Áttérés minterm tábláról maxterm táblára

Példa:

minterm t.

0	1	3	2
4	1 5	1 7	6
12	1 13	1 15	14
1 8	1 9	11	10

(x_1, x_2, x_3, x_0 peremezés)

$Y_p^4 = \sum(5,7,8,9,13,15)$

1. Azonos méretű tábla,
2. ellentétes bejegyzések
3. ellentétes peremezés (cellasorszámok a peremezés szerint)

maxterm t.

1 15	1 14	1 12	1 13
1 11	10	8	1 9
1 3	2	0	1 1
7	6	1 4	1 5

($\overline{x}_1$, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_0$ peremezés)

$V_p^4 = \prod(1,3,4,5,9,11,12,13,14,15)$

$$Y_p^4 = V_1 \cdot V_3 \cdot V_4 \cdot V_5 \cdot V_9 \cdot V_{11} \cdot V_{12} \cdot V_{13} \cdot V_{14} \cdot V_{15} =$$

$$= (\overline{x}_3+\overline{x}_2+\overline{x}_1+x_0)\cdot(\overline{x}_3+\overline{x}_2+x_1+x_0)\cdot(\overline{x}_3+x_2+\overline{x}_1+\overline{x}_0)\cdot(\overline{x}_3+x_2+\overline{x}_1+x_0)\cdot(x_3+\overline{x}_2+\overline{x}_1+x_0)\cdot$$

$$\cdot(x_3+\overline{x}_2+x_1+x_0)\cdot(x_3+x_2+\overline{x}_1+\overline{x}_0)\cdot(x_3+x_2+\overline{x}_1+x_0)\cdot(x_3+x_2+x_1+\overline{x}_0)\cdot(x_3+x_2+x_1+x_0) =$$

konjunktív kanonikus alak

$$= \underbrace{(\overline{x}_3+\overline{x}_2+x_0)\cdot(\overline{x}_1+x_1)}_{V_{1,3}}\cdot\underbrace{(x_3+\overline{x}_2+x_0)\cdot(\overline{x}_1+x_1)}_{V_{9,11}}\cdot\underbrace{(\overline{x}_3+x_2+\overline{x}_1)\cdot(\overline{x}_0+x_0)}_{V_{4,5}}\cdot\underbrace{(x_3+x_2+\overline{x}_1)\cdot(\overline{x}_0+x_0)}_{V_{12,13}}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{(x_3+x_2+x_1)\cdot(\overline{x}_0+x_0)}_{V_{14,15}} = \underbrace{(\overline{x}_3+x_3)\cdot(\overline{x}_2+x_0)}_{V_{1,3,9,11}}\cdot\underbrace{(\overline{x}_3+x_3)\cdot(x_2+\overline{x}_1)}_{V_{4,5,12,13}}\cdot\underbrace{(x_3+x_2)\cdot(\overline{x}_1+x_1)}_{V_{12,13,14,15}} =$$

$$= (\overline{x}_2+x_0)\cdot(x_2+\overline{x}_1)\cdot(x_3+x_2) = \quad \text{konjunktív minimálalak}$$

$$= (\overline{x}_2\cdot x_2+\overline{x}_2\cdot\overline{x}_1+x_0\cdot x_2+x_0\cdot\overline{x}_1)\cdot(x_3+x_2) =$$

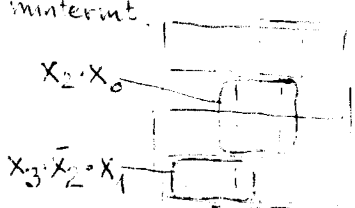
$$= x_3\cdot\overline{x}_2\cdot\overline{x}_1 + x_3\cdot x_2\cdot x_0 + x_3\cdot\overline{x}_1\cdot x_0 + x_2\cdot\overline{x}_2\cdot\overline{x}_1 + x_2\cdot x_0 + x_2\cdot\overline{x}_1\cdot x_0 =$$

$$= x_3\cdot\overline{x}_2\cdot\overline{x}_1 + x_3\cdot\overline{x}_1\cdot x_0 + x_2\cdot x_0 = x_3\cdot\overline{x}_2\cdot\overline{x}_1 + x_3\cdot\overline{x}_1\cdot x_0\cdot\overline{x}_2 + x_3\cdot\overline{x}_1\cdot x_0\cdot x_2 + x_2\cdot x_0 =$$

