 | 0,0964 | 0,0101 | 0,0336 | |
| 0,70 | 0,0373 | 0,0398 | 0,0906 | 0,0122 | 0,0381 | |
| 0,75 | 0,0336 | 0,0359 | 0,0845 | 0,0145 | 0,0427 | |
| 0,80 | 0,0300 | 0,0323 | 0,0881 | 0,0169 | 0,0471 | |
| 0,85 | 0,0266 | 0,0289 | 0,0720 | 0,0191 | 0,0513 | |
| 0,90 | 0,0236 | 0,0257 | 0,0661 | 0,0211 | 0,0551 | |
| 0,95 | 0,0209 | 0,0228 | 0,0603 | 0,0232 | 0,0586 | |
| 1,00 | 0,0184 | 0,0202 | 0,0546 | 0,0252 | 0,0617 | |
| 1,10 | 0,0142 | 0,0158 | 0,0467 | 0,0287 | 0,0676 | |
| 1,20 | 0,0110 | 0,0123 | 0,0399 | 0,0316 | 0,0722 | |
| 1,30 | 0,0086 | 0,0096 | 0,0341 | 0,0340 | 0,0757 | |
| 1,40 | 0,0068 | 0,0075 | 0,0293 | 0,0359 | 0,0782 | |
| 1,50 | 0,0054 | 0,0060 | 0,0254 | 0,0374 | 0,0800 | |
| 1,60 | 0,0043 | 0,0048 | 0,0221 | 0,0386 | 0,0814 | |
| 1,70 | 0,0034 | 0,0039 | 0,0193 | 0,0395 | 0,0825 | |
| 1,80 | 0,0027 | 0,0031 | 0,0171 | 0,0402 | 0,0834 | |
| 1,90 | 0,0022 | 0,0026 | 0,0154 | 0,0408 | 0,0842 | |
| 2,00 | 0,0018 | 0,0022 | 0,0141 | 0,0412 | 0,0847 | |
| | $\frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot a^2$ | $q \cdot b^2$ | $q \cdot b^2$ | $q \cdot b^2$ |

Összetett lemezek

- Az összetett lemezek igénybevételeit általában mezőnként elkülönítve határozzuk meg. A csatlakozó vonalaknál kialakuló támasznyomatéki különbségeket vagy Cross-módszerrel, vagy képlékeny nyomatékátrendezéssel egyenlítjük ki.
- Az esetleges teher mértékadó elhelyezése szempontjából a több mezőből álló lemezrendszer mindkét irányban a többtámaszú folytatólagos tartóhoz hasonlóan mértékadóan kell leterhelni.

