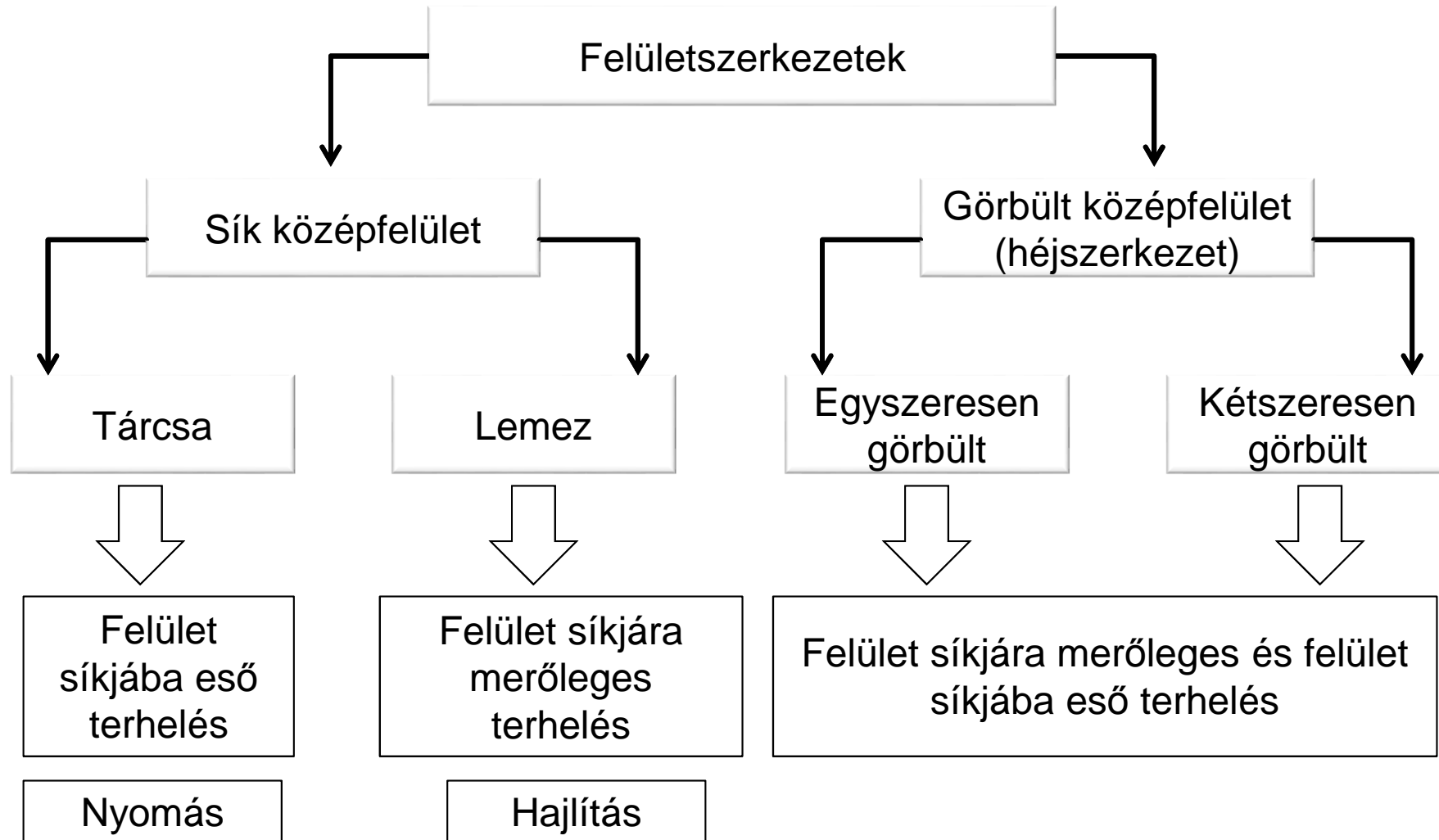


# TARTÓSZERKEZETEK II.

## VASBETONSZERKEZETEK

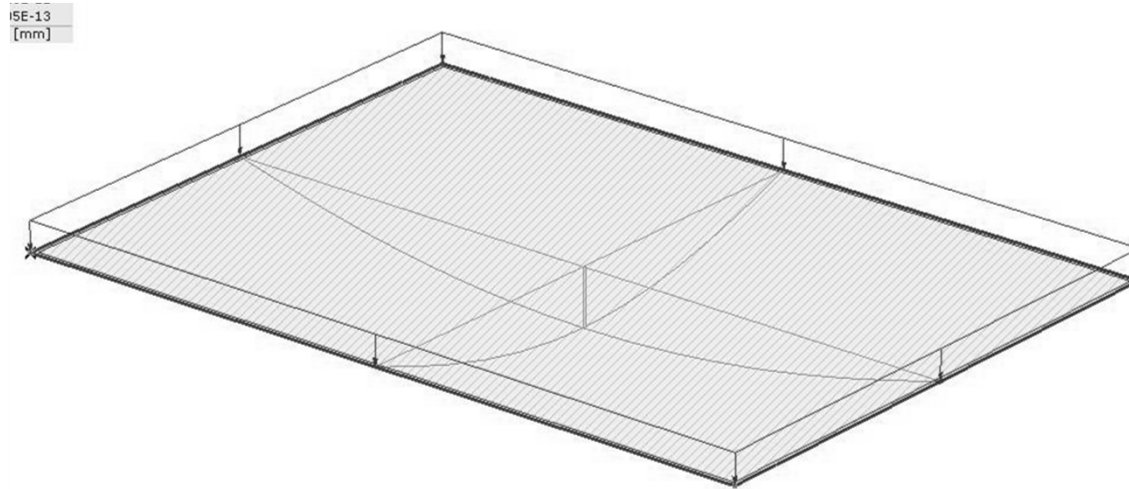
2013.02.11.

# A felületszerkezetek csoportosítása



# Vasbeton lemezek

Lemez: olyan sík középfelületű és erre merőlegesen terhelt tartószerkezetet, amelyek vastagsága a másik két méretéhez viszonyítva csekély.



A vasbeton lemez mind a magas, mind a mély, mind pedig a hídépítésben rendkívül gyakran előforduló szerkezeti elem.

# Lemezelméletek

- vastag lemezek elmélete,
- nagy lehajlású vékony lemezek elmélete,
- kis lehajlású vékony lemezek elmélete.

# Vastag lemezek elmélete

- Lurje, 1963
- nem tesz semmilyen megkötést a lemez alakjára és lehajlására nézve, és a rugalmasságtan háromdimenziós feladatainál használt általános módszereket, differenciálegyenleteket alkalmazza, térbeli feszültségi és alakváltozási állapotot feltételezve.

# Nagy lehajlású vékony lemezek elmélete

- Kármán, 1910
- a nagy elmozdulások elméletét alkalmazza, amely nemlineáris egyenletekhez vezet. Ilyenkor a lemez középsíkja is alakváltozást szenved, amely járulékos feszültségeket okoz.

# Lemezelmélet

- Vékonynak tekintjük a lemezt,
- ha  $h < l_{\min}/10$ .
- Nagy lehajlás esetén a lemez
- $w_{\max} > 0.2h$

# A kis lehajlású vékony lemezek elmélete

- Reissner, 1924, Mindlin, 1934
- kis elmozdulások elméletét alkalmazza, amely lineáris egyenleteket jelent. Ilyenkor a lemez középsíkja – amely elmozdul ugyan – de nem szenved alakváltozásokat, így a járulékos feszültségek elhanyagolhatók. Ugyancsak elhanyagolhatjuk a nyíróerők alakváltozásra gyakorolt hatását. Az elmélet a nyíróerők elhanyagolásával tovább egyszerűsíthető (Timoshenko, 1966).



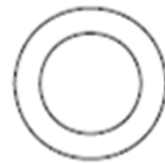
# Vasbeton lemezek, előnyök :

- kétirányú teherviselés - nagy teherbírás,
- Keresztirányú merevsége miatt a kis felületen megoszló terhekből (pld. koncentrált terhek, kis felületen megoszló, pontszerű terhek) keletkező igénybevételei kedvezőbbek (jobb teherelosztás)
- kis szerkezeti magasság (magasépítés:  $l/20$ - $l/40$ , hídépítés:  $l/12$ - $l/20$ ),
- könnyű zsaluzás, vasalás és betonozás
- a lemezek vasalása viszonylag egyszerű
- a lemezek betonozása viszonylag egyszerűen elvégezhető, a beton bedolgozhatósága a viszonylag ritka vasalás következtében akadálytalan.

# Vasbeton lemezek

A lemezmezők alakja szerint:

- háromszög alaprajzú,
- négyszög alaprajzú,
- kör alaprajzú,
- tetszőleges alaprajzú lemezek



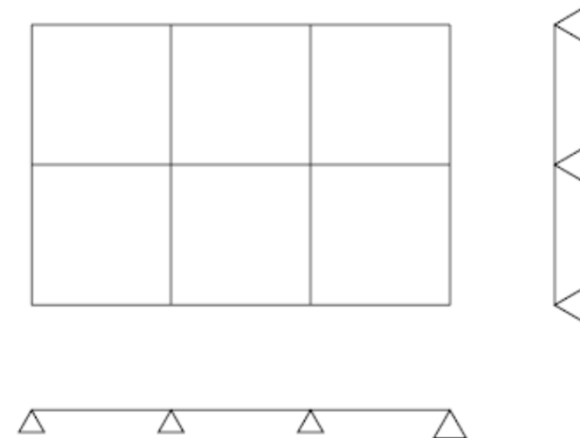
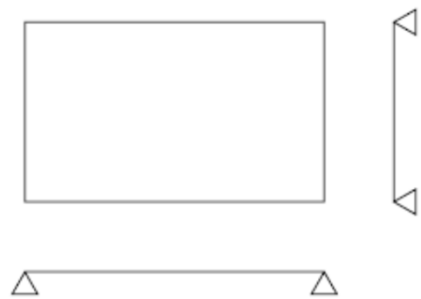
# Vasbeton lemezek

- A lemezek osztályozása: a megtámasztás módja szerint, pereme mentén:
  - szabad szélű,
  - csuklós,
  - befogott,
  - mindegyik megtámasztás lehet fix, vagy süllyedő
- a befogás elvileg lehet merev befogás, de ez nehezen megvalósítható, vastag beton falakba lehetséges.
- A csatlakozó szomszédos födémmezőkbe – többtámaszúsítás esetén - a födém rugalmasan befogott.

# Egyedi lemez, lemezrendszerek

„kéttámaszú” lemezek - egyedi lemezeknek

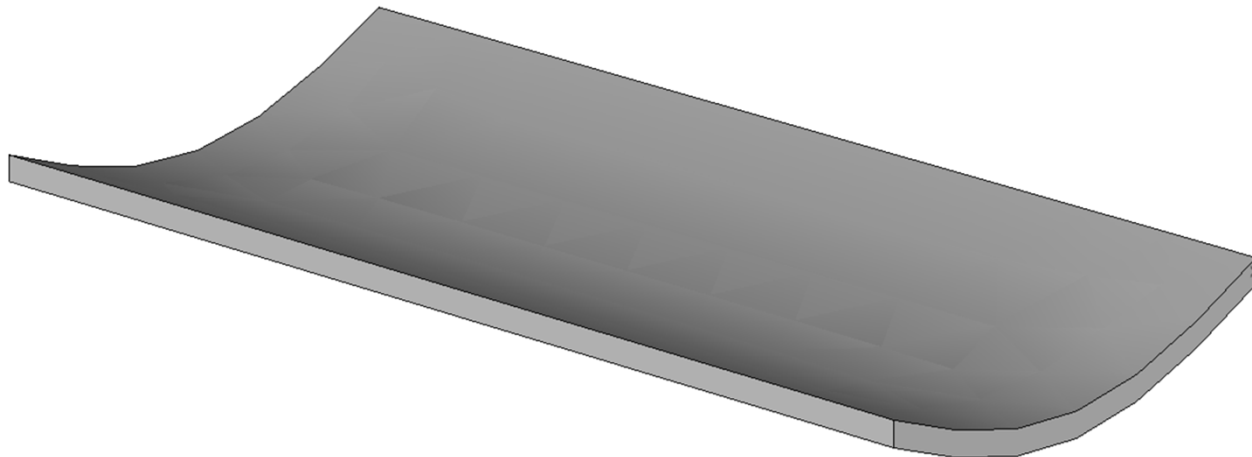
Lemezrendszer - több lemez összeépítése - többtámaszú



# A lemezek osztályozása

teherhordás iránya szerint:

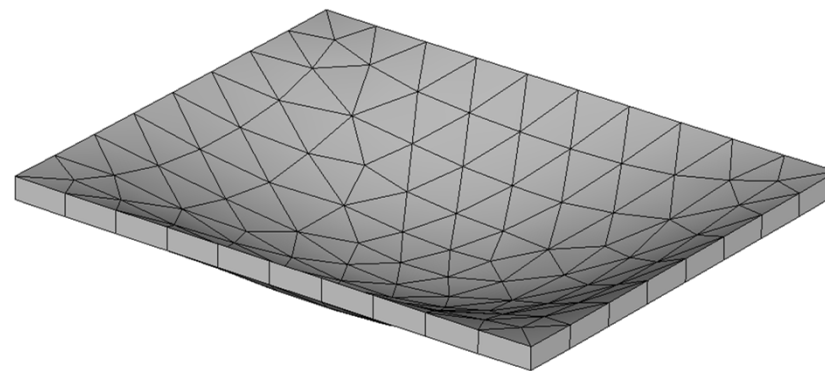
- egyirányban teherhordó lemez:
  - (közel) párhuzamos, vonalmenti támaszok
  - Egyszeresen görbült terhelt lemezalak
  - gerendaszerű viselkedés
  - 1,0m széles sáv vizsgálata gerendaként
  - Támaszok környezetében zavart zónák



# A lemezek osztályozása

Két irányban teherhordó lemez:

- legalább két, egymással szöget bezáró vonalmenti támasz
- Terhelés hatására kétszeresen görbült felület
- Pontokon megtámasztott lemez:
  - pontszerű támaszok, oszlopok pillérek
- Számítás lemezelmélet alapján



# Vasbeton lemezek

- A lemezek számításának módszerei:
  - rugalmas
  - törésmélelet

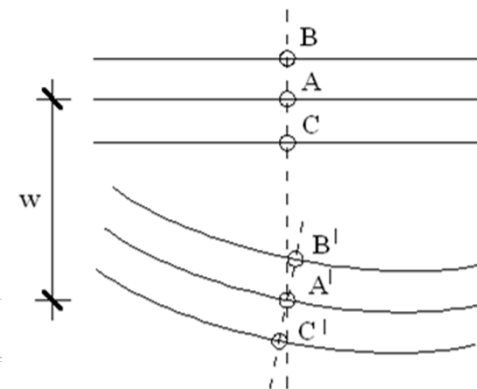
# Rugalmas lemezelmélet

- A vasbeton lemezek anizotróp viselkedésétől eltekintünk  
Berepedetlen (repedésmentes), és berepedt (II.  
feszültségállapotban lévő) vasbeton lemez lineárisan  
homogén viselkedése biztosított. A berepedt  
állapotot csökkentett inerciával (hajlítási merevséggel)  
kell figyelembe venni.
- Ez alapján kimondhatjuk, hogy a rugalmas  
lemezelmélet használati határállapotban elegendően  
pontos.