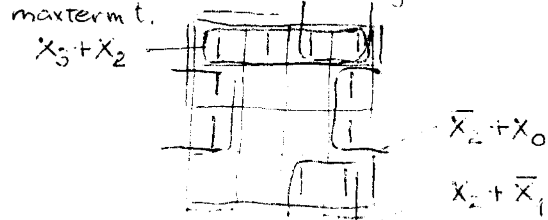
$$= x_3\cdot\overline{x}_2\cdot x_1 + x_2\cdot x_0 \qquad (E_{5,7,13,15}+E_{8,9}) \quad \text{diszjunktív minimálalak}$$

Az algebrai minimalizálás helyett áttekinthetőbb és megbízhatóbb a grafikus m.:

minterint.



maxterm t.



Diszjunktív kanonikus alak

$F_k^n = \sum_{i=\phi}^{2^n-1} E_i^n \cdot \alpha_i$ ahol $\sum$ sorozatos VAGY; $\cdot$: ÉS; E_i^n: minterm; α_i < ϕ giltoi / 1 engedi, ha az igtábl. i-edik sorában $Y=1$

Konjunktív kanonikus alak

$F_k^n = \prod_{j=\phi}^{2^n-1} (V_j^n + \alpha_j)$ ahol $\prod$ sorozatos ÉS, $+$: VAGY, V_j^n: maxterm, α_j < 1 giltoi / ϕ engedi, ha az igtábl. (2^n-1-j)-edik sorában $Y=\phi$

$$\boxed{E_k^n = \overline{V_{\overline{k}}^n} \quad \text{ahol } \overline{k} = 2^n-1-k}$$

Tétel: Minden logikai függvény megvalósítható kétfokozatú struktúrában (inverterektől eltekintve)

Funkcionális teljesség jellemzi egy elemkészletünket, ha abból minden adott típusú feladat megvalósítható. Logikai függvények megvalósítása tekintetében funkcionális teljesség jellemzi a következő elemkészleteket: ÉS-VAGY-NEM; ÉS-NEM; VAGY-NEM, NAND; NOR; ANTIVALENCIA-ÉS ...

Precedencia szabály: 1. negálás, 2. konjunkció, 3. diszjunkció, 4. implikáció, 5. ekvivalencia.

Boole-algebra

Egy *algebrai struktúra* egy halmaz és annak elemein értelmezett egy vagy több művelet együttese. Az algebrai struktúrákat *osztályozzuk és jellemezzük* a halmaz elemei (pl. van-e nulla-elem, egységelem, komplemens stb.) és a műveletek tulajdonságai (kommutativitás, asszociativitás, idempotencia, disztributivitás, abszorpció …) alapján. Gyakoribb algebrai struktúrák: félcsoport, csoport, Ábel-csoport, gyűrű, test, félháló, háló.

A *Boole-algebra* egy speciális algebrai struktúra. Elemei: egy A halmaz, két kétváltozós művelet és egy egyváltozós művelet. A legegyszerűbb Boole-algebra halmaza kételemű (pl. 0 és 1). A kétváltozós műveleteket legtöbbször VAGY-nak és ÉS-nek, az egyváltozóst negálásnak nevezik.

1933-ban Edward Vermilye Huntington amerikai matematikus (1874–1952) egy elegáns axiómarendszert dolgozott ki a Boole-algebrák számára. Ehhez két alapműveletre volt szüksége, a + két változós és az $n()$ egy változós műveletre, ami a komplementert adja vissza. A Boole-algebra eleget tesz a következő követelményeknek.

1. kommutativitás: $x + y = y + x$.
2. asszociativitás: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Huntington-egyenlőség: $n(n(x) + y) + n(n(x) + n(y)) = x$.

