Pénzügyi számítások – kamat, hozam
Váltó és értékelése

7. hét

Kamat – Hozam - Árfolyam

Kamat nem egyenlő a hozammal!!
Kamat-Hozam-Árfolyam összefüggés

A jelenlegi gyakorlat alatt a pénz időértékének figyelembe vételével – Kamatszámítási módokat gyakorolunk!

Kamat

- Egyszerűen fogalmazva a pénz (helyesebben tőke) szolgáltatásainak az ára.
- A kamat mindig egy pénzösszeg, amit a befektetésünk névértéke után fizet meg az, akinek a tőkénket kölcsön adtuk.
- Nominál kamat
- Reálkamat fogalmai

Hozam

- Nem azonos a kamattal, tágabb fogalom.
- Pontosan azt jelenti, amit kiérzünk belőle, azaz a pénzünkkel való gazdálkodás hozadéka. A hozam ugyanis a megkeresett kamatjövedelem és a befektetésen keletkezett árfolyamnyereség, illetve veszteség összege.

2010.10.19. 4

Kamat – hozam - következtetés

- **Állandó kamatozású kötvény** *esetében* a **hozam akkor egyenlő a kamattal**, **ha** a kötvényt kibocsátáskor *névértéken, vagy* élettartama alatt bármikor az *addig felhalmozott kamattal növelt névértéken* vásároljuk meg, és *lejáratig tartjuk*, *vagy* pedig *lejárat előtt* az addig az időpontig *felhalmozott kamattal növelt névértéken a*djuk el. Minden egyéb esetben árfolyamnyereség, vagy -veszteség is keletkezik. Az árfolyamveszteség lehetőségéből következik, hogy **a hozam negatív is lehet.**

2010.10.19. 5

Kamatszámítás (1)

- Éves kamatláb megállapítása = összehasonlítható befektetési lehetőségek
- *Future Value (FV) = PV x* $(1+i)^n$
- *Present Value (PV) = FV /* $(1+i)^n$

2010.10.19. 6

Kamat (2)

- Névleges kamatláb: $i = m \times j$
  - (m = éves kamatozások száma)
  - (j = egy évnél rövidebb időszakra jutó kamatláb)
- Effektív kamatláb: $r = (1+j)^m – 1 = (1+i/m)^m - 1$
  - j = egy évnél rövidebb időszakra kapott kamatláb
  - m = éves kamatozások száma
  - i = névleges kamatláb
- Folytonos kamatozás: $k = m \ln (1 + i/m) = \ln(1+r)$
  - m = éves kamatozások száma
  - k = folytonos kamatláb
  - r = effektív kamatláb

2010.10.19. 7

Kiegészítő feladatok (1)

A pénz ára

- El akarunk adni egy ingatlant, de a vevő a vételárnak csak egy bizonyos hányadát tudja most kifizetni. Az ingatlan mai vételára 5 millió forint, a vevő most kifizetne belőle 3 millió forintot, és azt ajánlja, hogy egy év múlva 2200000 forintot fog fizetni. Elfogadjuk-e az ajánlatot, ha az egy éves futamidejű államkötvények kamatlába 12%?
- Hány százalékos kamatot ajánl a vevő? …………….
- Mekkora ez a kamat ahhoz képest, mint amit más befektetéssel (államkötvény) kapnék?
- A fentiek alapján elfogadjuk-e az ajánlatot?

2010.10.19. 8

Kiegészítő feladatok (2)

Megoldás:

Vevő kamatajánlatának számítása:

A jelenben nem finanszírozott összeg: 5.000.000 – 3.000.000 = 2.000.000

Ajánlott összeg 1 év múlva: 2.200.000

Éves kamat % = $(FV / PV)-1 = PV \times (1+i)^1 / PV = (2.200.000 / 2.000.000) -1 = 0,1 = 10\%$

Az ajánlott kamat kevesebb, mint az államkötvényen elérhető 12%-os hozam, ezért ezt az ajánlatot nem fogom elfogadni.

Ráadásul az államkötvény sokkal kisebb kockázatot képvisel a váltónál.

