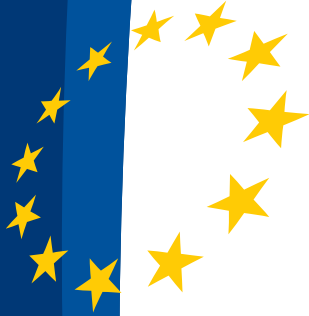


# Értékünk AZ **EMBER**

Humánerőforrás- fejlesztési Operatív Program



**Dr. Író Béla**

## **HŐ- ÉS ÁRAMLÁSTAN**

Európa itt épül



A jegyzet a HEFOP támogatásával készült.

© Széchenyi István Egyetem. Minden jog fenntartva

# A dokumentum használata

## Mozgás a dokumentumban

A dokumentumban való mozgáshoz a Windows és az Acrobat Reader megszokott elemeit és módszereit használhatjuk.

Minden lap tetején és alján egy navigációs sor található, itt a megfelelő hivatkozásra kattintva ugorhatunk a használati útmutatóra, a tartalomjegyzékre, valamint a tárgymutatóra. A ◀ és a ▶ nyilakkal az előző és a következő oldalra léphetünk át, míg a Vissza mező az utoljára megnézett oldalra visz vissza bennünket.

## Pozicionálás a könyvjelzőablak segítségével

A bal oldali könyvjelző ablakban tartalomjegyzékfa található, amelynek bejegyzéseire kattintva az adott fejezet/alfejezet első oldalára jutunk. Az aktuális pozíciónkat a tartalomjegyzékfában kiemelt bejegyzés mutatja.

## A tartalomjegyzék és a tárgymutató használata

### Ugrás megadott helyre a tartalomjegyzék segítségével

Kattintsunk a tartalomjegyzék megfelelő pontjára, ezzel az adott fejezet első oldalára jutunk.

### A tárgymutató használata, keresés a szövegben

Válasszuk ki a megfelelő betűt a tárgymutató lap tetején, majd miután megtaláltuk a keresett bejegyzést, kattintsunk a hozzá tartozó oldalszámok közül a megfelelőre. A további előfordulások megtekintéséhez használjuk a Vissza mezőt.

A dokumentumban való kereséshez használjuk megszokott módon a Szerkesztés menü Keresés parancsát. Az Acrobat Reader az adott pozíciótól kezdve keres a szövegben.

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>A szerző előszava .....</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Bevezetés.....</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>A kontínuum és állapotának jellemzése.....</b>	<b>8</b>
3.1	A fázisegyensúlyi diagram .....	9
3.2	A kontínuum állapotának jellemzése.....	15
3.2.1	Az összenyomhatatlan kontínuum.....	17
3.2.2	Az összenyomható kontínuum .....	18
3.2.2.1	Az általános gáztörvény .....	19
3.2.2.2	Egyszerű állapotváltozások.....	21
3.2.2.3	Adiabatikus és politropikus állapotváltozás ..	23
3.2.3	Gázkeverékek .....	26
3.2.4	Valóságos és ideális kontínuum .....	29
<b>4</b>	<b>Nyugvó kontínuumok alaptörvényei .....</b>	<b>31</b>
4.1	A nyomás terjedése a kontínumban.....	31
4.2	A felületi feszültség .....	35
4.3	A folyadékot tartalmazó tartály falát terhelő erő .....	39
4.4	A felhajtóerő.....	41
<b>5</b>	<b>Ideális kontínuumok kinematikája .....</b>	<b>42</b>
5.1	A kontínuum-áramlás matematikai leírása .....	42
5.2	Stacionárius és instacionárius áramlás .....	47
5.3	A kontinuitás törvénye.....	51
<b>6</b>	<b>Ideális kontínuumok dinamikája .....</b>	<b>56</b>
6.1	A Bernoulli-egyenlet.....	56
6.2	Az impulzus-tétel.....	60
<b>7</b>	<b>Valóságos folyadékok áramlása .....</b>	<b>63</b>
7.1	Súrlódás a valóságos kontínumban .....	63
7.2	Reológia.....	67
7.3	Modellkísérletek .....	69
7.4	Csővekben lezajló áramlások .....	73
7.4.1	A veszteséges Bernoulli-egyenlet .....	73
7.4.2	Lamináris és turbulens áramlás csövekben.....	75

7.4.3	Nyomásveszteség egyenes csövekben.....	82
7.4.3.1	A dimenzióanalízis .....	85
7.4.4	A csősúrlódási tényező.....	88
7.4.5	A csővezeték méretezése .....	91
7.4.5.1	A csővezeteki jelleggörbe.....	91
7.4.5.2	A csővezetékes anyagszállítás.....	95
7.4.5.3	Az optimális csőátmérő .....	98
7.5	Nyitott csatornákban lezajló áramlások.....	101
7.6	Körüláramlott testre ható erők.....	104
7.6.1	A kavitáció .....	110
7.6.2	Szárnyprofil körüli áramlás .....	112
<b>8</b>	<b>A rendszer és környezete .....</b>	<b>114</b>
8.1	A termodinamika I. főtétele .....	116
<b>9</b>	<b>Körfolyamatok .....</b>	<b>123</b>
9.1	A termodinamika II. főtétele .....	126
9.1.1	A Carnot-körfolyamat.....	131
9.1.2	Az Otto-körfolyamat.....	133
9.1.3	A Diesel-körfolyamat .....	135
9.1.4	A gázturbina-körfolyamat.....	137
9.2	Hűtő körfolyamatok .....	139
<b>10</b>	<b>A gőz-körfolyamatok és a gőzdiagramok.....</b>	<b>142</b>
10.1	A Rankine-Clausius körfolyamat .....	143
10.2	Az entalpia .....	146
10.3	A vízgőzdiagram felépítése.....	149
10.4	A hűtő közegek 'logp-i' diagramjainak felépítése ..	152
10.5	A kompresszoros hűtő körfolyamat.....	154
<b>11</b>	<b>A nedves levegő állapotváltozásai .....</b>	<b>156</b>
11.1	A nedves levegő állapotának jellemzése .....	156
11.2	Az i-x diagram felépítése.....	159
11.3	A nedves levegő állapotváltozásai .....	161
<b>12</b>	<b>A légkondicionálás alapjai .....</b>	<b>166</b>
12.1	Klímaberendezések nyári üzeme.....	168
12.2	Klímaberendezések téli üzeme.....	170
<b>13</b>	<b>A hőterjedés .....</b>	<b>171</b>

13.1	A hővezetés .....	171
13.1.1	Hővezetés sík falban .....	172
13.1.2	Hővezetés hengeres falban .....	174
13.2	A hőátadás .....	177
13.3	A hőszigetelés .....	182
13.4	A hőátvitel .....	187
13.4.1	Hőátvitel bordázott felületen .....	189
<b>14</b>	<b>A hőcserélő berendezések .....</b>	<b>192</b>
14.1	Felületi hőcserélők .....	193
14.1.1	A közepes hőmérsékletkülönbség .....	194
14.1.2	A szükséges hőcserélő-felület .....	198
14.1.3	A kilépő közeghőmérsékletek .....	199
14.2	Keverő hőcserélők .....	203
14.3	Regeneratív hőcserélők .....	205
	<b>Felhasznált és ajánlott irodalom.....</b>	<b>207</b>
	<b>Tárgymutató .....</b>	<b>208</b>
	<b>Ábrajegyzék.....</b>	<b>216</b>
	<b>Táblázatok jegyzéke .....</b>	<b>217</b>
	<b>Mellékletek.....</b>	<b>218</b>

# 1 A szerző előszava

Ez a jegyzet a közlekedésmérnöki, a mechatronikai mérnöki és a műszaki menedzser alapképzési szakok hallgatói számára íródott és ezen hallgatók számára szándékozik áttekintő képet adni a hő- és áramlástan alapjairól.

A tananyag határainak megszabásakor arra törekedtünk, hogy az összhangban legyen az említett szakok tanterveiben a tantárgyra előirányzott heti négy kontaktórával. Az ismeretek mennyiségének és „mélységének” meghatározásakor azt tartottuk szem előtt, hogy az alapképzésben elsősorban a gyakorlatban használható ismeretek elsajátítása szükséges. A jegyzetben az elméleti fejtegetések csak olyan mértékben és olyan mélységben szerepelnek, ami a töretlen logikai lánc megtartása érdekében elkerülhetetlen volt és ugyanakkor a tananyagot elsajátító számára bemutatja bizonyos matematikai módszerek alkalmazhatóságát. A néhány helyen emiatt a szabatoságból tett engedmény, reményeink szerint megtérül abban, hogy a jegyzet könyvben használható tanulásra, mint más hasonló témájú szakkönyvek.

Úgy gondoljuk, hogy a tananyagot elsajátító számára az itt megszerzhető ismeretek elégségesek, ahhoz, hogy azokra építkezve, felhasználva a jegyzethez kapcsolódó példatárak nyújtotta gyakorlás lehetőségét is, közepes bonyolultságú gyakorlati feladatokat önállóan oldjon meg. Ugyancsak bízunk abban, hogy a megszerzett ismeretekre alapozva a hő- és áramlástan itt nem vagy nem teljes mélységében tárgyalt fejezeteit önálló tanulással is sikerül elsajátítani ill. az itt tárgyalt ismeretek elsajátítása révén kitáguló látókör jó alapot biztosít mind az adott szak tantervében szereplő más szakmai tantárgyak ismeretanyagának tanulmányozásához, mind pedig egy későbbi mesterképzésben történő sikeres részvételhez.

## 2 Bevezetés

Mind a hőtan, mind az áramlástan a fizika tudományának része. Nyilvánvaló kérdésként merül fel, hogy miért egy tantárgy keretei között kerül tárgyalásra e két, első pillantásra egymástól távol eső tudományterület.

A feltett kérdésre röviden az a válasz, hogy a mindkét tudományterület vizsgálódásainak tárgya a folyékony és légnemű halmazállapotban lévő anyagok.

Bővebben kifejtve: az áramlástan a kinematikai, dinamikai vizsgálatokkal, a hőtan egyfelől a légnemű halmazállapotban lévő anyagok hőenergiával is összefüggő energetikai vizsgálataival (termodinamika), másfelől pedig – a hőterjedés különböző formái között – a folyékony és légnemű halmazállapotban lévő anyagok és szilárd testek közötti hőterjedés vizsgálatával is foglalkozik. Mindehhez tegyük még hozzá azt, hogy a folyékony és a légnemű halmazállapotban lévő anyagok tulajdonságai sőt maga a halmazállapot is szoros összefüggésben van a hőenergia felvételével ill. leadásával.

A fentiekből következik, az is, hogy a folyékony vagy légnemű halmazállapotban lévő anyagok áramlására befolyással van a hőközlés vagy hőelvonás és a folyékony vagy légnemű halmazállapotban lévő anyagok és a szilárd testek közötti hőterjedés körülményeit jelentősen befolyásolják az áramlás jellemzői.

A bonyolult kölcsönhatásra tekintettel a tananyag tárgyalása során egyszerűsítésre kellett törekednünk. Ennek érdekében a folyékony és légnemű halmazállapotban lévő anyagok jellemzőit tárgyaló bevezető fejezet (2. fejezet) után feltételezzük, hogy az adott anyaggal közölt illetve abból elvont hő nem számottevő (a hőmérséklet körülbelül állandó), így a termikus hatásokra nem kell figyelmet fordítanunk, csaknem kizárólag a kinematikai és dinamikai vizsgálatokra kell koncentrálnunk (3. - 8. fejezet). Meg kell azonban itt jegyeznünk, hogy a légnemű halmazállapotban lévő anyagok esetében a nyomás megváltozása következtében sűrűség és hőmérsékletváltozás állhat be, melyről nem szabad megfeledkeznünk adott esetben.

A termodinamika (9. - 12. fejezet) klasszikus felfogást követő tárgyalása során az áramlástan jellemzők hatása figyelmen kívül hagyható. Ugyanakkor a hőterjedéssel foglalkozó 13. és 14. fejezetek áramlástan ismeretek nélkül egyáltalán nem tárgyalhatók.

### 3 A kontínuum és állapotának jellemzése

A bevezetőben több helyütt is folyékony és légnemű halmazállapotban lévő anyagokról történt említés. Az egyszerűség kedvéért ezeket a továbbiakban, összevontan kontínuumként fogjuk említeni. A különbségtétel a szerint történik, hogy a sűrűség állandó vagy a nyomás hatására, azzal összefüggésben változik-e. Ennek megfelelően az összenyomhatatlan (állandó sűrűségű) kontínuum a folyadéokra vonatkozik az összenyomható (változó sűrűségű) kontínuum a légnemű halmazállapotban lévő anyagot jelöli.

A kontínuum elnevezés arra utal, hogy az adott anyag folyamatosan és egyenletesen, szabad felszínt alkotva (a légneműek kivételével) vagy teljes egészében (légneműek) tölti ki a rendelkezésére álló teret, tehát nem bír saját alakkal. A kontínuum elnevezés mellett, elsősorban folyadékok és gázok esetében, gyakorta használatos összefoglaló, magyar elnevezés a közeg.

Megemlítjük itt, hogy a kontínuum megjelölés a fentieknél tágabban is értelmezhető. Beletartozhatnak az apróbb-nagyobb szilárd szemcsékből álló nagyobb halmazok (például a gabonaszemek, a száraz homok, apróbb csavarok vagy csavaranyák, szögek, stb.) melyek, bizonyos feltételek fennállása esetén „áramlásba” jöhetnek. Különösen igaz ez olyan esetben, amikor ezek a szilárd (szemcsés) anyagok valamely valódi kontínuummal elkeveredve jelennek meg.

Ugyancsak a kontínuumok közé sorolhatók az olyan anyagok, mint például a festékek, az olajok, a méz vagy éppenséggel a fogkrém is. Ezeket a hétköznapi megfogalmazás szerint „sűrűbbnek” mondják. Valójában azonban nem az a fontos, hogy adott esetben a sűrűségük nagyobb, hanem az, hogy folyékonyosságuk mutatkozik kisebbnek, persze a körülményektől függően (gondoljunk arra, hogy magasabb hő-



mérsékleten például a háztartásokban használt étolaj ugyanolyan könnyen folyik, mint a víz).

### **Önellenőrző kérdések a kontínuum és állapotának jellemzése fejezethez**

1. Mit kell érteni a kontínuum fogalma alatt?
2. Milyen anyagok sorolhatók be még a kontínuumok közé?
3. Milyen két csoportba oszthatók a kontínuumok?
4. Milyen közös tulajdonságuk van az összenyomhatatlan kontínuumoknak?
5. Milyen közös tulajdonságuk van az összenyomható kontínuumoknak?

## **3.1 A fázisegyensúlyi diagram**

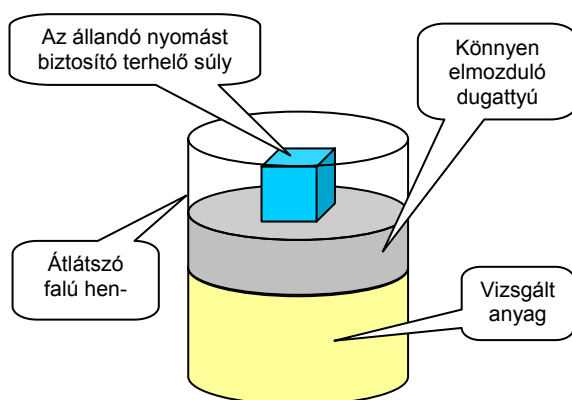
Az eddigiekben folyékony és légnemű halmazállapotban lévő anyagokról esett szó. Szándékosan kerültük a szokásos folyadék és a gáz elnevezéseket. Ennek az az oka, hogy pl. a folyadék megjelölés nem egy adott anyagra utal, hanem annak csak az aktuális halmazállapotára. Gondoljunk pl. a számunkra különös fontossággal bíró vízre. Jól tudjuk, hogy csak bizonyos feltételek mellett marad folyékony halmazállapotban. Ha a hőmérséklet túl alacsony, nevezeten eléri a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot, akkor a víz megszilárdul, halmazállapota megváltozik. Ugyancsak sűrűn tapasztalt halmazállapot-változásra kerül sor, ha a hőmérséklet emelkedése miatt a víz forrásba jön. Ilyenkor a folyékony halmazállapotból a légnemű halmazállapotba megy át az anyag. Köztudott az is, hogy az előbb említett forrás, pontosabban a folyékony halmazállapotból a légneműbe történő átmenet, változatlan hőmérséklet mellett, a nyomás csökkentésével is elérhető.

Egy kis kitérőként itt kell említést tenni a **forrás** és a **párolgás** közötti különbségről. A forrás a folyadék halmazállapotban lévő anyag belsejében képződő és kisebb sűrűségük miatt a folyadék felszínére törekvő gőzbuborékok jelensége. A forrás, a nyomástól függően, csak bizonyos hőmérsékleten veszi kezdetét. Ezzel szemben a párolgás minden hőmérsékleten jelen van, de nem jár gőzbuborékok képződésével és valójában nem más, mint a folyadék halmazállapotban lévő anyag felszínét alkotó molekulák többé-kevésbé lassú légnemű halmazállapotba történő átmenete. A párolgás sebessége a hőmérséklet emelkedésével nő. A hőmérséklet emelkedésével a párolgás forrásba megy át.

Annak érdekében, hogy áttekinthető képet kaphassunk egy bizonyos anyag különböző lehetséges halmazállapotai közötti kapcsolatról, a halmazállapotok egyensúlyi diagramjával, idegen néven fázisegyensúlyi diagrammal, kell megismerkednünk.

A fázisegyensúlyi diagram az anyag fajtérfogatának (egységnyi tömege által elfoglalt térfogatának, azaz sűrűsége reciprokának) függvényében szemléletes módon megmutatja, hogy adott nyomás és hőmérséklet esetében az adott anyag milyen halmazállapotban van.

A fázisegyensúlyi diagramban a különböző halmazállapotok egymástól jellegzetes alakú görbékkel elválasztott területek formájában jelennek meg. Az elválasztó görbék jellegzetes alakja kísérleti úton határozható meg, például a következő módon.



**1. ábra** A fázisegyensúlyi diagram felvétele

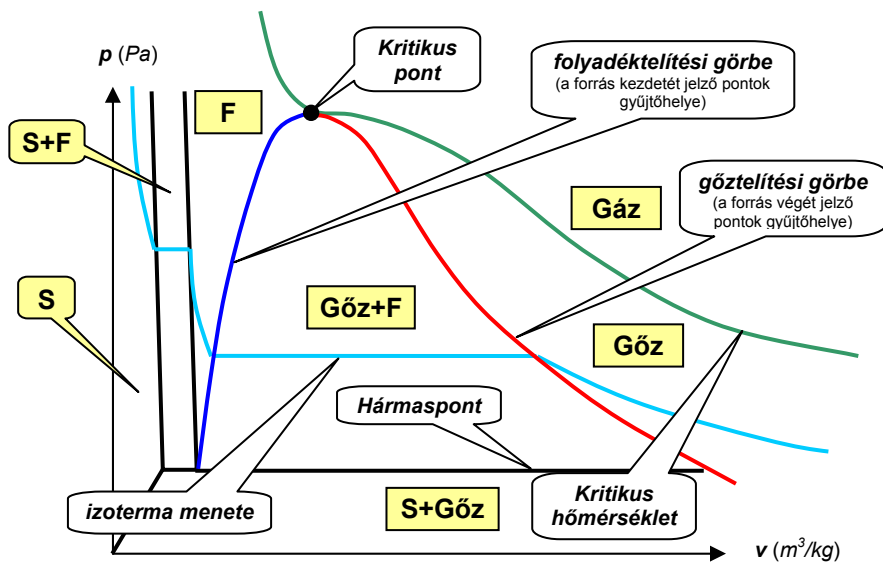
A kérdéses anyaggal részben feltöltött hengert lezárjuk egy könnyen elmozduló dugattyúval és a dugattyúra helyezett súllyal beállítjuk a kívánt nyomást. (Amennyiben szilárd halmazállapotban lévő anyagról van szó, úgy gondoskodni kell arról, hogy a dugattyú alatti teret az adott anyag maradéktalanul kitöltse, ne legyenek levegővel teli üregek)!

Ezt követően elkezdjük növelni a hőmérsékletet és figyelemmel kísérjük egyrészt a dugattyú elmozdulását, másrészt a halmazállapot megváltozását.

A hőmérséklet emelkedése együtt jár a térfogat ill. a fajtérfogat növekedésével. A halmazállapot-változás kezdetének és végének észlelésekor feljegyezzük a diagramban a fajtérfogat értékeit. Ugyanígy járunk el a szilárd-folyékony és a folyékony-légnemű halmazállapot-változáskor. Így a ' $p$ - $v$ ' koordináta-rendszerben négy pontot kapunk az adott állandó nyomást jelző vonalon.

A kísérletet megismételve más nyomásokon, olyan pontsorozatokat kapunk, amelyekre fektetett folyamatos görbék a különböző halmazállapotokat jelentő területek határait jelölik ki.

A 2. ábra, nem méretarányosan, egy jellegzetes fázisegyensúlyi diagramot mutat.



2. ábra Fázisegyensúlyi diagram

A 2. ábrán 'S' a szilárd halmazállapot, 'F' a folyékony halmazállapot területét mutatja.

Egyes területeken egyidejűleg két halmazállapot, két fázis is jelen van. Ezek a vegyes fázisú területek. Ilyenek a szilárd-folyékony (S+F), szilárd-légnemű (S+Gőz) valamint a folyékony-légnemű (F+Gőz) kétfázisú területek.

A különböző halmazállapotokat elválasztó határoló görbék közül, későbbi fontosságuk miatt külön kiemeljük a folyadéktelítési és a gőztelítési görbét. A folyadéktelítési görbe a forrás kezdetét a gőztelítési görbe a forrás végét jelölő pontok mértani helye.

Figyeljük meg a szilárd-folyékony vegyes fázisú területet határoló két görbét, melyek gyakorlatilag egyenesek és csaknem függőlegesen futnak. Ez arra utal, hogy mind a szilárd, mind a folyékony halmazállapotban lévő anyag gyakorlatilag összenyomhatatlan, hiszen igen nagy nyomás hatására is csak többnyire jelentéktelen a bekövetkező fajtérfogat-változás. A két egyenes közelsége és gyakorlatilag párhuzamos menete azt mutatja, hogy ugyanazon anyag szilárd és folyékony halmazállapotban közel azonos fajtérfogatú és ez minden nyomáson igaz.

Összehasonlítva a szilárd-folyékony vegyes fázisú területet a folyékony-légnemű vegyes fázisú területtel, azt állapíthatjuk meg, hogy a folyékony halmazállapotból a légneműbe történő átmenet során a fajtérfogat kisebb nyomásokon igen nagymértékben megnő. Ez a fajtérfogat-változás a nyomás növelésével egyre csökken.

Azt a nyomást, amelynél a nyomás növelése során először észlelhető, hogy a halmazállapot-változás során bekövetkező fajtérfogat-változás zérussá válik (a folyékony-légnemű halmazállapot-változás észlehető fajtérfogat-változás nélkül megy végbe), kritikus nyomásnak, ezt az állapotot kritikus pontnak nevezzük. Más meghatározás szerint a kritikus pont a folyadék és a gőztelítési görbék találkozási pontja. Az ehhez az állapothoz tartozó hőmérséklet a kritikus hőmérséklet, a hozzá tartozó fajtérfogat a kritikus fajtérfogat. Ezek a kritikus értékek az adott anyagra jellemzők.

A fentiekből következik, hogy

- a kritikusnál nagyobb minden nyomás esetén a hagyományos értelemben vett, gőzbuborékok képződésével együtt járó forrás nélkül következik be a folyékony-légnemű halmazállapot-változás, mégpedig akkor, amikor a folyadék hőmérséklete eléri a kritikus hőmérséklet értékét,
- a kritikus hőmérsékletnél magasabb hőmérsékleten csak légnemű halmazállapot létezik (a kritikus hőmérsékletnél magasabb hő-

mérsékletű légnemű halmazállapotú anyagot nem lehet cseppfolyósítani).

Az 1. táblázatban néhány, gyakorlati szempontból fontosabb anyag kritikus nyomása és hőmérséklete található meg.

Név	vegyjel	Kritikus hőmérséklet (K)	Kritikus nyomás (MPa)
Ammónia	$NH_3$	405,5	11,29
Argon	$Ar$	151	4,864
Szén-dioxid	$CO_2$	304,2	7,39
Hélium	$He$	5,3	0,2289
Hidrogén	$H_2$	33,3	1,297
Kén-dioxid	$SO_2$	430,7	7,883
Kripton	$Kr$	209,45	5,5
Metán	$CH_4$	191,1	4,63
Neon	$Ne$	44,5	2,624
Nitrogén	$N_2$	126,2	3,394
Nitrogén-dioxid	$N_2O$	309,7	7,27
Oxigén	$O_2$	154,8	5,036
Víz	$H_2O$	647,3	22,038
Levegő (keverék)	–	132,5	4,00

**1. táblázat** Néhány anyag kritikus állapotjelzői

A fázisegyensúlyi diagramban egy általános menetű, állandó hőmérsékletet jelző vonalat (izoterma) világos kék színnel jelöltünk meg. Eről a következők állapíthatók meg:

- a folyékony és szilárd halmazállapotot jelölő területen belül szinte függőlegesen (valójában hiperbolikus jelleggel) futnak lefelé (növekvő fajtérfogatok szerint), ami arra utal, hogy a csaknem összenyomhatatlannak tekinthető szilárd és a folyékony halmazállapotú anyagok esetleges, kismértékű összenyomódása nem jár számottevő hőmérsékletváltozással),

- amikor az izoterma eléri a telített folyadék (illetve a telített szilárd) fázist jelölő görbét, megtörik és vízszintesbe megy át (a vegyes fázisú területen együtt halad az állandó nyomást jelölő vízszintes-sel), ami azt a köztudott tényt igazolja, hogy halmazállapot-változás közben a hőmérséklet állandó,
- a gőztelítési görbe elérése után az izoterma ismét megtörik és hiperbolikus jelleggel fut tovább. A görbe, a gőztelítési görbétől távolodva, egyre jobban közelít a Robert **Boyle** ír származású természettudós és Edme **Mariotte** francia fizikus és prédikátor által már a XVII. század végén felállított és emlékükre Boyle-Mariotte törvénynek ( $p \cdot v = \text{áll.}$ ) nevezett egyenlőszárú hiperbola alakhoz. Mindez a kritikus hőmérsékletnél magasabb hőmérséklethez tartozó izotermák esetében fokozottan igaz.

Ha a hőmérséklet lényegesen magasabb a kritikus értéknél, akkor az izoterma jellegét tekintve az ideális gázra jellemző hiperbolikus alakot veszi fel. Különösen igaz ez akkor, ha a nyomás értéke is csekély.

Az ábrán megfigyelhető a kritikus ponton átmenő izoterma is, melynek éppen a kritikus pontnál vízszintes inflexiója van (ezen az izotermán már igen jól látható a hiperbolikus jelleg).

Megállapodás szerint a légnemű halmazállapotban lévő közeget gőznek hívják, ha hőmérséklete alacsonyabb a kritikus értéknél és gáznak, ha hőmérséklete magasabb a kritikus értéknél.

A folyékony-légnemű vegyes fázisú területet „alulról” egy vízszintes egyenes határolja, ami egy különleges hőmérsékletet jelöl: ez a hármasponti hőmérséklet. Ezen a hőmérsékleten az adott anyag mindhárom lehetséges halmazállapota (szilárd, folyékony és légnemű) együttesen, egymással egyensúlyban van jelen. Ez a hőmérséklet az adott anyagra jellemző állandó érték.

A hármasponti hőmérséklet kiválóan megfelel hőmérsékleti skálák alappontjának, mivel igen jól reprodukálható érték, hiszen a három fázis egyidejű, egyensúlyi jelenlétével, mintegy automatikusan előáll (például jég és víz elegyét hőszigetelt, zárt térbe helyezve, abban egy bizonyos idő után előáll a hármasponti hőmérséklet, ami a víz esetében a Celsius-féle hőmérsékletskála alappontja,  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).

**Önellenőrző kérdések a fázisegyensúlyi diagram fejezethez**

1. Vázolja fel egy szokványos anyag fázisegyensúlyi diagramját! Hol található a légnemű halmazállapotnak megfelelő terület és ennek melyik része felel meg a gőz és melyik a gáz állapotnak?
2. Vázolja fel egy szokványos anyag fázisegyensúlyi diagramját! Hol található a folyadék-gőz vegyesfázisú terület?
3. Mikor beszélünk forrásról?
4. Mi a párolgás?
5. Mit értünk folyadéktelítési görbe alatt a fázisegyensúlyi diagramban?
6. Mit értünk gőztelítési görbe alatt a fázisegyensúlyi diagramban?
7. Mi a kritikus pont?
8. Mi a hármaspont?
9. Milyen halmazállapot nem fordulhat elő a kritikus hőmérséklet feletti hőmérséklet esetén?
10. Hol helyezkedik el a kritikus pont a fázisegyensúlyi diagramban?
11. Milyen esetben beszélünk egyezményesen gőzről?
12. Milyen esetben beszélünk egyezményesen gázzal?
13. Miért futnak csaknem függőlegesen az izotermák a folyadék mezőben?
14. Milyen jelleg figyelhető meg a gőztelítési görbe fölött futó izotermákon?

**3.2 A kontínuum állapotának jellemzése**

Egy kontínuum állapotának jellemzésére az ún. állapotjelzők szolgálnak. Az állapotjelzők két csoportba sorolhatók:

- intenzív állapotjelzők
- extenzív állapotjelzők

Az intenzív állapotjelzők a kontínuum bármely pontjában azonos értékűek. Ilyenek a nyomás és a hőmérséklet.

Az extenzív állapotjelzők a kontínuummal kitöltött tér ill. a kontínuum méreteivel arányosak. Ilyenek a tömeg, a térfogat, stb.