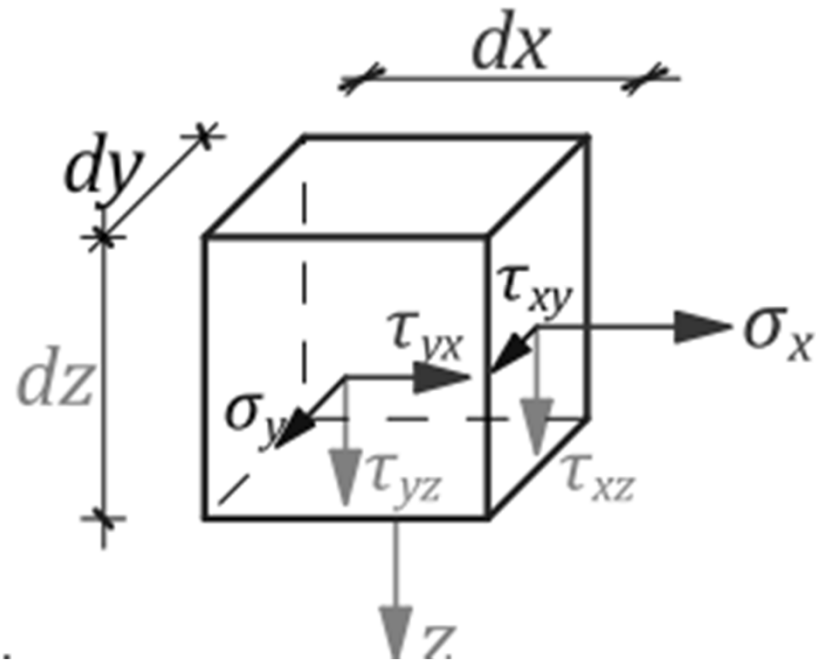
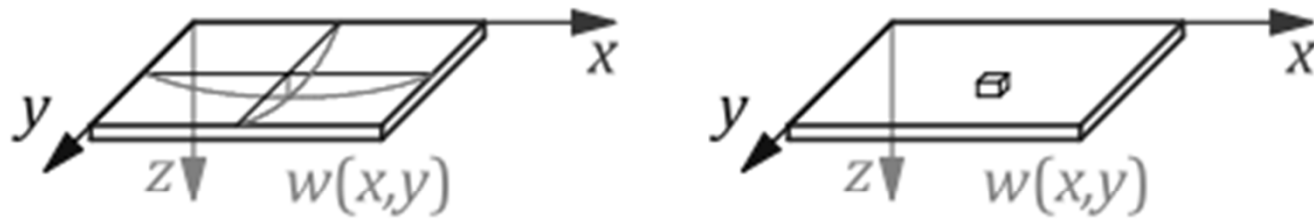


# Rugalmas lemezelmélet

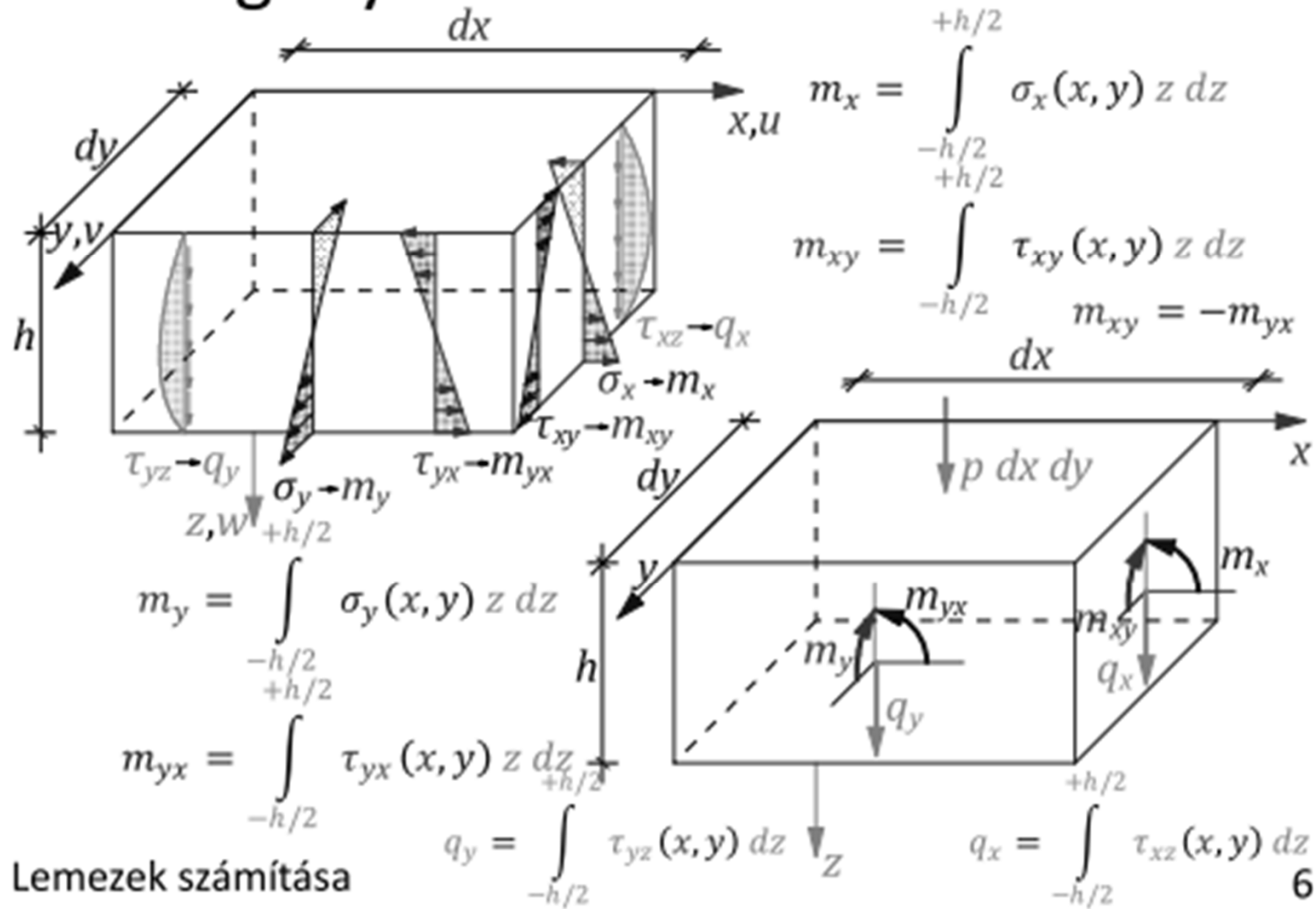
- alapfeltevések:
  - **Anyag**: ideálisan rugalmas, homogén izotróp
  - **Szerkezet**: a lemez vastagsága állandó és a másik két kiterjedéséhez képest kicsi ( $\nu = \ell_{\min}/10$ )
  - **Alakváltozások**: az alakváltozások kicsik, nem hatnak vissza a szerkezet erőjátékára
  - Érvényes a Kirchhoff-Love hipotézis, azaz a középsík valamely pontjának normálisán lévő pontja alakváltozás után is ugyanazon a normálison marad;
  - A lemez középsíkjának pontjai csak merőlegesen tolódnak el, a lemez síkjára merőleges alakváltozásoktól eltekintünk
  - Terhek: a lemez síkjára merőlegesek



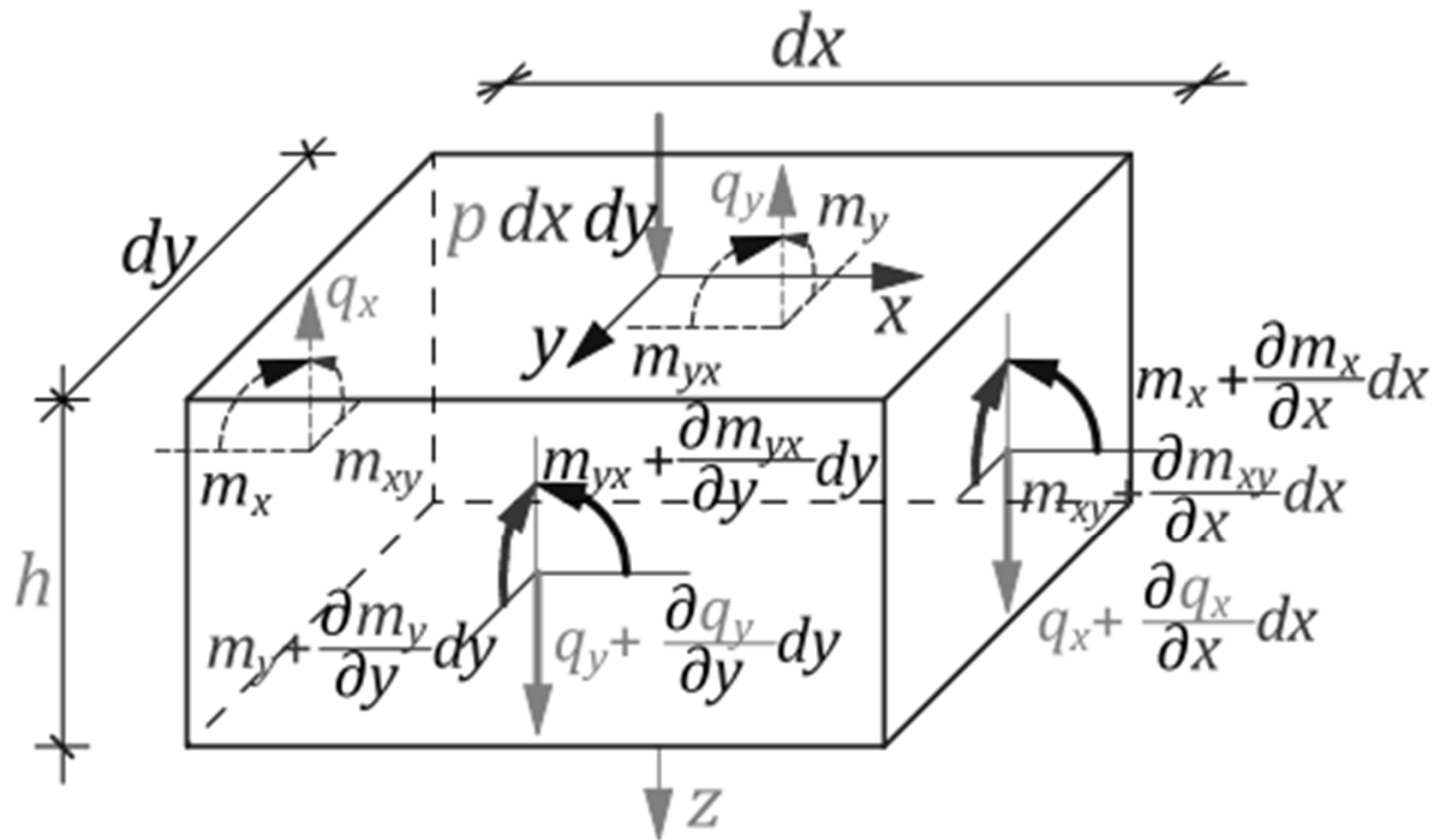
# Feszültségek a lemezben



# Igénybevételtek a lemezben



# Egyensúlyi egyenlet



# Egyensúlyi egyenlet

$$\sum F_{iz}: \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx + p dx dy = 0$$

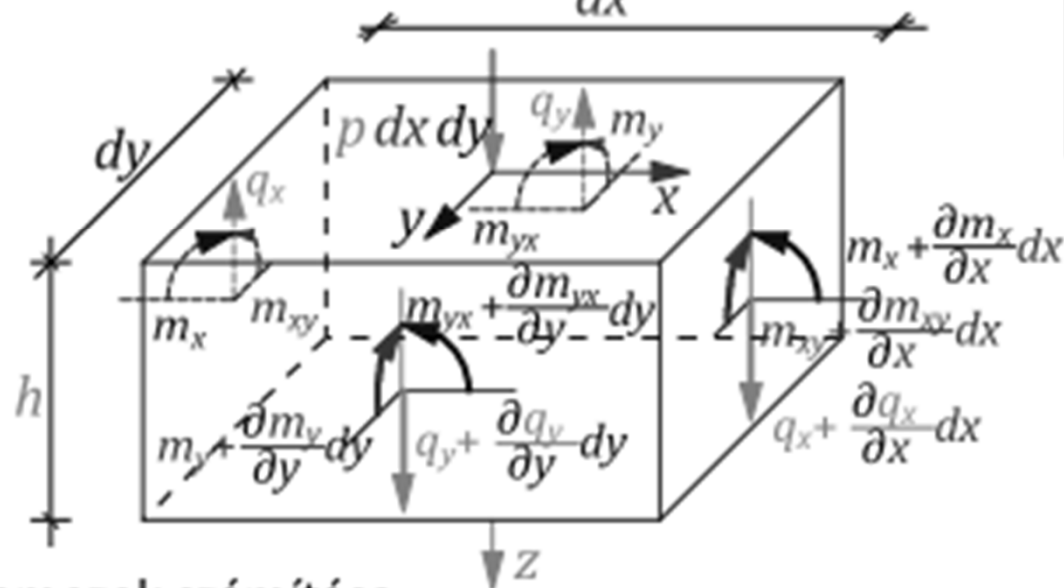
$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\sum M_{ix}: -\frac{\partial m_y}{\partial y} dy dx - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx dy + q_y dx dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx \frac{dy}{2} = 0$$

$$\sum M_{ix}: -\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + q_y = 0$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}$$