2010.10.19. 9

Kiegészítő feladatok (3)

- Egy befektetésre negyedévenként 4 % kamatot fizetnek. Hány százalék éves egyszeri kamatot kell fizetni ahhoz, hogy ugyanilyen kamatot kapjunk? Határozza meg egyszerű és effektív kamaszámítás segítségével az éves kamatot! (Az eredményt három tizedesjegy pontossággal adja meg, kerekítés nélkül!)

Kiegészítő feladatok (4)

Megoldás:

- a névleges kamatláb: ………..% 16
  - r = 4 x 4 % = 16,000%
- az effektív kamatláb: ……….% 16,985
  - r = $(1 + 0,04)^4$ - 1 = 16,985%

Kiegészítő feladatok (5)

- Egy befektetés értéke 3,5 év alatt 800-ról 1.500-ra növekedett. Mekkora volt a folytonos és az effektív kamatláb? (Az eredményt három tizedesjegy pontossággal adja meg, kerekítés nélkül!)

Kiegészítő feladatok (6)

Megoldás:

- folytonos kamatláb: …………. % 17,960
  - k = 1/3.5 x ln (1500/800) = 1/3.5 x ln 1,875 = 0.17960 = 17,960%
- effektív kamatláb: …………… % 19,674
  - $1 + r = (1{,}500 / 800)^{1/3.5} = 1{,}19674$
  - r = 19,674%

Feladatok (1)

III. 5. feladat:

Az Ön vállalkozása úgy dönt, hogy 5 millió Ft összeget kíván lekötni. Az éves kamatláb értéke 10%.

Feladat:

Számítsa ki, hogy mekkora lesz az induló befektetés jövőértéke 3,5 év múlva!

Feladatok (2)

III. 5. feladat (megoldás):

T = 3

n = 0,5

C_0 = 5.000.000

$C_t = C_{T+n} = C_0 \times (1+i)^T \times (1+ n \times i) = 5.000.000 \times (1 +0{,}1)^3 \times (1 + 0.5 \times 0.1) = 5.000.000 \times 1.331 \times 1.05 =$

Az induló befektetés jövőértéke: **6.987.750 Ft**

Feladatok (3)

III. 6. feladat:

Tegyük fel, hogy 100 $ összeget szeretnénk betétként lekötni negyedévente elszámolt éves viszonylatban 12%-os kamathozam ellenében.

Feladat: Számítsa ki, hogy az ötödik év végén mekkora összeggel fogunk így rendelkezni!

2010.10.19. 16

Feladatok (4)

III. 6. Feladat (Megoldás):

k = 12% = 0,12
m = 4
C_0= 100
t = 5
$C_t = C_0 \times (1 + k/m)^{t \times m}$
$C_5 = 100 \times (1 + 0{,}12/4)^{5 \times 4} = 100 \times 1{,}03^{20} = 100 \times 1{,}8061 = 180{,}61$

Az 5. év végén : 180,61 $-al rendelkezünk.

2010.10.19. 17

Feladatok (5)

III. 7. Feladat:

Vállalkozásának 2,5 millió forintra lesz szüksége a jövőben, hogy 2,5 év múlva induló beruházást finanszírozni tudjon. Az éves kamatláb értéke 10 %.

Feladat:

Számítsa ki, hogy 2,5 év múlva bele tud-e fogni a beruházásba, hogy ha most a rendelkezésére álló 2 millió forintját a megadott adatok ismeretében befekteti.

2010.10.19. 18

Feladatok (6)

III. 7. Feladat – (megoldás)

r = 10% = 0,1

C_0 = 2.000.000

t = 2

n = 0,5

$C_t = C_0 \times (1+r)^t$

$C_{2,5}$ = 2.000.000 x $(1 + 0,1)^2$ x (1 + 0,1 x 0,5) = 2.000.000 x 1,21 x 1,05 = 2.541.000

2,5 év múlva 2.541.000 Ft-ja lesz, ezért bele tud fogni a beruházásba.

Feladatok (7)

III. 9. Feladat:

Ön úgy határozott, hogy 50 ezer Ft-ot szeretne ma lekötni. A bank évi 9 %-os kamatot fog elszámolni.

Feladat: Számítsa ki, hogy mennyi forinthoz jutna 8 év múlva, ha a bank a kamatot

- Évi kamatfizetéssel
- Félévenkénti kamatfizetéssel,
- Negyedévenkénti kamatfizetéssel,
- Folytonos kamatozással határozta meg!