Különleges csoportot alkotnak a fajlagos extenzív állapotjelzők, melyek két extenzív állapotjelző hányadosaként képezhetők és valójában intenzív állapotjelzők azaz a kontínuum bármely pontján azonos értékkel

bírnak. Ebbe a csoportba tartozik pl. a jól ismert sűrűség és az ennek reciprokaként már említett fajtérfogat.

A hőmérséklettel kapcsolatosan tennünk kell egy megjegyzést. A mindennapi életben a svéd származású csillagász Anders **Celsius** által a XVIII. század első felében bevezetett és róla elnevezett Celsius-féle hőmérséklet-skála használatos. Ennek két alappontja a víz atmoszférikus nyomáson történő megfagyásához és forrásához tartozó két hőmérséklet. Celsius az előbbit 0-nak az utóbbit 100-nak vette azaz a kettő közötti „távolságot 100 egységre osztotta fel.

Ez az önkényesen definiált hőmérséklet-skála a termodinamikában többnyire nem használható, tekintettel arra, hogy ezen hőmérséklet-skálán meghatározott hőmérséklet lehet zérus is, ami bizonyos matematikai műveletek elvégzését (pl. osztás) lehetetlenné teszi. A Celsius skála helyett a termodinamika egyik legnagyobb alakja az 1892-ben bárói rangra emelt skót matematikus és fizikus, Lord William Thomson **Kelvin** által kidolgozott ún. Kelvin-skálát (termodinamikai vagy abszolút hőmérséklet skála) kell használni, melynek zérus pontja az itt nem részletezett elméleti megfontolásokból meghatározott, legalacsonyabb lehetséges hőmérséklet.

Ez a hőmérséklet, melyet abszolút nulla foknak is neveznek, 273,15 °C-al alacsonyabb mint a Celsius-féle skála zérus pontja.

Megjegyzendő, hogy a világűrben, a közvetlen sugárzástól mentes helyeken (pl. a hold túlsó oldalán) a hőmérséklet elég jól megközelíti ezt az értéket.

A fentiekből következően a Celsius-féle hőmérsékleti skálán adott hőmérsékletet a következő összefüggés szerint számíthatjuk át a Kelvin skálára, a két zéruspont közötti távolság értékét kerekre 273-nak véve:

$$T (K) = t (°C) + 273$$

Régebben számos más hőmérsékleti skálát használtak. Ezek közül ma már csak a Daniel Gabriel **Fahrenheit** német fizikus által a XVIII. század elején bevezetett és róla elnevezett ún. Fahrenheit-skála van használatban és az is csak egyes angolszász országokban, „hétköz-



napi célokra”. A hőtani, termodinamikai számításokhoz ezekben az országokban is az abszolút hőmérsékletskálát használják.

A Fahrenheit és a Celsius skála közötti átszámítás összefüggései az alábbiak:

$$t(^{\circ}F) = \frac{9}{5} \cdot t(^{\circ}C) + 32 \text{ illetve átrendezés után } t(^{\circ}C) = \frac{5}{9} \cdot t(^{\circ}F) - 32$$

### **Önellenőrző kérdések a kontínuum állapotának jellemzése fejezethez**

1. Mit értenek intenzív állapotjelző alatt? Mondjon példát!
2. Mit értenek extenzív állapotjelző alatt? Mondjon példát!
3. Mikor beszélnek fajlagos extenzív állapotjelzőről? Mondjon példát!
4. Miben különbözik a fajlagos extenzív állapotjelző a közönséges extenzív állapotjelzőktől?
5. Melyek a legfontosabb alappontjai a Celsius-féle hőmérséklet-skálának?
6. Miért nem használható a Celsius skála a termodinamikai számításokhoz?
7. Mit értenek abszolút nulla fok alatt?
8. Milyen összefüggésben van egymással a Celsius és az abszolút hőmérsékletskála?

### **3.2.1 Az összenyomhatatlan kontínuum**

Az összenyomhatatlan kontínuum legfontosabb jellemzője, hogy sűrűsége (és fajtérfogata) állandó, azaz a nyomás és/vagy a hőmérséklet változása nincs rá számottevő hatással, amíg a halmazállapot-változás meg nem kezdődik. Az összenyomhatatlan kontínuum leginkább ezzel az állandó sűrűséggel jellemezhető.

Szabad felszínnel rendelkező összenyomhatatlan kontínuum esetében nincs összefüggés a nyomás és a hőmérséklet között. A nyomás alakulását ilyen esetben más tényezők határozzák meg, melyeket a 4. fejezetben fogunk részletesen tárgyalni.

Zárt, állandó térfogatú térben, szabad felszínnel nem rendelkező összenyomhatatlan kontínuum hőmérsékletének változása a hőtágulás/zsugorodás következtében összefüggésben a nyomással. Adott hőmérsékletváltozás következtében előálló nyomásnövekedés a köbös hőtágulásra érvényes összefüggés és a szilárd testek rugalmas alakváltozásánál használt összefüggés segítségével határozható meg. A problémát azért nem tárgyaljuk részletesen, mert gyakorlati jelentősége csak ritkán van tekintettel arra, hogy a mérnöki szempontból fontos folyamatok nem állandó térfogat mellett zajlanak le.

### **Önellenőrző kérdések az összenyomhatatlan kontínuum fejezethez**

1. Milyen állapotjelzővel jellemezhető legjobban egy összenyomhatatlan kontínuum?
2. Milyen speciális esetben van összefüggés az összenyomhatatlan kontínuum nyomása és hőmérséklete között?

### **3.2.2 Az összenyomható kontínuum**

Az összenyomható kontínuum esetében a korábban már említett három legfontosabb intenzív állapotjelző (nyomás, hőmérséklet, fajtérfogat) szoros összefüggésben van egymással.

Ez az összefüggés bonyolult és nehezen leírható, ha az összenyomható kontínuum hőmérséklete a kritikus hőmérsékletnél kisebb (gázok, lásd a 3.1 fejezetet) vagy csak kevéssel magasabb annál. A gyakorlat szempontjából fontos ilyen esetekre kísérleti úton felállított ún. gőzdiagramok és táblázatok állnak rendelkezésre. Ezekkel a 10 fejezetben foglalkozunk részletesen.

Ha az összenyomható kontínuum hőmérséklete jelentősen nagyobb a kritikus hőmérsékletnél (gázok, lásd a 3.1 fejezetet), akkor az összefüggés viszonylag egyszerű. Különösen igaz ez, ha ugyanekkor a nyomás lényegesen kisebb a kritikus nyomásnál (lásd 3.1 fejezet). Ezekre az esetekre az egyébként csak ideális gázokra érvényes ún. általános gáztörvényt (ideális gáztörvény) meglehetősen pontossággal lehet alkalmazni (lásd a 3.2.2.1 fejezetet).

### 3.2.2.1 Az általános gáztörvény

Az általános gáztörvény kimondja, hogy az ún. ideális gáz nyomásának és fajtérfogatának szorzata, osztva az abszolút hőmérséklettel, a gáz minden állapotában ugyanazt a számot adja, azaz

$$\frac{p \cdot v}{T} = R \left( \frac{J}{kg \cdot K} \right)$$

Az összefüggés azt jelenti, hogy az egyenlet bal oldalán szereplő három állapotjelző közül kettő szabadon felvehető, a harmadik pedig az összefüggés szerint meghatározható. Ugyanakkor azt is jelenti, hogy a gáz állapotának megadásához legalább két állapotjelzőjét ismernünk kell.

Ugyancsak következik az összefüggésből, hogy a gáz állapota teljességgel független attól, hogy milyen módon, milyen változások után, került az adott állapotba.

Tekintettel arra, hogy mind a hőmérséklet, mind pedig a nyomás több módon, viszonylag könnyen és meglehetősen nagy pontossággal meghatározható, a gyakorlatban egy gáz állapotának meghatározására annak nyomását és hőmérsékletét szokták megadni.

Valóságos gázokra az általános gáztörvényt csak akkor alkalmazható, ha a gáz hőmérsékletet lényegesen magasabb a kritikusnál és nyomása mérsékelt. Egy pillantást vetve az [1. táblázatra](#) látható, hogy a szokványos előforduló hőmérsékletek a gázok többsége esetében a kritikus hőmérsékletnél sokkal magasabbak és a légköri nyomás (0,1 MPa) valamint a gyakorlatban előforduló, többnyire ennél nem sokszorosan nagyobb nyomások a kritikus nyomáshoz képest viszonylag csekélyek. Ennek következtében a valóságos gázok általában nagyon hasonlóan viselkednek az ideális gázokhoz. Ezt a valóságos gázokon elvégzett mérések jól alátámasztják ezért a továbbiakban, ha gázt említünk akkor általánosan feltételezzük, hogy az jól megfelel az ideális gáztörvénynek.

Kivételként meg kell említeni a vizet és az ammóniát, melyek kritikus nyomása ugyan nagyon magas, de kritikus hőmérsékletük is. Tekintet-

tel pedig arra, hogy mindkét közeget általában viszonylag magas nyomáson és a kritikusnál nem sokkal magasabb hőmérsékleten lezajló folyamatokban használják a gyakorlatban, ezek légnemű halmazállapotú változatára az általános gáztörvény egyáltalán nem alkalmazható (lásd a 10 fejezetet).

Egy valóságos gázra alkalmazva az általános gáztörvényt, a jobb oldalon szereplő állandó az adott gázra érvényes ún. specifikus gázállandó, mely a gáz anyagi minőségére jellemző szám, táblázatokban megtalálható és mérés útján is meghatározható. A specifikus gázállandó fizikai jelentésére a 8.1 fejezetben még visszatérünk.

Az általános gáztörvényben a fajtérfogat helyébe a térfogat és a tömeg hányadosát helyettesítve egy olyan összefüggéshez jutunk, melynek kis átalakítása lehetőséget ad a specifikus gázállandó számítással történő meghatározására is.

$$\frac{p \cdot v}{T} = \frac{p \cdot V}{m \cdot T} = R$$

Gondoljuk meg ugyanis, hogy a XIX. század elején Quaregna és Cerreto grófja, Lorenzo Romano Amedeo Carlo **Avogadro**, olasz kémikus által felállított és róla elnevezett törvény szerint bármely gáz mólnyi mennyisége 0 °C-on ( $T_o$ ) és atmoszférikus nyomáson ( $p_o$ ) ugyanakkora térfogatot foglal el, kilogrammban kifejezett mólnyi mennyiség esetén 22,41  $m^3$ -t ( $V_o$ ). Ezt felhasználva

$$\frac{p \cdot V}{m \cdot T} = \frac{p_o \cdot V_o}{M \cdot T_o} = R$$

tehát

$$\frac{p_o \cdot V_o}{T_o} = \frac{R}{M} = R_u$$

Ez azt jelenti, hogy minden gázra érvényesen létezik egy ún. univerzális gázállandó, melynek értékét a fenti egyenletbe behelyettesítve lehet megkapni. A pontos számítások szerint az univerzális gázállandó értéke

$$R_u = 8314 \left( \frac{J}{kmol \cdot K} \right)$$

Ha tehát ismerem a gáz összetételét akkor az ebből meghatározható közelítő móltömeg és az univerzális gázállandó segítségével könnyen kiszámítható az adott gáz specifikus gázállandója

$$R = \frac{R_u}{M} \left( \frac{J}{kg \cdot K} \right)$$

### Önellenőrző kérdések az általános gáztörvény fejezethez

1. Milyen összefüggés van az ideális gáz három legfontosabb állapotjelzője között?
2. Hány állapotjelzőt kell megadni egy összenyomható kontínuum állapotának egyértelmű megadásához?
3. Mely állapotjelzők segítségével szokták meghatározni az összenyomható kontínuumok állapotát? Miért?
4. Megállapítható-e a gáz állapotjelzőiből, hogyan került a gáz az adott állapotba?
5. Miért lehet alkalmazni az általános gáztörvényt a valóságos gázok többségére?
6. Hogyan határozható meg a specifikus gázállandó az univerzális gázállandó segítségével?
7. Hogyan határozható meg az univerzális gázállandó?
8. Mit mond ki Avogadro-törvénye a gázok térfogatával kapcsolatban?

#### 3.2.2.2 Egyszerű állapotváltozások

Mint láttuk a gázok esetében szigorú összefüggés létezik az állapotjelzők között. Ennek következtében a gáz állapotváltozása több módon történhet. Egyszerű állapotváltozásról beszélünk akkor, ha az általános gáztörvényben szereplő állapotjelzők valamelyike állandó marad az állapotváltozás közben. Ennek megfelelően beszélünk állandó nyomású (izobár), állandó térfogatú (izochor) és állandó hőmérsékletű (izotermikus) állapotváltozásokról. Az ezekre vonatkozó tapasztalati törvényeket

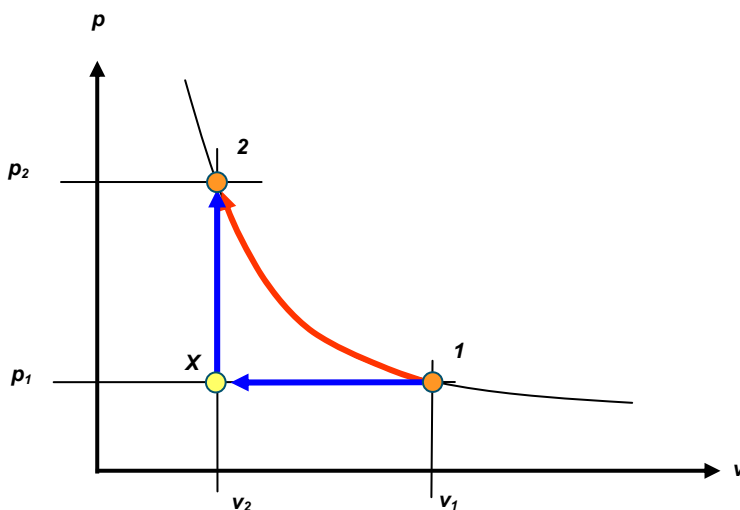
$$\frac{v}{T} = \text{áll.} \quad \frac{P}{T} = \text{áll.}$$

Joseph Louis **Gay-Lussac** francia fizikus és kémikus a XIX. század elején állította fel és emlékére ma Gay-Lussac I. és II. törvényének nevezünk.

Az állapotváltozások szemléltetésére a '**p-v**' koordináta-rendszert szokták használni. Ebben a koordináta-rendszerben az állandó nyomású és az állandó térfogatú állapotváltozás vízszintes ill. függőleges egyenes mentén zajlik le. Megjegyzendő itt, hogy a térfogat állandósága a faj-

térfogat állandóságát is jelenti, mivel általánosan elfogadott feltételezés az, hogy a gáz állapotváltozása során a tömege nem változik meg!

Felmerül a kérdés, hogy az izotermikus állapotváltozás milyen görbével szemléltethető? Ennek meghatározásához vegyük szemügyre a következő ábrát!



3. ábra Az izoterma

Az állapotváltozás induljon az '1' pontból! A '2' pontnak nyilván valahol az '1' ponton átmenő vízszintes (állandó nyomás) és függőleges (állandó térfogat) egyenes között kell lennie. Tehát a fajtérfogat csökkenése közben a nyomás növekszik. Az ilyen folyamatot röviden kompresszióknak nevezzük, megfordítottját pedig expanzióknak.

Az '1' és '2' pontokban a hőmérséklet legyen azonos! Keressük annak a görbének az egyenletét, mely a két ponton átmegy. Tekintettel arra, hogy az '1' pontból a '2' pontba a nyilakkal jelezett tört vonal mentén is lejuthatunk az 'X' ponton át, az általános gáztörvény segítségével felírhatjuk a következő két egyenletet:

$$\frac{v_1}{T} = \frac{v_2}{T_X} \text{ illetve } \frac{p_2}{T_X} = \frac{p_1}{T}$$

A mindkét egyenletből kifejezve 'T<sub>X</sub>'-et és a kapott egyenleteket egymással egyenlővé téve adódik, hogy állandó hőmérsékletű állapotvál-

tozás esetén a szemléltetésre alkalmas ún. izoterma egyenlete (Boyle-Mariotte törvény)

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2 = p \cdot v = \text{áll.}$$

tehát egy ún. egyenlőszárú, azaz az origóból kiinduló 45°-os egyenesre nézve tükrös elhelyezkedésű hiperbola.

### Önellenőrző kérdések az egyszerű állapotváltozások fejezethez

1. Hogyan írható fel az gáz állapotjelzői közötti összefüggés izobár állapotváltozás esetén?
2. Hogyan írható fel az gáz állapotjelzői közötti összefüggés izochor állapotváltozás esetén?
3. Milyen matematikai függvény írja le az izotermikus állapotváltozást a '**p-v**' diagramban?
4. Mit értünk kompresszió alatt?
5. Mit értünk expanzió alatt?

#### 3.2.2.3 Adiabaticus és politropikus állapotváltozás

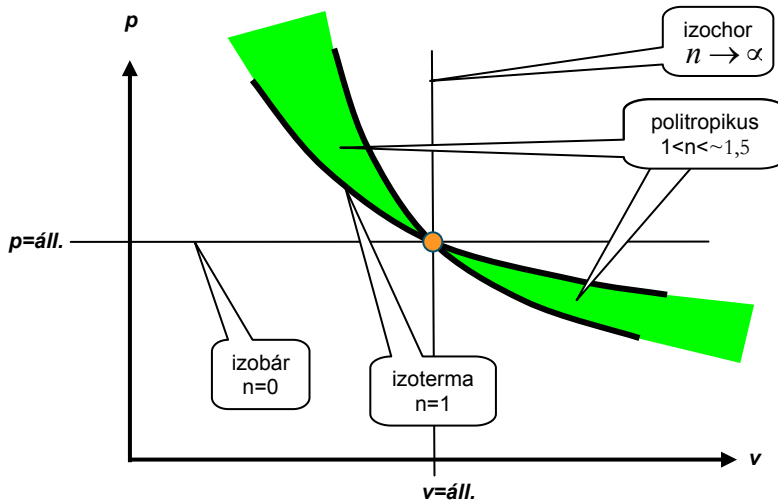
Az egyszerű állapotváltozások során az egyik állapotjelző mindig állandó maradt. Léteznek természetesen olyan állapotváltozások is, amelyek során mindhárom állapotjelző változik. Ezek a politropikus állapotváltozások.

Az ilyen állapotváltozás matematikai leírására az eddig is használt '**p-v**' koordináta-rendszerben, tisztán matematikai megfontolások alapján, általánosságban egy

$$p \cdot v^n = \text{áll.}$$

egyenletű görbe lehet alkalmas. Ezt az egyenletet, mellyel azonos fizikai tartalmú további két összefüggés is felírható az általános gáz-törvénnyel történő kombinálással, Siméon-Denis **Poisson** francia fizikus, és matematikus állította fel a XIX. század első felében és emlékére Poisson-egyenletnek nevezik. Az összefüggés a '**p-v**' koordináta-rendszerben szintén egy hiperbola egyenlete. Ez azonban nem egyenlő szárú, hiszen a független változó szerepét betöltő fajtér fogat hatványkitevője nem 1, mint az izotermikus állapotváltozásnál.

Az egyenlet egyébként, matematikai szempontból általános érvényességűnek tekinthető, hiszen a fajtér fogat hatványkitevőjének alkalmas megválasztásával az állandó nyomású és az állandó térfogatú állapotváltozás leírása is lehetséges, az első esetben  $n=0$  a másik esetben határátmenetben a végtelenhez közelítve a hatványkitevőt.



4. ábra A politropikus kitevő értékei

Mindez természetesen csak matematikai spekuláció és szó sincs arról, hogy a fajtérfogat hatványkitevője, melyet politropikus kitevőnek is szoktak nevezni, a zérus és a végtelen között bármely értéket felvehet. A politropikus kitevő teljes változási tartományát áttekintve a következőket mondhatjuk:

- $n=0$                     állandó nyomású állapotváltozás
- $0 < n < 1$                 a gyakorlatban nem fordul elő
- $n=1$                      állandó hőmérsékletű állapotváltozás
- $1 < n < \sim 1,5$             politropikus állapotváltozások
- $n > \sim 1,5$                 a gyakorlatban nem fordul elő
- $n \rightarrow \infty$                  állandó térfogatú állapotváltozás

A 4. ábra szemléletesen mutatja a politropikus kitevő előbb tárgyalt változási tartományát

A politropikus állapotváltozás tehát kompresszió (nyomásnövekedés térfogatcsökkenés közben) vagy expanzió (nyomáscsökkenés térfogat-növekedés közben) hasonlóan az izotermikus állapotváltozáshoz, de azzal a különbséggel, hogy a hőmérséklet nem marad állandó. Minél közelebb esik a politropikus kitevő értéke az egyhez, annál kisebb



a hőmérsékletváltozás, annál hasonlóbb a politropikus állapotváltozás az izotermikushoz.

Fontos kérdés, hogyan lehet kiszámítani az ilyen politropikus kompresszió vagy expanzió véghőmérsékletét? Ehhez a politropikus állapotváltozás alapösszefüggését és az általános gáztörvényt együttesen kell felhasználnunk. Az utóbbiból kifejezve a fajtérfogatot és a kapott összefüggést az előbbibe helyettesítve

$$p_1 \cdot \left( \frac{R \cdot T_1}{p_1} \right)^n = p_2 \cdot \left( \frac{R \cdot T_2}{p_2} \right)^n$$

Az egyenlet rendezése után

$$T_2 = T_1 \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Az összefüggés egyaránt tévnyes kompresszióra és expanzióra, mindössze arra kell emlékeznünk, hogy az '1' index a kiinduló állapotra, a '2' index a végállapotra utal. Zárójelben jegyezzük meg, hogy a termodinamikában a fenti szabályok szerinti indexelés általánosan alkalmazott.

A politropikus állapotváltozások között kitüntetett helyet foglal el egy állapotváltozás, amikor feltételként teljesül, hogy az állapotváltozás során a gáz nem vesz fel és nem ad le hőt, azaz tökéletesen hőszigetelt a rendszer. Az ilyen állapotváltozást adiabatikus állapotváltozásnak nevezzük.

Az ehhez az állapotváltozáshoz tartozó politropikus kitevő kizárólag a gáz anyagi jellemzőitől függ és ezért a többi politropikus kitevőtől történő megkülönböztetés érdekében adiabatikus kitevőnek nevezzük. Az adiabatikus kitevő értéke a gyakorlati szempontból legfontosabb két-atomos molekulájú gázok esetében 1,4, a háromatomos molekulájú gázok esetében pedig 1,3. Az adiabatikus kitevő meghatározását a 8.1 fejezetben részletesen tárgyaljuk majd.

Fontos kiemelni, hogy a tökéletes hőszigetelés nem azonos a hőmérséklet állandóságával. Gondoljuk arra, hogy a tapasztalat szerint egy

gáz a kompresszió során felmelegszik, aminek oka nyilván a sűrítés során bevitt munka vagy annak egy része. Ha tapasztalatunk ellenére azt tételezzük fel, hogy a hőmérséklet mégis állandó marad (izotermikus állapotváltozás), akkor ez csak úgy lehetséges, ha a gázt a sűrítés közben hűtjük. Ha pedig ennek a hűtésnek a lehetőségét hőszigeteléssel kizárjuk (adiabatikus sűrítés), akkor a hőmérséklet nyilván nem marad állandó, hanem nőni fog.

Az állapotváltozások ábrázolására alkalmazott görbék csak abban az esetben tekinthetők az adott folyamatot ténylegesen leíró görbének, ha feltételezzük, hogy az állapotváltozás végtelenül apró lépésekben, végtelenül lassan zajlik le (minden újabb lépés előtt megvárva teljes hőmérsékletkiegyenlítődést). A klasszikus termodinamikában feltételezik, hogy az állapotváltozások így zajlanak le, ezért a klasszikus termodinamika **egyensúlyi termodinamika** néven is szokták említeni. Az egyensúlyi termodinamikában az általános gáztörvény az állapotváltozás minden pontjában teljesül, egyébként azonban csak a „végpontokban”.

### **Önellenőrző kérdések az adiabatikus és a politropikus állapotváltozás fejezethez**

1. Mikor beszélünk politropikus állapotváltozásról?
2. Mikor beszélünk adiabatikus állapotváltozásról?
3. Hogyan írható fel a politropikus állapotváltozás esetén az állapotjelzők közötti összefüggés?
4. Milyen értékeket vehet fel a gyakorlatban a politropikus kitevő?
5. Milyen összefüggés szerint határozható meg a politropikus állapotváltozás véghőmérséklete?
6. Igaz-e, hogy a tökéletesen hőszigetelt közeg állapotváltozása izotermikus?
7. Mit értenek egyensúlyi termodinamika alatt?
8. Milyen feltétel fennállása esetén tekinthető a ' $p$ - $v$ ' koordináta-rendszerben megrajzolt állapotváltozási görbe a folyamat tényleges menetét bemutatónak?

### **3.2.3 Gázkeverékek**

A gyakorlatban szinte sohasem találkozunk „tisztá” gázokkal, hanem többnyire gázkeverékekkel van dolgunk. Ilyen például a levegő is. A levegő túlnyomórészt nitrogénből, számottevő mennyiségű oxigénből és ezen kívül sok más egyéb gáz mellett változó mennyiségű vízgőzből álló keverék.

A levegőben lévő vízgőzt most hagyjuk figyelmen kívül. Ennek hatását a részletesen a 11 és 12 fejezetekben fogjuk tárgyalni.

Ha a fenti, sokszor elfogadható feltételezést alkalmazzuk, akkor az ún. száraz levegőre is célszerű lenne az általános gáztörvényt alkalmazni. Az egyetlen problémát az jelenti, hogy hogyan lehet meghatározni a gázkeverék látszólagos (virtuális) gázállandóját?

Ahhoz, hogy a látszólagos gázállandót meg tudjuk határozni, tennünk kell néhány feltételezést. Triviális feltételezés, de meg kell említenünk, hogy

- a gázkeverék minden alkotójának azonos a hőmérséklete és ez az a hőmérséklet, melyet a keverék esetében mérésrel meg lehet határozni,
- a keveréket alkotó komponensek tökéletesen egyenletesen oszlanak el a keverék számára rendelkezésre álló térben, azaz bármely helyen vennék mintát a keverékből, mindegyik ugyanazt az összetételt találnák,
- minden komponensre érvényes az általános gáztörvény.

A gázkeverékekkel kapcsolatosan vezessük be a parciális nyomás fogalmát. Valamely komponens parciális nyomása alatt azt a nyomást kell érteni, melyet akkor lehetne mérni, ha az adott komponens ugyanazon hőmérsékleten egyedül lenne jelen a gázkeverék által kitöltött térben.

A parciális nyomásokra vonatkozóan John **Dalton** brit kémikus és fizikus által a XIX. század elején felállított és róla elnevezett törvény kimondja, hogy az egyes alkotók ún. parciális nyomásainak összege megegyezik a keverék mérhető nyomásával.

A látszólagos gázállandó nyilván függ a gázkeverék összetételétől, melynek megadására a gyakorlatban két módszert használnak. Az egyik esetben azt adják meg, hogy adott tömegű gázkeverékben az egyes alkotók tömege hány százalékot tesz ki (tömegszázalékos összetétel), a másik esetben pedig azt adják meg, hogy az egyes alkotók térfogata a gázkeverék térfogatának hány százaléka (térfogat-százalékos összetétel).

A feltételezések és Dalton törvénye alapján alkalmazhatjuk az általános gáztörvényt

$$p_k \cdot V_k = m_k \cdot R_k \cdot T_k = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i \cdot R_i) \cdot T_k$$

ahonnan a keverék keresett látszólagos gázállandója

$$R_k = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{m_i}{m_k} \cdot R_i \right) = \sum_{i=1}^{i=n} (s_i \cdot R_i)$$

Az összefüggésben 's'-el jelöltük az egyes alkotók tömegszázalékos részesedését a keverék tömegében.

Amennyiben a keverék összetétele térfogat-százalékosan van megadva, más gondolatmenetet kell követnünk.

A keverék nyomásán felírhatjuk a keverék tömegére a következő egyenletet

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i = \sum_{i=1}^{i=n} (V_i \cdot \rho_i) = V_k \cdot \rho_k = m_k$$

Az egyenlet átrendezése után, felhasználva azt, hogy Avogadro törvénye alapján tudjuk, hogy bármely gáz móltömegének és sűrűségének hányadosa ugyanazon nyomáson és hőmérsékleten ugyanakkora

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{V_i}{V_k} \right) = \frac{\rho_k}{\rho_i} = \frac{M_k}{M_i}$$

ahonnan ezúttal nem a látszólagos gázállandót hanem a látszólagos móltömeget határozhatjuk meg

$$M_k = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{V_i}{V_k} \cdot M_i \right) = \sum_{i=1}^{i=n} (r_i \cdot M_i)$$

Az összefüggésben 'r'-el jelöltük az egyes alkotók térfogat-százalékos részesedését a keverék térfogatában.

A látszólagos móltömeg ismeretében a látszólagos gázállandó már könnyen meghatározható, hiszen az univerzális gázállandó bizonyára a keverékre is ugyanaz az érték, mint annak minden egyes alkotójára.

Egyes esetekben szüksége lehet arra, hogy a térfogat-százalékos összetételelt tömegszázalékos összetételre számítsuk át, vagy fordítva. Ehhez a kérdéses alkotóra és a keverékre felírt két egyenletből lehet kiindulni

$$p_k \cdot V_i = m_i \cdot R_i \cdot T_k \text{ ill. } p_k \cdot V_k = m_k \cdot R_k \cdot T_k$$

Az első egyenletet a másodikkal elosztva

$$r_i = s_i \cdot \frac{R_i}{R_k}$$

### Önellenőrző kérdések a gázkeverékek fejezethez

1. Melyek a levegő legfontosabb alkotói?
2. Milyen általános feltételezésekkel élünk a levegőre, mint gázkeverékre?
3. Mit kell parciális nyomás alatt érteni?
4. Mit mond ki Dalton törvénye egy gázkeverék alkotóinak parciális nyomásairól?
5. Hogyan határozható meg a gázkeverék virtuális gázállandója?
6. Hogyan határozható meg a gázkeverék virtuális móltömege?