Lemezek számítása

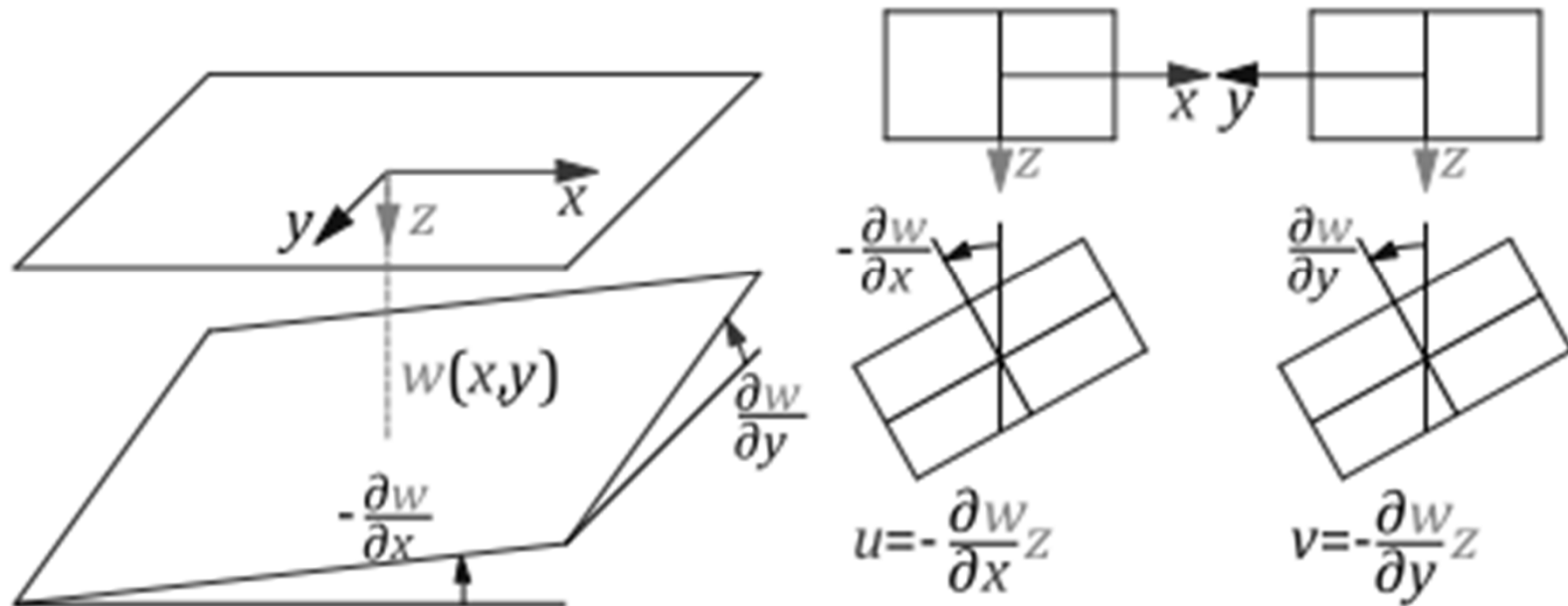
# Egyensúlyi egyenlet

$$q_x = \underbrace{\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}} \quad q_y = \underbrace{\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}}$$
$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right)}{\partial y} + p = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p = 0}$$

# Geometriai egyenletek



$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} z$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} z$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} z$$

# Anyagegyenletek

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) z$$

$$\sigma_y(x, y, z) = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) z$$

$$\tau_{xy}(x, y, z) = G\gamma_{xy} = -\frac{E}{2(1 + \nu)} 2 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} z = -\frac{E}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} z$$

$$m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x(x, y) z dz = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$$

$$K = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Lemezmeresség

$$m_x = -K \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right)$$



## Lemez egyenlet

$$m_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x(x, y) z \, dz = -K \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y(x, y) z \, dz = -K \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right)$$

$$m_{xy} = -m_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy}(x, y) z \, dz = -K(1 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$m_x = -K \left( \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) \quad m_y = -K \left( \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \right) \quad m_{xy} = -m_{yx} = -K(1-\nu) \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p = 0$$

$$-K \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \left( (1-\nu) \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \right)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \right)}{\partial y^2} \right)$$

$$+ p = 0$$

$$-K \left( \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} \right) + p = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = \frac{p}{K}}$$

$$\boxed{\Delta \Delta w = \frac{p}{K}}$$

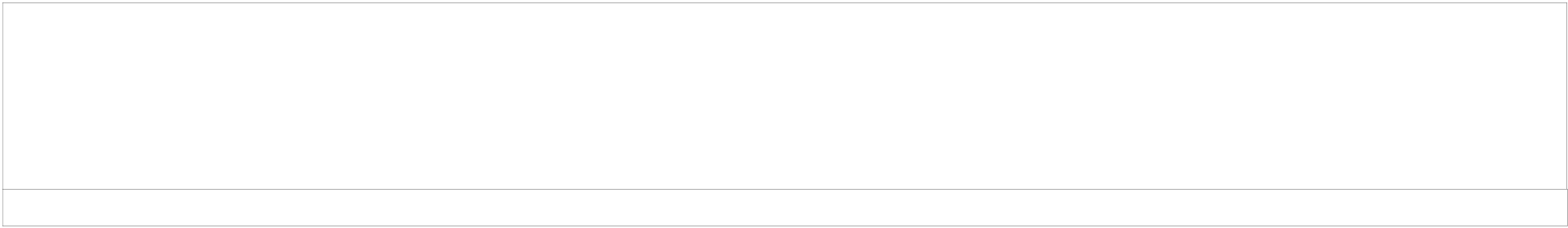
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{Laplace operátor}$$

# Nyíróerők

$$\begin{aligned}q_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -K \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( (1-\nu) \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \right)}{\partial y} \right) \\ &= -K \left( \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w)\end{aligned}$$

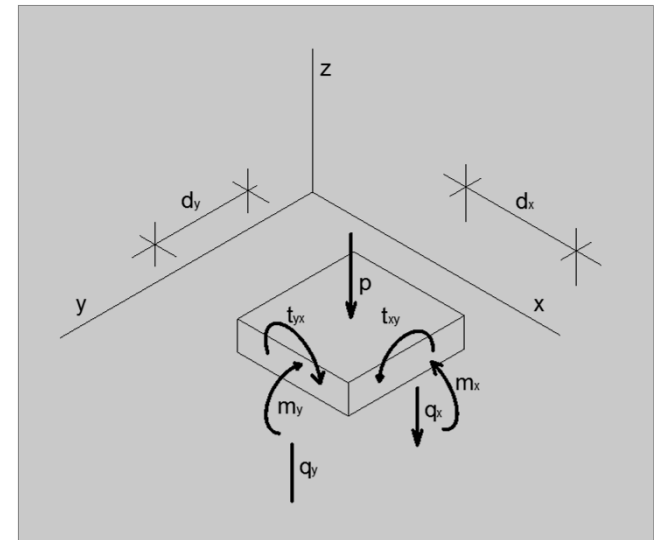
$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -K \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -K \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w)$$



# IGÉNYBEVÉTELEK

- A lemezben a függőleges terhelés hatására hajlítás, nyírás és csavarás keletkezik.
- Az igénybevételeket célszerű 1,0m széles fődémsávokra osztás alapján meghatározni, ezért fajlagos igénybevételekről beszélhetünk:
- $m_x, m_y$  : fajlagos hajlítónyomaték (kNm/m)
- $v_x, v_y$  : fajlagos nyíróerő (kN/m)
- $t_{xy}=t_{yx}$  : fajlagos csavarónyomaték (kNm/m)



# Lemezegyenlet

A  $p(x,y)$  teherrel terhelt lemez egy  $dx, dy$  eleme egyensúlyának vizsgálata alapján felírható egyensúlyi egyenlet:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = q$$

fizikai egyenlet:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_c^2} (\varepsilon_x + \mu_c \varepsilon_y); \sigma_y = \frac{E}{1 - \mu_c^2} (\varepsilon_y + \mu_c \varepsilon_x); \tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu_c)} \gamma_{xy}$$

összeférhetőségi egyenlet:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

# Lemezegyenlet

- Az egyensúlyi egyenlet, a fizikai és a kompatibilitási egyenletek figyelembevételével:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{k}$$

alakú Lagrange féle negyedrendű, parciális, inhomogén differenciál-egyenletté alakítható, mely a rugalmas lemezelmélet alapegyenlete A fenti összefüggésekben:

$E$  : a lemez anyagának, vb. lemez esetén a beton rugalmassági modulusa,

$\mu_c$  a harántnyúlási tényező (a Poisson tényező), melynek értéke vasbeton lemeznél  $\mu_c = 0,15 - 0,20$

$$k = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \mu_c^2)}$$

a lemez hajlítómerevsége.

# Lemezegyenlet

- Az egyenletben egyedüli ismeretlen a  $w(x,y)$  lehajlásfüggvény, melyet ha sikerül az adott kerületi feltételek mellett meghatározni akkor az igénybevételek ennek deriváltjaként előállíthatók:

$$m_x = -k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_y = -k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -k(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$v_x = -k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

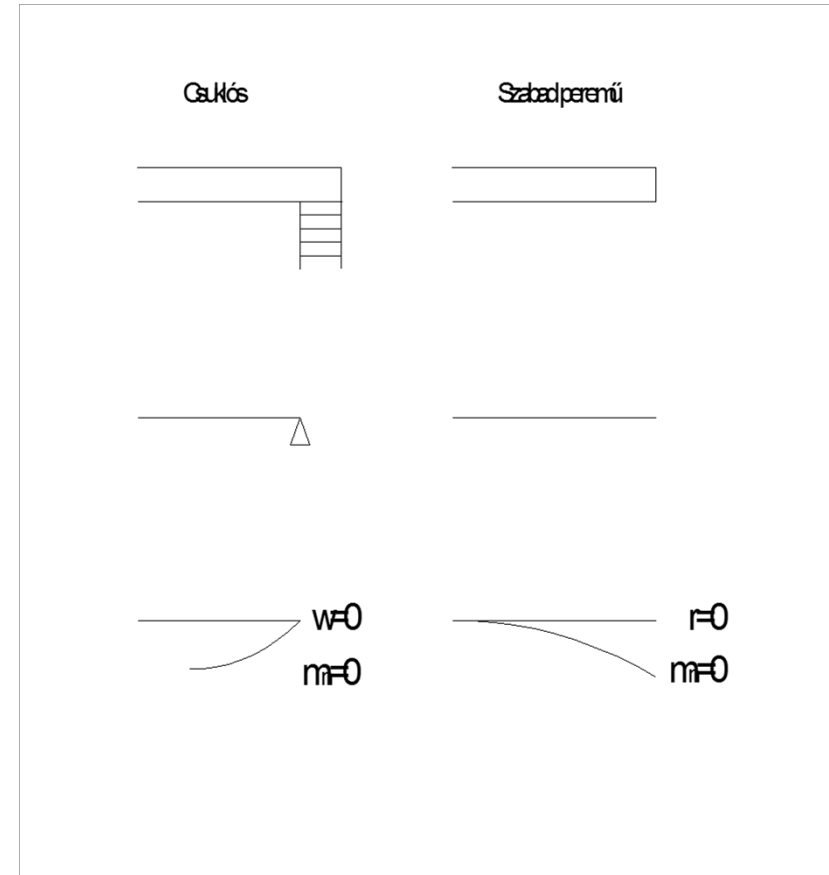
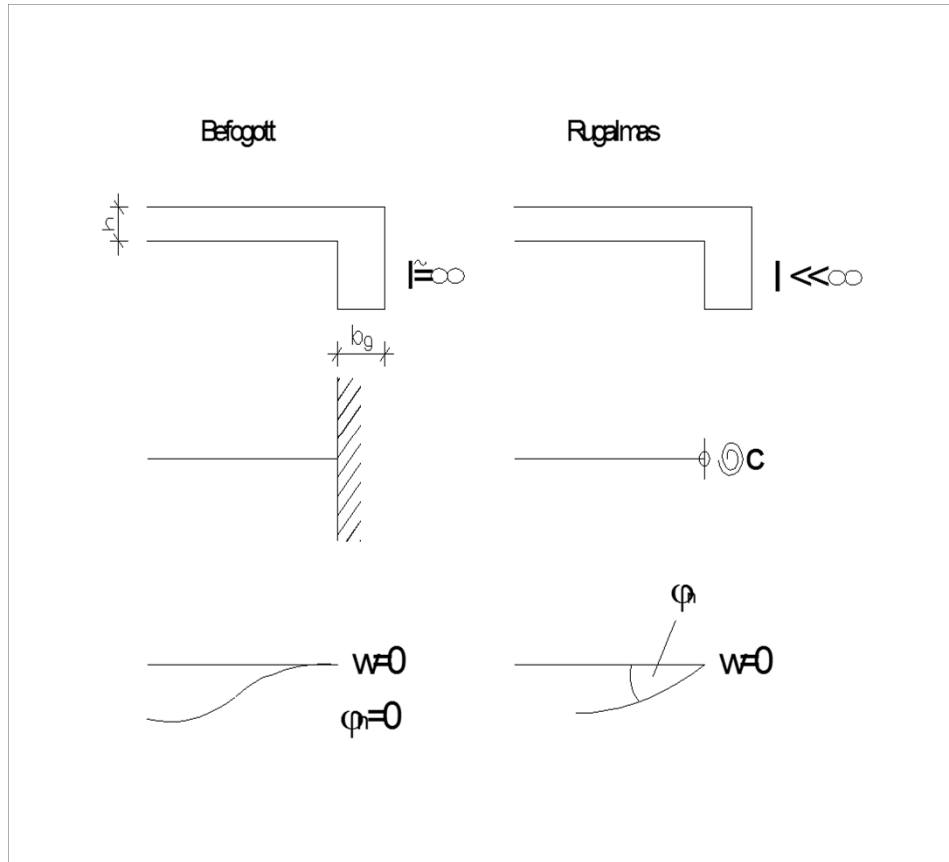
$$v_y = -k \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$



# Lemezegyenlet

- A lemezegyenlet
  - Lagrange-féle,
  - negyedrendű, parciális (kétváltozós),
  - inhomogén differenciálegyenlet
- Megoldása
  - elegendő számú peremfeltétel
  - minden perempontban két peremfeltételt
    - a lemez megtámasztási viszonyainak megfelelően

# Lemezgyenylenet - peremfeltételek



# Lemezegyenlet - peremfeltételek

- Csuklós megtámasztás
  - Lehajlás  $w=0$
  - A támasz vonalára merőleges hajlítónyomaték  $m_n=0$
- Befogás
  - Lehajlás  $w=0$
  - Normális irányú szögelfordulás
- Rugalmas befogás
  - Lehajlás  $w=0$
  - Normális irányú szögelfordulás arányos a nyomatékkal
    - C rugóállandó
- Szabad perem
  - normális irányú nyomaték  $m_n=0$
  - Peremreakció  $r=0$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{c} m_n$$

# Lemezegyenlet

- Mivel a differenciálegyenlet csak speciális peremfeltételek esetén oldható meg analitikusan, a kétirányban teherviselő lemezszerkezetek számítására az alábbi módok terjedtek el:
  - egyszerű esetek analitikus megoldása alapján készült táblázatok használata
  - ponthálózatra vonatkozó differenciaegyenletek számítógépes megoldása
  - végeslemes módszeren alapuló számítógépes megoldások
    - (AxisVm, FEM-design, Sofistic, Abaqus stb)

# Lemezegyenlet

Ha differenciálegyenletben a lemez deformált alakjára nézve feltesszük, hogy „y” irányú görbülettel nem rendelkezik, továbbá elcsavarodása nincs. (hengeres hajlítás esete) akkor az egyenlet a hajlított gerenda diff. egyenletévé fajul.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\frac{p}{k}$$

# Lemezegyenlet

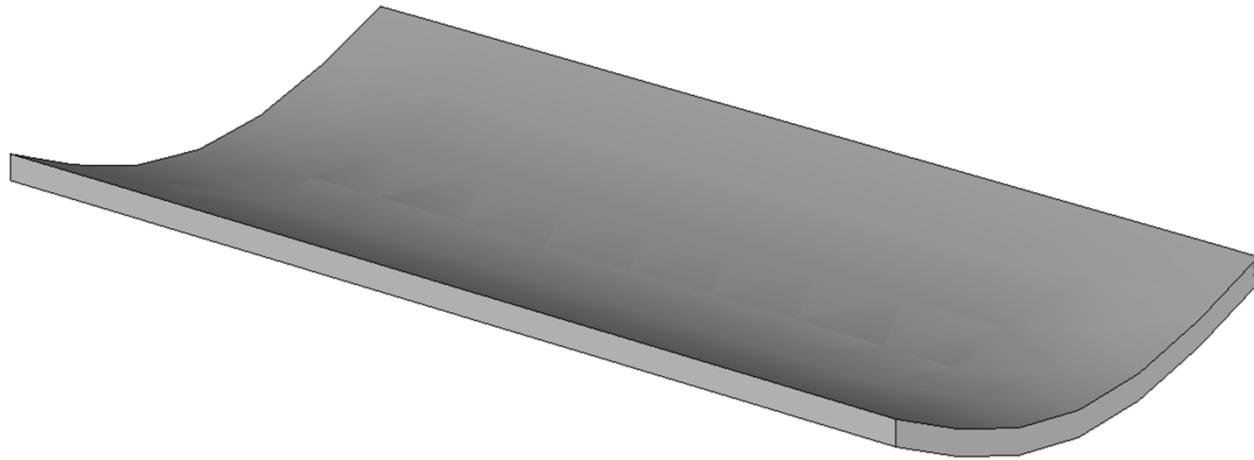
ez az eset akkor áll elő, ha  
a megtámasztási feltételek  
a lemez oldalarányi

az említett alakváltozási feltételeket előidézik.