Feladatok (8)

III.9. Feladat – (Megoldás)

C_0 = 50.000

r = 9% = 0.09

t = 8

$C_t = C_0 \times (1+r)^t$

C_8 = 50.000 x $(1+0.09)^8$ = 50.000 x 1,9926 = 99.630

Éves kamatfizetés esetén 8 év múlva 99.630 Ft összeghez jutunk.

Feladatok (9)

$C_0 = 50.000$
k = 9% = 0.09
m = 2
t = 8
$C_{t} = C_0 \times (1+k/m)^{t \times m}$
$C_8 = 50.000 \times (1+0.09/2)^{8 \times 2} = 50.000 \times 1,045^{16} =$
$50.000 \times 2,0224 = 101.120$
Félévenkénti kamatfizetés esetén 8 év múlva 101.120 Ft összeghez jutunk.

Feladatok (10)

$C_0 = 50.000$
k = 9% = 0.09
m = 4
t = 8
$C_{t} = C_0 \times (1+k/m)^{t \times m}$
$C_8 = 50.000 \times (1+0.09/4)^{8 \times 4} = 50.000 \times 1,0225^{32} =$
$50.000 \times 2,0381 = 101.905$
Negyedévenkénti kamatfizetés esetén 8 év múlva 101.905 Ft összeghez jutunk.

Feladatok (11)

i = 9%
$C_0 = 50.000$
e ~ 2,71828
t = 8
$C_{t} = C_0 \times e^{ti}$
$C_8 = 50.000 \times e^{8 \times 0.09} = 50.000 \times 2,0544 = 102.720$
Folyamatos kamatfizetés esetén 8 év múlva 102.720 Ft összeghez jutunk

Feladatok (12)

III. 10. Feladat:

Mekkora lesz az 1.000 Ft befektetésünk értéke a negyedik év végén, ha a befektetés folytonos kamatozással évi 10 %-os kamatot ígér?

Feladatok (13)

III. 10. Feladat (megoldás)

- $C_0 = 1.000$
- $e \sim 2{,}71828$
- $i = 10\% = 0{,}1$
- $C_t = C_0 \times e^{ti}$
- $C_4 = 1.000 \times e^{4x0{,}1} = 1.000 \times 1{,}492 = 1.492$
- A befektetés értéke a negyedik év végén 1.492 Ft összeg lesz.

Feladatok (14)

III. 11. Feladat

- Határozza meg azt, hogy mekkora az egyéves kockázatmentes befektetések várható nominális hozama, ha a várható infláció értéke 14%-os, a kockázatmentes reálhozam értéke pedig 2 %.

Feladatok (15)

III. 11. Feladat – (Megoldás)

r_{real} = 2% = 0,02

p_i = 14% = 0,14

$r_{nom} = (r_{real} + 1) \times (1 + p_i) - 1$

r_{nom} = (0,02 +1) x (1 + 0,14)-1 = 1,02 x 1,14 - 1 = 1,1628 – 1 = 0,1628 = 16,28%

Az egyéves kockázatmentes befektetések várható nominális hozama 16,28%.

2010.10.19. 28

Feladatok (16)

III. 12. Feladat

Melyik befektetést választaná 2 évre az alábbiak közül?

- Éves kamatfizetés mellett évi 12,2%-os névleges kamatot fizet.
- Féléves kamatfizetés mellett évi 12 %-os névleges kamatot fizet.
- Negyedéves kamatfizetés mellett évi 11.8%-os névleges kamatot fizet.
- Folytonos kamatfizetés mellett évi 11%-os névleges kamatot fizet.

2010.10.19. 29

Feladatok (17)

III. 12. Feladat – (Megoldás)

k = 12,2% = 0,122

r = 12,2% = 0,122

Éves kamatfizetés mellett a hozam 12,2%

k = 12% = 0,12

m = 2

$r = (1 + k/m)^m - 1$

$r = (1 + 0{,}12/2)^2 - 1 = 1{,}06^2 - 1 = 1{,}1236 - 1 =$ 0,1236 = 12.36%

Féléves kamatfizetés mellett a hozam 12,36%.