### 3.2.4 Valóságos és ideális kontínuum

Az eddigiekben megismerkedhettünk a valóságos kontínuumok legfontosabb tulajdonságaival, állapotuk leírásának módjával. Mivel a kapott kép máris meglehetősen bonyolult, célszerű megalkotnunk az ideális kontínuum fogalmát. Ennek alkalmazásával ugyanis egyszerűsíthetjük az alapvető törvények és összefüggések felismerését. Az ideális kontínuum tulajdonságainak pontos meghatározása és ezen tulajdonságok összevetése a valóságos kontínuumok tulajdonságaival lehetőséget biztosít arra, hogy esetenként mérlegeljük az egyszerűbb idealizált esetre végzett vizsgálat hibájának nagyságát, hogy eldönthessük: szükséges-e a – sokszor jóval bonyolultabb – valóságos tulajdonságok figyelembevételével történő vizsgálódás.

Az ideális kontínuum számunkra legfontosabb tulajdonságai legyenek a következők:

- homogén, nem molekuláris szerkezetű, az alkotó részecskék között kémiai és más erők nincsenek,
- súrlódásmentes
- halmazállapota semmilyen körülmények között sem változik (ha folyadék, akkor minden körülmények között az marad, ha gáz akkor szintén)
- tökéletesen összenyomhatatlan (ideális folyadék) ill. tökéletesen összenyomható (ideális gáz, melyre érvényes az általános gáztörvény).

A valóságos kontínuum a fentiekkel szemben

- molekuláris szerkezetű, a molekulák és az atomok között kémiai és egyéb erők hatnak,
- sűrűdásos,
- korlátozott mértékben összenyomható,
- halmazállapota csak bizonyos feltételek (nyomás és hőmérséklet) marad változatlan.

Pontról pontra összehasonlítva az ideális kontínuumot a valósággal a következőket állapíthatjuk.

A felépítés tekintetében a különbség jelentősnek látszik, de ha kizárjuk a kémiai reakciókat, melyek egyébként csak bizonyos vegyipari folyamatok esetében lényegesek, akkor az anyag szerkezetére tett idealizálás nem jelenthet túl nagy hibát.

A sűrűdés létének elhanyagolása jelentős hibához vezethet az esetek többségében, tehát minden probléma külön elemzést igényel abból a szempontból, hogy a sűrűdés elhanyagolásával nyert eredmény ill. következtetés mennyire lehet helytálló valóságos körülmények között.

A valóságos kontínuumok közül a folyadékok sűrűsége igen jó közelítéssel állandónak tekinthető, a valóságos gázok a gyakorlatban előforduló legtöbb esetben szintén jól megközelítik a tökéletes összenyomhatóságot. Természetesen, szélsőséges körülmények között óvatosság szükséges.

A halmazállapot megváltozása igen kényes kérdés és összefügg az előbb említett összenyomhatósággal is, hiszen a légnemű közeg kondenzáció során folyékony halmazállapotba kerül és viszont ill. a folyékony halmazállapotból szilárd halmazállapotba történő átmenet is előfordulhat a valóságban. Éppen ezért a mindenkori nyomás és hőmérséklet vizsgálata alapján dönthető el a, hogy az ideális folyadékokra vagy éppen ideális gázokra végzett vizsgálatok eredményei helytállóak-e.

Az ideális és a valóságos kontínuumok tulajdonságainak összehasonlítása alapján a következő megállapítást tehetjük.

Az ideális kontínuumra nyerhető eredmények jól megközelíthetik a valóságos eseteket, ha a sűrűdés hatása nem jelentős, kémiai reakci-

ók nincsenek és sem szélsőséges nyomás, sem szélsőséges hőmérséklet nem fordul elő.

Ez utóbbi két megállapítás úgy értendő, hogy

- a valóságos gáz esetében a hőmérséklet nem csökken a kritikus érték közelébe és ugyanakkor a nyomás nem nő meg túlságosan,
- a valóságos folyadék esetében a hőmérséklet nem éri el a nyomáshoz tartozó telítési hőmérsékletet és mindenképpen magasabb, mint a szilárd halmazállapotba történő átmenet hőmérséklete.

### **Önellenőrző kérdések a valóságos és ideális kontínuum fejezethez**

1. Melyek az ideális kontínuum legfontosabb tulajdonságai?
2. Melyek a valóságos kontínuum legfontosabb tulajdonságai?
3. Milyen feltételekkel tekinthető a víz ideális folyadéknak?
4. Milyen feltételekkel tekinthető a levegő ideális gáznak?
5. Mi a legfontosabb különbség az ideális és a valóságos kontínuum között?

## **4 Nyugvó kontínuumok alaptörvényei**

### **4.1 A nyomás terjedése a kontínuumban**

A nyomás terjedésére és tulajdonságaira vonatkozó első leírás Blaise **Pascal** francia matematikus, fizikus és vallási filozófustól származik a XVII. század közepéről. Emlékére nevezik ma a nyomás alapegységét *Pa*-nak.

A nyugalomban lévő kontínuum valamely pontjában a nyomás két részből tevődik össze:

- a kontínuum által közvetített nyomás,
- a kontínuum súlyából adódó nyomás.

Az egyszerűség kedvéért folyadéokra alkalmazva a fentiek alapján nyilvánvalóan:

$$p_2 = p_1 + \frac{A \cdot h \cdot \rho \cdot g}{A} = p_1 + h \cdot \rho \cdot g \quad (Pa)$$

Az egyenletben ' $p_1$ ' a folyadék felszínén ható nyomás, ' $h$ ' pedig a felszíntől számított mélység.

Az általánosítás érdekében rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a baloldalon a nyomáskülönbség szerepeljen, hiszen nem minden esetben a felszín és egy adott pont közötti nyomáskülönbség, hanem sokkal inkább két tetszőlegesen választott pont közötti nyomáskülönbség érdekelhet bennünket.

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$$

Az egyenletet differenciális formára alakítva és a ' $z$ ' változó irányát az általános szokások szerint felfelé, azaz a gravitációs gyorsulással ellentétesen tekintve pozitívnak

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dz$$

Már csak egy megfontolást kell tennünk. A felírt egyenlet olyan esetekre érvényes, amikor a gravitációs erőter az egyetlen ható erőter. A gyakorlatban azonban előfordulhat, hogy a lineáris gyorsulás vagy lassulás, esetleg forgás következtében más erőterek is hatnak. Ha a gravitációs erőter térerősségének (gravitációs gyorsulás) és az ebben az erőterben történő elmozdulásnak a szorzatát, a potenciált

$$U_g = \int_1^2 g \cdot dz = g \cdot z \left( \frac{J}{kg} \right)$$

bevezetjük, akkor egy olyan egyenlethez jutunk, mely általános érvényességű a nyomás terjedésére vonatkozóan minden olyan esetben, amikor a gravitációs erőterhez hasonló ún. potenciális erőterek hatnak az adott kontínuumra.

$$dp = -\rho \cdot dU \quad \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

Az egyenletet a **hidrosztatika alaptörvényének** is szokták mondani, de – amint azt láttuk – egyaránt érvényes összenyomató és összenyomhatatlan kontínuumokra, azaz általánosságban alkalmas a nyomás változásának leírására nyugalomban lévő kontínuumban.



A folyadékok és a gázok között lévő jelentős (kb. ezerszeres) sűrűségkülönbség miatt a gázokban a nyomáskülönbség csak akkor számottevő, ha a szintkülönbség néhány száz méternél nagyobb.

Fontos megjegyezni, hogy a fentiek szerint a térerősség és az elmozdulás szorzataként meghatározott, a térerősség ellenében pozitívnak tekintett potenciál (elvégzett munka), skalár mennyiség, tehát több erőtér együttes hatása esetén ezek a skalár potenciálok egyszerűen összeadhatók.

A gravitációs erőtér mellett, azzal együtt előfordulhat még az egyenes vonalú gyorsuló/lassuló mozgás során fellépő (lineáris) tehetetlenségi erőtér. Ez csak annyiban tér el a gravitációs erőtértől, hogy a térerősség iránya a mozgás irányába esik és éppen ellentétes a gyorsulás/lassulás irányával. Ha a kézenfekvő megoldást választva a mozgás irányát tekintjük pozitívnak, akkor az ilyen tehetetlenségi erőtér potenciálja

$$U_i = -a \cdot x \left( \frac{J}{kg} \right) \text{ gyorsulás és } U_i = a \cdot x \left( \frac{J}{kg} \right) \text{ lassulás esetén.}$$

Némileg bonyolultabb a helyzet forgó rendszer esetében. Az ilyen rendszerben keletkező erőtér térerőssége nem állandó, hanem a hely függvénye. A forgástengelyben éppen zérus és onnan kifelé növekszik. Ebből adódóan a centrifugális erőtér potenciálja

$$U_c = - \int_{r=0}^r (r \cdot \omega^2) \cdot dr = - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az összefüggésben a negatív előjel azért jelent meg, mert az ilyen forgó rendszerben alkalmazott poláris koordináta-rendszer természetes pozitív iránya kifelé mutat és egybe esik a térerősséggel.

A folyadékok szabad felszínén természetesen nincs nyomáskülönbség (mindenütt az atmoszférikus nyomás uralkodik), amiből következik, hogy a felszín két pontja között nincs potenciálkülönbség sem. A folyadék szabad felszíne ún. ekvipotenciális felület. A folyadék felszíne ebből következően olyan elhelyezkedésű, hogy minden pontjában éppen merőleges a ható térerősség (több erőtér esetén az eredő térerősség) irányára.

Ha tehát kizárólag a gravitációs erőtér hat, akkor a folyadék felszíne éppen a gravitációs gyorsulásra merőleges, azaz vízszintes.

Ha a gravitációs erőtér mellett a lineáris tehetetlenségi erőtér is jelen van, akkor ennek következménye, hogy a folyadék szabad felszíne nem vízszintes, hanem ferde sík lesz a felszínre felírt hidrosztatikai alaptörvény szerint.

$$\Delta p = 0 = g \cdot z - ax$$

$$z = \frac{a}{g} \cdot x$$

Minél nagyobb a gyorsulás ill. a lassulás annál ferdebb lesz a sík vízszintessel bezárt szöge. A negatívjel arra utal, hogy pl. a balra gyorsuló rendszer esetében a szabad felszín jobbra emelkedő ferde sík lesz.

Ha a gravitációs erőtér mellett a centrifugális erőtér is jelen van, akkor ennek következménye, hogy a folyadék szabad felszíne nem vízszintes, hanem egy forgási paraboloid lesz a felszínre felírt hidrosztatikai alaptörvény szerint.

$$\Delta p = 0 = g \cdot z - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2}$$

$$z = \frac{\omega^2}{2 \cdot g} \cdot r^2$$

Minél nagyobb a forgási szögsebesség annál „nyitottabb” lesz a paraboloid.

A felszínnel egybevágóan a folyadék belsejében is vannak ekvipotenciális felületek, melyekre vonatkozóan a nyomáskülönbség zérus.

Az itt a folyadékok kapcsán elmondottak természetesen a gázokra is igazak. Tekintettel azonban arra, hogy a gázok sűrűsége (atmoszférikus nyomáson) kb. ezerszer kisebb a folyadékokénál ez gyakorlatilag érzékelhetetlen.

### **Önellenőrző kérdések a nyomás terjedése a kontínuumban fejezethez**

1. Mely két tényező határozza meg a nyomás értékét a nyugvó kontínuum valamely pontjában?
2. Hogyan határozható meg a folyadék súlyából eredő nyomás általános erőtér esetében?

3. Milyen feltétel fennállása esetén nem kell számolni a szintkülönbségből származó nyomáskülönbséggel a gázok esetében?
4. Mit értünk potenciál alatt?
5. Milyen potenciálos erők játszanak még szerepet a nyugvó folyadékokban kialakuló nyomáseloszlásra?
6. Milyen a folyadék szabad felszíne, ha a gravitációs erőtér és a lineáris tehetetlenségi erőtér együttesen hat a folyadékokra?
7. Milyen a folyadék szabad felszíne, ha a gravitációs erőtér és a centrifugális erőtér együttesen hat a folyadékokra?
8. Mit értünk ekvipotenciális felület alatt?
9. Mi határozza meg általánosságban a folyadék szabad felszínének alakját?

## 4.2 A felületi feszültség

Ellentétben a folyadék belsejében lévő molekulákkal a felszínen lévő részben más közeg molekuláival érintkeznek és így ezen az oldalon a folyadékmolekulák közötti vonzóerő hiányzik illetve más nagyságú vonzóerő hat rájuk.

A folyadék felszínét alkotó molekulákra ható erők kiegyensúlyozatlansága következtében keletkezik a felületi feszültség.

A felületi feszültség következtében a folyadékok szabad felszíne úgy viselkedik, mintha egy molekuláris vastagságú, rugalmas hártya borítaná, mely képes ellenállni kis erőknél. Ezért képesek apróbb vízi bogarak a folyadék felszínén futkározni, ezért lehetséges könnyebb pénzérmét a folyadék felszínére helyezni, ezért szükséges erő kezünk folyadékba merítéséhez, jöllehet a „hártya” két oldalán uralkodó nyomások között nincs különbség.

A felületi feszültség a folyadék szabad felszínét igyekszik a lehető legkisebbre összehúzni, ami – adott térfogat esetén – a gömb felülete. Lévén, hogy a felületi feszültség csekély nagyságú, ez a gömb alakra történő törekvés csak kis mennyiségek esetében figyelhető meg (folyadékcsepp). Nagyobb mennyiségek esetén a súlyerő hatása érvényesül.

A felületi feszültség jellemzésére, a megmérésére alkalmazott egyik módszerből kiindulva, az egységnyi hosszra eső erőt ( $N/m$ ) használják. A fentiekből következően nyilvánvaló, hogy a felületi feszültség

minden esetben egy anyagpárra értelmezhető. Más tehát a víz szabad felszínét alkotó hártýára jellemző felületi feszültség, ha a felszín levegővel és megint más, ha valamilyen más folyadékkal érintkezik.

Anyagpár	Felületi feszültség ( $N/m$ )
víz – levegő	0,074
alkohol – levegő	0,025
higany – levegő	0,5

## 2. táblázat Néhány folyadék felületi feszültsége levegőre

Kis mennyiségek esetén, amikor tehát a súlyerő a felületi feszültségből származó erők nagyságrendjét nem haladja meg, észlelhető a szabad felszín görbülete. A görbült felszín a homorú oldalon szükségképpen túlnyomást hoz létre. A felszín két oldalán lévő nyomások különbsége a felületi feszültségből származó erővel tart egyensúlyt. Gömb alakot feltételezve, és a levezetést mellőzve, a nyomáskülönbség

$$\Delta p = \frac{2 \cdot C}{R} \quad (Pa)$$

Az összefüggésben 'C' a felületi feszültség 'R' pedig a gömb sugara.

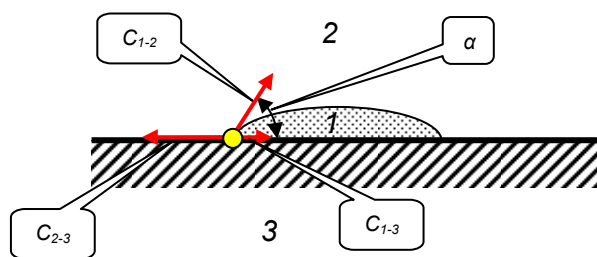
Olyan esetben, amikor a szappanbuborékhoz hasonló hártýa zár körbe levegőt, akkor a határoló hártýa kétoldalú és így a nyomáskülönbség

$$\Delta p = \frac{4 \cdot C}{R} \quad (Pa)$$

A folyadékok szabad felszínének alakjáról elmondottak a folyadékot tartalmazó edény falának közvetlen közelében nem bizonyulnak igaznak, itt a felszín görbülete figyelhető meg. Ennek oka szintén a felületi feszültségben keresendő. Ezen a helyen három különböző anyag érintkezik egymással.

A szilárd test felületén lévő folyadékcsepp (lásd 5. ábra) egyensúlyát nyilván a következő feltétel határozza meg

$$C_{2-3} = C_{1-3} + C_{1-2} \cdot \cos \alpha$$



5. ábra Vízcsepp szilárd test felületén

Ahol  $\alpha$  a folyadék levegőre vonatkoztatott felületi feszültsége ( $C_{1-2}$ ) és a folyadék és a szilárd test közötti, felületi feszültséghez hasonló adhézió ( $C_{1-3}$ ) közötti szög ( $\alpha$ ). A cseppben lévő folyadék mennyiségétől (súlyától) függően a csepp alakja és ezzel az  $\alpha$  szög addig változik, amíg az egyensúly létre nem jön. Nyilvánvaló, hogy abban az esetben, amikor

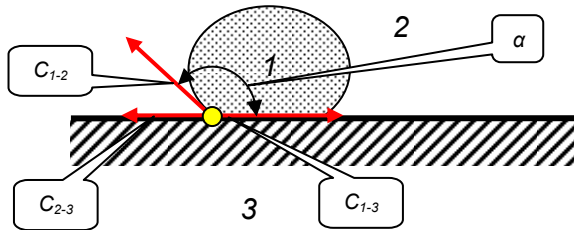
$$|C_{2-3}| > |C_{1-3}| + |C_{1-2}|$$

a csepp nem lesz képes stabilizálódni a szilárd test felszínén, hanem vég nélkül fog terjeszkedni azon, teljesen beborítja azt, miközben a folyadékréteg vastagsága akár molekuláris vastagságig csökken. Ez tapasztalható a bizonyos folyékony szénhidrogéneket, pl. petróleumot, tartalmazó, rosszul lezárt üveg esetében, amikor a petróleum szinte „kimászik” az üvegből és annak külső felületét is bevonja.

Hasonló eset játszódhat le akkor, amikor a folyadék egy másik folyadék felszínére kerül (olajcsepp víz felszínén). Kedvezőtlen esetben ilyenkor kis mennyiségű olaj is képes lehet igen nagy vízfelületet lefedni és ezáltal megakadályozni a levegőnek a folyadékba jutását. Ez pedig a vízi élőlények pusztulását okozhatja. Szerencsés körülmény, hogy a szabad vizek csaknem állandó hullámozása szétszaggatja az olajhártyát és így a keletkező környezeti károk kisebbek.

Amikor a szilárd test felületén lévő folyadékcsepp a 6. ábrán szerinti alakot vesz fel ( $C_{2-3} > C_{1-3}$  ill.  $\alpha < 90^\circ$ ), akkor az adott folyadékot az adott szilárd testre vonatkozóan nedvesítő tulajdonságúnak nevezzük. Ennek fordítottja figyelhető meg, amikor higanyt cseppentünk pl. üveglapra. Ilyekor a higany és a szilárd test közötti adhézió ( $C_{1-3}$ ) nagyobb mint a levegő és a szilárd test közötti adhézió ( $C_{2-3}$ ), aminek következtében a higany és a szilárd test érintkezési felülete a lehető legkisebb.

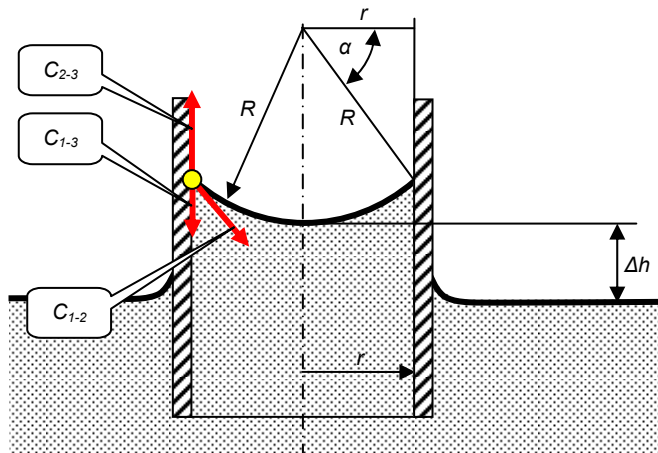
Erre az esetre mondják, hogy a higany nem nedvesítő folyadék ( $\alpha > 90^\circ$ ).



6. ábra Higanycsepp szilárd test felületén

A folyadékot tartalmazó edény fala közelében a rá vonatkozóan nedvesítő folyadék esetében a felületi feszültség a vízszinteshez képest felfelé görbíti a felszint, míg a felületre vonatkozóan nem nedvesítő folyadék esetén lefelé.

Szintén a nedvesítő és nem nedvesítő tulajdonság alapján magyarázható a kis átmérőjű csövekben megfigyelhető folyadék-felemelkedés (nedvesítő folyadéknál) ill. folyadékfelszín lesüllyedés (nem nedvesítő folyadéknál), összefoglaló néven a kapillaritás.



7. ábra Kapillaritás

A kapilláris felemelkedést (vagy lesüllyedést) a görbült felszín két oldala között keletkező nyomáskülönbség okozza. A nyomáskülönbség

egyensúlyt tart a csőben lévő folyadék súlyából (ill. a csőn kívül lévő folyadék magasabb szintjéből adódó) nyomáskülönbséggel

$$\Delta p = \frac{2 \cdot C_{1-2}}{R} = \frac{2 \cdot C_{1-2} \cdot \cos a}{r} = \rho \cdot g \cdot \Delta h \quad (Pa)$$

Ebből pedig kiszámítható a kapilláris felemelkedés (vagy lesüllyedés) nagysága

$$\Delta h = \frac{2 \cdot C_{1-2} \cdot \cos a}{r \cdot \rho \cdot g} \quad (m)$$

Természetesen az 'α' szög megmérése szükséges! Ugyanakkor a kapilláris felemelkedés (vagy lesüllyedés) maximális értéke akkor adódik, ha  $\cos \alpha = 1$ .

### 4.3 A folyadékot tartalmazó tartály falát terhelő erő

A keresett erő a jól ismert

$$\vec{F} = \int_{(A)} (p \cdot d\vec{A}) \quad (N)$$

összefüggésből számítható ki, azaz az elemekre bontott felület darabjaira ható elemi erőket kell összegezni.

Mivel a gyakorlatban szinte kivétel nélkül olyan felületekre ható erőt kell meghatározni melyek egyszerű geometriai alakkal bírnak (kör, téglalap) és ebből következően vízszintes és függőleges szimmetria tengellyel is rendelkeznek, a továbbiakban ezt általános jelleggel feltételezzük. Általános helyzetű (esetleg görbült) felületet feltételezve a legkönnyebben úgy jutunk célhoz, ha a keresett erőt két, vízszintes és függőleges, komponenséből határozzuk meg.

A vízszintes komponens a felületvektor vízszintes komponensével számítható. Ez természetesen megegyezik a vizsgált felületdarab függőleges síkon képzett vetületének nagyságával. Tekintettel arra, hogy a felületvektor a vizsgált felület súlypontjában helyezendő el annak vízszintes komponense is itt kell legyen, tehát a vízszintes erőkomponens

$$F_h = \rho \cdot g \cdot z_s \cdot A_h \quad (N)$$

Az összefüggésben 'z<sub>s</sub>' a felület súlypontjának pozíciója a felszíntől számítva, 'A<sub>v</sub>' pedig a felület vetületének nagysága egy függőleges síkon.

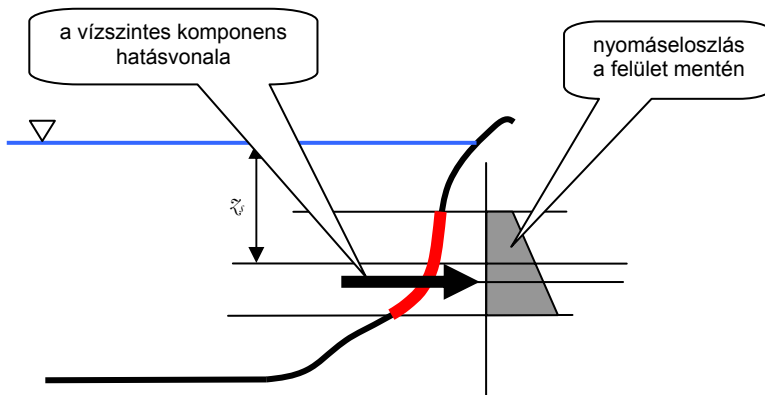
A függőleges komponens biztosan egyenlő a vizsgált felület kerületéről elindított függőleges alkotók által határolt hasámban/hengerben lévő folyadék súlyával. Ezt könnyen kiszámíthatjuk a vízszintes komponensnél alkalmazott módszer szerint.

$$F_v = \rho \cdot g \cdot z_s \cdot A_v \quad (N)$$

Az összefüggésben 'z<sub>s</sub>' a felület súlypontjának pozíciója a felszíntől számítva, 'A<sub>v</sub>' pedig a felület vetületének nagysága egy vízszintes síkon.

Némileg bonyolultabb az eredő erő támadáspontjának meghatározása. Elvileg a támadáspont ott van ahol a két komponens hatásvonalára egymást metszi.

A függőleges komponens hatásvonalát szükségképpen átmegy a kérdéses felület súlypontján, hiszen az adott felület vízszintes síkon képzett vetületét a súlypontba képzelve a nyomás a vetületi felület minden pontjában azonos.



**8. ábra** A folyadéknyomásból származó vízszintes erőkomponens

Más a helyzet a vízszintes komponenssel. Mivel a nyomás lefelé lineárisan nő a vízszintes komponens szempontjából érdekes, a súlypontba



képzelt vetületi felület mentén egy trapéz alakú nyomáseloszlás található, ahogy a 8. ábrán látható.

A vízszintes erőkomponens hatásvonala ennek a trapéz felületnek a súlypontján megy át és szükségképpen lejjebb van, mint a felület súlypontja. Ezt a távolságot az ábra alapján ki is lehet számítani.

Anélkül, hogy itt a részletekbe belemennénk érdemes megjegyezni, hogy a súlypont mélysége és a vízszintes erőkomponens hatásvonala közötti távolság általában elhanyagolhatóan kicsi. Csak akkor számottevő, ha nagyon nagy „függőleges” méretekkkel bíró felületről van szó, melynek felső széle ugyanakkor viszonylag kis távolságban van a felszíntől. A kérdéses távolság semmilyen esetben sem nagyobb, mint a vetületi felület magassága kétharmadának és felének különbsége azaz a vetület magasságának  $1/6$ -a. Ez az eset olyankor áll elő, ha a vizsgált felület felső széle a folyadék felszínével esik egybe.

A függőleges és a vízszintes komponens hatásvonalát ismerve meghatározható az eredő erő hatásvonalának iránya. Az eredő erő támadáspontja természetesen minden esetben ott lesz, ahol az eredő erő hatásvonala a tényleges felületet átdöfi.

### ***Önellenőrző kérdések a folyadékot tartalmazó tartály falát terhelő erő fejezethez***

1. Hogyan határozható meg egy tetszőleges helyzetű felületet terhelő, folyadéknyomásból származó erő?
2. Hol helyezkedik el a folyadékot tartalmazó tartály falát terhelő erő függőleges komponensének hatásvonala?
3. Hol helyezkedik el a folyadékot tartalmazó tartály falát terhelő erő vízszintes komponensének hatásvonala?  
Miért nem a felület súlypontján halad át a folyadékot tartalmazó tartály falát terhelő erő vízszintes komponensének hatásvonala?
4. Hol van a folyadékot tartalmazó tartály falát terhelő eredő erő támadáspontja?
5. Milyen esetben lesz a folyadékot tartalmazó tartály falát terhelő erő vízszintes komponense a legmesszebb a súlyponttól?

## **4.4 A felhajtóerő**

A kontínuumok súlyából adódóan a nem azonos magasságban lévő pontok között nyomáskülönbség van (lásd a 4.1 fejezetet), mégpedig a

magasabban lévő pontban a nyomás kisebb. Ebből következően a kontínuumba merülő szilárd testre, annak méreteitől függő nagyságú felfelé irányuló, ún. felhajtóerő hat.

A felhajtóerő nagyságának meghatározásához képzeljünk el egy pl. folyadékba merülő függőleges tengelyű hengert. Ennek alsó lapján a nyomás éppen

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h \text{ (Pa)}$$

értékkel nagyobb, mint a felső lapon, ha 'h' a henger magassága. Az ebből származó erő természetesen

$$F = \Delta p \cdot A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A = \rho \cdot g \cdot V \text{ (N)}$$

Ez pedig nem más, mint a görög matematikus, fizikus, mérnök, csillagász és filozófus, **Archimédesz** által Krisztus születése előtt a III. században felállított és ma az ő nevét viselő Archimédesz-törvény:

a felhajtóerő nagysága megegyezik a szilárd test által kiszorított kontínuum súlyával

Fontos megjegyezni, hogy az összefüggés nem csak folyékony kontínuumban keletkező felhajtóerő meghatározására alkalmas, hanem változó sűrűségű kontínuum esetére is. Ekkor azonban ügyelni kell arra, hogy a sűrűség értéke a nyomás függvényében változik.

### Önellenőrző kérdések a felhajtóerő fejezethez

1. Mit mond ki Archimédesz törvénye?
2. Miből származik a felhajtóerő a nyugvó kontínuumban?
3. Létezik e felhajtóerő nyugvó levegőben?
4. Függ-e a felhajtóerő a test súlyától?