Négy oldalon megtámasztott lemezeknél az általános gyakorlati szabály, hogy  $0,5 < \ell_y / \ell_x < 2$  esetben a lemez egyirányban teherviselőnek vehető.

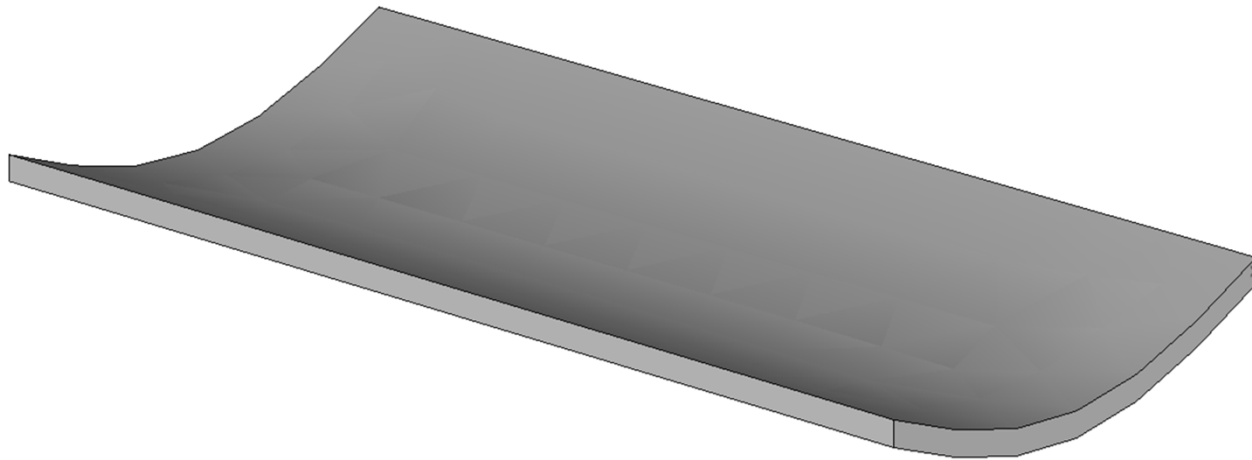
$$m_y = -k \left( \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{=0} + \mu_c \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\neq 0} \right)$$

# Egyirányban teherviselő lemez



# Igénybevételek

- Egyirányban teherhordó lemezekben csak  $m_x$  és  $v_x$  keletkezik. (lemezek esetén az index a nyomaték változásának irányát jelöli)

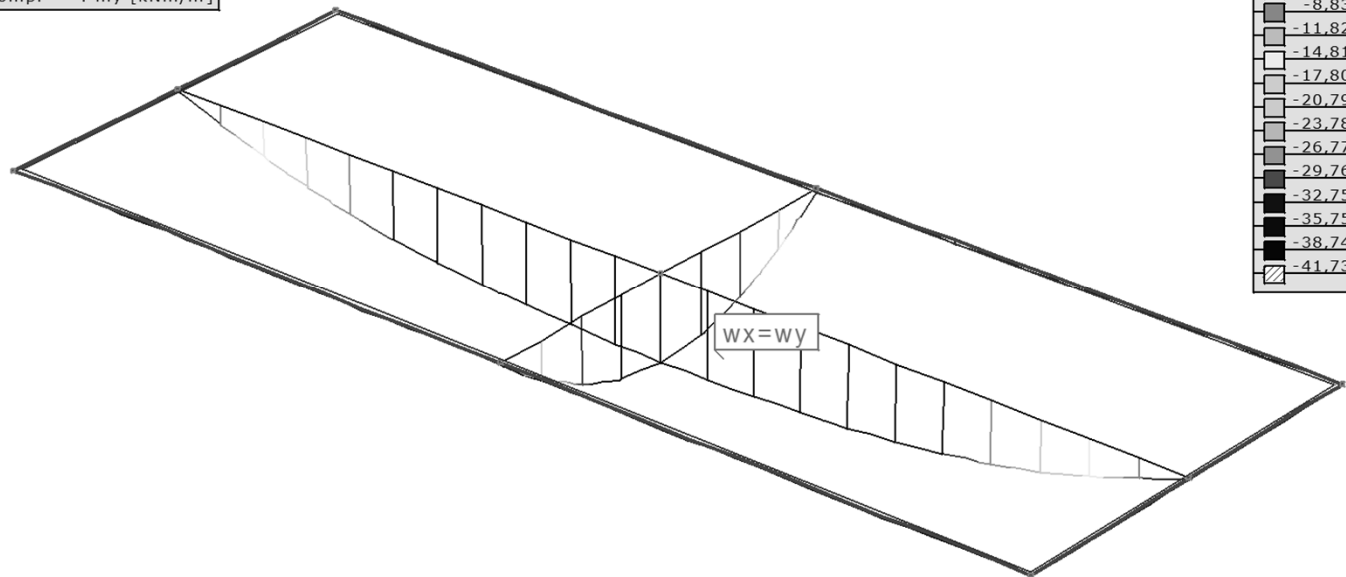




# Közelítő módszerek sávmódszer

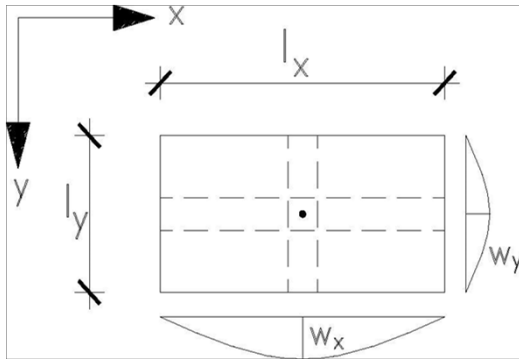
Az alapötlete az, hogy a lemezből a maximális lehajlás helyén  $x$  és  $y$  irányában egy-egy egymást keresztező, egységnyi szélességű lemezsávot vágunk ki, melyeket a saját irányukban önállóan működő gerendáknak tekintünk.

$E$  (ER) :  $3,06E-12$   
Komp. :  $m_y$  [kNm/m]



# Sávmódeszer

Ezzel, a csavarási ellenállást figyelembe vevő tag elhanyagolása miatt, a rugalmas lemezek Lagrange féle differenciálegyenlete:



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{p}{k}$$

ahol a baloldal első tagja egységnyi szélességű  $x$  irányú, a második pedig szintén egységnyi szélességű, de  $y$  irányú gerenda alakváltozás-teher összefüggéseként értelmezhető.

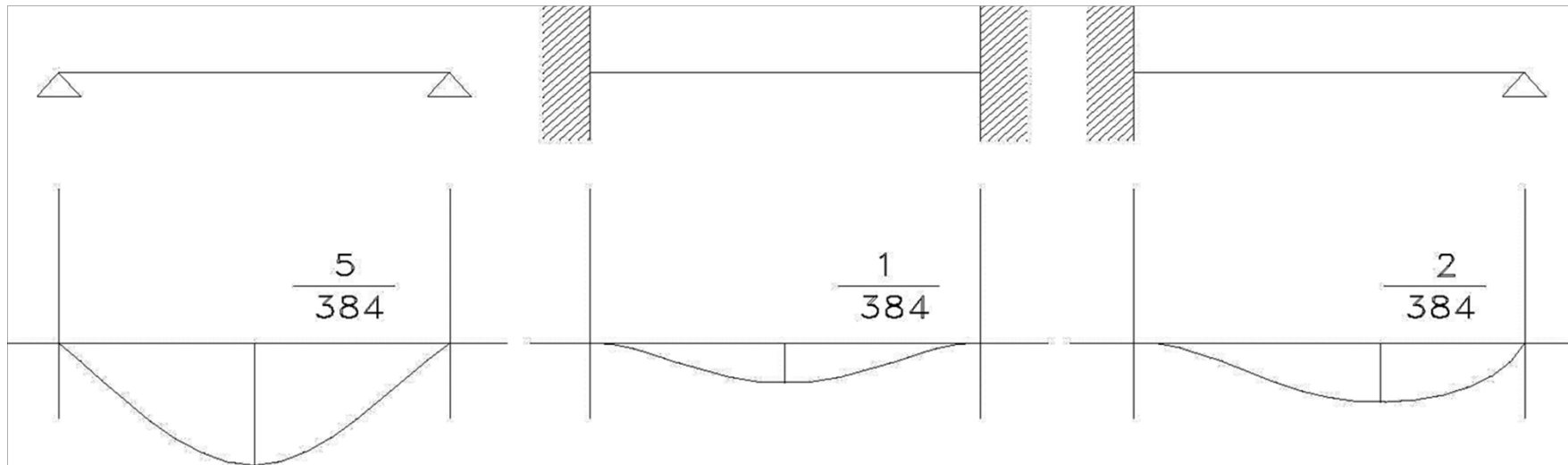
# Sávmódszer

- Ha az x irányú tartó által viselt megoszló teherrész  $p_x$  és az y irányú tartó által viselt teherrész  $p_y$ , és a lemez felületére  $q$  egyenletesen megoszló teher működik, akkor az egyensúly alapján:
  - $p_x + q_y = p = \text{const.}$
- A két sáv kereszteződési pontjában a lehajlás azonos értékű, ezért a kompatibilitási feltétel :  $w_x = w_y$
- A lemezsávok rugalmas vonalának differenciálegyenlete alapján a lehajlások értékei:

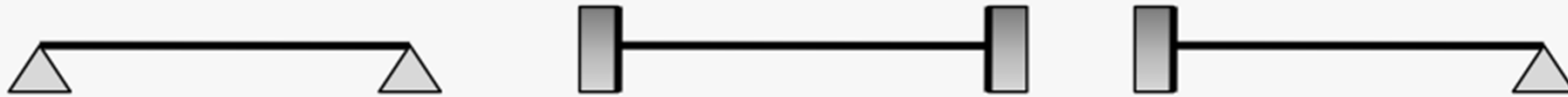
$$w_x = c_x \frac{p_x \ell_x^4}{EI_x}; w_y = c_y \frac{p_y \ell_y^4}{EI_y}$$

# sávmódszer

- ahol az  $c_x$  és  $c_y$  értékek a lemez megtámasztási viszonyaitól függő tényezők, az ábra szerint.



## Megtámasztási viszonyok



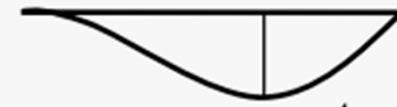
### Lehajlás



$$w = \frac{5}{384} \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$



$$w = \frac{1}{384} \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$



$$w = \frac{2}{384} \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I}$$

### Hajlítónyomaték

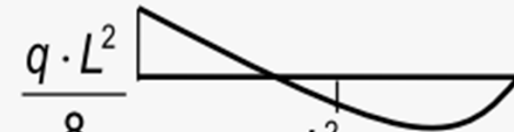


$$\frac{q \cdot L^2}{8}$$



$$\frac{q \cdot L^2}{12}$$

$$\frac{q \cdot L^2}{24}$$



$$\frac{q \cdot L^2}{8}$$

$$\frac{q \cdot L^2}{16}$$

# sávmódszer

Figyelembe véve, hogy  $l_x \approx l_y$ , a két egyenletet egyenlővé téve:

$$c_x p_x l_x^4 = c_y p_y l_y^4$$

ebből: 
$$p_x = \frac{c_y l_y^4}{c_x l_x^4} p_y$$

bevezetve:

$$a = \frac{c_y l_y^4}{c_x l_x^4}$$

jelölést

$$p_x = a \cdot p_y$$

figyelembe véve, hogy:

$$p = p_x + p_y \rightarrow p = a \cdot p_y + p_y \rightarrow p = (1 + a) p_y$$

tehát:

$$p_y = \frac{1}{1 + a} p$$

$$p_x = \frac{a}{1 + a} p$$

A lemezsávok maximális nyomatékai ezután az adott irányú sávra működő teherrészből a megtámasztási viszonyok függvényében számíthatók.