2010.10.19. 30

Feladatok (18)

III. 12. Feladat: - Megoldás (folyt.)

$k = 11,8\% = 0,118$

$m = 4$

$r = (1 + k/m)^m - 1$

$r = (1 + 0,118/4)^4 - 1 = 1,1233 - 1 = 0,1233 = 12,33\%$

Negyedéves kamatfizetés mellett a hozam: 12,33%

2010.10.19. 31

Feladatok (19)

III. 12. Feladat – (Megoldás - folytatás)

$k = 11\% = 0,11$

$e \sim 2,71828$

$r = e^k – 1$

$r = e^{11} - 1 = 1,163 - 1 = 0,1163 = 11,63\%$

Folyamatok kamatfizetés mellett a hozam 11,63%.

A legkedvezőbb a féléves kamatfizetés melletti, 12,36% hozamú befektetés.

2010.10.19. 32

Feladatok (20)

III. 13. – Három befektetés közül lehet választani.

- Az „A"' befektetésre évente egyszer 12 %-kamatot fizetnek.
- A „B" befektetésre félévenkénti kamatfizetéssel évi 11,7%-kamatot fizetnek.
- A „C" befektetésre folytonos kamatfizetéssel 11,5% kamatot fizetnek.

Melyik befektetést választaná?

Számítsa ki ezeknek a befektetéseknek az értékét 1 év, 5 év és 20 év múlva, ha a kamatokat újra befektetjük!

2010.10.19. 33

Feladatok (21)

k = 12 =0,12 = 12%
r = 12% = 0,12
Éves kamatfizetés mellett a hozam 12%.
t = 1
$FV_t = C_0 \times (1 + r)^t$
$FV_1 = 1 \times (1+0,12)^1 = 1 \times 1,12 = 1,12$
t = 5
$FV_t = C_0 \times (1 + r)^t$
$FV_5 = 1 \times (1+0,12)^5 = 1 \times 1,12^5 = 1,7623$

2010.10.19. 34

Feladatok (22)

- t = 20

$FV_t = C_0 \times (1 + r)^t$
$FV_{20} = 1 \times (1+0,12)^{20} = 1 \times 1,12^{20} = 9,6463$

Az „A” befektetés jövőértékei:

- $FV_1 = 1,12$
- $FV_5 = 1,7623$
- $FV_{20} = 9,6463$

2010.10.19. 35

Feladatok (23)

k = 11,7% =0,117
m = 2
$r = (1 + k/m)^m - 1$
$r = (1 + 0,117/2)^2 - 1 = 1,0585^2 - 1 = 1,1204 - 1 = 0,1204 =$ 12,04%
féléves kamatfizetés mellett a hozam 12,04%.
t = 1
$FV_t = C_0 \times (1 + r)^t$
$FV_1 = 1 \times (1+0,1204)^1 = 1 \times 1,1204 = 1,1204$
t = 5
$FV_t = C_0 \times (1 + r)^t$
$FV_5 = 1 \times (1+0,1204)^5 = 1 \times 1,1204^5 = 1,7655$

2010.10.19. 36

Feladatok (24)

- t = 20

$FV_t = C_0$ x $(1 + r)^t$

$FV_{20} = 1$ x $(1+0{,}1204)^{20} = 1$ x $1{,}1204^{20} = 9{,}7154$

Az „B” befektetés jövőértékei:

- $FV_1 = 1{,}1204$
- $FV_5 = 1{,}7655$
- $FV_{20} = 9{,}7154$

Feladatok (25)

k = 11,5% =0,115

e ~ 2,71828

$r = e^k - 1$

$r = e^{0,115} - 1 = 1{,}1219 - 1 = 0{,}1219 = 12{,}19\%$

folytonos kamatfizetés mellett a hozam 12,19%.

t = 1

$FV_t = C_0$ x $(1 + r)^t$

$FV_1 = 1$ x $(1+0{,}1219)^1 = 1$ x $1{,}1219 = 1{,}1219$

t = 5

$FV_t = C_0$ x $(1 + r)^t$

$FV_5 = 1$ x $(1+0{,}1219)^5 = 1$ x $1{,}1219^5 = 1{,}7773$

Feladatok (26)

- t = 20

$FV_t = C_0$ x $(1 + r)^t$

$FV_{20} = 1$ x $(1+0{,}1219)^{20} = 1$ x $1{,}1219^{20} = 9{,}9789$

Az „C” befektetés jövőértékei:

- $FV_1 = 1{,}1219$
- $FV_5 = 1{,}7773$
- $FV_{20} = 9{,}9789$

A feladat megoldásaként a „C” befektetést választanánk.