Herbert Robbins az utolsó egyenlőséget a duálisával helyettesítette:

4. Robbins-egyenlet: $n(n(x + y) + n(x + n(y))) = x$

A Robbins-sejtés évtizedeken át nyitott maradt, és Alfred Tarski és köre kedvenc témájává vált. 1996-ban William McCune - Larry Wos, Steve Winker, és Bob Veroff eredményeinek felhasználásával – igazolta, hogy az 1., 2., és a 4. axióma együtt szintén Boole-algebrát ad. Dahn egyszerűsítette a bizonyítást.

A Boole-algebra tehát egy *A* halmaz, melynek van legalább két eleme, az 1 és a 0, ellátva a kétváltozós $\vee$ (szóban: „vagy”) és $\wedge$ (szóban „és”) művelettel továbbá a ( ) egyváltozós művelettel, melyet komplementerképzésnek nevezünk és melyekre a következő művelet azonosságok teljesülnek:

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	asszociatív
$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$	kommutatív
$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$	elnyelési tulajdonság
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	disztributív
$a \vee \overline{a} = 1$	$a \wedge \overline{a} = 0$	komplementer képzés

Mindezekből következnek további tulajdonságok is:

$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$	idempotencia
$a \vee 0 = a$	$a \wedge 1 = a$	korlátosság
$a \vee 1 = 1$	$a \wedge 0 = 0$	
$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$	0 és 1 egymás komplementerei
$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$	$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$	de Morgan-azonosságok
$\overline{\overline{a}} = a$		

(Wikipedia)

Információtartalom: $\boxed{I_i = ld\frac{1}{p_i}[bit]}$ (ahol p_i az i-edik szimbólum előfordulási valószínűsége)

Információelméleti **entrópia:** $\boxed{H = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot ld\frac{1}{p_i}[\frac{bit}{szimbólum}]}$ (átlagos információtartalom)

Maximális entrópia: $\boxed{H_{Max} = ldN[\frac{bit}{szimbólum}]}$ (ahol N: a forrás által kibocsájtott szimbólumok száma)

Információelméleti **redundancia:** $\boxed{R = \Delta H = H_{Max} - H[\frac{bit}{szimbólum}]}$

Relatív entrópia: $\boxed{h = \frac{H}{H_{Max}}}$

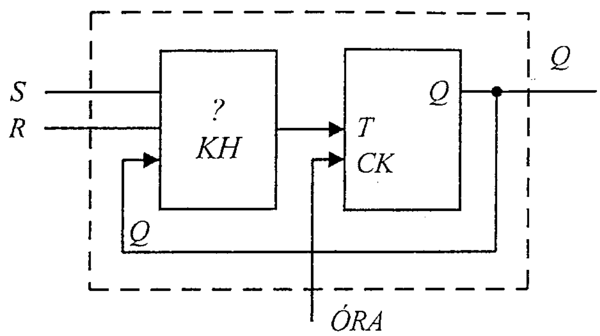
Relatív redundancia: $\boxed{r = \frac{H_{Max} - H}{H_{Max}} = \frac{R}{H_{Max}}}$

Hamming távolság – kettős értelmezés:

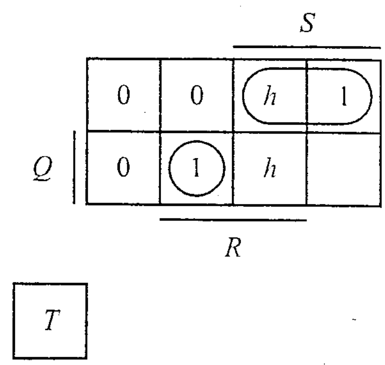
1. Két kódszó között a Hamming-távolság annyi, ahány kódelemet (bitet) ellenkezőjére kell váltani ahhoz, hogy a másikkal megegyezővé váljon.
2. Egy kód (kódszó-készlet) Hamming-távolságán a kódszavak között előforduló legkisebb Hamming-távolságot értjük.