# sávmódszer

- A kétirányú teherviselést mindkét irányban azonos megtámasztású lemezsávok esetén csak  $0,5 < \ell_x / \ell_y < 2,0$  esetben érdemes figyelembe venni, mivel ha:

$$\frac{c_y}{c_x} = 1, \frac{\ell_y}{\ell_x} = 2$$

$$a = 16$$

$$p_y = \frac{1}{1+16} p = \frac{1}{17} p$$

az összteher 6%-a

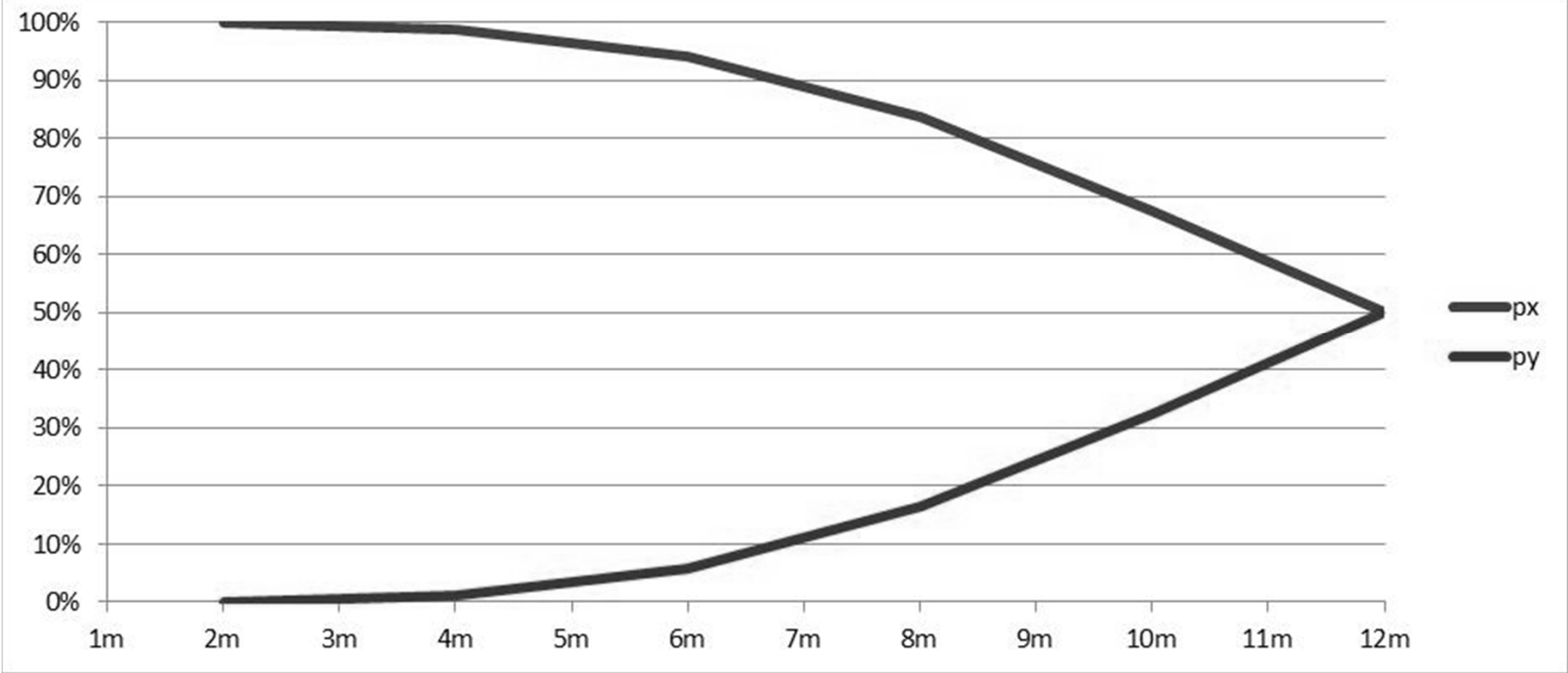
$$p_x = \frac{16}{1+16} p = \frac{16}{17} p$$

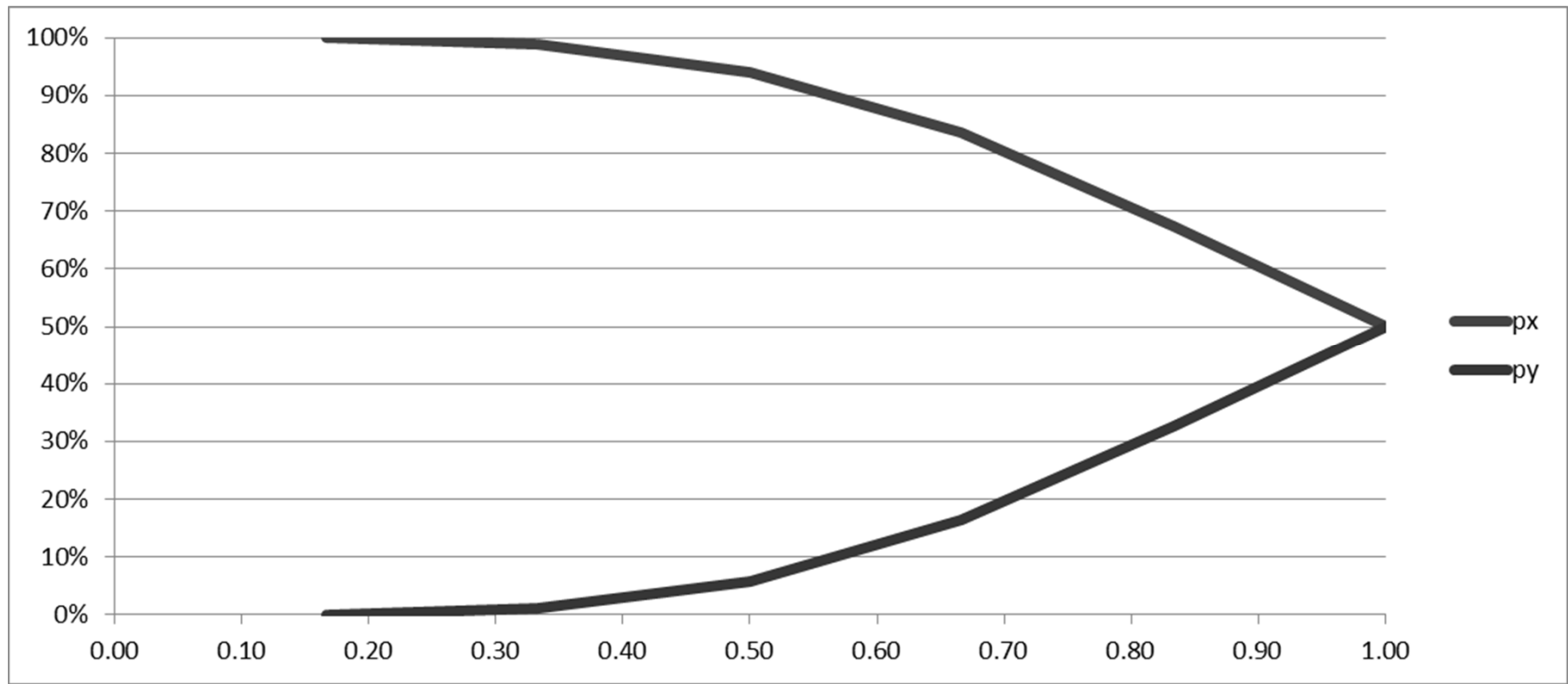
az összteher 94%-a

A sávmódszer elhanyagolja a keresztező lemezsávok egymásra gyakorolt hatásából fellépő csavarónyomatékokat, ezért a hajlítónyomatékokat a biztonság javára szolgáló közelítéssel állapítja meg

		p=	20kN/m <sup>2</sup>						
ℓ <sub>y</sub>		a	p <sub>x</sub> [kN/m <sup>2</sup> ]	p <sub>y</sub> [kN/m <sup>2</sup> ]	m <sub>x</sub> [kNm/m]	m <sub>y</sub> [kNm/m]	x	y	
	12m								
ℓ <sub>x</sub>	12m	1.00	10.00	10.00	180.00	180.00	50.0%	50.0%	
	10m	2.07	13.49	6.51	168.66	117.13	67.5%	32.5%	
	8m	5.06	16.70	3.30	133.61	59.38	83.5%	16.5%	
	6m	16.00	18.82	1.18	84.71	21.18	94.1%	5.9%	
	4m	81.00	19.76	0.24	39.51	4.39	98.8%	1.2%	
	2m	1296.00	19.98	0.02	9.99	0.28	99.9%	0.1%	







# Marcus módszer

- Marcus dolgozta ki a sávmódszer alapján a csavarónyomaték hatásának figyelembevételével.
- A lemezre működő terheket Marcus az alábbiak szerint
  - $p'_x + p'_y + p''_x + p''_y = p = \text{const.}$  alakban bontotta fel,
  - Ahol a  $p''_x + p''_y = p_{xy}$  tag a csavarási ellenállásnak megfelelő teherrészt veszi figyelembe.

# Marcus módszer

Az  $x$  és  $y$  irányú csavarási tagokra Marcus a következő összefüggést vezette le:

$$p_x'' = \frac{5}{6} \left( \frac{l_x}{l_y} \right)^2 \frac{m_x}{m_{ox}} p_x$$
$$p_y'' = \frac{5}{6} \left( \frac{l_y}{l_x} \right)^2 \frac{m_y}{m_{oy}} p_y$$

- $m_x$  és  $m_y$  a sávmódszerrel meghatározható mezőközépi fajlagos hajlítónyomatékok,
- $m_{ox}$  és  $m_{oy}$  a kéttámaszúnak tekintett  $x$  és  $y$  irányú lemezsávok maximális nyomatékai a teljes  $q$  teherből,
- $p_x$  és  $p_y$  a sávmódszerrel meghatározható teherrészek

Fentiek alapján a  $p'_x$  és  $p'_y$  hajlítási teherhányadok a  $p'_x = p_x - p''_x$  és  $p'_y = p_y - p''_y$  kifejezések segítségével számíthatók, melyekből a lemez hajlítónyomatékai a megtámasztási viszonyoktól függően határozhatók meg.

# MARCUS MÓDSZER

- A csavarási taggal módosított hajlítási teherhányad, illetve az abból számítható nyomatékok meghatározására Marcus az alábbi ábrán feltüntetett alapesetekre dolgozott ki táblázatokat.



# SEGÉDTÁBLÁZATOK

- Ma már a Marcus féle táblázatok nem használatosak, de a számítás egyszerűsége miatt sok esetben hasznos segítséget adhatnak.
- Korszerűbb módszert jelentenek a Bares és a Czerny féle segédtáblázatok, amelyek a lemezegyenlet pontos megoldásán, de egyúttal  $\mu=0$  egyszerűsítő feltevésen alapulnak. Megjegyzendő, hogy a harántkontrakció elhanyagolása nem jelent durva közelítést mert a lemez repedt-rugalmas állapotában a  $\mu$  értéke a húzott övben nagymértékben lecsökken.

# SEGÉDTÁBLÁZATOK

L<sub>1</sub> lemez:

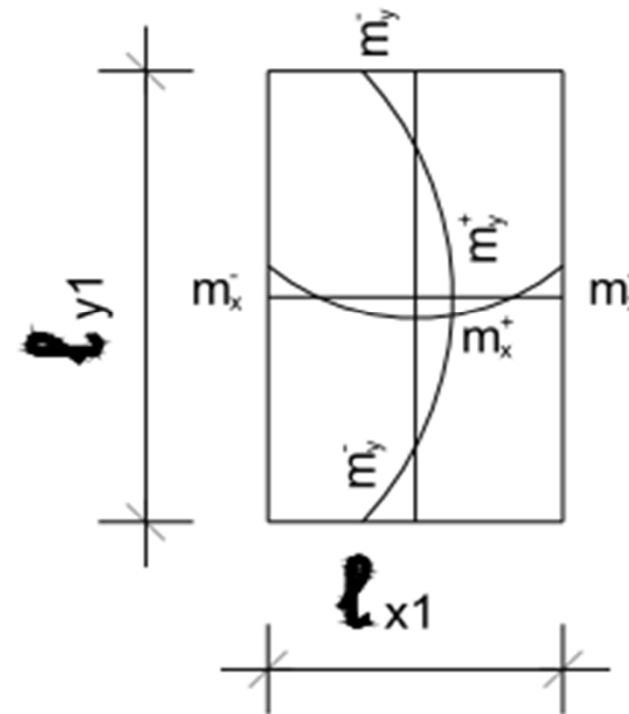
$$m_x^- = -\frac{p'_m \times l_{x1}^2}{\alpha_1}$$

$$m_x^+ = -\frac{p'_m \times l_{x1}^2}{\alpha_2}$$

$$m_y^- = -\frac{p'_m \times l_{x1}^2}{\alpha_3}$$

$$m_y^+ = -\frac{p'_m \times l_{x1}^2}{\alpha_4}$$

L<sub>1</sub> lemez



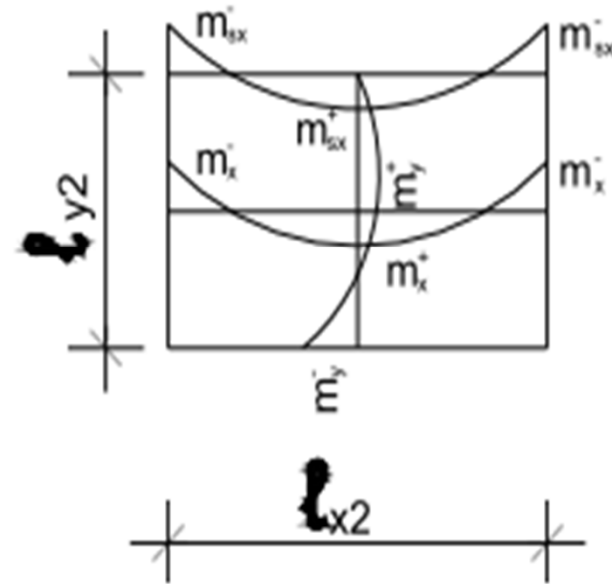
$l_y/l_x$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\alpha_1$	19,4	17,1	15,5	14,5	13,7	13,2	12,8	12,5	12,3	12,1	12,0
$\alpha_2$	56,8	46,1	39,4	34,8	31,9	29,6	28,1	26,9	26,0	25,4	25,0
$\alpha_3$	19,4	18,4	17,9	17,6	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5
$\alpha_4$	56,3	60,3	65,8	73,6	83,4	93,5	98,1	101,3	103,3	104,0	103,0

# SEGÉDTÁBLÁZATOK

$$m_x^- = -\frac{p'_m \times l_{x2}^2}{\beta_1} \quad m_x^+ = -\frac{p'_m \times l_{x2}^2}{\beta_2}$$

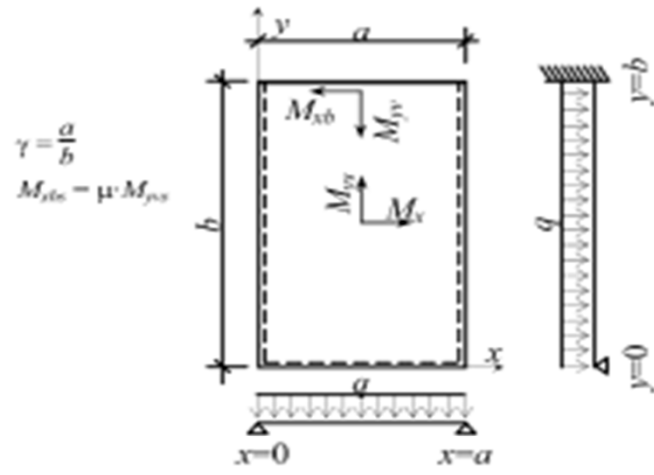
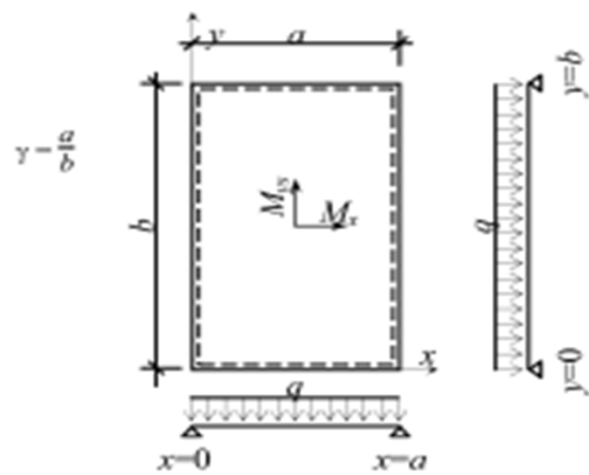
$$m_{xs}^- = -\frac{p'_m \times l_{x2}^2}{\beta_3} \quad m_{xs}^+ = -\frac{p'_m \times l_{x2}^2}{\beta_4}$$

$$m_y^- = -\frac{p'_{ms} \times l_{x2}^2}{\beta_5} \quad m_y^+ = -\frac{p'_{ms} \times l_{x2}^2}{\beta_6}$$