## 5 Ideális kontínuumok kinematikája

### 5.1 A kontínuum-áramlás matematikai leírása

A szilárd testek mozgásának leírására a klasszikusnak tekinthető, az 1813-ban elhunyt, olasz származású matematikus és csillagász, Joseph-Louis, Comte de **Lagrange** által kidolgozott és róla elnevezett ún. Lagrange-féle módszert használják. E módszer alapfüggvénye megmutatja, hogy a test, pontosabban és a legtöbb esetben elégsége-

sen, annak súlypontja az idő függvényében milyen útvonalat jár be. Ezt a függvényt útfüggvénynek nevezzük és általános alakja:

$$\bar{r} = f(\bar{s}, t)$$

A függvényben  $\bar{s}$  egy helyvektor, mely azonosítja a súlypont helyzetét. A test súlypontjának sebességfüggvényét az útfüggvény első deriváltjaként, a gyorsulásfüggvényét a második deriváltjaként vagy a sebességfüggvény első deriváltjaként kapjuk meg:

$$\bar{c} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \text{ill.} \quad \bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{c}}{dt}$$

Ez a jól ismert és bevált módszer csak elvileg alkalmazható a kontínuumok esetében. Mivel azonban az áramló kontínuum esetében a súlypont nem értelmezhető, ezért csak a kontínuum kisebb-nagyobb elhatárolt részeire vonatkoztathatjuk az útfüggvényt. Ennek következménye, hogy a sebességfüggvény előállításához szükséges deriválást valamely, a kiválasztott folyadék részhez társított, azt azonosító, állandó  $\bar{s}$  helyvektor szerint lehet elvégezni, tehát

$$\bar{c} = \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right)_s \quad \text{ill.} \quad \bar{a} = \left( \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} \right)_s = \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \right)_s$$

A módszer csak látszólag egyszerű és alkalmazása a következő problémákat veti fel:

- az útfüggvény az esetek legnagyobb részében meghatározhatatlan, mivel a folyadék részeket többnyire nem lehet azonosítani és nyomon követni,
- az egyenletek száma rendkívül nagy, tart a végtelenhez, ha a vizsgált részek mérete a minimumhoz közelít,
- az egyes folyadék részecskék út-, sebesség- és gyorsulásfüggvénye többnyire érdektelen és a kontínuum egészének mozgására nézve nem ad semmilyen hasznos információt.

Az áramló kontínuum kitölt egy bizonyos teret és a vizsgálódót leginkább az érdekli, hogy az áramló kontínuum által kitöltött tér valamely pontjában mekkora a sebesség és a gyorsulás. Az 1783-ban Szentpéterváron meghalt svájci matematikus és fizikus, Leonhard **Euler** által bevezetett és emlékére Euler-féle folyadékmozgás leírási módszer ezen a felismerésen alapul.

Az Euler-féle módszer alapfüggvénye tehát azt adja meg, hogy az áramló kontínuum által kitöltött tér rögzített pontjaiban a sebesség az idő függvényében hogyan változik:

$$\bar{c} = f(\bar{r}, t)$$

Ebben a függvényben  $\bar{r}$  megjelöli, hogy az áramló kontínuum által kitöltött tér mely pontjára vonatkozik a függvény. Tehát,  $\bar{r}$  egy helyvektor, mely azonban állandó, hiszen a térben kiválasztott pont nem mozdul.

Valójában tehát arról van szó, hogy az áramló kontínuum által kitöltött térbe gondolatban egy térbeli rácsot helyezünk, az  $\bar{r}$  helyvektorok rendszerével azonosítjuk a rádspontokat és meghatározzuk az egyes rádspontokban a sebesség időbeli változását leíró függvényeket. Az ilyen módon meghatározott sebességfüggvények összességét sebességtérnek nevezzük.

Az Euler-féle módszernek több fontos előnye van:

- a térbeli rács osztásának csökkentésével tetszés és a szükségletek szerinti pontosság érhető el,
- a matematikailag kezelendő egyenletek száma korlátozott marad,
- kísérletek végzéséhez kiválóan alkalmas módszer.

A módszernek azonban van hátránya is, mely a gyorsulás meghatározásakor jelentkezik.

Gondoljuk végig a következőt!

Adott egy áramlási tér, melynek minden pontjában állandó a sebesség, azaz a sebességtér állandó, hiszen minden sebességfüggvény azt mutatja, hogy az időben semmi sem változik. Ha tehát a gyorsulás meghatározása érdekében bármely pontban elvégzem a deriválást akkor természetesen zérust kapok, azaz úgy tűnik, hogy az áramló kontínuumban nincs gyorsulás. Vajon tényleg biztos, hogy az áramló kontínuumban nincs gyorsulás?

Nos, nem!

Könnyen elképzelhető, hogy a térben rögzített pontokban a sebesség állandó, de a különböző pontokban egymástól eltérő (gondoljunk például egy olyan, elágazás nélküli vízvezeték csőre, melynek valamely

szakasza kisebb, egy másik szakasza pedig nagyobb átmérőjű). Amennyiben a sebesség két egymás mellett lévő pontban egymástól különböző, de egyébként állandó, akkor kell legyen gyorsulás a kontínuumban, még ha az egyes pontokban végzett egyszerű deriválás” erről semmit sem mond.

Ha tehát az Euler-féle módszert alkalmazzuk az áramló kontínuum mozgásának leírására, akkor a gyorsulás a szokásosnál bonyolultabb módon határozható meg és két részből tevődik össze:

- az egyik rész azt mutatja meg, hogy egy térben rögzített pontban van-e, és mekkora a sebességváltozás,
- a másik rész azt kell kifejezze, hogy a térben rögzített pontok között elmozduló kontínuum elszenved-e sebességváltozást annak következtében, hogy különböző pontokban nem azonos a sebesség.

A gyorsulás két komponense közül az első a lokális (helyi) gyorsulás második a konvektív (áramlási, mozgási) gyorsulás.

A lokális gyorsulás a sebességfüggvény idő szerint parciális deriváltjaként kapható meg:

$$\bar{a}_{lok} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}$$

Természetesen az előbbi egyszerű vektoriális differenciálegyenlet az egyes térkoordináták szerinti skalár egyenletekké bontható szét a tényleges számítások elvégzéséhez

$$a_{lok,x} = \frac{\partial \bar{c}_x}{\partial t}, \quad a_{lok,y} = \frac{\partial \bar{c}_y}{\partial t}, \quad a_{lok,z} = \frac{\partial \bar{c}_z}{\partial t}$$

A konvektív gyorsulás meghatározásához a sebesség konvektív megváltozása két nem azonos sebességű pont között a következő módon írható fel

$$d\bar{c}_{konv} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}} \cdot d\bar{s}$$

Az összefüggésben  $d\bar{s}$  a két pont közötti elemi távolság.

Ezt a  $d\bar{s}$  úthosszat a folyadék rész sebességével és a megtételéhez szükséges idővel is ki lehet fejezni ( $\bar{c} \cdot dt$ ), a konvektív sebességválto-

zás  $d\bar{c} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}} \cdot \bar{c} \cdot dt$ , azaz a konvektív gyorsulás ez utóbbi egyenlet  $dt$ -

vel történő osztása után kapható meg

$$\bar{a}_{konv} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}} \cdot \bar{c}$$

Az egyes térkoordináták szerinti skalár egyenletek:

$$a_{konv,x} = \frac{\partial \bar{c}_x}{\partial x} \cdot \bar{c}_x + \frac{\partial \bar{c}_x}{\partial y} \cdot \bar{c}_y + \frac{\partial \bar{c}_x}{\partial z} \cdot \bar{c}_z$$

$$a_{konv,y} = \frac{\partial \bar{c}_y}{\partial x} \cdot \bar{c}_x + \frac{\partial \bar{c}_y}{\partial y} \cdot \bar{c}_y + \frac{\partial \bar{c}_y}{\partial z} \cdot \bar{c}_z$$

$$a_{konv,z} = \frac{\partial \bar{c}_z}{\partial x} \cdot \bar{c}_x + \frac{\partial \bar{c}_z}{\partial y} \cdot \bar{c}_y + \frac{\partial \bar{c}_z}{\partial z} \cdot \bar{c}_z$$

Az Euler-féle áramlás-leírási módszer esetében tehát a gyorsulás két-komponensű

$$\bar{a} = \bar{a}_{lok} + \bar{a}_{konv} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}} \cdot \bar{c}$$

E két derivált összegét szubsztanciális deriváltnak nevezik, és röviden

$$\frac{D\bar{c}}{dt}$$

kifejezéssel jelölik. Itt a 'D' utal arra, hogy ez az idő szerinti különleges derivált egy lokális és egy konvektív részből tevődik össze.

Befejezésül utalunk arra, hogy az áramló kontínuummal kapcsolatos minden más jellemző (például hőmérséklet, sűrűség, stb.) esetében értelmezhető az Euler-féle módszer, azaz a térben rögzített pontokban az idő függvényében lezajló változást leíró egyenletek rendszerének felállítása (így beszélhetünk az áramló kontínuummal kapcsolatosan akár hőmérséklettéről is). Természetesen ezen jellemzők időbeli változását a gyorsulással kapcsolatosan leírtak szerint egy szubsztanciális deriválttal lehet megadni, például a hőmérsékletre vonatkozóan

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} \cdot \bar{c}$$

**Önellenőrző kérdések a kontínuum-áramlás matematikai leírása fejezethez**

1. Mi a lényeges a Lagrange-féle kinematikai leírásnak?
2. Mi a lényeges az Euler-féle kinematikai leírásnak?
3. Mit nevezünk sebességtérnek?
4. Milyen két komponensből tevődik össze a gyorsulás az Euler-féle kinematikai leírás esetén?
5. Mit fejez ki a lokális gyorsulás?
6. Mit fejez ki a konvektív gyorsulás?
7. Mit kell szubsztanciális változás alatt érteni?

## 5.2 Stacionárius és instacionárius áramlás

Az áramló kontínuum Euler-féle matematikai leírásával kapcsolatosan már szóba került, hogy bizonyos áramlások esetében a térben rögzített „megfigyelő” pontokban nem észlelhető változás, más jellegű áramlások esetében igen.

Az olyan áramlást, mely esetében egyetlen jellemző sem függ az időtől, stacionárius áramlásnak nevezzük. Az idegen nyelvű elnevezés a változatlanságra, állandóságra utal.

Természetesen az ilyen áramlásban a lokális gyorsulás, de minden más lokális változás is, zérussal egyenlő. Szűkebb értelemben és csak a mechanikai szempontból a legfontosabbnak tekinthető sebességre korlátozva gyakran mondják, hogy a stacionárius áramlás feltétele, hogy a lokális gyorsulás zérus legyen:

$$\bar{a}_{lok} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = 0$$

Tudva, hogy az általunk alkalmazott Euler-féle módszer következményeként a gyorsulásnak két komponense van, természetesen igaz, hogy a stacionárius áramlásban is lehet konvektív gyorsulás. A szubsztanciális gyorsulás és a konvektív gyorsulás tehát önmagában nem elégséges ahhoz, hogy egy áramlás stacionaritását (időtől való függetlenségét) meg lehessen ítélni. Az áramlás stacionaritásáról csakis a lokális gyorsulás alapján lehet dönten.

Azt az áramlást, ahol bármely jellemző az idő függvényében változik, instacionárius áramlásnak nevezzük.

A gyakorlatban az instacionaritás kérdésének eldöntésekor a legtöbbször csak a mechanikai szempontból legfontosabbnak tekinthető loká-

lis gyorsulást szokták vizsgálni. Ha ez különbözik zérustól, akkor az áramlás biztosan instacionárius.

Mind a stacionaritás mind az instacionaritás vonatkoztható az áramló kontínuum egy bizonyos tartományára is. Lehetséges tehát, hogy az áramlás nagyjából és egészében stacionárius, de bizonyos tartományban instacionárius.

Az áramlások szemléletes jellemzéséhez három görbét szokás definiálni:

- áramvonal,
- pálya,
- nyomvonal.

Az **áramvonal** az áramló kontínuum által kitöltött térben az egyes pontokban észlelhető sebességek burkoló görbéje, tehát az adott ponthoz tartozó sebességvektor a ponton átmenő áramvonal érintője.

A **pálya** az áramló kontínuumban kiválasztott részecske által befutott útvonal.

A **nyomvonal** az áramló kontínuum által kitöltött térben az a görbe, ahol egy adott pillanatban mindazok a részecskék sorakoznak, melyek egy bizonyos ponton korábban áthaladtak.

A három görbe általánosságban eltér egymástól, bár a tetszés szerint kiválasztott kiinduló pontjukban közös érintővel bírnak, hiszen ez az érintő

- egy sebességvektor, mely érinti az áramvonalat,
- mutatja azt az irányt amerre a ponton áthaladt részecske az útját folytatja egy végtelenül rövid pillanatig,
- amelynek irányában találjuk azokat a részecskéket, amelyek az adott ponton áthaladtak, bár később mindegyikük más irányba folytatta útját.

A három görbe definícióját és a stacionárius áramlásról elmondottakat összevetve megállapíthatjuk, hogy mivel a lokális gyorsulás ilyenkor zérus, a sebesség nagysága és iránya állandó így:

- az áramvonal alakja természetesen nem változik,

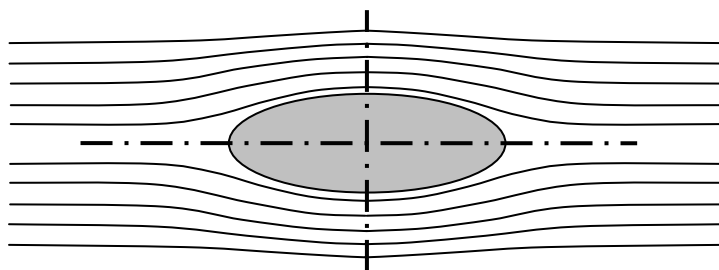


- az egymás követő részecskék az állandó sebességvektorok irányában tehát az áramvonalon mozognak, tehát a pálya az áramvonallal egybe esik és
- az egy adott ponton átmenő részecskék az áramvonalon sorakoznak, tehát a nyomvonal is egybe esik az áramvonallal.

Összefoglalva: a stacionárius áramlásban az áramvonal, a pálya és a nyomvonal egybe esik.

A gyakorlatban igen sokszor találkozunk stacionárius vagy közel stacionárius áramlással. Például az élő vizek áramlása általában jó közelítéssel stacionáriusnak tekinthető és a közel egyenletesen fújó szél is a stacionárius áramlás tulajdonságait mutatja. Az ilyen áramlásokat füst, víz esetén festék folyamatos bevezetésével jól lehet szemléltetni. A kirajzolódó görbék tehát egyidejűleg az áramvonalat, a pályát és a nyomvonalat is mutatják.

Az áramvonalak, pályagörbék és nyomvonalak közötti kapcsolat vizsgálatára kiváló példa a folyóban álló hídpillér körül kialakuló áramlás. Amennyiben ezt az áramlást a hídon állva figyeljük, akkor nyugvó, a földhöz kötött koordinátarendszerekből látjuk az áramlást. Az természetesen stacionáriusnak látjuk, hiszen (hacsak nem változik a folyó vízálása és ezzel sebessége) a hídpillér körül minden időpillanatban ugyanazokat a görbéket lehet megfigyelni. Ezek a görbék (egyidejűleg áramvonalak, pályagörbék és nyomvonalak) láthatóvá tehetők, ha a folyón apró fadarabokat úsztatunk le és azokról hosszú expozícióval fényképet készítünk. A kialakuló kép a 6. ábrán figyelhető meg.



**9. ábra** Stacionárius áramvonalak

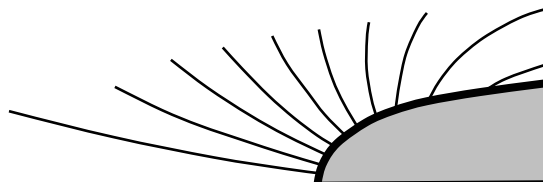
Az áramvonalak a stacionárius áramlásban körülölelik a folyóban álló hídpillért. A hídpillér közelében lévő áramvonalak eredeti egyenes irá-

nyuktól nagyobb, a távolabb esők kisebb mértékben térítődnek el. A hídpillértől egy bizonyos távolságon túl lévő áramvonalakra a hídpillér már nincs semmilyen hatással.

A hídpillér környezetében az áramlás stacionárius, de a sebesség nem mindenütt ugyanakkora. A hídpillér közelében nagyobb, attól távolodva egyre kisebb a sebesség és ott, ahol a hídpillér eltérítő hatása már nem érvényesül ott a folyó zavartalan áramlási sebessége figyelhető meg. Az áramvonalak sűrűsödése tehát a sebesség növekedésére, ritkulásuk a sebesség csökkenésére utal a stacionárius áramlásban.

Ha ugyanezt az áramlást a folyóhoz kötött koordináta-rendszerből szemléljük (a folyón úszó és a hídpillérhez közeledő csónakból), akkor egészen más kép rajzolódik ki előttünk. Ebből a koordináta-rendszerből az áramlás már nem stacionárius, hiszen a hídpillérhez közeledve a csónak helyzete a folyóhoz képest megváltozik, a csónakból nézve a „hídpillér kitér” a csónak elől, majd újra visszatér eredeti pozíciójába.

A folyóhoz kötött, instacionárius rendszerben észlelhető áramvonalakat mutatja a hídpillér környezetében a 7. ábra.



**10. ábra** Instacionárius áramvonalak

Ezeknek az áramvonalaknak sajátosságuk az, hogy a hídpillérről erednek és azon végződnek.

Anélkül, hogy a gyakorlati jelentőséggel ritkán bíró instacionárius nyomvonalal és pályagörbével foglalkoznánk, ki lehet jelenteni, hogy egyes esetekben az áramlás stacionárius vagy instacionárius volta attól függ, hogy azt az áramlást a földhöz kötött vagy az áramló közeggel együttmozgó viszonyítási rendszerből szemléljük. Ilyen áramlás az imént tárgyalt hídpillér körüli áramlás vagy az épületek körül kialakuló légáramlások, melyek a földhöz kötött koordináta-rendszerben stacionáriusak az áramló közeggel együtt mozgó rendszerben azon-

ban instacionáriusak. Fordított a helyzet a víz és légurbinák forgó járókerekei, a repülőgépek és helikopterek légcsavarja, a hajók hajócsavarja által létrehozott áramlások esetében, melyek a földhöz kötött koordináta rendszerben instacionáriusak ezzel szemben a járókerékkel együtt forgó rendszerben stacionárius áramlásként tárgyalhatók.

Mivel azt is tapasztalhattuk, hogy a stacionárius áramlás lényegesen egyszerűbb, könnyebben áttekinthető képet mutat (nincs időfüggés, az áramvonal, a pálya és a nyomvonal egybe esik) a következőkben törekedni kell arra, hogy egy adott áramlástan probléma vizsgálatához, ha erre lehetőség van, olyan koordináta rendszert válasszunk, amelyből tekintve az adott áramlást, az stacionárius.

### **Önellenőrző kérdések a stacionárius és instacionárius áramlás fejezethez**

1. Mi a stacionárius áramlás?
2. Mi az instacionárius áramlás?
3. Létezik-e olyan stacionárius áramlás melyben van gyorsulás?
4. Biztosan instacionárius az áramlás, ha van benne gyorsulás?
5. Mondjon példát olyan áramlásra, melyben a lokális gyorsulás zérus, a konvektív gyorsulás ellenben pozitív!
6. Mit értenek egy áramlásban áramvonal alatt?
7. Mit értenek egy áramlásban nyomvonal alatt?
8. Mit értenek egy áramlásban pályagörbe alatt?
9. Hogyan indokolható, hogy a stacionárius áramlásban az áramvonal, a nyomvonal és a pályagörbe egybe esik?
10. Mondjon példát arra, hogy ugyanaz a jelenség a megfigyelői koordinátarendszertől függően stacionárius vagy instacionárius?

## **5.3 A kontinuitás törvénye**

A fizika egyik alaptétele az anyag vagy tömegmegmaradás törvénye. Általánosságban és röviden fogalmazva ez annyit mond ki, hogy anyag nem vész el és nem keletkezik.

E törvény figyelembevételével, az áramló kontínuumra megfogalmazott matematikai kifejezés a folytonosság (idegen szóval: kontinuitás) törvénye. Nem hibás azonban az a megfogalmazás sem, mely a folytonosság törvényét az anyag-megmaradási törvényének speciálisan az áramló kontínuumra vonatkoztatott alakjának tekinti.

Ha a fenti általános megfogalmazást matematikai formába akarjuk önteni, akkor a következő gondolatmenetet célszerű követni.

Egy tetszőlegesen kiválasztott, differenciális mértékkel rendelkező térrészre értelmezve a tömegmegmaradás törvényét, az azt fejezi ki, hogy az adott térrészben a sűrűség az idő függvényében csak akkor lehet állandó, ha az oda időegység alatt belépő és onnan időegység alatt távozó anyag mennyisége megegyezik egymással.

Például az 'x' tengely mentén az időegység alatt belépő anyagmennyiségre a következőt írhatjuk fel

$$\rho \cdot c_x \cdot dy \cdot dz \left( \frac{kg}{s} \right)$$

Az 'x' tengely mentén az időegység alatt távozó anyagmennyiségre a következő egyenlet igaz

$$\left( \rho \cdot c_x + \frac{\partial(\rho \cdot c_x)}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz \left( \frac{kg}{s} \right)$$

hiszen a sebesség megváltozhatott. Itt feltételeztük, hogy a sebesség megnőtt, tehát 'x' irányban időegység alatt több távozik mint amennyi érkezik és ez a növekedés arányos az 'x' tengellyel párhuzamos mérettel (dx).

Nyilvánvaló, hogy a két anyagmennyiség különbsége

$$\frac{\partial(\rho \cdot c_x)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \left( \frac{kg}{s} \right)$$

az adott térrészben maradt és a sűrűség megváltozásában szerepet játszik.

Teljesen hasonló módon eljárva a többi koordináta irányban is összesen három egyenlethez jutunk, melyek összege a térrészben lévő anyag mennyiségének megváltozása. Ne feledkezzünk meg arról, hogy mindegyik irányban feltételeztük, hogy több anyag távozik, mint amennyi érkezik, azaz a térrészben az anyag mennyisége csökken, az egyik oldalon egy negatív előjel szükséges

$$\left( \frac{\partial(\rho \cdot c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot c_z)}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \left( \frac{kg}{s} \right)$$

Egyszerűsítés és a szokásos alakra rendezés után

$$\left( \frac{\partial(\rho \cdot c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot c_z)}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

A zárójelben lévő kifejezésre a matematikában egy egyszerűsítő jelölést szoktak használni, melyet először Sir William Rowan **Hamilton** ír matematikus, fizikus és csillagász alkalmazott a XIX. század közepén, ez az ún. Nabla ( $\nabla$ ), elsőrendű deriváló operátor, mely a zárójelben leírt deriválási művelet, a sűrűség és a sebesség szorzatának a három térkoordináta szerinti deriválását írja le röviden.

$$\nabla \cdot (\rho \cdot c) = \left( \frac{\partial(\rho \cdot c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot c_z)}{\partial z} \right)$$

Ezt a deriváló operátort formálisan egy vektornak fogják fel (van  $i, j, k$  komponense). A segítségével röviden leírt deriválási művelet pontos leírását a vektorműveletekre érvényes szabályok szerint történő alkalmazásával kaphatjuk meg.

Ezzel a folytonosság törvénye

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot c) = 0$$

Közbevetőleg megjegyezzük, hogy egyes, főleg régebbi, szakkönyvekben a nabla vektornak valamely más vektormennyiséggel alkotott skaláris szorzatát az adott mennyiség 'divergenciájának' nevezik. Így a folytonosság törvénye a következő formában is megtalálható:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot c) = 0$$

A levezetésben nem esett említés arról, hogy a kontínuum összenyomható-e vagy sem és nem volt kikötve az sem, hogy súrlódásmentes legyen. A kapott összefüggés tehát valóságos és ideális, összenyomható és összenyomhatatlan kontínuumra egyaránt érvényes, legyen szó stacionárius vagy instacionárius áramlásról, tehát általános érvényességű.

Gyakorlati szempontból a stacionárius áramlásoknak kitüntetett szerepük van. Ilyen esetben a folytonosság törvénye egyszerűbb alakot ölt, hiszen az időfüggés kizárása miatt természetesen a sűrűség sem függ az időtől, azaz idő szerinti deriváltja zérus. Ez persze nem jelenti azt, hogy a sűrűség minden szempontból állandó, hiszen nem csak az idő,

hanem a hely függvénye is lehet. Erre utal a parciális deriválás ' $\partial$ ' jele.

Stacionárius áramlás esetén tehát a folytonosság törvénye

$$\bar{\nabla} \cdot (\rho \cdot \bar{c}) = 0$$

másként fogalmazva, az anyagmegmaradás törvénye következtében a stacionárius áramlásban a fenti összefüggés feltétlenül teljesül.

Amennyiben a stacionárius áramlásban lévő kontínuum összenyomhatatlan is, azaz a sűrűsége a hely függvényében sem változik, a folytonosság törvénye még egyszerűbb formát ölt, mivel az állandó sűrűséget a nabla vektor által kijelölt deriválás hatálya alól kivonhatjuk, másként fogalmazva, a sűrűség állandó lévén, annak deriváltja, zérus

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{c} = 0$$

Ez azt jelenti, hogy összenyomhatatlan kontínuum stacionárius áramlása esetén, az anyagmegmaradás törvénye következtében bármely pontban igaz, hogy a sebességvektor három térkoordináta szerint deriváltjának összege zérus kell legyen.

Érdeemes megvizsgálni, hogy a gyakorlat számára nagyon fontos, csövekben lezajló (többnyire) stacionárius áramlások esetén a folytonosság törvénye milyen alakot ölt. Ilyen áramlások esetében a három térkoordináta közül csak egy játszik fontos szerepet. Ez a cső tengelyével párhuzamosan elhelyezkedő irány, ami kézenfekvő módon legyen az ' $x$ ' irány. Visszatérve tehát a stacionárius áramlás esetére kapott  $\bar{\nabla} \cdot (\rho \cdot \bar{c}) = 0$  összefüggéshez, nyilván csak az ' $x$ ' irányú derivált létezik és annak kell zérusnak lennie. Tudva azt, hogy egy derivált akkor zérus, ha a deriválandó mennyiség állandó, a csövekben lezajló áramlások esetében  $\rho \cdot c = \text{áll.}$  kifejezésnek kell teljesülnie az anyagmegmaradás törvényének megtartásához.

A  $\rho \cdot c$  szorzat mértékegységét megvizsgálva már láttuk, hogy az a csővezeteki áramlásra vonatkoztatva azt jelenti, hogy az egységnyi keresztmetszeten át, időegység alatt mekkora tömegű kontínuum áramlik át. Mivel a csövek esetében a tényleges keresztmetszeten időegység alatt átáramló tömeg ismerete a szükséges, célszerű a kapott egyenletet megszorozni a csőkeresztmetszettel. Csővezetéken történő kontínuum-áramlás esetén tehát az anyagmegmaradás törvényének teljesüléséhez a következő egyszerű összefüggésnek kell teljesülnie

$$A \cdot \rho \cdot c = \dot{m} \left( \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right)$$

Csövekben lezajló stacionárius áramlások esetében tehát az időegység alatt átáramló tömeg, más néven a tömegáram kell állandó legyen, azaz bármely csőkeresztmetszeten időegység alatt ugyanakkora tömeg halad át. Természetesen ez feltételezi, azt, hogy a csővezeték nem ágazik el!

Tovább egyszerűsödik a folytonosság törvénye, ha a csővezetékben áramló kontínuum összenyomhatatlan (például víz). Ilyenkor a sűrűség állandósága következtében a

$$A \cdot c = \dot{V} \left( \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)$$

összefüggésnek kell teljesülnie, azaz összenyomhatatlan kontínuum csővezetéken történő stacionárius áramlása során a térfogatáram állandó. Ez azt a közismert tényt fogalmazza meg, hogy egy szűkülő csővezetékben a folyadékáramlás gyorsul, hiszen a keresztmetszet és a sebesség szorzataként kifejezett térfogatáram állandó kell maradjon az anyagmegmaradás törvényének teljesüléséhez.

### **Önellenőrző kérdések a kontinuitás törvénye fejezethez**

1. Milyen általános fizikai törvény speciális megfogalmazása a kontinuitás törvénye?
2. Hogyan fogalmazható meg szavakban a kontinuitás törvénye egy az áramló kontínuumban elkülönített tetszőleges térrészre?
3. Hogyan írható fel matematikai összefüggés segítségével a kontinuitási törvény általános alakja?
4. Mi a nabla operátor jelentése?
5. Hogyan módosul a kontinuitás törvénye stacionárius áramlás esetén?
6. Hogyan módosul a kontinuitás törvénye összenyomhatatlan kontínuum áramlása esetén?
7. Hogyan írható fel a kontinuitás törvénye összenyomható kontínuum csövekben történő áramlására?
8. Hogyan írható fel a kontinuitás törvénye összenyomhatatlan kontínuum csövekben történő áramlására?

## 6 Ideális kontínuumok dinamikája

### 6.1 A Bernoulli-egyenlet

A gyakorlati áramlástan problémák megoldásának mind a mai napig egyik legjobban használható eszköze a XVIII. század második felében Daniel **Bernoulli** által kidolgozott és az ő emlékére Bernoulli-egyenletnek nevezett törvény, melyet egy fajta energia-megmaradási törvényként lehet leginkább felfogni.

A Bernoulli-egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy az áramlásban elképzelt tetszőleges görbe mentén az áramló ideális kontínuum összes energiataralma nem változik.

Annak érdekében, hogy az általánosnál egyszerűbb, de azért még széles körűen alkalmazható formához jussunk, tételezzük fel, hogy az imént említett görbe egy áramvonal. Ezzel a feltételezéssel élve nem kell foglalkoznunk az egyes áramlásokban jelen lévő örvényekkel.

Az áramló kontínuum összes energiataralmának „összetevői” a következők:

- mozgási energia
- helyzeti energia
- a gyorsító erők által végzett munkával egyenértékű energia
- a nyomásból származó erők által végzett munkával egyenértékű energia.

#### A mozgási energia

A hagyományos módon nem értelmezhető, mivel a kontínuum áramlásával kapcsolatban a tömeg nem értelmezhető. Helyette értelmezhető ugyanakkor a tömegegységre eső energiamennyiség, melynek megváltozása az áramvonal mentén

$$\frac{c^2}{2} \Big|_1 \left( \frac{J}{kg} \right)$$

#### A helyzeti energia

Mindaz igaz rá, amit a mozgási energiával kapcsolatban elmondtunk. Ugyanakkor emlékezzünk vissza a 3.1. fejezetben a különböző erőte-



rekkel kapcsolatban elmondottakra és ezért egy általánosabb összefüggés érdekében az áramló kontínuum helyzeti és esetleges más hasonló energiáinak megváltozása az áramvonal mentén

$$g \cdot z = U|_1^2 \left( \frac{J}{kg} \right)$$

**A gyorsító erők által végzett munkával egyenértékű energia**

A gyorsító erő illetve annak tömegegységre eső része a Sir Isaac **Newton** által a XVII. század végén felállított és emlékére Newton II. törvényének nevezett egyenletből

$$\frac{F}{m} = a = \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \left( \frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2} \right)$$

azaz nem másról van szó, mint a lokális gyorsulásról.