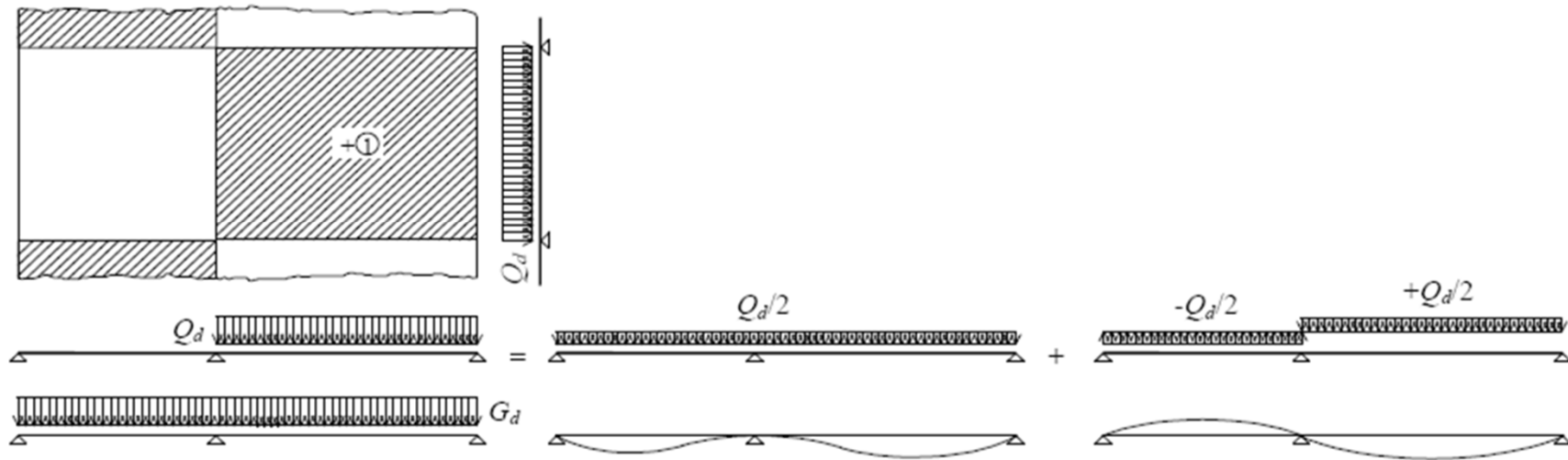
Összetett lemezek

- Egy adott perem menti támasznyomaték szempontjából az adja a mértékadó igénybevételt, ha a szomszédos mindkét mezőt lemezmezőt leterheljük.
- A mezőközépi pozitív nyomatékra akkor kapjuk a mértékadó igénybevételt, ha a mezőt magát, majd pedig attól számítva a második nyílásokat leterheljük (sakktáblaszabály)



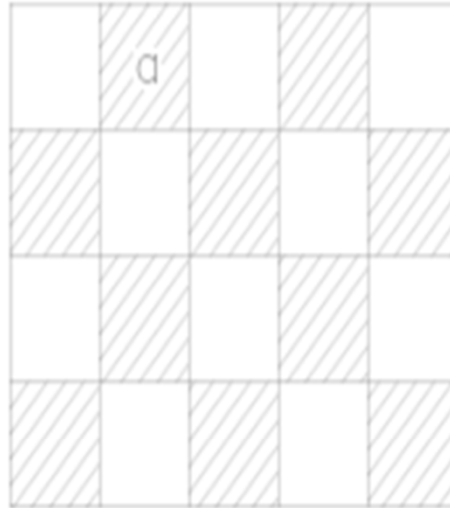
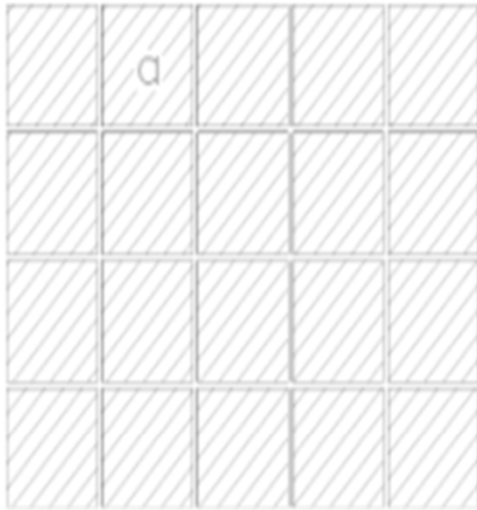
Lemezrendszer közelítő számítása

- a lemezvastagság minden mezőben azonos,
- a lemezmezők hajlításra mereven kapcsolódnak egymáshoz, de a megtámasztási vonalak mentén szabadon elfordulhatnak,
- a szomszédos lemezmezők fesztávolságainak aránya mindkét irányban 0,8 és 1,25 között



- Különálló lemezen a csatlakozó peremeken:
 - $q' = g + p/2$ teherre \rightarrow merev befogás
 - $q'' = \pm p/2$ teherre \rightarrow Csuklós megtámasztás
 - Maximális mezőnyomaték a két terheléshez tartozó nyomaték összegeként határozható meg
 - Minimális mezőnyomaték a két terheléshez tartozó nyomaték különbségeként határozható meg

Leterhelés - mezőnyomaték



Lemezrendszer mértékadó
leterhelése mezőnyomatékra

$$\begin{array}{c} q' = g + \frac{p}{2} \\ \hline \begin{array}{c} \boxed{a} \end{array} \quad q' = g + \frac{p}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{c} q'' = \pm \frac{p}{2} \\ \hline \begin{array}{c} \boxed{a} \end{array} \quad q'' = +\frac{p}{2} \end{array}$$

- Állandó teher : teljes lemezrendszer
- Hasznos teher : sakktábla szerű
 - Leterhelés



Lemezrendszer
mértékadó
leterhelése
támasznyomatékra

$$q' = g + \frac{p}{2}$$



$$q' = g + \frac{p}{2}$$

$$q'' = g \pm \frac{p}{2}$$



$$q'' = +\frac{p}{2}$$