$l_y/l_x$	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\beta_1$	6,79	6,89	7,26	7,89	8,79	9,98	11,98	13,08	14,98
$\beta_2$	57,08	37,91	25,43	22,78	23,16	24,92	27,49	30,65	34,30
$\beta_3$	2,15	2,27	2,71	3,43	4,45	5,77	7,41	9,35	11,59
$\beta_4$	19,24	18,91	10,69	10,64	11,87	13,94	16,73	20,18	24,29
$\beta_5$	2,41	2,71	3,61	4,93	6,66	8,81	11,34	14,29	17,59
$\beta_6$	104,2	62,46	43,24	41,67	48,00	58,45	72,73	89,55	108,70



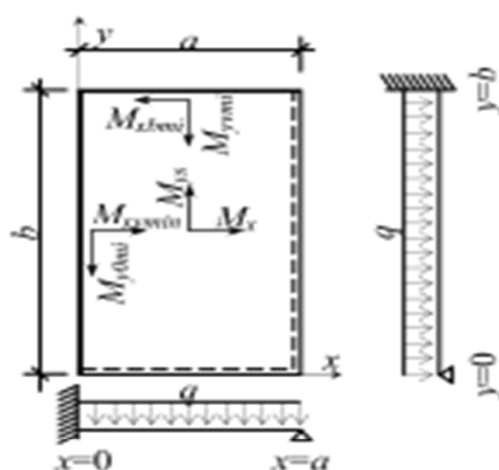
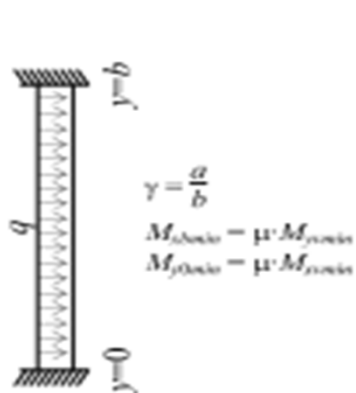
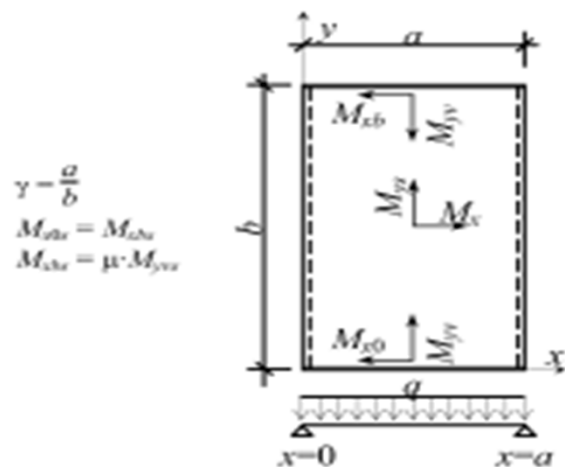


**Tab. 1.7**  $\mu=0,15$

$\gamma$	$w_z$	$M_{xx}$	$M_{yy}$
0,50	0,1189	0,0991	0,0079
0,55	0,1101	0,0923	0,0103
0,60	0,1015	0,0857	0,0131
0,65	0,0931	0,0792	0,0162
0,70	0,0851	0,0730	0,0194
0,75	0,0777	0,0669	0,0230
0,80	0,0708	0,0611	0,0269
0,85	0,0644	0,0557	0,0307
0,90	0,0584	0,0507	0,0344
0,95	0,0529	0,0462	0,0383
1,00	0,0476	0,0423	0,0423
1,10	0,0390	0,0353	0,0500
1,20	0,0320	0,0293	0,0575
1,30	0,0262	0,0244	0,0644
1,40	0,0216	0,0204	0,0710
1,50	0,0179	0,0173	0,0772
1,60	0,0149	0,0146	0,0826
1,70	0,0124	0,0124	0,0874
1,80	0,0105	0,0107	0,0916
1,90	0,0088	0,0091	0,0954
2,00	0,0074	0,0079	0,0991
	$\frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$	$q \cdot a^2$	$q \cdot b^2$

**Tab. 1.8**  $\mu=0,15$

$\gamma$	$w_z$	$M_{xx}$	$M_{yy}$	$M_{xy}$
0,50	0,1087	0,0908	0,0084	-0,0305
0,55	0,0981	0,0826	0,0109	-0,0362
0,60	0,0881	0,0747	0,0135	-0,0421
0,65	0,0786	0,0670	0,0162	-0,0479
0,70	0,0698	0,0599	0,0192	-0,0537
0,75	0,0618	0,0533	0,0221	-0,0594
0,80	0,0544	0,0472	0,0249	-0,0650
0,85	0,0479	0,0417	0,0277	-0,0703
0,90	0,0421	0,0369	0,0304	-0,0750
0,95	0,0370	0,0327	0,0330	-0,0797
1,00	0,0326	0,0291	0,0354	-0,0840
1,10	0,0253	0,0228	0,0399	-0,0917
1,20	0,0197	0,0180	0,0438	-0,0980
1,30	0,0155	0,0143	0,0471	-0,1032
1,40	0,0123	0,0115	0,0500	-0,1075
1,50	0,0099	0,0094	0,0524	-0,1109
1,60	0,0079	0,0076	0,0544	-0,1136
1,70	0,0063	0,0062	0,0561	-0,1160
1,80	0,0052	0,0052	0,0575	-0,1184
1,90	0,0043	0,0044	0,0586	-0,1203
2,00	0,0036	0,0037	0,0594	-0,1213
	$\frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$	$q \cdot a^2$	$q \cdot b^2$	$q \cdot b^2$

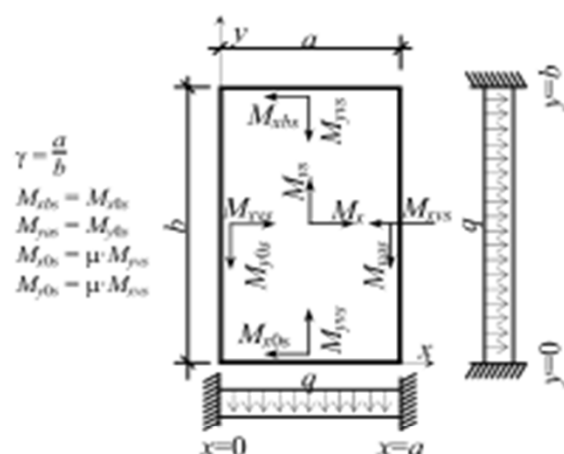
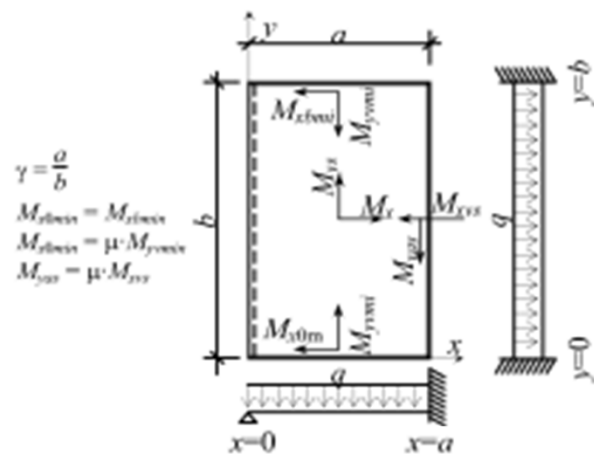


**Tab. 1.9**  $\mu=0,15$

$\gamma$	$w_s$	$M_{xc}$	$M_{yc}$	$M_{ybr}$
0,50	0,0990	0,0835	0,0088	-0,0297
0,55	0,0872	0,0738	0,0113	-0,0350
0,60	0,0759	0,0647	0,0137	-0,0400
0,65	0,0657	0,0563	0,0166	-0,0450
0,70	0,0565	0,0489	0,0187	-0,0497
0,75	0,0484	0,0423	0,0212	-0,0540
0,80	0,0414	0,0363	0,0233	-0,0578
0,85	0,0355	0,0313	0,0254	-0,0612
0,90	0,0305	0,0270	0,0274	-0,0644
0,95	0,0262	0,0232	0,0292	-0,0677
1,00	0,0225	0,0201	0,0309	-0,0699
1,10	0,0167	0,0151	0,0335	-0,0741
1,20	0,0126	0,0113	0,0357	-0,0770
1,30	0,0096	0,0088	0,0374	-0,0793
1,40	0,0073	0,0068	0,0386	-0,0811
1,50	0,0057	0,0053	0,0396	-0,0815
1,60	0,0045	0,0042	0,0404	-0,0825
1,70	0,0036	0,0034	0,0410	-0,0830
1,80	0,0029	0,0028	0,0414	-0,0832
1,90	0,0023	0,0023	0,0416	-0,0833
2,00	0,0018	0,0019	0,0417	-0,0833
	$\frac{q \cdot a^2}{E \cdot h^2}$	$q \cdot a^2$	$q \cdot a^2$	$q \cdot b^2$

**Tab. 1.10**  $\mu=0,15$

$\gamma$	$w_s$	$M_{xc}$	$M_{ybr}$	$M_{yc}$	$M_{xbr}$
0,50	0,0549	0,0570	-0,1189	0,0040	-0,0205
0,55	0,0520	0,0543	-0,1148	0,0054	-0,0249
0,60	0,0490	0,0514	-0,1104	0,0072	-0,0294
0,65	0,0458	0,0483	-0,1057	0,0092	-0,0341
0,70	0,0425	0,0451	-0,1008	0,0114	-0,0390
0,75	0,0393	0,0418	-0,0957	0,0139	-0,0442
0,80	0,0361	0,0385	-0,0905	0,0164	-0,0496
0,85	0,0330	0,0354	-0,0852	0,0191	-0,0548
0,90	0,0301	0,0324	-0,0798	0,0217	-0,0598
0,95	0,0273	0,0295	-0,0745	0,0243	-0,0648
1,00	0,0246	0,0269	-0,0699	0,0269	-0,0699
1,10	0,0201	0,0221	-0,0608	0,0319	-0,0787
1,20	0,0164	0,0182	-0,0530	0,0365	-0,0869
1,30	0,0133	0,0148	-0,0462	0,0406	-0,0937
1,40	0,0108	0,0122	-0,0405	0,0442	-0,0993
1,50	0,0089	0,0100	-0,0358	0,0473	-0,1041
1,60	0,0072	0,0081	-0,0317	0,0499	-0,1082
1,70	0,0059	0,0066	-0,0282	0,0521	-0,1116
1,80	0,0048	0,0055	-0,0252	0,0540	-0,1143
1,90	0,0040	0,0046	-0,0226	0,0556	-0,1167
2,00	0,0034	0,0040	-0,0205	0,0570	-0,1189
	$\frac{q \cdot a^2}{E \cdot h^2}$	$q \cdot a^2$	$q \cdot a^2$	$q \cdot b^2$	$q \cdot b^2$



**Tab. 1.11**  $\mu=0,15$

$\gamma$	$w_y$	$M_{xy}$	$M_{yy}$	$M_{xx}$	$M_{yy0b}$
0,50	0,0528	0,0550	0,1135	0,0045	0,0203
0,55	0,0489	0,0514	0,1078	0,0062	0,0247
0,60	0,0450	0,0476	0,1021	0,0081	0,0291
0,65	0,0411	0,0436	0,0964	0,0101	0,0336
0,70	0,0373	0,0398	0,0906	0,0122	0,0381
0,75	0,0336	0,0359	0,0845	0,0145	0,0427
0,80	0,0300	0,0323	0,0881	0,0169	0,0471
0,85	0,0266	0,0289	0,0720	0,0191	0,0513
0,90	0,0236	0,0257	0,0661	0,0211	0,0551
0,95	0,0209	0,0228	0,0603	0,0232	0,0586
1,00	0,0184	0,0202	0,0546	0,0252	0,0617
1,10	0,0142	0,0158	0,0467	0,0287	0,0676
1,20	0,0110	0,0123	0,0399	0,0316	0,0722
1,30	0,0086	0,0096	0,0341	0,0340	0,0757
1,40	0,0068	0,0075	0,0293	0,0359	0,0782
1,50	0,0054	0,0060	0,0254	0,0374	0,0800
1,60	0,0043	0,0048	0,0221	0,0386	0,0814
1,70	0,0034	0,0039	0,0193	0,0395	0,0825
1,80	0,0027	0,0031	0,0171	0,0402	0,0834
1,90	0,0022	0,0026	0,0154	0,0408	0,0342
2,00	0,0018	0,0022	0,0141	0,0412	0,0847
	$\frac{qa^4}{E \cdot h^3}$	$qa^2$	$qa^2$	$qb^2$	$qb^2$

**Tab. 1.12**  $\mu=0,15$

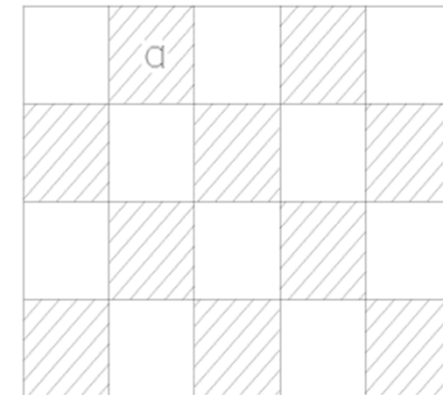
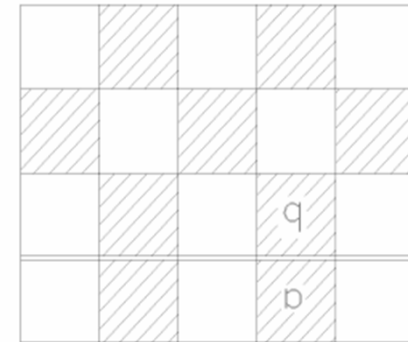
$\gamma$	$w_y$	$M_{xy}$	$M_{yy}$	$M_{xx}$	$M_{yy0b}$
0,50	0,0296	0,0405	0,0833	0,0024	0,0143
0,55	0,0286	0,0394	0,0817	0,0033	0,0172
0,60	0,0275	0,0378	0,0794	0,0046	0,0206
0,65	0,0261	0,0360	0,0767	0,0061	0,0242
0,70	0,0246	0,0339	0,0737	0,0079	0,0280
0,75	0,0231	0,0315	0,0704	0,0098	0,0320
0,80	0,0214	0,0293	0,0668	0,0103	0,0360
0,85	0,0196	0,0269	0,0631	0,0139	0,0400
0,90	0,0180	0,0247	0,0593	0,0160	0,0440
0,95	0,0164	0,0224	0,0554	0,0181	0,0480
1,00	0,0149	0,0202	0,0515	0,0202	0,0515
1,10	0,0121	0,0164	0,0449	0,0242	0,0585
1,20	0,0098	0,0131	0,0388	0,0287	0,0643
1,30	0,0078	0,0105	0,0336	0,0306	0,0690
1,40	0,0063	0,0084	0,0291	0,0332	0,0728
1,50	0,0051	0,0066	0,0254	0,0353	0,0757
1,60	0,0041	0,0053	0,0223	0,0369	0,0779
1,70	0,0033	0,0042	0,0198	0,0383	0,0797
1,80	0,0027	0,0035	0,0176	0,0392	0,0812
1,90	0,0022	0,0028	0,0158	0,0399	0,0824
2,00	0,0018	0,0024	0,0143	0,0405	0,0833
	$\frac{qa^4}{E \cdot h^3}$	$qa^2$	$qa^2$	$qb^2$	$qb^2$

# Összetett lemezek

- Az összetett lemezek igénybevételeit általában mezőnként elkülönítve határozzuk meg. A csatlakozó vonalaknál kialakuló támasznyomatéki különbségeket vagy Cross-módszerrel, vagy képlékeny nyomatékátrendezéssel egyenlítjük ki.
- Az esetleges teher mértékadó elhelyezése szempontjából a több mezőből álló lemezrendszer mindkét irányban a többtámaszú folytatólagos tartóhoz hasonlóan mértékadóan kell leterhelni.