Ezen tömegegységre eső erő által az áramvonal mentén végzett munka nyilván az áramvonal mentén végrehajtott integrálással kapható meg, tehát

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \cdot ds \right) \left( \frac{J}{kg} \right)$$

**A nyomásból származó erők által végzett munkával egyenértékű energia**

A nyomásból származó erők alatt valójában a nyomáskülönbségből származó erőket kell érteni. Valamely 's' hosszúságú, differenciális keresztmetszetű kis henger két véglapja közötti nyomáskülönbség, feltételezve, hogy az áramlás irányában a nyomás nő

$$\frac{\partial p}{ds} \cdot s \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

Az ebből a nyomáskülönbségből származó erő

$$\frac{\partial p}{ds} \cdot s \cdot dA \quad (N)$$

Ennek tömegegységre eső része által az áramvonal mentén végzett munka

$$\int_1^2 \left( \frac{\frac{\partial p}{ds} \cdot s \cdot dA}{m} \cdot ds \right) = \int_1^2 \left( \frac{\frac{\partial p}{ds} \cdot s \cdot dA}{s \cdot dA \cdot \rho} \cdot ds \right) = \int_1^2 \left( \frac{\partial p}{\rho} \right) \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az áramló ideális kontínuum összes energiataralma egy áramvonal mentén nem változik meg, azaz a Bernoulli-egyenlet

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds \right) + \left( \frac{c^2}{2} \right) \Big|_1 + U|_1^2 + \int_1^2 \left( \frac{\partial p}{\rho} \right) = 0$$

Amennyiben a Bernoulli-egyenletet stacionárius áramlásra kívánjuk alkalmazni, és változatlanul feltételezzük az áramvonal mentén történő felírást, a következő, egyszerűbb alakot kapjuk

$$\left( \frac{c^2}{2} \right) \Big|_1 + U|_1^2 + \int_1^2 \left( \frac{\partial p}{\rho} \right) = 0$$

Az egyenlet utolsó tagja leegyszerűsödik, ha a kikötjük, hogy a kontínuum összenyomhatatlan, azaz a sűrűsége állandó

$$\left( \frac{c^2}{2} \right) \Big|_1 + U|_1^2 + \left( \frac{p}{\rho} \right) \Big|_1 = 0$$

A most kapott egyenlet igen sok gyakorlati probléma megoldása alkalmával használható, azonban csak összenyomhatatlan kontínuumok esetében.

Amennyiben a potenciális erők közül csak a gravitációs erőterrel kell számolnunk (ez a leggyakrabban előforduló eset) a Bernoulli-egyenlet a következő formát ölti

$$\left( \frac{c^2}{2} \right) \Big|_1 + (g \cdot z)|_1 + \left( \frac{p}{\rho} \right) \Big|_1 = 0$$

Emlékeztetőül: az egyenlet ebben a formájában a tömegegységre eső mozgási energia, a tömegegységre eső helyzeti energia és a nyomásból származó erők által a tömegegységen végzett munka között teremt kapcsolatot ideális kontínuum áramlása esetén.

Bizonyos gyakorlati alkalmazásokhoz kényelmesebben használható formához jutunk, ha az egyenletet elosztjuk a gravitációs gyorsulással.

$$\left( \frac{c^2}{2 \cdot g} \right) \Big|_1 + z|_1 + \left( \frac{p}{\rho \cdot g} \right) \Big|_1 = 0$$

Ez, természetesen nem változtatja meg az egyenlet lényegét, de az egyes tagok mértékegysége formálisan méter (valójában a súlyegy-

ségre eső energia  $J/N$ ), ami igen kényelmes használatot tesz lehetővé az összenyomhatatlan kontínuumok áramlásával kapcsolatos vizsgálatoknál. Az ilyen formában felírt egyenlet egyes tagjainak, a mértékegységből kiindulva, külön elnevezésük van a meghatározó paraméter szerint, rendre sebességmagasság, geometriai magasság és nyomásmagasság.

A gyakorlatban ugyanezen egyenlet még egy további formája is elterjedt, mely az eredetinek a sűrűséggel történő szorzása útján kapható meg.

$$\left(\frac{c^2}{2} \cdot \rho\right)_1^2 + (\rho \cdot g \cdot z)_1^2 + p_1^2 = 0$$

A tartalmi lényeg továbbra sem változott, de ezúttal az egyes tagok formális mértékegysége  $N/m^2$  (valójában térfogategységre eső energia  $J/m^3$ ). Ez igen kényelmes használatot tesz lehetővé az összenyomható kontínuumokat érintő szellőzéstechnikai problémák tárgyalásakor. A szellőzéstechnikában a kontínuum (levegő) kis sűrűségére és az egyébként nem jelentős szintkülönbségekre tekintettel az egyenlet középső tagjának változását el szokták hanyagolni

$$\left(\frac{c^2}{2} \cdot \rho\right)_1^2 + p_1^2 \approx 0$$

Az egyes tagok elnevezése, ismét a mértékegységből kiindulva, ilyenkor rendre dinamikus nyomás, és statikus nyomás. A kettő összegét, pedig össznyomásnak nevezik, azaz az össznyomás az áramló közeg összes energiataralmát jeleníti meg a térfogategységre vonatkoztatva.

Végezetül érdekes megállapítást tehetünk, abban az esetben, ha szélsőséges esetként azt vizsgáljuk meg, hogy a Bernoulli-egyenlet milyen alakot ölt, ha a kontínuum nyugalomban van, azaz a sebesség zérus. Ebben az esetben két tag kivételével az összes többi zérus lesz, és az egyenlet átmegy a nyugvó kontínuumok alaptörvényébe (hidrosztatika alaptörvénye)

$$U_1^2 + p_1^2 \approx 0$$

Ha most feltételezzük, hogy – amint az a leggyakoribb – kizárólag a gravitációs erőter hat a kontínuumra, akkor átrendezés után a következő jól ismert egyenlethez jutunk

$$\Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta z$$

Ez pedig megegyezik a 4.1 fejezetben tárgyalt összefüggéssel.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a Bernoulli-egyenlet tartalmazza magában speciális esetként a nyugalomban lévő kontínuumra vonatkozó alaptörvényt (hidrosztatika alaptörvénye) is.

### **Önellenőrző kérdések a Bernoulli-egyenlet fejezethez**

1. Hogyan fogalmazható meg szavakban a Bernoulli-egyenlet lényege?
2. Hogyan írható fel az áramló kontínuum tömegegységére eső mozgási energia?
3. Hogyan írható fel az áramló kontínuum tömegegységére helyzeti energia?
4. Hogyan írható fel az áramló kontínuumban a gyorsító erők által végzett, tömegegységére eső munka?
5. Hogyan írható fel az áramló kontínuumban a nyomásból származó erők által végzett, tömegegységére eső munka?
6. Hogyan írható fel a Bernoulli-egyenlet általános alakja egy áramvonalra?
7. Írja fel a Bernoulli-egyenletet stacionárius áramlásban egy áramvonalra!
8. Írja fel a Bernoulli-egyenletet összenyomhatatlan közeg stacionárius áramlására, egy áramvonalra!
9. Hogyan lehetséges kimutatni, hogy a Bernoulli-egyenlet tartalmazza a hidrosztatikai nyomásra vonatkozó alaptörvényt?
10. Mi a nyomásmagasság?
11. Mi a sebességmagasság?
12. Mi az összenyomás?
13. Mi a statikus nyomás?
14. Mi a dinamikus nyomás?

## **6.2 Az impulzus-tétel**

Az impulzus-tétel lényegében Newton II. törvényének eredeti megfogalmazása, mely szerint a mozgásmennyiség mindaddig nem változik meg, amíg a testre erő nem hat vagy a ható erők eredője zérus.

Áramló kontínuumokra ezt a tételt csak akkor lehet alkalmazni, ha feltételezünk egy ún. ellenőrző felületet, mely körülzárja az áramló kontínuum egy tetszés szerint kiválasztott részét, nem akadályozva

meg az áramló kontínuumot abban, hogy rajta átlépjen, bármely irányban. Az impulzus-tételt erre az ellenőrző felületre lehet alkalmazni, ennek egyensúlyát kell felírunk.

Az impulzus idő szerinti megváltozása a newtoni axiómából

$$\frac{d(m \cdot \bar{c})}{dt} = m \cdot \frac{d\bar{c}}{dt} + \bar{c} \cdot \frac{dm}{dt} \quad (N)$$

Ha most feltételezzük, hogy csak stacionárius áramlásra vonatkoztatjuk a levezetést, akkor

$$\frac{d(m \cdot \bar{c})}{dt} = \bar{c} \cdot \frac{dm}{dt} \quad (N)$$

hiszen a sebesség állandó lévén, annak idő szerinti deriváltja zérus. Az összefüggés jobb oldalán a derivált nem más, mint az ellenőrző felületben be és onnan kilépő tömeg mennyisége időegység alatt. Ezt egy 'dA' felületemre a következő módon írhatjuk fel

$$\frac{d(m \cdot \bar{c})}{dt} = \bar{c} \cdot \frac{dm}{dt} = \bar{c} \cdot \frac{\bar{c} \cdot \rho \cdot d\bar{A} \cdot dt}{dt} \quad (N)$$

Egyszerűsítés után

$$\frac{d(m \cdot \bar{c})}{dt} = \bar{c}^2 \cdot \rho \cdot d\bar{A} \quad (N)$$

Végezetül kiterjesztve a kapott eredményt a teljes ellenőrző felületre

$$\frac{d(m \cdot \bar{c})}{dt} = \int_{(A)} \bar{c}^2 \cdot \rho \cdot d\bar{A} \quad (N)$$

Az így meghatározott ún. impulzus erők az ellenőrző felületre ható összes többi erővel kell egyensúlyt tartsanak az impulzus-tétel teljesüléséhez. Fontos tudnunk, hogy az impulzuserők az ellenőrzőfelület azon részein vannak, ahol folyadék valamilyen irányban átlép a felületen és az impulzuserő iránya minden esetben megegyezik a felületvektor irányával, ami a körülhatárolt felületből kifelé mutat.

Az impulzuserők eredőjével egyensúlyt tartó erők:

- a súlyerő,
- a nyomásból származó erők,
- a súrlódási erő,
- az ellenőrző felületre ható külső erő, melyre olyan esetben van szükség, ha az egyensúly egyébként nem állna fenn.

Ezekkel az impulzus-tétel

$$\int_{(A)} c^2 \cdot \rho \cdot d\bar{A} = G - \int_{(A)} (p \cdot d\bar{A})_+ S + R \quad (N)$$

Fontos emlékeznünk arra, hogy az impulzus-tétel csakis stacionárius áramlásokra alkalmazható!

Az egyenlet jobb oldalán található erők közül figyelmet érdemel a nyomásból származó erők eredője. Előjele azért negatív, mert kiszámítása során az egyes felületelemek mentén található nyomást a felületvektorral szoroztuk meg, ami nem az ellenőrző felületre ható erőt adja meg irány szerint, hanem az azzal éppen ellentétes erőt.

Fontos tudnunk, hogy a nyomásból származó erőkkel csak akkor kell számolnunk, ha az ellenőrző felületet nem tudtuk úgy felvenni, hogy annak mentén a nyomás mindenütt azonos legyen. Ha ugyanis a felület mentén mindenütt azonos a nyomás, akkor a nyomásból származó erők egymást tökéletesen kiegyensúlyozzák, eredőjük zérus.

Tekintettel arra, hogy általánosságban az impulzus-tételben szereplő erők a tér különböző irányába mutatnak, az egyes problémák csak vektoriális szemlélettel oldhatók meg. Először meg kell határozni a szabadon felvehető ellenőrző felületre vonatkoztatva az egyes erők nagyságát, majd egy tetszés szerint kiválasztott kezdőpontból elindulva előbb az impulzuserőket kell egymás után (tetszés szerinti sorrendben) felrajzolni, majd ugyanabból a kezdőpontból elindulva az egyenlet jobb oldalán lévő erőket kell egymás után (tetszés szerinti sorrendben) felrajzolni. Utolsóként természetesen a külső erőt kell felrajzolni, ugyanis ezzel kell megérkeznünk az impulzuserők nyílfolyamának végpontjához.

A leírt módszer természetesen csak egyszerű, síkban lejátszódó folyamatok esetében lehetséges. Bonyolultabb esetekben egy tetszés szerint megválasztott koordinátarendszer segítségével fel kell bontani az erőket komponensekre és utána az impulzus-tételt előbb az egyes koordinátairányokban kell alkalmazni, majd a kapott eredményekből lehet meghatározni az eredő erőt.

**Önellenőrző kérdések az impulzus-tétel fejezethez**

1. Hogyan fogalmazható meg szavakban az impulzus-tétel?

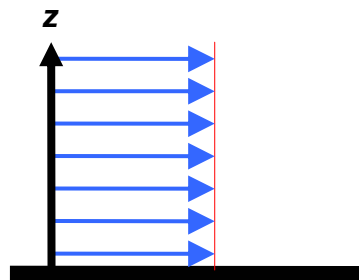
2. Milyen általános feltétel esetén alkalmazható az impulzus-tétel?
3. Mit kell ellenőrző felület alatt érteni?
4. Hogyan számítható ki az impulzus-erő nagysága?
5. Milyen erőkkel tart egyensúlyt az impulzus-erők eredője?
6. Hogyan írható fel az impulzus-tétel matematikai egyenlet formájában?
7. Milyen feltétel fennállása esetén lehet figyelmen kívül hagyni a nyomásból származó erőket az impulzus-tétel alkalmazásakor?

## 7 Valóságos folyadékok áramlása

### 7.1 Súrlódás a valóságos kontínuumban

Az ideális kontínuumok áramlására vonatkozó alaptörvények megismerése után meg kell vizsgálnunk azok alkalmazását a valóságos kontínuumok esetében.

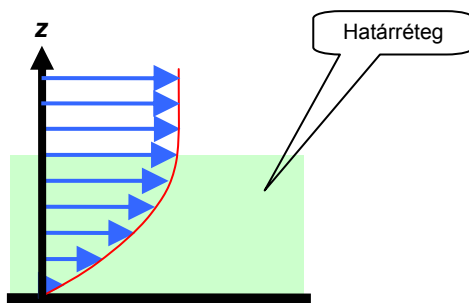
Az ideális kontínuum áramlására az a jellemző, hogy benne a kontínuum-részecskék rendezetten áramlanak, a sebességvektorok egymással párhuzamosak. Egy szilárd test közelében is érvényesül az, hogy a sebességvektorok egymással párhuzamosak és egyenlő nagyságúak.



11. ábra Az ideális sebességprofil

Az ideális és a valóságos kontínuum közötti leglényegesebb különbséget a súrlódás jelenti. Ezt kell vizsgálat tárgyává tennünk.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a valóságos kontínuumban ez nincs mindig így. Különösen jól érzékelhető ez kis sebességű áramlásokban egy szilárd test közelében, ahol tehát bizonyos rétegezethez figyelhető meg.



**12. ábra** A határréteg lamináris (réteges) áramlásban

A sebesség tehát a szilárd test felületén annak sebességével megegyezik, ha az nyugalomban van akkor zérus. Ez a tapadási feltétel. A szilárd test felszínétől távolodva a sebesség egy olyan értékig növekszik, amely érték után közel állandó marad a kontínuum többi részében.

Az áramló valóságos kontínuumnak azt a tartományát, melyben a szilárd test közelében a sebesség zérusról az áramlásra jellemző értékig növekszik határrétegnek nevezzük (12. ábra).

Ennek a határrétegnek a vastagsága számos, egymással bonyolult kapcsolatban lévő tényező függvénye, melyek közül a legfontosabbak:

- az áramlásra jellemző sebesség nagysága,
- a kontínuum anyagi tulajdonságai és hőmérséklete,
- a szilárd test felületének érdessége.

A határréteg közelebbi vizsgálatára a későbbi leckékben még visszatérünk.

A sebességvektorok nagyságának különbözőségét Newton arra vezette vissza, hogy a valóságos kontínuumban a súrlódás következtében csúsztató feszültségek keletkeznek az egymás mellett mozgó rétegek között. A Newton által az ilyen rétegesnek feltételezett áramlásokra felállított összefüggés az áramló kontínuum-súrlódási alapegyenlete



$$\tau = -\mu \cdot \frac{d\bar{c}}{d\bar{z}} \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

Az egyenletben a differenciáhányados az áramlás irányára merőlegesen tapasztalható sebességváltozás, a szorzótényező pedig a kontínuum sűrűdésosságára (viszkozitására) jellemző ún. dinamikai viszkozitási tényező. A negatív előjel azt fejezi, ki, hogy a csúsztatófeszültség az áramlás irányával ellentétesen hat.

A definíciós egyenlet szerint a dinamikai viszkozitási tényező mértékegysége

$$[\mu] = [\tau] \cdot \left[ \frac{1}{\frac{dc}{dz}} \right] = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s$$

A viszkozitás forrása

- a folyékony halmazállapotban lévő kontínuum esetében a molekulák közötti erős kötődés,
- a légnemű halmazállapotban lévő kontínuum esetében az egymással laza kötődésben lévő molekulák egymással történő ütközése.

A dinamikai viszkozitási tényező nem állandó mennyiség, nagysága jelentős mértékben függ a valóságos kontínuum hőmérsékletétől. Folyékony halmazállapotú kontínuum esetében a hőmérséklet emelkedésével a dinamikai viszkozitási tényező csökken, légnemű halmazállapotú kontínuumok esetében ez éppen fordítva tapasztalható. Ennek oka az, hogy folyékony halmazállapot esetében a hőmérséklet emelkedése miatt növekvő belső energia csökkenti a sűrűdést okozó, molekulák közötti, kötődést. A légnemű halmazállapotú kontínuum esetében a molekulák kinetikai energiája növekszik meg, ami az ütközések számának és intenzitásának növekedését és ezzel a viszkozitás növekedését eredményezi.

A valóságos kontínuum sűrűdésosságának fenti értelmezését támasztja alá az a tény, hogy a nyugalomban lévő valóságos kontínuumban nincs sűrűdés. Ez a magyarázata annak, hogy a vízben úszó, akár igen nagy tömegű testet kézzel is el lehet tolni a helyéről, igaz, hogy csak lassan, de ennek oka nem a sűrűdés. A kiöntött folyadék azért nem alkot halmot, mert nyugalmi állapotban nincs belső sűrű-

lódása. A mechanikai súrlódással összehasonlítva kontínuum-súrlódást ez egyik fontos különbség?

Az áramlástani egyenletekben sűrűn fordul elő a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa, amit egyszerűsítő jelöléssel láttak el és kinematikai viszkozitási tényezőnek neveznek

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\frac{N \cdot s}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} \right) = \left( \frac{m^2}{s} \right)$$

### Önellenőrző kérdések a súrlódás a valóságos kontínuumban fejezethez

1. Milyen jellemző tulajdonsága van az ideális folyadéokban kialakuló sebességeloszlásnak?
2. Milyen jellegzetes alakja van a valóságos kontínuumban kialakuló sebességeloszlásnak szilárd test közelében?
3. Mit kell érteni tapadási feltétel alatt?
4. Mit neveznek határrétegnek a valóságos kontínuumok áramlásával kapcsolatban?
5. Milyen tényezők vannak hatással a határréteg vastagságára?
6. Mit fejez ki a Newton-féle kontínuum-súrlódási alapegyenlet?
7. Mit fejez ki a dinamikai viszkozitási tényező és mi a mértékegysége?
8. Mi a súrlódás oka az összenyomható kontínuumok esetében?
9. Mi a súrlódás oka az összenyomhatatlan kontínuumok esetében?
10. Hogyan változik az összenyomható közegek viszkozitási tényezője a hőmérséklet növekedésekor? Miért?
11. Hogyan változik az összenyomhatatlan közegek viszkozitási tényezője a hőmérséklet növekedésekor? Miért?
12. Mi a következménye annak, hogy a valóságos kontínuumokban nincs nyugalmi súrlódás?
13. Mit kell érteni kinematikai viszkozitási tényező alatt

## 7.2 Reológia

A valóságos kontínuumok a súrlódás szempontjából nem viselkednek egyformán. Súrlódásos viselkedésüket a Newton-féle alapegyenlettel

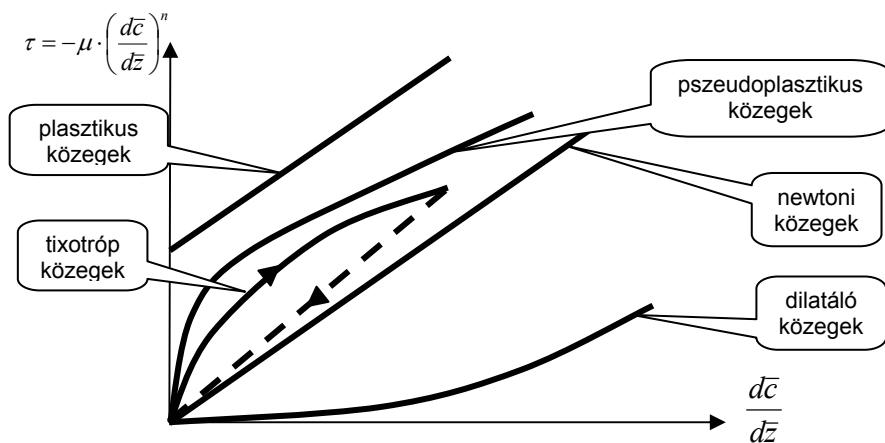
történi összehasonlítással vizsgálják és ilyen módon csoportosítják a különböző valóságos kontínuumokat.

A valóságos kontínuumok sűrűdésosságának vizsgálatával és ezen az alapon történő csoportosításával a reológia foglalkozik.

A Newton által felállított kontínuum-sűrűdési alapegyenlet szerint

$$\tau = -\mu \cdot \frac{d\bar{c}}{d\bar{z}} \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

A valóságos kontínuumok többségének sűrűdésossága jól leírható ezzel az összefüggéssel. Ezeket összefoglaló néven **newtoni közegeknek** nevezik. Ebbe a csoportba tartozik a víz és a hozzá hasonló, a hétköznapi életben folyadéknak nevezett anyag, a levegő és a többi gáz. Ezek közös tulajdonsága tehát, hogy a keletkező csúsztatófeszültség lineárisan változik a sűrűdés következtében fellépő sebességkülönbségek függvényében (13. ábra).



13. ábra Reológiai görbék

Vannak olyan anyagok, melyek nagyon jól hasonlítanak, a newtoni közegekhez, de jelentős nyugalmi sűrűdással rendelkeznek. Ezeket nevezik **plasztikus közegeknek** (13. ábra). Ebbe a csoportba tartoznak pl. a festékek és más hasonló anyagok, melyek belső sűrűdésüknek köszönhetően a szilárd testek felületére történő felkenést követő-

en ott megmaradnak. Természetesen vastag réteg esetén a súly nagyobb lehet a belső súrlódásból származó erőnél és ilyenkor a festék „megfolyik” a felületen.

Az ún. **pszeudoplasztikus közegek** annyiban térnek el a plasztikus közegektől, hogy nyugalmi súrlódásuk a newtoni közegekhez hasonlóan zérus, de a csúsztatófeszültség kis sebességeknél progresszíven növekszik és gyorsan lineárisra válik (13. ábra). Ebbe a csoportba bizonyos, ún. hosszúláncú műanyagok tartoznak.

Bizonyos technológia folyamatokban keletkező porokat, salakot, hamut, pernyét, stb. pl. környezetvédelmi (légszennyezés megakadályozása) vagy egyszerűen praktikus okok miatt célszerű folyadékban elkeverve szállítani. Az ilyen keverékek vizsgálata azt mutatta, hogy a keletkező csúsztató feszültség változása az eddig tárgyalt csoportoktól eltérő jellegű. A nyugalmi súrlódás itt is zérus, de a sebesség növekedésével előbb csak lassan nő és csak nagyobb sebességek esetén gyorsul fel ez a növekedés (13. ábra). Ezeket a keverékeket **dilatáló közegeknek** nevezik.

Végezetül megemlítünk a nyersolaj és más hozzá hasonló közegek különleges tulajdonsággal bírnak. A csúsztatófeszültség változásának jellege attól függ, hogy növekvő vagy csökkenő sebességről van-e szó. Növekvő sebességek esetében a csúsztatófeszültség változásának jellege a pszeudoplasztikus közegekéhez hasonló, ezzel szemben csökkenő sebességeknél a változás a newtoni közegekhez hasonlóan lineáris. Az ilyen tulajdonságú közegeket **tixotróp közegeknek** nevezük.

### **Önellenőrző kérdések a reológia fejezethez**

1. Mivel foglalkozik a reológia?
2. Milyen közegeket nevezünk newtoni közegeknek?
3. Miben különböznek a plasztikus közegek a newtoni közegektől?
4. Milyen súrlódási tulajdonságú közegeket neveznek pszeudoplasztikus tulajdonságúnak?
5. Milyen súrlódási tulajdonságú közegeket neveznek dilatálóknak?
6. Milyen különleges súrlódási tulajdonsága van a tixotróp közegeknek?

### 7.3 Modellkísérletek

Az ideális kontínuumra érvényes alaptörvények valóságos kontínuumra történő levezetése a XIX. században Claude Louis Marie Henri **Navier** francia mérnök és fizikus és Sir George Gabriel **Stokes** ír matematikus, fizikus és csillagász nevéhez fűződik. Az általános mozgásegyenlet emlékükre a Navier-Stokes egyenlet nevet viseli ma. Ez az egyenlet olyan másodrendű parciális differenciálegyenletként adódik, melynek zárt alakban, a Bernoulli-egyenlethez hasonló általános megoldása nem állítható elő. Ezért terjedtek el az áramlásban a modellkísérletek, melyek segítségével a matematikailag megoldhatatlan vagy nehezen megoldható egyenletekkel leírható folyamatok is tanulmányozhatók voltak. Jóllehet a numerikus módszerekkel (véges elem analízis) történő megoldásra a számítástechnika fejlettségének és elterjedtségének köszönhetően ma már számos lehetőség van, ezek ellenőrzésére és esetleges tökéletesítésére azonban változatlanul szükség van modellkísérletekre.

Ahhoz, hogy egy modellkísérlet alapján következtetéseket lehessen levonni a valóságos körülményekre vonatkozóan, két dolgot kell biztosítani:

- a geometriai hasonlóság,
- az áramlástanai hasonlóság.

A geometriai hasonlóság biztosítása azt jelenti, hogy az adott áramlástanai vizsgálat szempontjából fontos minden részletében arányos modellt kell készíteni és gondoskodni kell a környezet méretarányos kialakításáról is. Nyilván nem mindegy, hogy egy csőben elhelyezett tárgy modellezésekor a cső milyen méretű. Annak is méretarányosnak kell lennie!

Az áramlástanai hasonlóság elvileg akkor áll fenn, ha az áramlást meghatározó erők egymáshoz viszonyított aránya a modellkísérlet során és a valóságos körülmények között is azonos.

Az áramlásra jelentősebb befolyással a következők erők vannak:

- Súlyerő
- Tehetetlenségi erő
- Súrlódási erő
- Nyomásból származó erő
- Felületi feszültségből származó erő

A felsorolt öt erő egymáshoz való viszonyára összesen 24 egyenlet írható fel elvileg, ami túl nagy szám. Az általános gyakorlat és a súrlódásosság szempontjából azonban nem is mindegyik erő egyformán fontos. Ha csak azokat tartjuk a vizsgálati körben, melyek a legfontosabbak, akkor a következő három marad

- Súlyerő
- Tehetetlenségi erő
- Súrlódási erő

Ahhoz, hogy a felsorolt erők egymáshoz való viszonyát valamilyen általánosított formában fejezhessük ki, vizsgáljuk meg, hogy az egyes erők milyen alapmenyiségekkel arányosak. Hogy az erők konkrét nagyság ne játsszon szerepet ezért ezt az arányosítást például a térfogategységre eső hányadra végezzük el.

A súlyerő ilyenformán a sűrűség és a gravitációs gyorsulás szorzatával egyenesen arányos

$$\frac{G}{V} \approx \rho \cdot g.$$

A tehetetlenségi erő térfogategységre eső hányada

$$\frac{F_i}{V} \approx \rho \cdot a \approx \rho \cdot \frac{c^2}{l}$$

kifejezéssel arányosítható.

A súrlódási erőre vonatkozóan a következő megfontolást kell tenni

$$\frac{F_s}{V} = \frac{\tau \cdot A}{V} = \frac{1}{V} \cdot \mu \cdot \frac{dc}{dz} \cdot A \approx \frac{1}{l^3} \cdot \mu \cdot \frac{c}{l} \cdot l^2 = \mu \cdot \frac{c}{l^2}$$

A gyakorlati áramlástani problémák szempontjából elsősorban a súrlódási erő és a tehetetlenségi erő viszonya valamint a súlyerő és a tehetetlenségi erő viszonyozása a meghatározó.

### **A súrlódási erő és a tehetetlenségi erő viszonyozása**

$$\frac{\rho \cdot \frac{c^2}{l}}{\mu \cdot \frac{c}{l^2}} = \frac{c \cdot l}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{c \cdot l}{\nu} = \text{Re}$$

A kapott viszonyszám alkalmazására a csővezeteki áramlások kutatóinak egyik legnevesebbje a brit mérnök, Osborne **Reynolds** tett javaslatot 1883-ban. Az ő emlékére ezt a viszonyszámot, mely a legfontosabb, áramlástani hasonlóságot kifejező viszonyszám, röviden hasonlósági kritérium (feltétel), Reynolds-számnak (*Re*-szám) nevezik.

A *Re*-szám tehát az áramlás jellemző sebességének és az áramlásra jellemző lineáris méretnek a szorzata, osztva az áramló közeg sűrűlési tulajdonságait kifejező kinematikai viszkozitással. A *Re*-szám, mint viszonyszám, mértékegység nélküli szám.