Paritásbit: A fix hosszúságú kódszó-készlet minden elemét egy paritásbittel egészítjük ki úgy, hogy az így képzett valamennyi kódszóban az egyesek száma megállapodás szerinti páros vagy páratlan. A képezhető kódok fele lesz így érvényes, a másik fele érvénytelen. Bármely érvényes kódszó bármely (csak egyetlen) bitjének hibája érvénytelen kódszóhoz vezet.

Tömb-paritás: A paritásbit alkalmazása *hibafelismerésre* ad lehetőséget. A paritásbit elvének továbbfejlesztése, a tömb-paritás alkalmazásával egyetlen *hiba javítása* is lehetséges. Több kódszóból táblázatot képezünk és soronként és oszloponként is paritásbitekkel egészítjük ki.



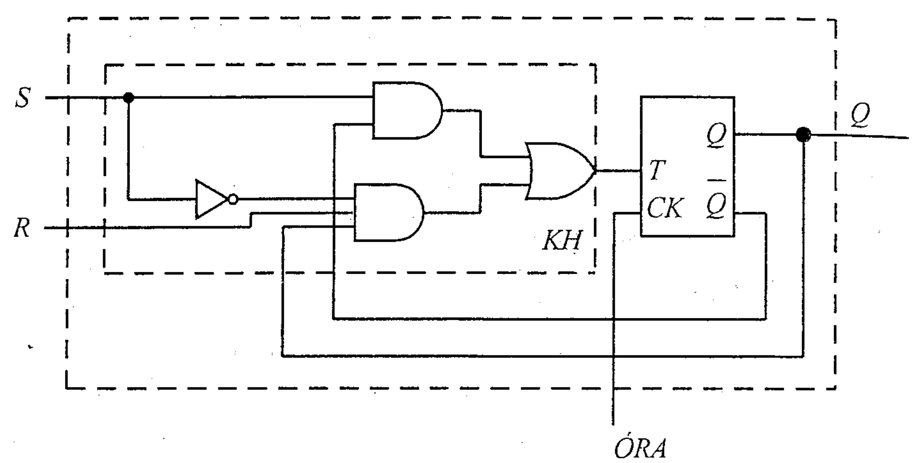
a.)



d.)

$T = S \cdot \overline{Q} + \overline{S} \cdot Q \cdot R$

i	S	R	Q	Q'	T
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	h	h
7	1	1	1	h	h



S-R tárolóelem kialakítása T-tárolóelemmel

Def.: Egy bináris logikai függvény (totál-) szimmetrikus, ha független változóinak tetszőleges permutációjára (felcserélésére) invariáns, vagyis értéke nem változik.

Def.: Egy bináris logikai függvény parciálisan, vagyis részben szimmetrikus, ha független változói egy részhalmazának tetszőleges permutációjára (felcserélésére) invariáns, vagyis értéke nem változik.

Azokat a változókat, melyekre a függvény szimmetrikus tulajdonságot mutat, szimmetria-változóknak nevezzük.

Def.: Egy szimmetrikus függvényt egy vagy több β skalárjellemző jellemez. A skalárjellemző értelmezése: a (totál-) szimmetrikus függvény értéke akkor és csakis akkor 1 (vagy 0), ha a független változók közül pontosan β számú értéke 1 (vagy 0).

Tétel: Egy n-változós szimmetrikus függvényre $0 \le \beta \le n$ **(n+1 érték).**

Def.: Egy bináris logikai függvény elemi szimmetrikus függvény, ha egyetlen β skalárjellemző jellemzi.

Tétel: Az n-változós elemi szimmetrikus függvények száma: 2n+2.