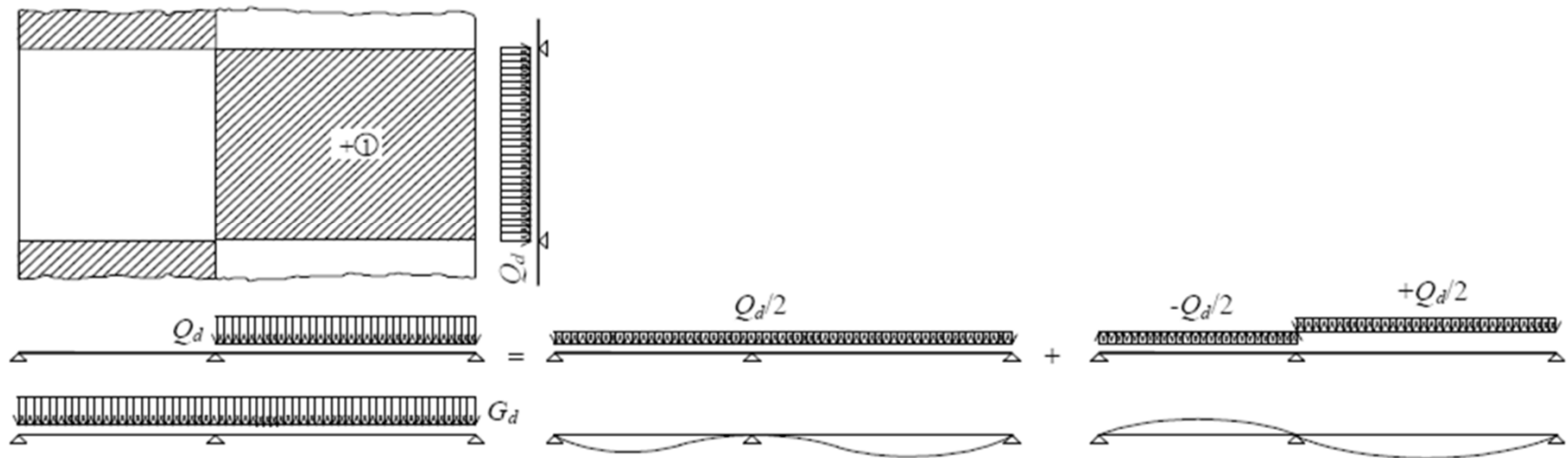
# Összetett lemezek

- Egy adott perem menti támasznyomaték szempontjából az adja a mértékadó igénybevételt, ha a szomszédos mindkét mezőt lemezmezőt leterheljük.
- A mezőközépi pozitív nyomatékra akkor kapjuk a mértékadó igénybevételt, ha a mezőt magát, majd pedig attól számítva a második nyílásokat leterheljük (sakktáblaszabály)



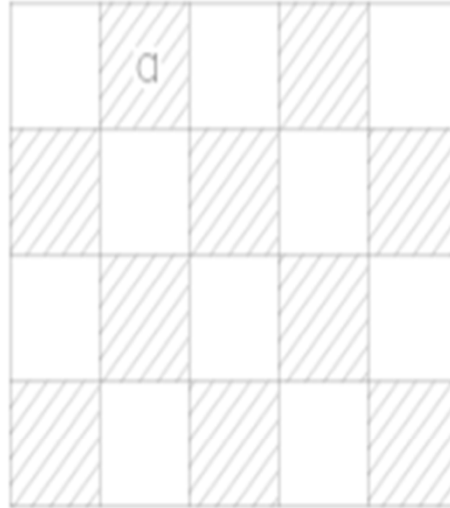
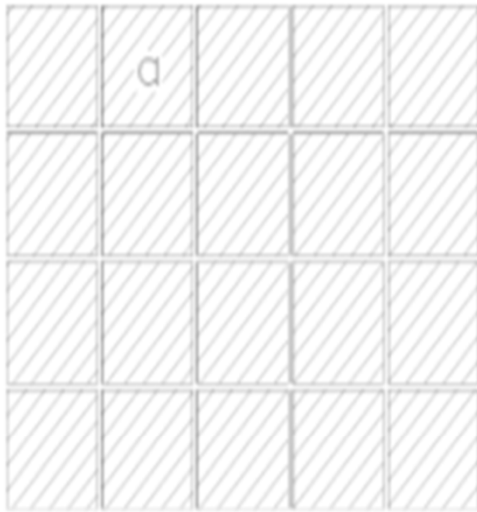
# Lemezrendszer közelítő számítása

- a lemezvastagság minden mezőben azonos,
- a lemezmezők hajlításra mereven kapcsolódnak egymáshoz, de a megtámasztási vonalak mentén szabadon elfordulhatnak,
- a szomszédos lemezmezők fesztávolságainak aránya mindkét irányban 0,8 és 1,25 között



- Különálló lemezen a csatlakozó peremeken:
  - $q' = g + p/2$  teherre  $\rightarrow$  merev befogás
  - $q'' = \pm p/2$  teherre  $\rightarrow$  Csuklós megtámasztás
  - Maximális mezőnyomaték a két terheléshez tartozó nyomaték összegeként határozható meg
  - Minimális mezőnyomaték a két terheléshez tartozó nyomaték különbségeként határozható meg

# Leterhelés - mezőnyomaték



Lemezrendszer mértékadó  
leterhelése mezőnyomatékra

$$q' = g + \frac{p}{2}$$

$$q'' = \pm \frac{p}{2}$$



$$q' = g + \frac{p}{2}$$

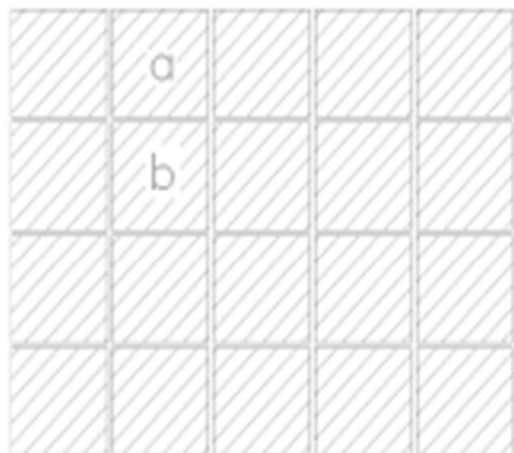


$$q'' = + \frac{p}{2}$$

- Állandó teher : teljes lemezrendszer
- Hasznos teher : sakktábla szerű
  - Leterhelés



- Különálló lemezen a csatlakozó peremeken:
  - $q' = g + p/2$  teherre  $\rightarrow$  merev befogás
  - $q'' = \pm p/2$  teherre  $\rightarrow$  Csuklós megtámasztás
  - Maximális mezőnyomaték a két terheléshez tartozó nyomaték összegeként határozható meg
  - Minimális mezőnyomaték a két terheléshez tartozó nyomaték különbségeként határozható meg



Lemezrendszer  
mértékadó  
leterhelése  
támasznyomatékra

$$q' = g + \frac{p}{2}$$

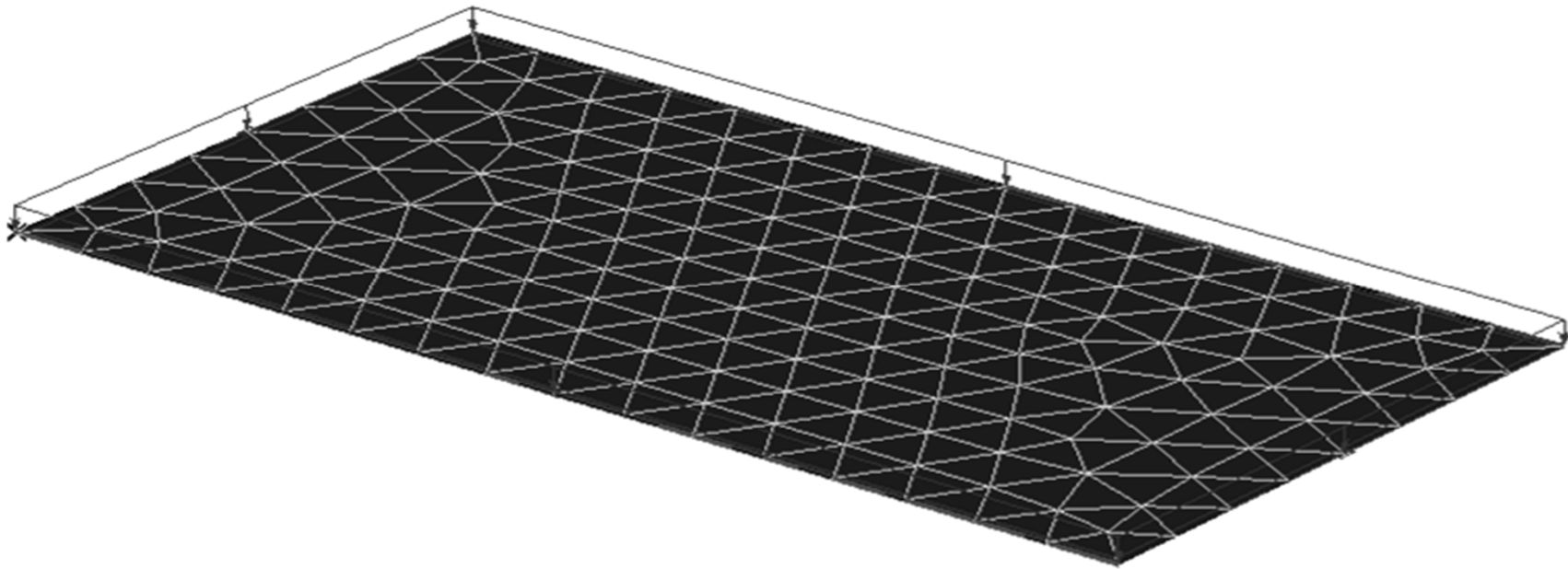


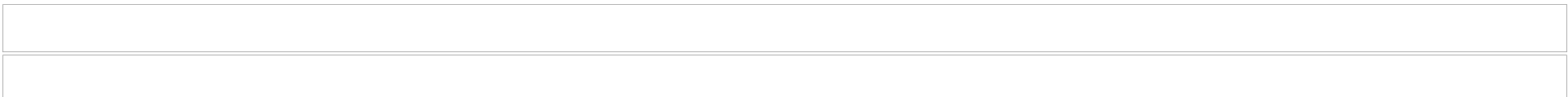
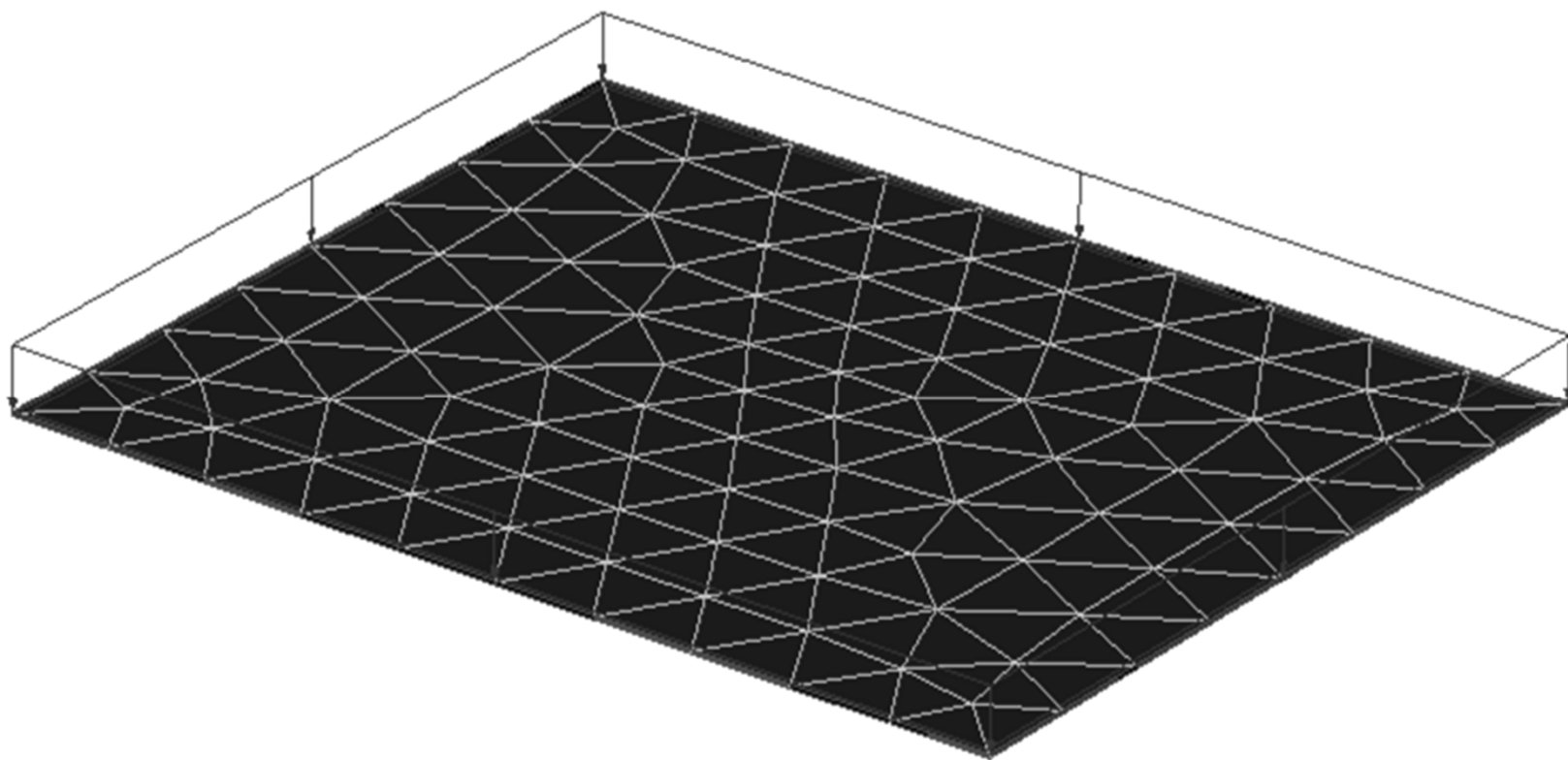
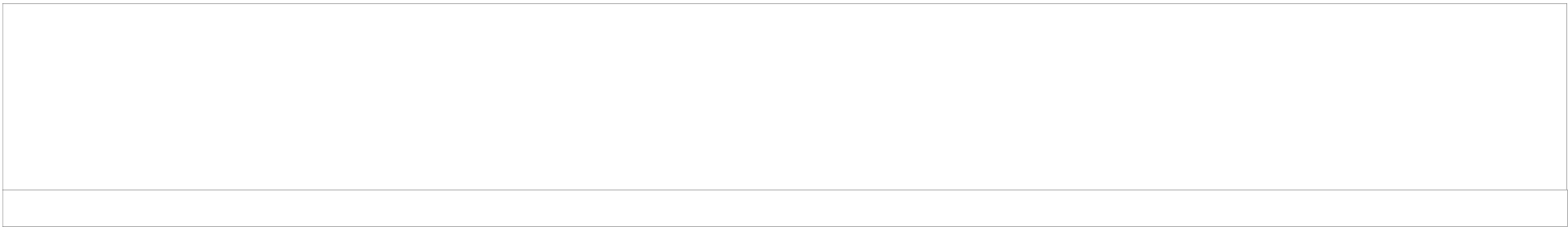
$$q' = g + \frac{p}{2}$$

$$q'' = g \pm \frac{p}{2}$$



$$q'' = +\frac{p}{2}$$

# Szerkesztési szabályok

- monolit lemez legkisebb vastagsága:
  - nyírási vasalás nélkül >70mm
  - nyírási vasalással >200mm
  - a vasalás mennyisége:
    - $A_{s,min} = \rho_{min} bd$  ;  $A_{s,max} = 0,04bh$