A *Re*-szám olyan áramlások hasonlósága esetén meghatározó, melyeknél a sűrűlési erő és a tehetetlenségi erő játszik döntő szerepet. Az áramlások többsége ide tartozik. Ilyen áramlások az ipari szempontból nagy jelentőségű, különböző csövekben és csatornáknban lezajló áramlások valamint az áramló kontínuummal (folyadékkal, gázzal, stb.) kitöltött, határolatlan térben elhelyezkedő szilárd test (repülőgép, közúti közlekedési jármű) körül kialakuló áramlások.

### A súlyerő és a tehetetlenségi erő viszonyszáma

$$\frac{\rho \cdot \frac{c^2}{l}}{\rho \cdot g} = \frac{c^2}{l \cdot g} = \frac{c}{\sqrt{l \cdot g}}$$

A kapott viszonyszámot a hajók mozgása során keletkező ellenállási erők meghatározására vonatkozó elmélet megalapozója, a brit származású mérnök és hajóépítő, William **Froude** emlékére Froude-számnak (*Fr*-szám) nevezik. A *Fr*-szám tehát szintén az áramlástani hasonlóságot biztosító kritérium (feltétel) olyan esetekben, amikor az áramlás döntően a súlyerő és a tehetetlenségi erő hatása alatt áll. A *Fr*-szám brit származású mérnök

A *Fr*-szám tehát az áramlás jellemző sebesség és az áramlásra jellemző lineáris méret és a gravitációs gyorsulás szorzatából vont négyzetgyök hányadosa.

A *Fr*-szám olyan áramlások hasonlósága esetén meghatározó, melyeknél a súlyerő és a tehetetlenségi erő játszik döntő szerepet. Ilyen áramlás a víz felszínén úszó hajók mozgásával kapcsolatos áramlások

és a folyadékok felszínén kialakuló hullámmozgások az ún. sekélyvízi hullámok terjedése.

Fontos felhívni a figyelmet arra, hogy a hasonlósági kritériumok összefüggésében szereplő „jellemző lineáris méret” az áramlástanban a leginkább jellemző méret, mely a vizsgált jelenség függvényében más és más lehet. Például egy csőben lezajló áramlás esetében a cső átmérője, egy meleg fűtőtest mellett felszálló levegő áramlása esetében a fűtött felület magassága, stb.

Az ismertetett két hasonlósági kritérium mellett igen nagy számban vannak még hasonlósági kritériumok a modellkísérletek hasonlóságának biztosítására. Hasonlósági kritériumokat azonban nem csak az áramlástanban a jelenségek modellezésénél, hanem például az áramlástanban egyébként sok tekintetben szoros kapcsolatban lévő hőtanban a jelenségek modellezésénél is használnak. A hasonlósági kritériumokat, lévén azok mértékegység nélküli ún. nevezetlen számok, egymással össze lehet szorozni, el lehet osztani, a hasonlósági kritériumot lehet hatványra emelni, úgy ahogy azt az adott jelenség modellezése megkívánja.

Az áramlástanban a hasonlóság biztosítása tehát úgy történik, hogy a modellkísérletnél a kiválasztott hasonlósági kritérium ugyanazon értékkel kell biztosítani, mint amilyen majd a valóságos körülmények között megvalósul.

A pontos modellezés megkívánja, hogy minden hasonlósági kritériumra vonatkozóan biztosítsák az azonosságot a modellkísérlet és a valóság között. A gyakorlati modellezésnél azonban komoly problémát jelent, hogy többnyire már két hasonlósági kritérium azonosságát sem lehet biztosítani. Éppen ezért, többnyire kényszerűségből, megelégszenek a vizsgált jelenség szempontjából legfontosabbnak tartott hasonlósági kritérium azonosságának biztosításával.

### **Önellenőrző kérdések a modellkísérletek fejezetéhez**

1. Miért alkalmaznak modellkísérleteket az áramlástanban a jelenségek vizsgálatakor?
2. Milyen két alapfeltételt kell biztosítani egy áramlástanban a jelenség modellkísérlettel történő vizsgálatához?



3. Mit kell érteni geometriai hasonlóság alatt?
4. Mit kell érteni áramlástanai hasonlóság alatt?
5. Hogyan biztosítható az áramlástanai hasonlóság egy modellkísérlet esetében?
6. Mit neveznek *Re*-számnak?
7. Hogyan kell kiszámítani a *Re*-számot?
8. Milyen áramlástanai jelenségek modellezésekor meghatározó a *Re*-szám?
9. Mit neveznek *Fr*-számnak?
10. Hogyan kell kiszámítani a *Fr*-számot?
11. Milyen áramlástanai jelenségek modellezésekor meghatározó a *Fr*-szám?

## 7.4 Csövekben lezajló áramlások

### 7.4.1 A veszteséges Bernoulli-egyenlet

A Bernoulli-egyenlet az áramló kontínuum összes energiatartalmának állandóságát fejezi ki ideális kontínuum esetében. Ha tartjuk magunkat ahhoz, hogy az egyenletet

- áramvonal mentén alkalmazzuk,
- stacionárius áramlásra alkalmazzuk,
- összenyomhatatlan kontínuumra vagy összenyomható kontínuum olyan áramlására, melynek során számottevő nyomásemelkedés nincs, azaz a sűrűség állandónak tekinthető

akkor a következő alakú egyenlettel állunk szemben:

$$\frac{c_1^2}{2} + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Ahhoz, hogy ezt az egyenletet valóságos kontínuumra is lehessen alkalmazni, amikor az áramvonal mentén az összes energiatartalom nem marad állandó, az egyenlet jobboldalát ki kell egészíteni egy taggal

$$\frac{c_1^2}{2} + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\Delta p'}{\rho} \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az egyenletet ebben a formájában az összenyomhatatlan kontínuumokra érvényes veszteséges Bernoulli-egyenletnek nevezik.

Az egyenlet jobb oldalán az utolsó tag azt az energiamennyiséget hivatott kifejezni (tömegegységre vonatkoztatva), mely a valóságos kontínuum sűrűdásossága miatt elvész, miközben a választott áramvonal mentén az '1' pontból a '2' pontba jutunk.

Felmerülhet a kérdés, hogy miért társítunk nyomás jellegű mennyiséget a veszteséghez. Ennek oka az, hogy valójában ez az egyetlen olyan tagja a Bernoulli-egyenletnek, melyet az energiaveszteség érinthet. A sebesség minden tekintetben alá van rendelve a folytonosság törvényének, tehát a sűrűdés jelenléte általában nem érintheti a sebességet, ha feltételezzük, hogy a csővezetéken átáramló közeg mennyisége állandó. Értelmszerűen a szintkülönbségekkel összefüggő tagot szintén nem befolyásolhatja a fellépő sűrűdés. Marad tehát a nyomás. Ezért a  $\Delta p'$  mennyiséget nyomásveszteségnek nevezzük.

A nyomásveszteség értelmezéséhez tehát a következő megfogalmazás tartozik: a nyomásveszteség azt fejezi ki, hogy az ideális körülmények között az áramvonal végpontjában kiszámított nyomásnál mennyivel lesz kisebb a nyomás valóságos kontínuum áramlása esetén.

Ugyanakkor fontos hangsúlyozni, hogy a nyomásveszteség általában nem azonos az áramvonal ill. a csővezeték mentén mérhető nyomáskülönbséggel. Ennek megértéséhez alakítsuk át a veszteséges Bernoulli-egyenletet

$$\Delta p' = \left( \frac{c_1^2}{2} \cdot \rho + \rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 \right) - \left( \frac{c_2^2}{2} \cdot \rho + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2 \right) \quad \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

Mint látható a nyomásveszteség az ún. Bernoulli-összegek különbsége (az elvesztett energiamennyiség tömegegységre vonatkoztatva). Az egyenletből az is látható, hogy csak egy esetben igaz, hogy a csővezetéken mérhető nyomáskülönbség megegyezik a nyomáskülönbséggel, amikor a csővezeték állandó keresztmetszetű és vízszintes.

Pontos definíció szerint a nyomásveszteség nem más, mint az áramló kontínuum térfogategységére eső energiaveszteség;

$$\left( \frac{J}{m^3} \right) = \left( \frac{N \cdot m}{m^3} \right) = \left( \frac{N}{m^2} \right).$$

A gyakorlat számára tehát olyan, lehetőleg egyszerű, összefüggésekre van szükségünk, mely a nyomásveszteség kiszámítását teszi lehető-

vé. Ezeknek az összefüggéseknek a felállításához szabatos elméleti vizsgálatok, kísérletek és mérések együttes alkalmazásán alapuló eljárásrendszert dolgoztak ki.

### **Önellenőrző kérdések a veszteséges Bernoulli-egyenlet fejezetéhez**

1. Hogyan írható fel a Bernoulli-egyenlet csövekben lezajló veszteséges áramlásokra?
2. Mit kell érteni nyomásvesztés alatt?
3. Milyen esetben igaz az, hogy valóságos kontínuum áramlásakor a csővezeték két pontján mért nyomások különbsége a nyomásvesztés?

### **7.4.2 Lamináris és turbulens áramlás csövekben**

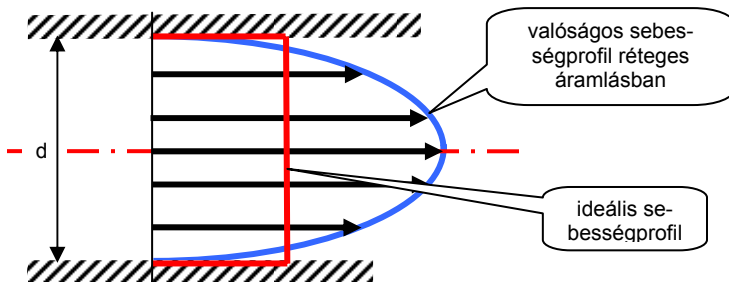
A csövekben lezajló áramlások tanulmányozása során a továbbiakban feltételezzük, hacsak külön említés nem történik, hogy az áramló kontínuum összenyomhatatlan és a teljes keresztmetszetet kitölti, azaz a kontínuum szabad felszínnel nem rendelkezik. Az ilyen áramlást zártnak is nevezik.

A csövekben kialakuló áramlás a csőkeresztmetszet alakjától függően több-kevesebb szimmetriát mutat. Az egyszerűség kedvéért kör keresztmetszetet elképzelve, a csővezeték valamely metszetében a sebesség változását az átmérő mentén megmutató görbe az ún. sebességprofil.

A sebességprofilnak két jellegzetes képe van.

A már korábban a Newton-féle folyadéksúrlódási alapegyenlet (6.1. fejezet) kapcsán említett réteges áramlás esetén a cső valamely keresztmetszetében a sebességváltozását, a sebességprofil a **14. ábra** mutatja.

A sebességvektorok egymással párhuzamosak, nagyságuk a faltól távolodva egyre nő és a cső közepén éri el a maximumot. A fal melletti, molekuláris vastagságú, réteg sebessége zérus (tapadási feltétel). Az ilyen sebességprofilú áramlást réteges (lamináris) áramlásnak nevezzük.



**14. ábra** Lamináris áramlás sebességprofilja csőben

Az áramlás rendezettsége lehetővé teszi a sebességeloszlást leíró függvény meghatározását.

A súrlódás következtében keletkező csúsztatófeszültségből származó erő a súrlódás miatt keletkező nyomáskülönbség, a nyomásvesztés ( $\Delta p$ ) segítségével is kifejezhető

$$\tau \cdot d \cdot \pi \cdot l = -\mu \cdot \frac{dc}{dr} \cdot d \cdot \pi \cdot l = \Delta p' \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \quad (N)$$

A változók szétválasztása után a sebességre rendezett egyenlet

$$\int_0^c dc = -\Delta p' \cdot \frac{1}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot \int_{r_0}^r r \cdot dr$$

A sebességeloszlást leíró függvény tehát

$$c = \frac{\Delta p'}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot (r_o^2 - r^2) \quad \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

azaz egy másodfokú parabola egyenlete, tehát a sebességprofil egy másodfokú forgási paraboloid.

A maximális sebesség nyilván a keresztmetszet közepén van, ahol  $r=0$ , tehát

$$c_{\max} = \frac{\Delta p' \cdot r_o^2}{4 \cdot \mu \cdot l} \quad \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

Felhasználva azt a geometriai törvényszerűséget, hogy a másodfokú forgási paraboloid térfogata éppen fele akkora, mint az azonos alapkörű és magasságú egyenes körhenger térfogata, a keresztmetszetben az átlagos sebesség, ami egyébként az ideális áramlás sebességével azonos

$$c_{\text{átlag}} = \frac{c_{\text{max}}}{2} \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

A lamináris áramlással kapcsolatosan fel kell hívni a figyelmet arra, hogy a lamináris áramlást nem szabad összekeverni a stacionárius áramlással. A lamináris áramlásban a sebességvektorok egymással párhuzamosak, de nagyságuk rétegenként egymástól különböző. Nem esik azonban szó arról, hogy az idő függvényben változik-e a nagyságuk. Minden nehézség nélkül el lehet képzelni egy olyan réteges áramlást, melyben a sebességek egymással párhuzamosak, de nagyságuk az időben növekszik vagy csökken. Tehát, bár nem túl gyakori, de a lamináris áramlás is lehet instacionárius.

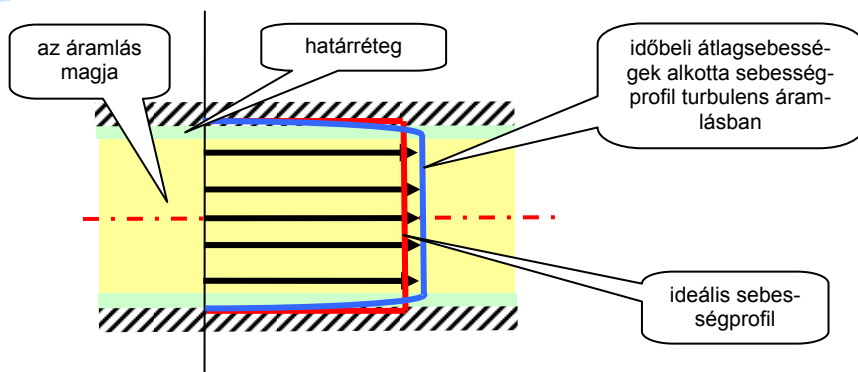
Mivel az áramlás tulajdonságai nem mindig figyelhetők meg, szükség van egy olyan „eszközre”, melynek segítségével nagy biztonsággal meg lehet becsülni, hogy egy adott áramlás réteges-e. Ere a célra szolgál a modellkísérletek kapcsán megismert  $Re$ -szám.

A tapasztalatok azt mutatják, hogy réteges (lamináris) áramlás csak kb. 2300 alatti  $Re$ -számok esetében alakul ki.

A másik jellegzetes áramlási forma az eddig megismert tökéletesen rendezett réteges áramlással szemben tökéletesen rendezetlen, kavargó, idegen szóval turbulens.

A turbulens áramlásra jellemző kavargás, örvénylés abból adódik, hogy a sebességtér minden pontjában a sebesség igen gyorsan és szeszélyesen változik, mind irányát, mind nagyságát tekintve.

Ebből következik, hogy a réteges áramlás esetében alkalmazott módszer szerinti sebességprofilról itt nem lehet beszélni. Ugyanakkor az is igaz, hogy a sebességtér vagy mondjuk a keresztmetszet egy tetszős szerint választott pontjában az ott mutatkozó sebességek időbeli átlagáról már lehet beszélni. A 15. ábra egy csővezeték keresztmetszetében a turbulens áramlásra jellemző, időbeli átlagsebességek alkotta sebességprofil.



**15. ábra** Turbulens áramlás sebességprofilja csőben

Az áramlás két jól elkülöníthető tartományból épül fel. A fal mellett egy többé-kevésbé vastag ún. **határréteg** található. Ennek jellemzője, hogy ezen belül az áramlás gyakorlatilag lamináris és a sebesség a falnál érvényes zérus értékről (tapadási feltétel) az áramlás egészére jellemző átlagos értékre változik. A gyakorlatban előforduló áramlások esetében a határréteg igen vékony. Az áramlásnak a határrétegen kívüli részét az **áramlás magjának** nevezik. Erre az jellemző, hogy az időbeli átlagsebesség minden pontban gyakorlatilag azonos.

A 15. ábrára tekintve nyilvánvaló, hogy minél nagyobb részt tölt ki a csővezetékben az áramlás magja annál közelebb esik a magban észlelhető átlagsebesség az ideális körülmények mellett adódó sebességhez. Megjegyzendő, hogy a gyakorlatban előforduló legtöbb esetben annyira vékony a határréteg, hogy az áramlás magjában uralkodó időbeli átlagsebesség jó közelítéssel egyenlőnek vehető az ideális áramlás sebességével.

Jóllehet a turbulens áramlás a folytonosan változó sebességek miatt eredendően instacionárius, ugyanakkor a sebességek időbeli átlaga tekintetében mégis lehetséges turbulens áramlással kapcsolatban is stacionárius vagy inkább kvázistacionárius áramlásról beszélni.

A 15. ábrán rajzolt átlagsebesség-profilnak megfelelő turbulens áramlás a gyakorlatban többnyire csak 10000-nél nagyobb  $Re$ -számok esetén figyelhető meg.

Az eddig említett két „határ” közötti tartományban ún. átmeneti áramlásról beszélünk. Az átmeneti áramlás a rá érvényes  $Re$ -szám értéké-

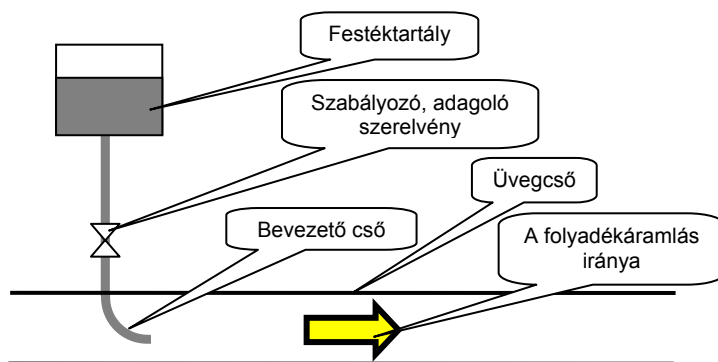
től függően a lamináris vagy a turbulens áramláshoz esik közelebb. A lamináris és a turbulens áramlás közötti átmenet mechanizmusát egy adott geometriájú, tehát állandó átmérőjű csővezeték esetében lehet a legkönnyebben megérteni.

Egy ilyen állandó átmérőjű cső esetében a lamináris állapotból a sebesség növelésével tudunk közelíteni a turbulens áramlás felé. A kb. 2300-as  $Re$ -szám elérésekor a cső középvezetékében lehet észlelni először a rendezett, párhuzamos sebességvektorokkal és áramvonalakkal jellemzett áramlás rendezetlenné válását. A  $Re$ -szám növelésével a rendezetlen, turbulens áramlásban lévő, a cső közepét elfoglaló turbulens mag elkezd szélesedni. Ilyen módon a fokozatosan növekvő  $Re$ -számmal párhuzamosan növekszik a turbulens mag mérete és ezzel párhuzamosan egyre csökken a lamináris áramlásban lévő határreteg vastagsága. Nagyjából 10000-es  $Re$ -szám körül tapasztalható, hogy a turbulens mag gyakorlatilag a teljes keresztmetszetet kitölti, a lamináris határreteg a maghoz képest minimális vastagságúra zsugorodik.

A lamináris áramlásból a turbulensbe történő átmenet kísérleti úton is megfigyelhető, ha az áramlást láthatóvá tudjuk tenni. Az áramlás láthatóvá tételéhez bizonyos technikai feltételek biztosítása szükséges. Szükség van olyan anyagra (folyadékra, gázra), mely az áramló közeggel, annak zavarása nélkül együtt mozog és attól szemmel látható módon elkülöníthető. Ebből következik, hogy az áramvonal, a nyomvonal és a pályagörbe közül elvileg csak a pályagörbe tehető láthatóvá, hiszen ezen a görbén sorakoznak a folyadékhoz adagolt anyag részecskéi.

Az is nyilvánvaló, hogy igazából a lamináris áramlások vizualizálásának van jelentősége, mivel a turbulens áramlásban az intenzív keveredés miatt az említett görbék közül egyik sem különböztethető meg. Ugyancsak fontos és az előzőekben elmondottakból levonható következtetés, hogy leginkább a lamináris és egyúttal stacionárius áramlások láthatóvá tétele ad látványos eredményt. Ekkor ugyanis a három jellemző görbe egybe esik.

A folyadékáramlások láthatóvá tételének egyik lehetséges módja, amikor folyadékba festéket vezetnek.



**16. ábra** A folyadékáramlás láthatóvá tétele

Ehhez egy üvegcsőre és egy olyan eszközre van szükségünk, melynek segítségével kicsiny és jól szabályozható mennyiségben, az üvegcsőben áramló folyadékkal azonos sűrűségű, de színben erősen különböző festéket tudunk bevezetni az áramló folyadékba. Az elvi elrendezést a 16. ábra mutatja.

A folyadékok áramlásának láthatóvá tételének egy érdekes módja, amikor a folyadékba helyezett vékony elektromosan vezető szálon időnként áramot vezetnek át. Ilyenkor az elektromos áram hatására vízbontás történik. A keletkező és tovasodródo gázbuborékok láthatóvá teszik az áramlást. Mivel a gázbuborékok és a folyadék között sűrűségkülönbség és ebből származó felhajtóerő van, vízszintes tengelyű áramlásban a megfigyelés csak kis távolságon belül ad helyes képet. Függőleges tengelyű áramlás esetében azt, ugyancsak a felhajtóerő miatt jobb felfelé irányítani, mint lefelé.

Amennyiben légnemű közeg áramlását vizsgálják akkor lényegesen egyszerűbb a helyzet, mivel a láthatóvá tételt füst bevezetésével könnyen meg lehet oldani.

Lamináris áramlás esetén a bevezetett festék ill. gáz esetében füst, egyetlen vonalként húzódik a bevezetés helyétől az áramlás irányába.

Az ún. átmeneti áramlás esetén a bevezetett festék ill. füst már nem zavartalan vonalként jelenik meg a bevezetés helyétől. Egyrészt „imbolyog a vonal, másrészt az áramló kontínuum egy részét megszínezi. Turbulens áramlás esetén a bevezetés helyétől gyakorlatilag az áramló kontínuum egésze felveszi a színező anyag színét. Ennek oka per-



sze a turbulens áramlásban meglévő, az áramlás fő irányára merőleges, keveredést eredményező sebességkomponensek.

Befejezésül felhívjuk a figyelmet arra, hogy a gyakorlatban előforduló áramlások, melyeket többnyire szivattyú vagy ventilátor segítségével hoznak létre és tartanak fenn (kényszerített áramlások) döntő többsége turbulens. Lamináris áramlás többnyire csak olyankor figyelhető meg, amikor az áramlás pl. viszonylag kis hőmérsékletkülönbség hatására keletkező sűrűségkülönbség hatására jön létre (szabad áramlás).

### **Önellenőrző kérdések a lamináris és turbulens áramlás csövekben fejezethez**

1. Milyen esetben nevezik a csővezetéki áramlást zártnak?
2. Mit kell érteni sebességprofil alatt csővezetéki áramlás esetén?
3. Mit értenek lamináris áramlás alatt?
4. Milyen jellegzetessége van a lamináris áramlás sebességprofiljának?
5. Hogyan állapítható meg vizuális megfigyelés nélkül, hogy egy áramlás lamináris-e?
6. Mit értenek turbulens áramlás alatt?
7. Milyen jellegzetességei vannak a turbulens áramlás sebességprofiljának?
8. Hogyan állapítható meg vizuális megfigyelés nélkül, hogy egy áramlás turbulens-e?
9. Lehet-e beszélni egy turbulens áramlással kapcsolatban stacionárius jellegéről?
10. Mit értenek a gyakorlatban átmeneti áramlás alatt?
11. Hogyan történik a lamináris áramlásból a turbulens áramlásba történő átmenet?
12. Mit kell érteni az áramlás láthatóvá tétele alatt?
13. Milyen általános feltételeket kell kielégíteni egy áramlás láthatóvá tételének technikai megvalósításához?
14. Milyen áramlásokat lehet láthatóvá tenni?
15. Milyen módszerrel lehet láthatóvá tenni a folyadékáramlást?
16. Milyen módszerrel lehet láthatóvá tenni a gázok áramlását?
17. Hogyan jelzi a folyadékba bevezetett festék a lamináris áramlást?
18. Hogyan jelzi a folyadékba bevezetett festék az átmeneti áramlást?

## 19. Hogyan jelzi a folyadékba bevezetett festék a turbulens áramlást?

### 7.4.3 Nyomásveszteség egyenes csövekben

Foglalkozunk először az egyszerűség kedvéért összenyomhatatlannak feltételezett kontínuum egyenes csövekben lezajló áramlása során keletkező nyomásveszteség meghatározásával.

A súrlódásból származó csúsztatófeszültség következtében keletkező erő, mint azt korábban láttuk (7.4.2 fejezet) kifejezhető a nyomásveszteséggel, mely szintén a súrlódás következménye

$$\tau \cdot d \cdot \pi \cdot l = \Delta p' \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \quad (N)$$

Tekintettel arra, hogy a Bernoulli-egyenletben a térfogategységre eső mozgási energia (dinamikus nyomás) mértékegysége azonos a csúsztatófeszültségével és, amint azt tudjuk a csúsztatófeszültség összefüggésben áll a sebességgel, célszerű a következőt alkalmazni

$$\tau \approx \frac{c^2}{2} \cdot \rho \quad \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

Alkalmazva ezt a helyettesítést majd átrendezve az egyenletet, a nyomásveszteség

$$\Delta p' = 4 \cdot K \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c_{\text{átl.}}^2}{2} \cdot \rho = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c_{\text{átl.}}^2}{2} \cdot \rho \quad \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

Ez az összefüggés az egyenes csövekben keletkező nyomásveszteség meghatározásának kérdését egymástól függetlenül, azonos időben, a XIX. század végén megoldó német és francia fizikusok Gotthilf Heinrich Ludwig **Hagen** és Jean Louis Marie **Poiseuille** tiszteletére ma a gyakorlatban Hagen-Poiseuille összefüggés néven emlegetik.

A Hagen-Poiseuille egyenlet azt fejezi ki, hogy az egyenes csővezetékben keletkező nyomásveszteség

- egyenesen arányos az áramló kontínuum tömegegységére eső mozgási energiával és a csővezeték hosszával,
- fordítottan arányos a csővezeték átmérőjével.

Az egyenletben az állandó többnyire csak kísérleti úton határozható meg.

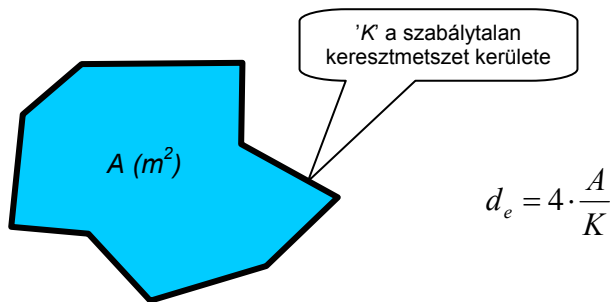
A Hagen-Poiseuille egyenlet igen nagy jelentőségű. Alaposabban megvizsgálva felismerhetjük, hogy az egyenes csővezeték nyomás-

veszteségének nagyságát döntő mértékben, a négyzetten szereplő áramlási sebességnél is erősebben befolyásolja a csőátmérő. A valóságban egy csővezeték esetében alapadatnak számít a térfogatáram, azaz a csővezetéken szállítandó közeg mennyisége. Ezt szem előtt tartva átalakítható a Hagen-Poiseuille egyenlet

$$\Delta p' = \text{áll.} \cdot \frac{l}{d} \cdot \left( \frac{\dot{V}}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}} \right)^2 \frac{\rho}{2} = \text{áll.} \cdot \frac{l}{d^5} \cdot V^2 \cdot \rho$$

Az összefüggés ebben a formájában azt mutatja, hogy a nyomásveszteség az átmérő ötödik hatványával fordítottan arányos, tehát az átmérőt a felére csökkentve a nyomásveszteség – azonos térfogatáram mellett – 32-szeresére nő. Egy csővezeték átmérőjének egy adott térfogatáramhoz történő kiválasztása tehát igen nagy gondosságot igényel. Másként fogalmazva egy adott csővezetéken csak bizonyos határok közötti térfogatáramú kontínuum szállítható mérsékelt nyomásveszteség mellett.

Ki kell itt térnünk arra a kérdésre, hogyan kell eljárni olyankor, amikor a vizsgált cső nem kör keresztmetszetű. Kézenfekvőnek látszik egy helyettesítő vagy egyenértékű átmérő fogalmának bevezetése, amelyet az eddigi kör keresztmetszet átmérője helyébe írhatunk be.



**17. ábra** Az egyenértékű átmérő

Az egyenértékű átmérőt a következő feltétel alapján határozhatjuk meg:

egy szabálytalan keresztmetszet esetében egyenértékű átmérőnek nevezzük annak a kontínuummal teljesen kitöltött kör keresztmetszetnek az átmérőjét, melyen azonos mennyiségű kontínuumot áthajtva azonos nagyságú nyomásvesztés keletkezik.

A feltétel alapján következő egyenletet írhatjuk fel az ábra jelöléseit alkalmazva

$$\tau \cdot \frac{K \cdot l}{A} = \tau \cdot \frac{d_h \cdot \pi \cdot l}{\frac{d_h^2 \cdot \pi}{4}}$$

Az egyenlet baloldalán a szabálytalan keresztmetszetű, 'l' hosszúságú cső palástfelületén keletkező, a keresztmetszetének egységére eső erő, a jobboldalán a helyettesítő kör keresztmetszetű és szintén 'l' hosszúságú cső palástfelületén keletkező és a keresztmetszet egységére eső erő található.