Váltó fogalma (1)

- Váltó: Egy rövidlejáratú ép, ami egy későbbi fizetést testesít meg. A váltó lehet fizetési ígérvény, vagy fizetési felszólítás.
- A leszámítolási érték a váltó árfolyama, vagyis a jövőben várható pénz jelenbeli pénzben kifejezett ára.
- Future Value (FV) = PV x $(1+i)^n$
- Present Value (PV) = FV / $(1+i)^n$
- Töredék év: FV = PV x $(1+i)^t$
- Effektív kamatláb: r = $(1+j)^m - 1$
- Folytonos kamatozás: k = m ln (1 + i/m) = ln(1+r)
- Diszkontláb = d = i / (1 + i)

2010.10.19. 40

Váltó (2)

VI. 8. feladat:

Az Ön vállalata egy 15 millió szállítói követelés kiváltása fejében saját váltót állított ki. A váltó kiállításának ideje: 2004. 01.25., a lejárat időpontja pedig 2004.10.25. A kereskedelmi hitelkamat értéke 18 %.

Feladat:

Határozza meg a kamatnapok számát és a váltó névértékét.

2010.10.19. 41

Váltó (3)

VI. 8. feladat (megoldás):

Német módszer szerint – Jan. 25 – Okt. 25. – 270 nap a kamatnapok száma

P_0= 15.000.000

n = 270 / 360 = 0,75

N = P_0 x $(1+k_n$ x n) = 15.000.000 x (1 +0,18 x 0,75) = 15.000.000 x (1+ 0,135) =

A váltó névértéke: **17,025,000 Ft**

2010.10.19. 42

Váltó (4)

VI. 9. feladat:

Az Ön vállalatának birtokában van egy 150 napos 25 millió forint értékű váltó.

Feladat: Számítsa ki, hogy mennyi volt a kiváltott követelés értéke a váltó kiállításának időpontjában, ha a kereskedelmi hitelkamat 20%.

2010.10.19. 43

Váltó (5)

VI. 9. Feladat (Megoldás):

N = 25.000.000

n = 150 / 360 = 0,4167

P_0= N / (1 + k_n x n) = 25.000.000 / (1 + 0,2 x 0,4167) = 25.000.000 / (1 + 0,08334) = **23.076.781**

A kiváltott követelés értéke: 23.076.781 Ft.

2010.10.19. 44

Váltó (6)

VI. 10. Feladat:

Az Ön vállalatának birtokában van egy 210 napos 15 millió forint értékű váltó. A kereskedelmi hitelkamat 18%. A lejárat előtt 60 nappal Önnek sürgősen szüksége van a pénzre. Úgy döntött, hogy váltóját a számlavezető bankjánál leszámítoltatja 20 %-os leszámítolási kamatláb mellett.

Feladat:

Számítsa ki mennyi pénzt fog kapni a banktól!

2010.10.19. 45

Váltó (7)

VI. 10. Feladat – (megoldás)

N = 15.000.000

n = 60 / 360 = 0,1666

P_0= N / (1 + k_n x n) = 15.000.000 / (1 + 0,2 x 0,16666) = 15.000.000 / 1 + 0,03332 = 14.516.316

A vállalat 14.516.316 Ft összeget kap a banktól.

2010.10.19. 46

Váltó (8)

VI. 11. Feladat:

Egy kereskedelmi bank birtokában van egy 20 millió forint névértékű váltó, amit a 270 napos futamidő lejárata előtt 60 nappal számítoltatott le egy ügyfele. A kereskedelmi hitelkamat 16 %, a leszámítolási kamatláb 18% volt. A kereskedelmi bank úgy döntött, hogy az MNB-vel viszontleszámítoltatja a váltót. A váltó 20 napot volt a bank birtokában. A refinanszírozási hitelek kamatlába 20 %.