$f_{yk}$	A minimális vashányad $\rho_{min}$ (‰)								
	Beton szilárdsági osztály								
	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/67
500	1,3	1,3	1,3	1,35	1,51	1,66	1,82	1,98	2,13
400	1,3	1,3	1,43	1,69	1,89	2,08	2,28	2,47	2,67

# Szerkesztési szabályok

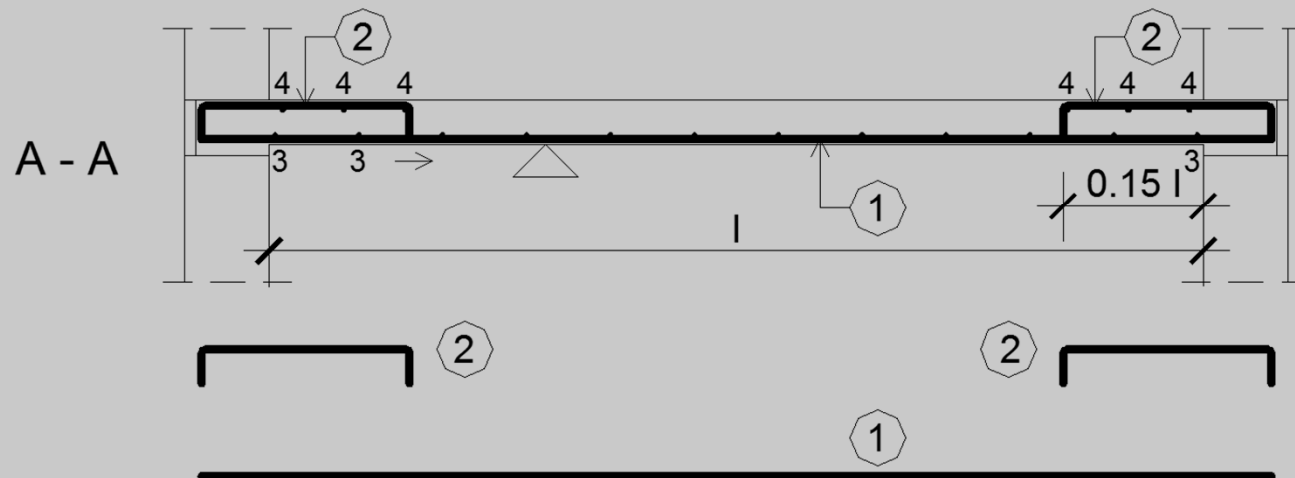
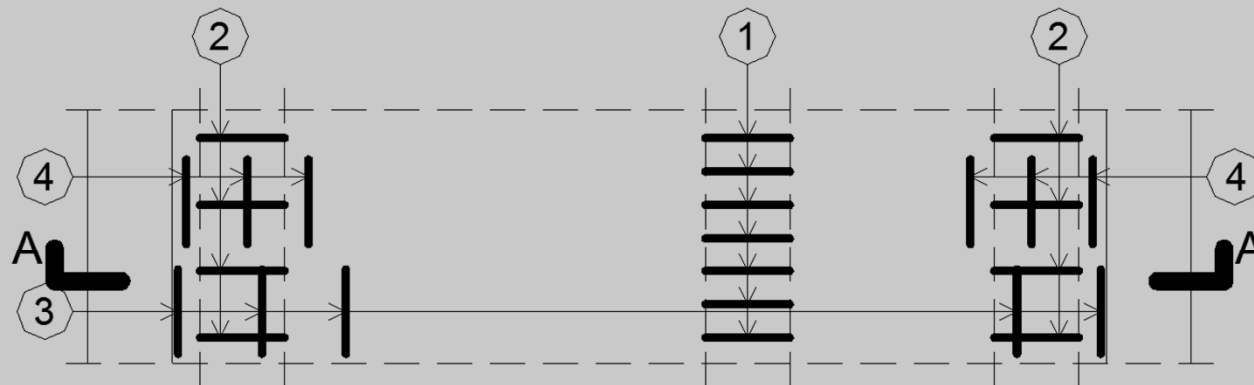
- egyirányban teherhordó lemezek elosztó vasalása:
  - legalább a fővasalás 20%-a, a minimális vashányad biztosításával
  - legnagyobb vastávolság
  - legnagyobb vasátmérő  $\varnothing_{\max} \leq h/10$

Lemezvastagság	Fővasalás	elosztóvasalás
mm	$s_{\max}$ (mm)	$s_{\max}$ (mm)
$h \geq 300$	250	300
$150 \leq h \leq 250$	h	300
$h < 150$	150	300

# Szerkesztési szabályok

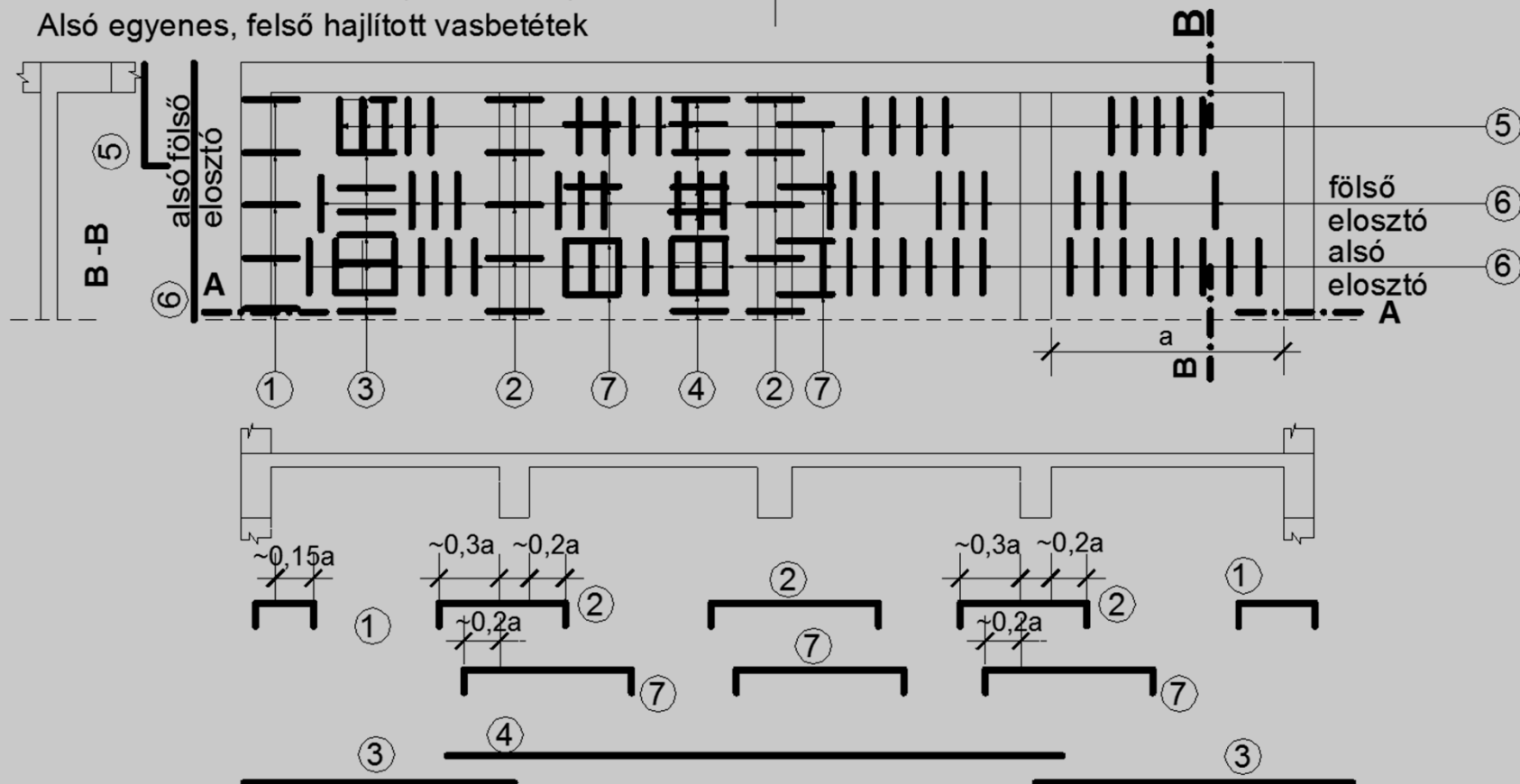
- vasalás a támaszok környezetében
  - A mezőben méretezett vasalásnak legalább az 50%-át a támaszig kell vezetni, és itt megfelelően le kell horgonyozni
- Részleges befogásra tervezendő felső vasalás:
  - szélső nem befogott támasz felett  $0,15M1_{\max}$
  - közbenső támasz felett  $0,25 \max(M1, M2)$
- Szabad lemezszél vasalásának geometriai kialakítása  $0,2As$  – szegővas
- Konzollemez felső húzott vasalását legalább a konzolkinyúlás 25%-al növelt értékével megegyező hosszal túl kell vezetni a támaszvonalon

# ALAPRAJZI RÉSZLET:



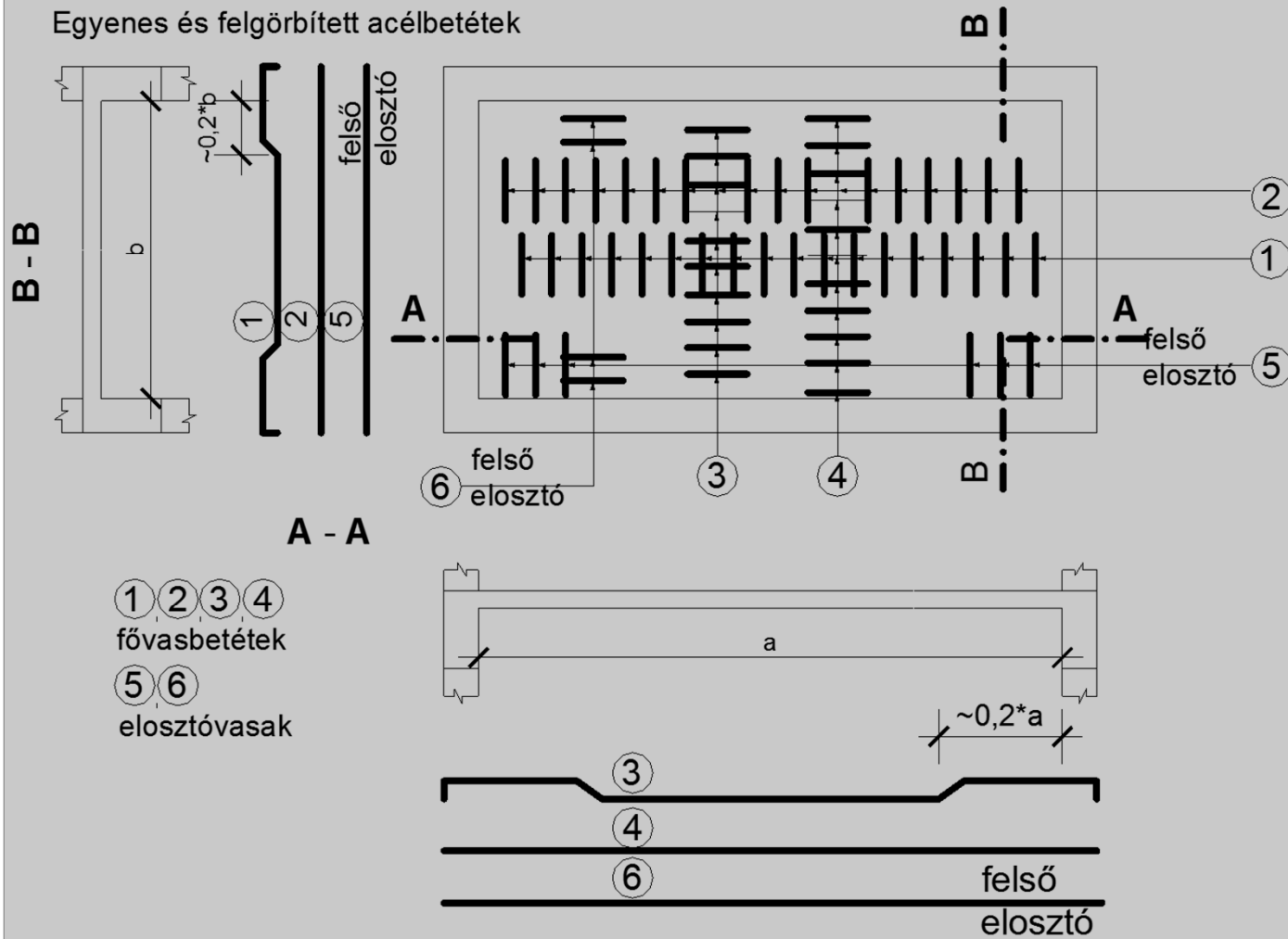


Mezőnkénti lemezvasalás ("b" változat)  
 Alsó egyenes, felső hajlított vasbetétek



## Kéttámaszú, szabadon felfekvő lemezvasalás

Egyenes és felgömbített acélbetétek



### Alsó egyenes és felső pótvásbetétek