Jelölés: Egy olyan n-változós, β skalárjellemzőjű elemi szimmetrikus függvényre, amelynek a független változók közül pontosan β számú 1-es értéke esetén az értéke 1, a jelölés: $F^n_{(\beta)}$**,**

illetve amelynek a független változók közül pontosan β számú 0-s értéke esetén az értéke 0, a jelölés: $G^n_{(\beta)}$**.**

$$F^n_{(0)} = \overline{X_n} \cdot \ldots \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_1} \cdot \overline{X_0} = E^n_0$$

$$F^n_{(1)} = \overline{X_n} \cdot \ldots \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_1} \cdot X_0 + \overline{X_n} \cdot \ldots \cdot \overline{X_2} \cdot X_1 \cdot \overline{X_0} + \ldots + X_n \cdot \ldots \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_1} \cdot \overline{X_0}$$

$$F^n_{(n)} = X_n \cdot \ldots \cdot X_2 \cdot X_1 \cdot X_0 = E^n_{2^n-1}$$

$$G^n_{(i)} = \overline{F^n_{(n-i)}}$$

$$F^n_{(i)(k)}(X_n,\ldots X_2,X_1,X_0) = \overline{F^n_{(0)\ldots(i-1)(i+1)\ldots(k-1)(k+1)\ldots(n)}(X_n,\ldots X_2,X_1,X_0)}$$

$$F^n_{(i)(k)}(X_n,\ldots X_2,X_1,X_0) = F^n_{(0)\ldots(i-1)(i+1)\ldots(k-1)(k+1)\ldots(n)}(\overline{X_n},\ldots \overline{X_2},\overline{X_1},\overline{X_0})$$

$$F^n_{(0)\ldots(i-1)(i+1)\ldots(k-1)(k+1)\ldots(n)}(\overline{X_n},\ldots \overline{X_2},\overline{X_1},\overline{X_0}) = \overline{F^n_{(0)\ldots(i-1)(i+1)\ldots(k-1)(k+1)\ldots(n)}(X_n,\ldots X_2,X_1,X_0)}$$

Példa $\overline{F^n_{(i)}} = G^n_{(n-i)}$

legyen $n=3$, $i=1$

X_2	X_1	X_0	$F_{(1)}$	$\overline{F_{(1)}}$	$G_{(2)}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Tétel: Bármely szimmetrikus függvény előállítható elemi szimmetrikus függvények VAGY illetve ÉS kapcsolataként. Például

$$F^n_{(i)} + F^n_{(j)} + F^n_{(k)} = F^n_{(i)(j)(k)}$$

$$F^n_{(i)(j)(k)} \cdot F^n_{(i)(j)} \cdot F^n_{(j)(k)} = F^n_{(j)}$$

		∅	NOR		$\overline{X_1}$		$\overline{X_0}$	XOR	NAND	ÉS	EKV	X_0		X_1		VAGY	1
X_1	X_0	Y_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
			$F_{(0)}$					$F_{(1)}$	$F_{(0)(1)}$	$F_{(2)}$	$F_{(0)(2)}$					$F_{(1)(2)}$	$F_{(0)(1)(2)}$
			$\overline{F_{(1)(2)}}$					$\overline{F_{(0)(2)}}$	$\overline{F_{(2)}}$	$\overline{F_{(0)(1)}}$	$\overline{F_{(1)}}$					$\overline{F_{(0)}}$	
		$G_{(0)(1)(2)}$	$G_{(0)(1)}$					$G_{(0)(2)}$	$G_{(0)}$	$G_{(1)(2)}$	$G_{(1)}$					$G_{(2)}$	
			$\overline{G_{(2)}}$					$\overline{G_{(1)}}$	$\overline{G_{(1)(2)}}$	$\overline{G_{(0)}}$	$\overline{G_{(0)(2)}}$					$\overline{G_{(0)(1)}}$	

$n=2$

függvények száma = 16

szimm. fv.-ek " = 8

elemi szimm. fvek " = 6

$$\boxed{\overline{F_{(0)}} = G_{(2)} \quad \overline{F_{(1)}} = G_{(1)} \quad \overline{F_{(2)}} = G_{(2)} \quad \overline{F^n_{(i)}} = G^n_{(n-i)}}$$

$\overline{F^2_{(0)}} = F^2_{(1)(2)}$ $\quad \overline{F^2_{(1)}} = F^2_{(0)(2)}$ $\quad \overline{F^2_{(2)}} = F^2_{(0)(1)}$

$$F^n_i = \overline{F^n_{(0)(1)\ldots(i-1)(i+1)\ldots(n)}}$$