Az egyszerűsítések után az egyenértékű átmérő a következő összefüggés szerint számítható ki:

$$d_e = 4 \cdot \frac{A}{K}$$

Az egyenletben tehát 'A' a szabálytalan keresztmetszet nagysága, 'K' pedig a kerülete.

A nem kör keresztmetszeteknél ilyen módon kiszámított egyenértékű átmérő minden helyen a kör keresztmetszet átmérőjének helyébe léphet, beleértve pl. a *Re*-szám összefüggését is.

Ugyancsak megjegyezzük, hogy ez az összefüggés összenyomható közegek esetében is alkalmazható.

### **Önellenőrző kérdések a nyomásvesztés egyenes csövekben fejezethez**

1. Mit fejez ki a Hagen-Poiseuille egyenlet?
2. Milyen összefüggésben van a térfogatáram és az egyenes csőben keletkező nyomásvesztés?
3. Milyen összefüggésben van a csőátmérő és az egyenes csőben keletkező nyomásvesztés állandó sebesség esetén?
4. Mit kell érteni egyenértékű csőátmérő alatt?
5. Hogyan kell kiszámítani az egyenértékű csőátmérőt?

### 7.4.3.1 A dimenzióanalízis

A dimenzióanalízis egy spekulatív eljárás, mely egy adott fizikai jelenséget nagy valószínűséggel befolyásoló fizikai mennyiségek mértékegységei alapján állít fel összefüggéseket azok között. A dimenzióanalízis alapján felállított összefüggések kísérleti vizsgálatok alapját képezik, helytállóságukat csak ezek a kísérleti vizsgálatok bizonyíthatják be.

A dimenzióanalízis, mint módszer alkalmazását a Hagen-Poiseuille egyenlet levezetésével mutatjuk be.

A nyomásvesztéssel összefüggő fizikai mennyiségek a következők:

- a kérdéses cső hossza ( $l$ ),
- a kérdéses cső keresztmetszete ( $A$ ),
- a közeg sűrűsége ( $\rho$ ),
- az áramlás sebessége ( $c$ ),
- a dinamikai viszkozitás ( $\mu$ ).

Tételezzük fel, hogy létezik az alábbi kapcsolat a nyomásvesztés és a felsorolt fizikai mennyiségek és mértékegységeik között

$$\Delta p' = A^x \cdot c^y \cdot \rho^z \cdot \mu^w \cdot l^q \cdot K$$

Az egyes, befolyással bíró, fizikai mennyiségek hatványkitevőinek meghatározása után kísérleti úton lehet a 'K' arányossági tényezőt meghatározni.

Léteznie kell tehát egy vagy több alábbi szerkezetű kifejezésnek, mely mértékegység nélküli (dimenziótlan) mennyiséget ad!

$$\Pi = p^{x_1} \cdot A^{x_2} \cdot c^{x_3} \cdot \rho^{x_4} \cdot \mu^{x_5} \cdot l^{x_6}$$

A lehetséges megoldások megtalálásához írjuk fel az ún. dimenziómátrixot, mely a fizikai mennyiségek mértékegységeiben szereplő alapegységek hatványkitevőiből álló mátrix. Ez esetünkben a következő

	$p$	$A$	$c$	$\rho$	$\mu$	$l$
$kg$	1	0	0	1	1	0

<i>m</i>	-1	2	1	-3	-1	1
<i>s</i>	-2	0	-1	0	-1	0

A dimenziómátrix soraiból 3 lineáris egyenlet írható fel:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_4 + x_5 &= 0 \\
 -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 + x_6 &= 0 \\
 -2x_1 - x_3 - x_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Az egyenletek száma mindössze három, az ismeretleneké pedig hat, ami azt jelenti, hogy három ismeretlent szabadon lehet felvenni valamilyen értékkel. A három önkényesen kiválasztott ismeretlen legyen 'x<sub>1</sub>', 'x<sub>2</sub>' és 'x<sub>3</sub>'. A kiválasztott értékek, a lehető legegyszerűbb megoldás érdekében '0' és '1' legyenek.

A lineáris egyenletrendszer megoldásai.

<i>x</i> <sub>1</sub>	<i>x</i> <sub>2</sub>	<i>x</i> <sub>3</sub>	<i>x</i> <sub>4</sub>	<i>x</i> <sub>5</sub>	<i>x</i> <sub>6</sub>
1	0	0	1	-2	2
1	0	1	2	-3	3
1	1	0	1	-2	0
1	1	1	2	-3	1
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	-1	1
0	1	0	0	0	-2
0	1	1	1	-1	-1

A lineáris egyenletrendszer megoldásai segítségével felírt dimenziótlan kifejezések, soronként haladva a számozással

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \frac{p \cdot \rho \cdot l^2}{\mu^2} \quad \Pi_2 = \frac{p \cdot c \cdot \rho^2 \cdot l^3}{\mu^3} \quad \Pi_3 = \frac{p \cdot A \cdot \rho}{\mu^2} \\
 \Pi_4 &= \frac{p \cdot A \cdot c \cdot \rho^2 \cdot l}{\mu^3} \quad \Pi_5 = \frac{c \cdot \rho \cdot l}{\mu} \quad \Pi_6 = \frac{A}{l^2} \quad \Pi_7 = \frac{Ac\rho}{\mu \cdot l}
 \end{aligned}$$

A lehető legegyszerűbb, de nem triviális eredmény-összefüggés előállítására érdekében az '1', az '5' és a '7' indexű dimenziótlan kifejezéseket az alábbiak szerint célszerű kombinálni

$$\Pi_a = \frac{\Pi_5 \cdot \Pi_7}{\Pi_1} = \frac{\frac{c \cdot \rho \cdot l}{\mu} \cdot \frac{Ac\rho}{\mu \cdot l}}{\frac{p \cdot \rho \cdot l^2}{\mu^2}} = \frac{c^2 \cdot \rho \cdot A}{p \cdot l^2}$$

Minden más kombináció vagy triviális eredményt ad, vagy feleslegesen magas hatványkitevők szerepelnek benne. Különösen problematikus lenne a dinamikai viszkozitás jelenléte, mely jelentős hőmérsékletfüggése miatt okoz nehézséget. Ugyanakkor ennek kiküszöbölése felvetheti a kapott összefüggés helyességének kérdését, bár tudjuk, hogy a viszkozitás a Hagen-Poiseuille összefüggésben sem szerepel.

A kapott összefüggést rendezzük a keresett nyomásra és vegyük szemügyre.

$$\Delta p' = \text{áll.} \cdot \frac{c^2 \cdot \rho \cdot A}{l^2}$$

A következő, a dimenziókat nem befolyásoló, mindössze az állandó értékére hatást gyakorló műveleteket célszerű elvégezni.

Osszuk el az egyenletet 2-vel, így abban a Bernoulli-egyenletről ismert dinamikus nyomás fog megjelenni.

A hosszúságot vigyük a számlálóba és a keresztmetszetet ugyanakkor a nevezőbe, hiszen nyilván értelmetlen azt állítani, hogy a hossz növekedése a nyomásvesztés csökkenését eredményezi.

A keresztmetszetet célszerű az átmérő négyzetével helyettesíteni, mivel a gyakorlatban ezt ismerjük közvetlenül. Ezáltal lehetővé válik még egy egyszerűsítés, mégpedig az, hogy a hosszúság és az átmérő négyzete helyett azokat inkább az első hatványon használjuk.

Az ekkor előálló összefüggés teljesen megegyezik a Hagen-Poiseuille összefüggéssel.

$$\Delta p' = \text{áll.} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \rho$$

### Önellenőrző kérdések a dimenzióanalízis fejezethez

1. Mi a dimenzióanalízis?
2. Mi a dimenziómátrix?

3. Milyen műveleteket lehet elvégezni a dimenziómátrix megoldásából származó dimenziótlan kifejezésekkel?

### 7.4.4 A csősúrlódási tényező

A Hagen-Poiseuille összefüggésben szereplő, mértékegység nélküli tényező a csövekben lezajló áramlások súrlódásosságára jellemző ún. csősúrlódási tényező.

A csősúrlódási tényező meghatározása a réteges áramlás esetében matematikai módszerrel is lehetséges, mivel a lamináris áramlás sebességeloszlása ismert:

$$c = \frac{\Delta p'}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot (r_0^2 - r^2) \quad \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

Ennek segítségével az áramlás átlagos sebessége:

$$c_{\text{átlag}} = \frac{c_{\text{max}}}{2} = \frac{\Delta p' \cdot r_0^2}{8 \cdot \mu \cdot l} \quad \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

Ebből az összefüggésből és a Hagen-Poiseuille összefüggésből is kifejezve a nyomásveszteséget és a két egyenletet egymással egyenlővé téve

$$\Delta p' = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c_{\text{átl}}^2}{2} \cdot \rho = \frac{c_{\text{átl}} \cdot 8 \cdot \mu \cdot l}{r_0^2}$$

Ebből pedig a keresett állandó

$$\lambda = \frac{d}{l} \cdot \frac{c_{\text{átl}} \cdot 8 \cdot \mu \cdot l}{c_{\text{átl}}^2 \cdot \rho \cdot \left( \frac{d}{2} \right)^2} \cdot 2 = \frac{64 \cdot \mu}{c_{\text{átl}} \cdot d} = \frac{64}{\text{Re}} \quad \left( \frac{\mu}{\rho} \right)$$

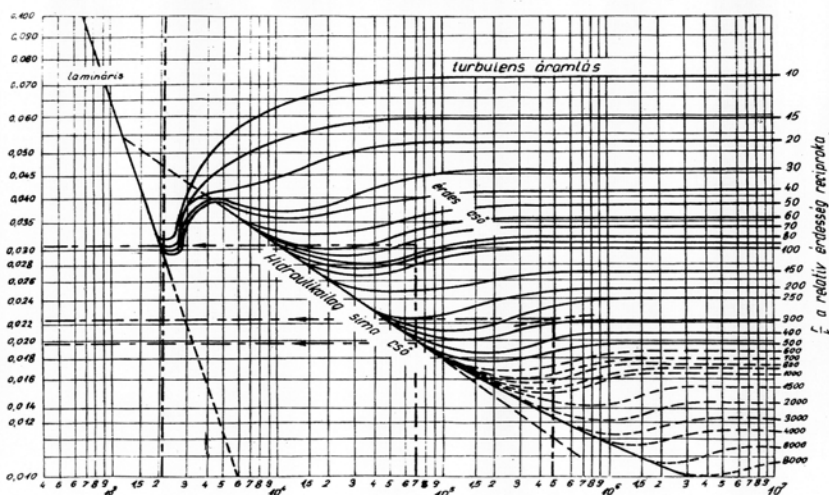
Lamináris áramlás esetén tehát a csősúrlódási tényező nem állandó, hanem a *Re*-számmal fordított arányban változik.

Lényegesen bonyolultabb a helyzet turbulens áramlás esetén, amikor a sebességeloszlás nem ismert, mivel a sebességeloszlás pillanatról pillanatra változik és az átlagsebességek eloszlása nyilván használhatatlan erre a célra.



Turbulens áramlás esetén a csősúrlódási tényező csak kísérleti úton határozható meg. A 18. ábra a csősúrlódási tényező változását mutatja a  $Re$ -szám függvényében. Az ábrát elemezve a következőket lehet megállapítani a csősúrlódási tényezőnek a turbulens áramlás esetén történő változását illetően.

A csősúrlódási tényező a  $Re$ -szám növelésével egyre csökken, majd egy bizonyos – a csőfal relatív érdességétől ( $r/k$ ) függő – értéknél, kisebb ingadozást követően, állandóvá válik. Minél simább a csőfal (minél nagyobb a relatív érdességet kifejező szám) annál később válik állandóvá a  $Re$ -szám.



18. ábra A csősúrlódási tényező változása

Nyilvánvaló, hogy a turbulens áramlás esetében a  $Re$ -szám mellett a relatív érdesség is befolyással van a csősúrlódási tényezőre. A turbulens tartomány három részre bontható. Az első szakaszban csak a  $Re$ -szám van hatással a csősúrlódási tényezőre, a másodikban mind a  $Re$ -szám mind a relatív érdesség, a harmadikban pedig kizárólag a relatív érdesség. Mindez egyértelműen annak az oka, hogy a csőfal mentén létező határréteg vastagsága változik, és pedig a  $Re$ -szám növekedésével egyre csökken. Az első szakaszban a határréteg lényegesen vastagabb a tényleges fizikai érdességnél. A második szakaszban nagyságrendileg megegyezik a kettő, a harmadikban pedig a határréteg már vékonyabb, mint a fizikai érdesség.

A három szakasz közül az elsőt, amikor a csősúrlódási tényezőt csak a  $Re$ -szám befolyásolja a hidraulikailag sima cső tartományának nevezik. Hidraulikailag érdes csőről beszélünk olyan esetben, amikor a fizikai érdesség is hatással van a csősúrlódási tényezőre.

A turbulens tartományban a csősúrlódási tényező vagy a [18. ábrán](#) látható diagram segítségével, vagy a szakirodalomban megtalálható számos, kísérleti úton felállított, különböző  $Re$ -szám tartományokban és relatív érdesség esetén érvényes, ún. empirikus összefüggések segítségével határozható meg. Itt most csak egy, igen gyakran használt, viszonylag egyszerű összefüggésről, a német mérnök, Paul Richard Heinrich **Blasius** által a XX. század elején kidolgozott és emlékére Blasius-összefüggésnek nevezett képletről teszünk említést, mely a hidraulikailag sima cső tartományára érvényes, ha a  $Re$ -szám kisebb, mint  $10^5$

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$$

A [18. ábrán](#) az is megfigyelhető, hogy a turbulens áramlások esetében a csősúrlódási tényező változási tartománya nem túl jelentős, különösen a gyakorlati szempontból legsűrűbben előforduló hidraulikailag simának tekinthető csövek esetében.

Ha ehhez még hozzávesszük azt is, hogy a sebesség ill. állandó térfogatáram esetén az átmérő, sokkal jelentősebb befolyással van a nyomásvesztésre mint a csősúrlódási tényező, akkor létjogosultsága van annak, hogy közelítő jellegű számításoknál a csősúrlódási tényezőt kb. 0,025 értékkel vegyük figyelembe. Ezt a turbulens áramlásokra ajánlott közelítő értéket Dupuit-féle tényezőnek nevezik.

### **Önellenőrző kérdések a csősúrlódási tényező fejezethez**

1. Mit kell érteni csősúrlódási tényező alatt?
2. Mitől függ a csősúrlódási tényező lamináris áramlás esetén?
3. Milyen tartományokra osztható fel a turbulens áramlás a csősúrlódási tényező változása szempontjából?
4. Milyen esetben függ a csősúrlódási tényező csak a  $Re$ -számtól?
5. Mit kell érteni hidraulikailag sima cső alatt?
6. Mit kell érteni hidraulikailag érdes cső alatt?

7. Milyen összefüggésben van egymással a csővezeteki áramlásban kialakuló határréteg vastagsága és a csősúrlódási tényező függése a  $Re$ -számmal és a csőfal fizikai érdességével?

### 7.4.5 A csővezeték méretezése

#### 7.4.5.1 A csővezeteki jelleggörbe

Egy teljes csővezeték egyenes szakaszokból, különféle csővezeteki elemekből, szerelvényekből (elzáró és szabályozó szerelvények) épül fel és egyéb berendezések (szűrők, hőcserélők, stb.) is beépítésre kerülhetnek. Eddig az ezek által okozott nyomásveszteség meghatározásáról nem esett szó.

Ezeknek az összefoglaló néven csővezeteki elemek és más berendezések nyomásveszteségét a Hagen-Poiseuille összefüggés mintájára felállított összefüggések szerint határozzák meg. Tehát általánosságban minden olyan csővezeteki elem vagy bármilyen más a kontínuum által átjárt berendezés, mely a csővezetékbe beépítésre került a következő összefüggés szerint számítható nyomásveszteséget okoz:

$$\Delta p' = \zeta \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \rho$$

Az összefüggés azt fejezi ki, hogy a nyomásveszteség arányos az áramló kontínuum tömegegységére eső mozgási energiával. A ' $\zeta$ ', ún. veszteségi tényező méréssel határozható meg kísérleti úton a fenti összefüggést alkalmazva:

$$\zeta = \frac{\Delta p'}{\left( \frac{c^2}{2} \cdot \rho \right)}$$

Az ilyen mérések során az adott elemet beépítik egy csővezetékbe ügyelve arra, hogy a vizsgált elem lehetőleg vízszintes legyen és az előtte és utána lévő csőszakasz átmérője legyen azonos és megegyező az adott elem ún. névleges átmérőjével. Az adott elem előtt a csőátmérő 10-szeresének utána pedig a csőátmérő 5-szörösének megfelelő egyenes csőszakaszt biztosítva meghatározzák a térfogatáramot, abból az áramlás névleges sebességét, és megméri a szerelvényen keletkező nyomáskülönbséget. Ezekből meghatározható a veszteség-

tényező. Mérésekkel könnyen meghatározható akár az is, hogy a veszteségtényező hogyan változik például a térfogatáram függvényében.

Anélkül, hogy részletekbe menően foglalkoznánk a különböző csővezetéki elemek rendkívül népes családjával, itt csak annyit említünk meg, hogy

a veszteségtényező annál nagyobb minél nagyobb mértékű a sebesség nagyságának és/vagy irányának megváltozása.

Értelemszerűem, minél sűrűbben fordul elő ilyen változás egy adott csővezetéki elemen belül, annál nagyobb lesz annak veszteségtényezője.

Mivel nem kézenfekvő, fontos tudnunk, hogy sokkal nagyobb veszteségek keletkezhetnek olyan esetekben, amikor a sebesség hirtelen vagy gyorsan csökken, mint amikor hirtelen vagy gyorsan nő. Ennek oka a leválás nevű jelenség kialakulása.

A leválás az áramló kontínuum és a szilárd test felületének érintkezésénél alakul ki, bizonyos körülmények között. Mint tudjuk a felület mentén egy kisebb-nagyobb vastagságú határréteg van ill. alakul ki.

Ha a geometriai viszonyok következtében a felület mentén az áramlás irányában a sebesség csökken és ezzel párhuzamosan a nyomás nő (bővülő csőszakasz, más néven diffúzor), akkor a határréteg megvastagodik és az áramlás irányában növekvő nyomás hatására a felület mentén visszaáramlás indulhat meg, a rendezett áramlás leválik a felületről.

A visszaáramlás örvénylést okoz a felület mentén, ami különböző módszerekkel láthatóvá is tehető. Az így keletkező örvények energiát vonnak el az áramló közegből, ami a veszteségek növekedését eredményezi. Éppen ezért minden csővezetéki elemet úgy kell kialakítani, hogy abban fokozatosan történjen a sebesség irányának és/vagy nagyságának megváltozása.

A teljes (egyenes szakaszokat és a csővezetéki elemeket is tartalmazó), elágazás nélküli csővezeték összegzett nyomásvesztése:

$$\Delta p' = \left[ \lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^{i=n} (\zeta_i) \right] \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \rho \quad (Pa)$$

Mivel a csővezetéken különböző átmérőjű szakaszok is lehetnek, ilyen esetben a teljes nyomásveszteség a különböző átmérőjű szakaszokon számított nyomásveszteségek összege, azaz

$$\Delta p' = \sum_{j=1}^{j=m} \left( \left[ \lambda_j \cdot \frac{l_j}{d_j} + \sum_{i=1}^{i=n} (\zeta_i) \right] \cdot \frac{c_j^2}{2} \cdot \rho \right) \quad (Pa)$$

A fenti összefüggés szerint egy adott csővezeték esetében, ha a térfogatáram változik, akkor három mennyiség változásával kell számolni:

- a sebesség,
- a csősúrlódási tényező,
- az elzáró és szabályozó szerelvények nyitottságától függő veszteségtényező.

Ha megfontoljuk, hogy a csővezetékben csak egy változó állású szerelvény szokott lenni és a csősúrlódási tényező egyrészt nem túl tág hatások között változik, másrészt a nyomásveszteség összefüggésében csak kevésbé fontos szerepet tölt be, akkor ezekkel a feltételezésekkel – a szélsőséges térfogatáram-változásokat kivéve – az egyetlen, valóban fontos változó mennyiség a sebesség marad.

A sebességet ki lehet fejezni a térfogatárammal, mely a gyakorlatban sokkal könnyebben kezelhető mennyiség a sebességnél:

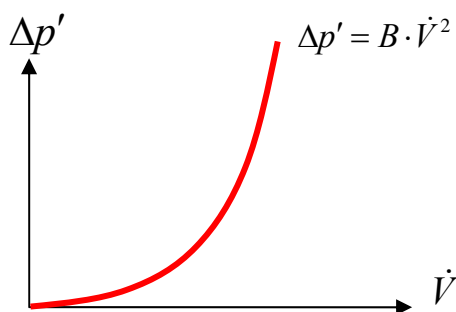
$$c = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{d^2 \cdot \pi} = \frac{\dot{V} \cdot 4}{d^2 \cdot \pi}$$

Ezt behelyettesítve a csővezeték nyomásveszteségére kapott összefüggésbe

$$\Delta p' = \sum_{j=1}^{j=m} \left( \left[ \lambda_j \cdot \frac{l_j}{d_j} + \sum_{i=1}^{i=n} (\zeta_i) \right] \cdot \frac{8}{d_j^4 \cdot \pi^2} \cdot \rho \right) \cdot \dot{V}^2 \quad (Pa)$$

egy olyan összefüggéshez jutunk, mely azt fejezi ki, hogy összenyomhatatlan kontínuum áramlása során egy csővezeték nyomásvesztesége a térfogatáram négyzetével arányos. Az összefüggésben a 'j' index a különféle átmérőjű szakaszokra utal, az 'i' index pedig az egyes szakaszokon a veszteségtényezőket sorolja.

Az arányossági mennyiséget, mely összefoglalja a csővezetékre áramlási szempontból jellemző mindazon paramétereket melyek a térfogatáramtól függetlenek vagy változásuk csak kis mértékben fontos, csővezetéki állandónak nevezzük. Azt a matematikai görbét, mely a térfogatáram függvényében a nyomásvesztés változását mutatja a csővezeték jelleggörbéjének nevezzük (19. ábra).



19. ábra A csővezetéki jelleggörbe

Egy csővezeték tervezésekor a csővezetéki állandót ki lehet számítani a nyomvonal valamint a beépítésre kerülő szerelvények és berendezések fajtája és darabszáma alapján.

Egy meglévő csővezeték esetén a csővezetéki állandót mérésrel lehet meghatározni:

$$B = \frac{\Delta p'}{\dot{V}^2}$$

azaz mérni kell a csővezeték vég- és kezdőpontja között a nyomáskülönbséget, abból ki kell számítani a veszteséges Bernoulli-egyenlet segítségével a nyomásvesztést és a kapott nyomásvesztést a méréskor rögzített térfogatáram négyzetével elosztva kapjuk meg a csővezeték állandóját. Az állandó mértékegysége igazodik ahhoz a mértékegységhez, melyben a térfogatáramot adott és amely mértékegység az adott esetben a legkényelmesebb. Ebből következik, hogy a csővezetéki állandó mértékegységét gondosan meg kell jegyezni és meg kell figyelni, mert nem általános, hogy az SI mértékegységrendszer alaplómértékegységei szerepelnek benne a térfogatáramnál.

**Önellenőrző kérdések a csővezetéki jelleggörbe fejezethez**

1. Milyen elvi összefüggés szerint vehetők figyelembe a csővezetékbe beépített szerelvények, idomdarabok, stb. nyomásvesztése?
2. Általános elvek szintjén mitől függ a nyomásvesztés nagysága?
3. Mit kell érteni leválás alatt?
4. Hogyan kerülhető el a leválás jelensége?
5. Miért kell kerülni a leválás kialakulását?
6. Mit értenek csővezetéki állandó alatt?
7. Mit értenek a csővezeték jelleggörbéje alatt?
8. Hogyan lehet meghatározni egy működő csővezeték állandójának értékét?

#### 7.4.5.2 A csővezetékes anyagszállítás

Összenyomhatatlan kontínuum csővezetéken történő szállítása esetére a veszteséges Bernoulli-egyenletet a következő formában írhatjuk fel

$$\Delta E = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g \cdot (z_2 - z_1) + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{\Delta p'}{\rho} \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az összefüggés egyszerűsödik, ha meggondoljuk, hogy

- a gyakorlatban a kontínuum szinte mindig egy olyan tartályból, tárolómedencéből kerül elszívásra, ahol a sebesség jó közelítéssel zérus (tehát  $c_1 \approx 0$ ),
- a csővezetékbeli távozó folyadék tömegegységre eső mozgási energiáját, mivel az energetikai szempontból elvesz, tekinthetjük egy különleges, ún. kilépési veszteségnek és hozzászámítjuk az utolsó csőszakasz veszteségtényezőihez.

Így a csővezetékes szállítás energiaszükségletét kifejező egyenlet

$$\Delta E = g \cdot (z_2 - z_1) + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{\Delta p'}{\rho} \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

két, egymástól jól elkülöníthető részre bontható fel:

- az első két tag a csővezeték mentén mérhető szintkülönbségből és nyomáskülönbségből adódó, tömegegységre eső energiaszükségletet adja meg és független a térfogatáramtól,
- a harmadik tag a térfogatáram négyzetével arányos nyomásvesztés leküzdéséhez szükséges, tömegegységre eső energiaszükségletet adja meg.

A gyakorlatban kényelmesen történő alkalmazhatóság érdekében az egyenletet a gravitációs gyorsulással elosztják. Így az áramló kontínuum súlyegységére vonatkozó energiamennyiségek szerepelnek az egyenletben, és ami ennél fontosabb, formálisan minden tag mértékegysége ( $m$ ) lesz. Ez azért fontos, mert a csővezetékes szállítási problémák többsége esetében a szállítás energiaszükséglete döntően a szintkülönbségtől függ, ami ilyen esetben egyszerű méréssel meghatározható.

$$H = \Delta z + \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} + h' \quad \left( \frac{J}{N} \right) = (m)$$

Az összefüggésben ' $H$ ' az ún. szállítómagasság, ' $\Delta z$ ' a csővezeték mentén mérhető szintkülönbség, a második tag a nyomásmagasság, a harmadik tag pedig a csővezeték végpontja és kezdőpontja között mérhető nyomáskülönbségből származó ún. veszteségmagasság, mely természetesen a nyomásvesztéssel összefüggő energiaszükségletet adja meg, formálisan méterben.

Az első két tag összegét statikus szállítómagasságnak is szokták nevezni, arra utalva, hogy ezek összege a térfogatáramtól függetlenül állandó. Fontos megjegyezni, hogy a statikus szállítómagasság két tagja közül bármelyik, akár mindkettő is lehet pozitív negatív vagy éppen zérus is ellenben a veszteségmagasság a valóságban sohasem zérus, hanem mindig annál nagyobb.

A csővezetékes szállítás energiaszükséglete alapján könnyen meghatározhatjuk az időegység alatt felhasználandó energiamennyiséget, azaz csővezetékes szállítás teljesítményszükségletét, ha a szállítómagasságot megszorozzuk az időegység alatt átáramlott kontínuum súlyával:

$$P = H \cdot \dot{V} \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{1}{\eta_{sz}} \quad (W)$$

Az összefüggésben figyelembe vettük, hogy csővezetéken a kontínuum áramlását létrehozó gépi berendezés (szivattyú) hatásfoka ' $\eta$ ' milyen, hiszen a teljesítményszükségletet ez is befolyásolja.



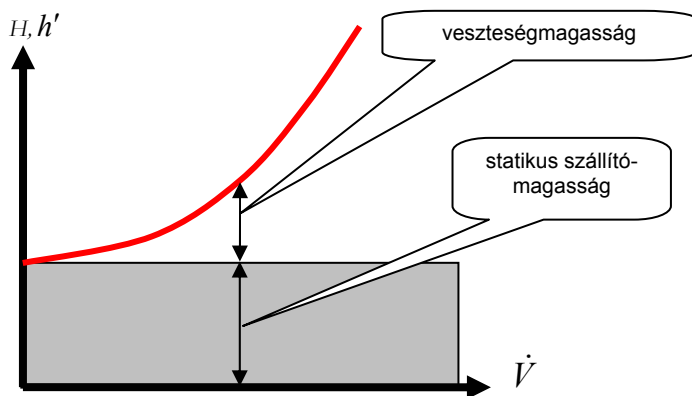
Ha pedig ismerjük a csővezeték üzemóráinak számát, akkor már az adott időszakra, például egy hónapra vonatkozó üzemeltetési költséget is ki tudjuk számítani:

$$K = P \cdot \tau \cdot k \left( \frac{Ft}{\text{hónap}} \right)$$

Az összefüggésben a 'r' a választott időszak (itt hónap) alatt üzemben töltött időt adja meg, 'k' pedig a villamos energia egységköltsége (Ft/kWh) mértékegységben.

Mint láttuk, a statikus szállítomagasság által összefoglalt energiaszükséglet a minimálisan szükséges energiamennyiséget adja meg súlyegységre vonatkoztatva. A veszteségmagasság a csővezetéken történő szállításnak azt a költségrészét adja meg, melyet körültekintő méretezés esetén minimális szinten lehet tartani.

Összenyomhatatlan kontínuum csővezetéken történő szállításának teljes energiaszükséglete (a szükséges szállítomagasság) tehát a korábban már alkalmazotthoz hasonló koordináta-rendszerben a 20. ábrán szemlélhető



**20. ábra** A statikus szállítomagasság és veszteségmagasság

A csővezetékes szállítással összefüggésben lehet beszélni a csővezetékes szállítás hatásfokáról. Mint általában a hatásfokoknál a csővezetékes szállítás hatásfoka is a hasznosnak tekinthető munka/teljesítmény és az ennek elérése érdekében felhasznált összes munka/teljesítmény hányadosa.

A csővezetékes szállításnál a hasznos munka/teljesítmény a szállításra ideális körülmények között felhasznált munka/teljesítmény, ami természetesen a veszteségmentes esetet jelenti és így a súlyegységre vonatkoztatva nem más mint a statikus szállítómagasság. Az össze munka/teljesítmény, pedig az áramlási veszteségekkel több az előbbinél.