Feladat: Számítsa ki a kereskedelmi bank mekkora összeget kap a viszontleszámítolás után az MNB-től!

2010.10.19. 47

Váltó (9)

VI. 11. Feladat – (Megoldás)

N = 20.000.000

n = (60 – 20) / 360 = 40 / 360 = 0,1111

P_0= N / (1 + k_n x n) = 20.000.000 / (1 + 0,2 x 0,1111) = 20.000.000 / (1 + 0,02222) = 19.565.260

A kereskedelmi bank 19.565.260 Ft összeget kap az MNB-től.

2010.10.19. 48

Váltó (10)

VI. 12. Feladat:

Az Ön vállalata 2004.01.20-án egy 5 millió forint értékű követelése fejében váltót kapott, aminek a lejárata 2004.11.20. A kereskedelmi hitelkamat 16%-os. A váltót 2004.08.20-án a számlavezető bankjánál leszámítoltatta évi 17%-os leszámítolási diszkontláb mellett. Majd 2004.10.20-án a bank az MNB-nél viszontleszámítoltatta 18%-os refinanszírozási kamatláb mellett.

2010.10.19. 49

Váltó (11)

VI. 12. Feladat (Folyt.)

a) Számítsa ki, hogy mekkora a leszámítolt váltókamat és mennyiért vette meg a bank vállalatától a váltót?
b) Számítsa ki, hogy mekkora a kereskedelmi bank váltóleszámítolásból származó kamatjövedelme, mekkora összeget kapott az MNB-től és mekkora a viszontleszámítolt váltókamat?

2010.10.19. 50

Váltó (12)

VI. 12. Feladat – (Megoldás)

Váltó futamidejében foglalt kamatnapok száma: 2004.01.20 – 2004.11.20 = 300 nap

P_0 = 5.000.000

n = 300 / 360 = 0,83

P_0= N / (1 + k_n x n) = 5.000.000 x (1 + 0,16 x 0,8333) = 5.000.000 x (1 + 0,1333) = 5.666.500

A váltó névértéke: 5.666.500 Ft

2010.10.19. 51

Váltó (13)

VI. 12. Feladat – (Megoldás – folyt. 2)

Kereskedelmi banki leszámítolás:

Kamatnapok száma: 2004.08.20 – 2004.11.20. = 90 nap

N = 5.666.500

n = 90/360 = 0,25

P_0= N / (1 + k_n x n) = 5.666.500 / (1 + 0,17 x 0,25) = 5.666.500 / (1 + 0,0425) = 5.435.492 Ft.

A kereskedelmi bank 5.435.492 Ft összegért vásárolta meg a váltót.

5.666.500 – 5.435.492 = 231.008 Ft.

A leszámítolt váltókamat = 231.008 Ft.

Váltó (14)

VI. 12. Feladat – (Megoldás – folyt. 3)

MNB viszontleszámítolás:

N = 5.666.500

n = 30 / 360 = 0,083

P_0= N / (1 + k_n x n) = 5.666.500 / (1+0,18 x 0,083) = 5.666.500 / (1+0,015) = 5.582.759 Ft.

A kereskedelmi bank 5.582.759 Ft-ot kapott az MNB-től.

Váltó (15)

VI. 13. Feladat:

Ön egy 2 millió forint értékű követelése fejében 2004.01.15-én egy 2,3 millió forint névértékű váltót kapott.

Feladat:

Határozza meg a váltó lejárati időpontját, ha tudja, hogy a kereskedelmi hitelkamat 20%.

Váltó (16)

VI. 13. Feladat – (Megoldás)

P_0 = 2.000.000

N = 2.300.000

P_0= N / (1 + k_n x n)

n = ((N/P_0)-1)/k_n = ((2.300.000 / 2.000.000) -1) / 0,2 = (1,15 – 1) / 0,2 = 0,15 / 0,2 = 0,75

A kamatnapok száma 0,75 x 360 nap, azaz 270 nap, 9 hónap.

A váltó lejárati időpontja 2004.01.15-től számított 9 hónap, azaz 2004.10.15.

2010.10.19. 55

Kérdések?

Köszönöm a figyelmet!

2010.10.19. 56