Tehát a csővezetékes szállítás hatásfoka

$$\eta_{cs} = \frac{H_{stat}}{H}$$

### **Önellenőrző kérdések a csővezetékes anyagszállítás teljesítményszükséglete fejezethez**

1. Milyen tagokból áll a csővezetékes anyagszállítás energiaszükségletének számításához átalakított veszteséges Bernoulli-egyenlet?
2. Mi a kilépési veszteség?
3. Mi a statikus szállítómagasság?
4. Mi a veszteségmagasság?
5. Mi a szállítómagasság?
6. Hogyan számítható ki a csővezetékes szállítás teljesítményszükséglete a szállítómagasság ismeretében?
7. Hogyan számítható ki a csővezetékes szállítás költségigénye?
8. Mit lehet a csővezetékes szállítás hatásfokának tekinteni?

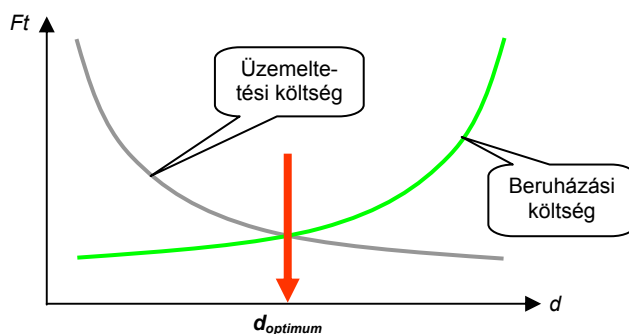
#### **7.4.5.3 Az optimális csőátmérő**

Mint láttuk a csőátmérő a döntő abban, hogy a nyomásvesztés mekkora és így abban is, hogy az üzemeltetési költségek mekkorák. Nyilvánvaló, hogy azonos térfogatáram esetén a nagyobb csőátmérő kisebb nyomásvesztést és így kisebb üzemeltetési költséget eredményez, a költségek jobban közelítenek az ideális körülmények között is szükséges minimális értékhez, amit természetesen a statikus szállítómagasság határoz meg.

Ugyanakkor az is igaz, hogy a csőátmérő növelésével a beruházási költségek nőnek, mivel a nagyobb átmérőjű cső drágább, aminthogy a nagyobb átmérőjű csőhöz megfelelő szerelvények szintén drágábbak, drágább a csővezeték megépítése, festése, szigetelése, stb. A beruházási költségek oldaláról tekintve, tehát a lehető legkisebb átmérőjű kell legyen a csővezeték.

A két egymással ellentétes törekvés között kell megtalálnunk az optimális csőátmérő értékét, ami matematikailag egy optimum, azaz költségminimum keresési feladat megoldását jelenti. A 21. ábra ennek a szemléltetésére szolgál.

Az a csőátmérő az optimális, amelynél az összköltség a legkisebb, ez pedig az üzemeltetési költségek és a beruházási költségek görbéjének metszéspontjánál található.



**21. ábra** Az optimális csőátmérő

Az optimális csőátmérő kiválasztásának itt elmondott elméleti módszere a gyakorlatban nem használható, mert a beruházási költségek függése a csőátmérőtől túlságosan nagyszámú, egzakt módszerekkel nem követhető paramétert is tartalmaz, melyeket többek között a piaci viszonyok is befolyásolnak. Hiába ismerjük tehát jól a csőátmérő és az üzemeltetési költségek összefüggését az optimális csőátmérőt nem tudjuk így meghatározni.

A gyakorlatban az eddig elmondott kvalitatív (minőségi és nem számszerű) megfontolások szem előtt tartásával, de más módszerrel kell kiválasztani a csővezeték optimális átmérőjét.

Első lépésként a szállított kontínuum összenyomhatóságától függően az áramlási sebességre vonatkozó bizonyos „ajánlások” alapján a minimális, még elfogadható csőátmérőt kell meghatározni.

A gyakorlati tapasztalatok alapján ajánlott, hogy:

- összenyomhatatlan közeg szállítására tervezett csővezeték esetében a tervezett csővezeték egyetlen szakaszában se le-

gyen nagyobb az áramlási sebesség 3-4  $m/s$ -nál (rendkívüli esetben 5  $m/s$ -nál),

- összenyomható közeg szállítására tervezett csővezeték esetében a tervezett csővezeték egyetlen szakaszán se legyen nagyobb az áramlási sebesség 20  $m/s$ -nál,

Második lépésként a csővezeték építésére használható, szabványosított méretsorozatot alkotó csövek közül kell kiválasztani a csőátmérőt úgy hogy az nagyobb legyen, mint a kiszámított minimális méret. Amennyiben el szeretnénk kerülni a késedelmeket és többletkiadásokat, akkor a szabványos csőátmérők közül is az ún. járatos (a kereskedelemben külön megrendelés nélkül is forgalmazott) csőátmérők valamelyikét válasszuk.

Természetesen előfordulhat, hogy ilyenkor az ajánlásban szereplőnél sokkal kisebb sebességet kapunk, azonban emiatt csak akkor kell aggodni, ha a kontínuum könnyen leülepedő szilárd részecskéket tartalmaz. Tiszta kontínuum esetében a kis sebességnek csak egyetlen biztos következménye lesz, csökken az üzemeltetési költség.

A leírt gyakorlati módszer betartásával biztosítható, hogy a beruházási költségek nem lesznek túlzottak és a későbbi, üzemeltetéssel összefüggő kiadások is mérsékeltek maradnak.

Befejezésül itt is emlékeztetünk arra, hogy a csőátmérő, adott térfogatáram esetén rendkívül erős befolyással van a keletkező veszteségek nagyságára (7.4.3 fejezet).

### **Önellenőrző kérdések az optimális csőátmérő fejezethez**

1. Milyen költségek összevetéséből határozható meg az optimális csőátmérő?
2. Hogyan változik egy csővezeték beruházási költsége a csőátmérő függvényében?
3. Hogyan változik egy csővezeték üzemeltetési költsége a csőátmérő függvényében?
4. Miért nem lehet a optimális csőátmérőt kizárólag költségelemzés alapján meghatározni?
5. Milyen gyakorlati módszer szerint választható ki egy csővezeték átmérője?
6. Milyen sebességtartományt ajánlott figyelembe venni folyadékok áramlása esetén?

## 7. Milyen sebességtartományt ajánlott figyelembe venni gázok áramlása esetén?

### 7.5 Nyitott csatornában lezajló áramlások

Az eddigiekben, ugyan külön nem említettük, de minden esetben feltételeztük, hogy az áramló közeg a csővezeték teljes keresztmetszetét kitölti, azaz nem rendelkezik szabad felszínnel. A nyitott csatornában (ide tartoznak a folyók, patakok, stb., összefoglaló néven az élő vizek is) lezajló áramlás elsősorban abba tér el a csővezetékben, a keresztmetszetet teljesen kitöltő, zárt áramlástól, hogy szabad felszínnel rendelkezik, ezért nyitott felszínű áramlásnak, nyitott áramlásnak nevezük. Értelemszerűen semmilyen lényeges különbség sincs csővezetékben lezajló, annak keresztmetszetét csak részben kitöltő áramlás és egy klasszikus értelemben nyitott csatornában lezajló áramlás között. Mindkét esetben közös a szabad felszín megléte.

Az áramlás szabad felszínének, nyitottságának következtében a felszínen mindenütt azonos nyomás uralkodik és ez a légköri nyomás.

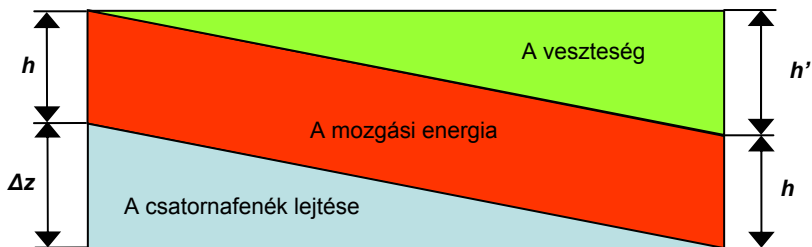
Ebből több dolog következik.

- Míg a csővezetékben áramló, szabad felszínnel nem rendelkező kontínuumban elvileg bármilyen nyomás kialakulhat addig a szabad felszínnel rendelkező áramló kontínuumban a nyomás értékét a felszínre ható légköri nyomás és a folyadék hidrosztatikai nyomása határozza meg minden keresztmetszetben,  
$$p = p_o + z \cdot \rho \cdot g .$$
- Míg a zárt csővezetékben a nyomás is befolyással van az áramlás sajátosságaira, addig a nyitott felszínű csatornában sem a felszínre ható nyomás sem pedig a kontínuumban lévő nyomás semmilyen módon sem befolyásolja az áramlást.
- A nyitott felszínű csatornában az áramlás meghatározója kizárólag a helyzeti energia megváltozása, azaz a csatorna aljának lejtése.

Az eddig alkalmazott Bernoulli-egyenletből tehát a nyomás kiesik és így mindössze a mozgási energia, a helyzeti energia és az energia-vesztés marad meg. Az ilyen áramlások esetében, kényelmi okokból a, Bernoulli-egyenlet egy newtonnyi áramló kontínuumra vonatkoztatott formáját szokták használni, mivel az áramlást leginkább befolyásoló lejtés leginkább méter mértékegységgel fejezhető ki.

$$\frac{c_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{c_2^2}{2 \cdot g} + z_2 + h' \quad \left( \frac{J}{N} \right) = (m)$$

A 22. ábra a nyitott csatornában lezajló stacionárius áramlás esetén, a fentiek alapján szemlélteti az energiaviszonyokat.



22. ábra Energiaátalakulás nyitott csatornában

Az egyenlet és az ábra alapján nyilvánvaló, hogy stacionárius áramlás esetén a lejtés következtében előálló fajlagos helyzeti energia csökkenés és a fajlagos energiaveszteség (veszteségmagasság) egymással egyenlő kell legyen.

A nyitott csatornában kialakuló stacionárius áramlás sebességét ebből a feltételből lehet meghatározni

$$\frac{\Delta p'}{\rho \cdot g} = h' = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2 \cdot g} = \Delta z$$

A helyzeti energia csökkenését a csatorna hosszára célszerű vonatkoztatni, ami a nyitott csatornák esetében alkalmazott kis lejtések miatt igen jó közelítéssel megegyezik a tényleges lejtéssel ( $i$ )

$$\frac{\Delta z}{l} = \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta z}{x} = i$$

A lejtést bevezetve és az egyenletet átrendezve kapjuk a nyitott csatornában kialakuló stacionárius áramlás sebességére vonatkozó képletet, melyet – az azt a XVIII. század végén kidolgozó Antoine **Chézy** emlékére – ún. Chézy-képletnek neveznek

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot d_e \cdot i}{\lambda}} \quad \left( \frac{m}{s} \right)$$

Az egyenletben ' $d_e$ ' a csatorna egyenértékű vagy más néven hidraulikai átmérője, ' $i$ ' a lejtés. Az egyenértékű átmérő a 7.4.3 fejezetben (17 ábra) leírtak szerint történik, azzal az eltéréssel, hogy értelemszerűen

a keresztmetszet helyébe a folyadék-keresztmetszet, a kerület helyébe pedig a kerület folyadékkal érintkező darabjának hossza, az ún. nedvesített kerület lép.

Fontos megemlíteni, hogy a nevezőben szereplő ' $\lambda$ ' ezúttal a csatorna hidraulikai ellenállási tényezője, melynek meghatározása kísérleti úton történik és amelyre a csősúrlódási tényezővel kapcsolatosan tárgyalatok nem érvényesek!

A vízmélység változása a csatorna lejtésének megváltozásakor fokozatosan megy végbe a sebesség megváltozásával párhuzamosan. A csatorna lejtésének pl. nagyobb értékre történő változása az áramlás sebességének növekedését vonja maga után. Ez mindaddig tart, míg a növekvő sebesség következtében szintén növekvő veszteség egyensúlyba nem kerül a megnövekedett lejtésből adódó helyzeti energia-csökkenéssel. A lejtés csökkenése esetén természetesen minden fordítva játszódik le.

Mivel egy épített csatorna szélessége adott és többnyire változatlan a hossz mentén, továbbá a térfogatáram is közel állandó (stacionárius áramlás), a nyitott felszínű csatornában, a lejtés, a vízmélység és a sebesség egymással kölcsönös és egyértelmű kapcsolatba van. Ha a vízmélység csökken, akkor az a sebesség és a lejtés növekedését jelzi. Csökkenő lejtés csökkenő sebességet és növekvő vízmélységet jelent.

A csatornában a vízmélység egy bizonyos minimumnál kisebb nem lehet (pl. a hajózhatóság miatt) és a csatornaszelvény mérete miatt egy bizonyos értéknél (a csatorna mélysége) nagyobb sem lehet (kiöntés). A csatorna minimális lejtése tehát meghatározza azt az elméleti maximális vízmennyiséget (térfogatáramot), melyet a csatornába be lehet bocsátani. A lejtésnek tehát egy maximális és egy minimális érték között kell maradnia. Ha a terep adottságai ennél nagyobb lejtést kívánnak meg, akkor zsilipeket kell építeni, melyekkel nagyobb szintkülönbségek is áthidalhatók.

### **Önellenőrző kérdések a nyitott csatornában lezajló áramlások fejezetéhez**

1. Mi a legfontosabb jellemzője a nyitott csatornában kialakuló áramlásnak?

2. Mi a következménye annak, ha az áramló folyadék szabad felszínnel rendelkezik?
3. Mitől függ egy nyitott csatornában kialakuló stacionárius áramlás sebessége?
4. Mit kell lejtés alatt érteni egy nyitott csatornában lezajló áramlással kapcsolatban?
5. Hogyan kell meghatározni az egyenértékű átmérőt nyitott csatorna esetében?
6. Hogyan változik a vízmélység a csatorna lejtésének növekedésekor?
7. Mire lehet következtetni akkor, ha egy nyitott csatorna két különböző, de azonos szélességű keresztmetszetében a vízmélység különböző?

## 7.6 Körüláramlott testre ható erők

A csővezetékben lezajló áramlások után vizsgáljuk meg az olyan áramlásokat melyek geometriailag nem korlátozott vagy igen nagyméretű térben áramló kontínuumban elhelyezkedő szilárd testek körül figyelhetők meg. Az ilyen áramlásokra jellemző, hogy az áramlás egésze, a szilárd test közvetlen közelétől eltekintve, a korábban tárgyalt lamináris vagy turbulens és a nyomás mindenütt azonos (légköri nyomás). A szilárd test közvetlen közelében, felszíne mentén, azonban az áramlás egészére jellemző nyomásnál és sebességnél kisebb és nagyobb helyi nyomás ill. sebesség alakulhat ki.

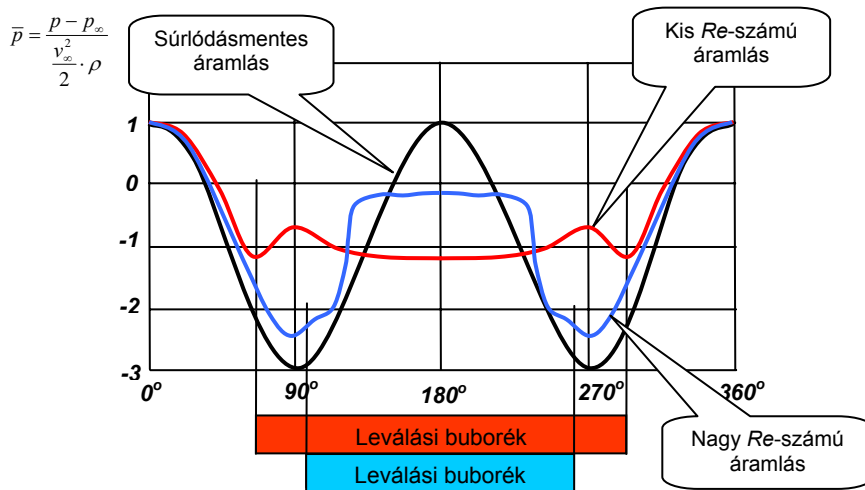
Köztudott, hogy a körüláramlott testre erő hat (közegellenállási erő). Az erő forrása valamilyen nyomáskülönbség. Tehát a körüláramlott test felülete mentén a nyomás nyilván nem állandó. Az egyszerűség kedvéért egy gömböt véve példának, vizsgáljuk meg a nyomás változását a gömb felülete mentén (lásd a [23. ábrát](#)).

A vizsgálódáshoz, kézenfekvő módon a gömb kerületét  $360^\circ$ -ra osztjuk fel. A kerület azon pontját, mely az áramlás irányával párhuzamos átmérőnek az áramlás felőli vége, ahol a test „először” találkozik az áramló közeg részecskéivel, tekintjük  $0^\circ$ -nak.

Nyilván nem a nyomás abszolút értéke az érdekes, amit igen nehéz lenne meghatározni és amúgy sem bír fontossággal. E helyett relatív nyomásnak vegyük a felület egyes pontjaiban észlelhető nyomás és a gömbtől távol lévő, ún. zavartalan áramlás nyomásának különbségét és ezt vonatkoztassuk a zavartalan áramlás sebességével számított



dinamikus nyomásra. Így olyan relatív mérőszámhoz jutunk, mely csak korlátozott tartományban változik.



**23. ábra** A relatív nyomás változása gömb felszínén

A 23. ábrán a fekete, „szinusz hullám” szerű vonal azt mutatja, hogy a súrlódás figyelmen kívül hagyásával elvégzett számítások szerint milyen nyomásváltozás kell kialakuljon a gömb felülete mentén. Mint látható a 0°-nál egy torlópont alakul ki, hiszen a nyomáskülönbség éppen a dinamikus nyomással egyenlő, a választott relatív nyomás éppen 1.

A vonal szimmetriája, különösen pedig az, hogy 180°-nál a relatív nyomás értéke azonos a 0°-nál adódóval, arra utal, hogy súrlódásmentes áramlás esetén a körüláramlott testre nem hat semmiféle erő, azaz – helyesebben – a ható erők egymást kiegyenlítik.

Kis *Re*-számú áramlás esetén végzett mérések eredményét mutatja a piros vonal. A torlópont itt is megfigyelhető és a vonal, természetesen itt is szimmetrikus. A torlópontból elindulva, viszonylag rövid „távon” a relatív nyomás változása hasonló az ideális kontínuum esetre számítottal. Ezt követően a relatív nyomás csökkenése megáll és egy meglehetősen tág tartományban a nyomás kisebb nagyobb ingadozással állandó értéken marad. Mindenképpen figyelemre méltó, hogy a torlóponttal átellenben a relatív nyomás negatív, ami arra utal, hogy itt

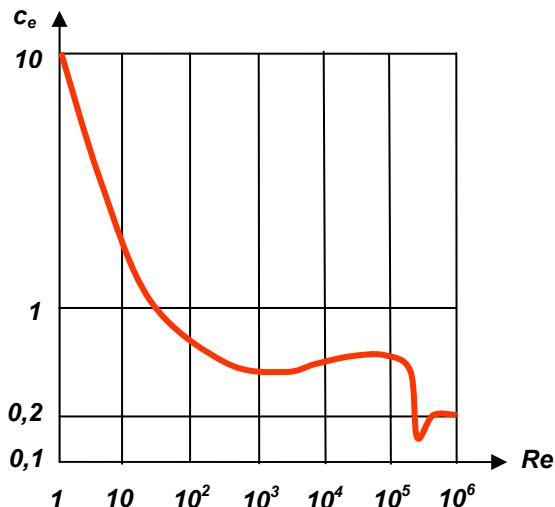
depresszió van, a nyomás kisebb egyfelől a torlóponti nyomásnál, de kisebb a zavartalan áramlás nyomásánál is.

A jelenség magyarázata ugyanaz a leválás, amit a csővezetéki elemekben keletkező veszteségek kapcsán már említettünk (7.4.5.1 fejezet). A felület menti határréteg a súrlódás következtében egyre vastagodik és ezen belül az eredetileg csak molekuláris vastagságú, zérus sebességű réteg is vastagodni kezd. A felület mentén tovább haladva a rendezett áramlás egyre messzebbre kerül a gömb felületétől a határréteg megvastagodása miatt. Amikor pedig a gömb felülete mentén a nyomás elkezd nőni, akkor a nyomáskülönbség hatására a határrétegen belül visszaáramlás indul meg a felület mentén. Ezáltal egy örvényekkel kitöltött viszonylag kis nyomású tér jelenik meg, melyet leválási buboréknak (leválási térnek) neveznek. Ez a leválási buborék különböző módszerekkel láthatóvá is tehető pl. levegő áramlása esetén füst bevezetésével.

Nagyobb *Re*-számú áramlásra is elvégzett mérések során kapott eredményeket a kék vonal mutatja a 20. ábrán. Ezúttal az látható, hogy a leválási buborék kisebb méretű, hiszen a leválás „később” következik be. Ennek nyilván az az oka, hogy a nagyobb kinetikus energiájú részecskék később fékeződnek le a súrlódás következtében.

Összefoglalva és általánosítva megállapítható, hogy a körüláramlott test felületén, annak alakjától és az áramlás sebességétől (az áramlásra jellemző *Re*-számtól) függő helyen leválás alakul ki. A test mögött, ugyancsak a test alakjától és az áramlás sebességétől függően kisebb vagy nagyobb, örvényekkel teli, viszonylag kis nyomású ún. leválási buborék jön létre, melynek sajátosságait az ún. alaki ellenállás tényező fejezi ki. A leválás miatt kialakuló egyenlőtlen nyomáseloszlás a közegellenállás forrása. Bonyolultabb testek (pl. gépjármű) esetén több helyen is keletkezhet leválás.

A gömbre elvégzett elemzés eredményei bármilyen formájú testre érvényesíthetők. Nem kell tehát mást tenni, mint egy alkalmas eszközben (szélcsatorna) megfigyelni a test vagy annak modellje körül kialakuló, füst segítségével láthatóvá tett áramlást. Az észlelt leválási buborékok helye, száma és mérete jó tájékoztatást nyújt az alaki ellenállási tényezőről. Az alaki ellenállási tényező nagyságát többnyire kísérleti úton határozzák meg.



**24. ábra** A gömb alaki ellenállás-tényezőjének változása

Fontos megjegyezni, hogy a gömbhöz hasonló, ún. áramvonalas (fokozatosan növekvő és ami még ennél is fontosabb, fokozatosan csökkenő áramlásra merőleges keresztmetszettel bíró) testek esetében az leválási buborék nagysága a  $Re$ -számtól függően változik, vándorol a leválási pont,  $Re$ -szám növelésével egy darabig csökken majd állandó lesz. Más, ún. szögletes testek esetében, ahol az áramlás irányára merőleges keresztmetszet hirtelen csökken (pl. egy teherautó esete) az alaki ellenállás tényezője kb. állandó, nem függ a  $Re$ -számtól, mivel a leválási pont helye állandó.

A [24. ábra](#) a gömb alaki ellenállási tényezőjének változását mutatja a  $Re$ -szám függvényében mérési eredmények alapján.

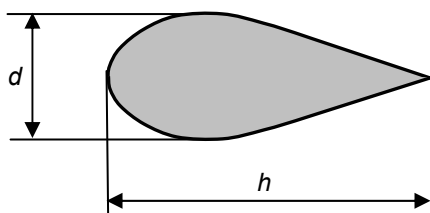
A tapasztalatok szerint a közegellenállási erő arányos a test ún. homlokfelületének nagyságával és célszerű arányosnak tekinteni az áramló közeg dinamikus nyomásával, ami valójában a Bernoulli-egyenletből ismert, térfogategységre eső mozgási energia.

$$F_e = c_e \cdot A_h \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \rho \quad (N)$$

Az összefüggésben ' $c_e$ ' az alaki ellenállás tényezője.

A homlokfelülettel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy az a test vetületének nagysága egy olyan síkon, mely merőleges a zavartalan áramlás sebességének irányára.

Az áramlástani szempontból legkedvezőbb alak tehát elől legömbölyített és abból törésmentesen kialakított, fokozatosan elkeskenyedő kúpos alakú test lenne, melyet dúc profilnak neveznek (lásd 25. ábra).



**25. ábra** Az áramlástanilag ideális alak

A dúcprofil hátsó elkeskenyedő kúpos része kúpszögének optimális értéke 8-12°. Ennél nagyobb kúpszög esetén már nagy mértékű leválás figyelhető meg. Természetesen igaz az is, hogy minél kisebb a kúpszög annál kisebb a leválási buborék és így a közegellenállási erő. Például azonos 'd' átmérő mellett tízszeresére növelve a 'h' hosszt, az alak ellenállási tényező kb. a felére csökken.

Test	Méret- arány (hossz/átmérő )	Alaki ellenállás tényező	
		$Re \approx 10^3 - 10^5$	$Re > 5 \cdot 10^5$
Forgási ellipszoid a hossz tengely irányával párhuzamosan megfújva	1,8	-	0,09
Gömb	-	0,5	0,15
Dúcprofil	2	-	0,2
Dúcprofil	5	-	0,06
Dúcprofil	10	-	0,083
Henger a hossz tengelyére merőlegesen megfújva	1	0,63	0,35
	5	0,74	
	10	0,82	

	$\infty$	1,2	
	1	0,91	
Henger vagy hasáb a hosszten- gelyével párhuzamosan meg- fújva	2	0,85	-
	7	0,99	
	$\infty$		1,53
Négyzet- vagy körlap	-		1,1
Félgömbhéj a domború felülete felől megfújva	-		0,34
Félgömbhéj a homorú felülete felől megfújva	-		1,33

### 3. táblázat Néhány test alaki ellenállás tényezője

Érdekes megfigyelni a táblázatban lévő adatokkal kapcsolatban, hogy a megfújás irányába eső hossz növelése minden esetben előbb kedvezően hat az ellenállási tényezőre, de egy bizonyos hossztól kezdve ismét növekedés figyelhető meg. Ennek oka a hosszan elnyúló felületen keletkező súrlódás egyre növekvő hatása a kb. állandó mértékű leválás hatása mellett.

A hossz tengelyére merőlegesen megfújott henger (pl. villamos távvezetékek) illetve hasonló testek esetében különleges jelenség figyelhető meg, amikor az áramlás *Re*-száma igen nagyra válik. Ekkor megszűnik az áramlás addigi szimmetriája. A leválási térből, mely addig mintegy rátapadt a test felszínére, periodikusan örvények szakadnak le, hol az egyik, hol a másik oldalon és úsznak tova az áramló közeggel. Ezeket az örvényeket a Budapesten született, Németországban doktorált és a második világháború után az USA-ban a repülés és az űrrepülés fejlesztése területén nemzetközi hírnévre szert tett **Kármán Tódor** (külföldön Theodore von Kármán néven is ismert) írta le először és az ő emlékére ún. Kármán-féle örvénysornak neveztek el. A periodikusan leváló örvények váltakozó irányú tengelyre merőleges erőt fejtenek ki a hengerre és azt rezgésbe hozhatják. Ezért „szólalnak meg” a kifeszített drótok az erős légáramlatban.

Ilyen periodikusan leváló örvények keletkeznek pl. egy hídszerkezet körül, a hídpályára merőlegesen fújó szél esetében is. Kedvezőtlen körülmények között, karcsú, rugalmas hídszerkezet esetén a periodikusan leváló örvények keltette erők rezonanciát is okozhatnak, ami a híd mechanikai károsodást, leszakadását is okozhatja. Ez történt 1940. november 7-én délelőtt kb. 11 órakor az alig négy hónappal ko-

rábban megnyitott, a Tacoma szoroson (Washington állam, USA) átívelő karcsú függőhíddal (23. ábra, forrás: Internet).



**26. ábra** A Kármán-féle örvénysor hatása

### **Önellenőrző kérdések a körüláramlott testre ható erő fejezetéhez**

1. Mi a sajátossága a nagyméretű térbe helyezett test körüli áramlásnak az áramlás nyomása és sebessége szempontjából?
2. Mi kell érteni a zavartalan áramlás alatt a nagyméretű térbe helyezett test körüli áramlás esetében?
3. Mit kell érteni leválási buborék vagy leválási tér alatt?
4. Hogyan keletkezik a leválás a körüláramlott gömb esetén?
5. Milyen a nyomáseloszlás az ideális kontínuum által körüláramlott gömb felülete mentén?
6. Miből származik a valóságos kontínuum által körüláramlott gömbre ható erő?
7. Hogyan és miért változik a leválási buborék mérete gömb és hasonló áramvonalas testek esetén?
8. Miért állandó az ún. szögletes testek alaki ellenállás tényezője?
9. Hogyan határozható meg az alaki ellenállás tényezője?
10. Milyen összefüggés szerint számítható ki a közegellenállási erő?
11. Mit kell érteni homlokfelület alatt?
12. Milyen jellemző tulajdonságai vannak az áramlástan szempontból kedvező alakoknak?
13. Mi a Kármán-féle örvénysor?
14. Mi a következménye a Kármán-féle örvénysor keletkezésének?

#### **7.6.1 A kavitáció**

Az eddigiekben, kimondva kimondatlanul mindig feltételeztük, hogy a szilárd test összenyomható áramló kontínuumban helyezkedik el. Jól lehet az itt elmondottak érvényesek összenyomhatatlan áramló kontínuumban elhelyezkedő testre is, azonban egy további fontos jelenséget is meg kell ismernünk, mely csak összenyomhatatlan közegben, például víz esetében áll elő.

Mint azt láthattuk főleg a testek felszíne mentén a nyomás és a sebesség egymással kölcsönhatásban változik, ahogy azt alapjaiban a Bernoulli-egyenlet meghatározza, azaz a sebesség növekedése maga után vonja a nyomás csökkenését.

Ennek során előfordulhat, hogy a nyomás olyan kis értékre csökken az áramló összenyomhatatlan kontínuum valamelyik pontjában, hogy eléri a kontínuum hőmérsékletéhez tartozó telítési gőznyomást. Ilyen esetben, ezen a helyen az éppen ott tartózkodó részecske gőzhalmazállapotba megy át, „űr” képződik az áramló folyadékban. Természetesen nem üres térről van szó, hanem a folyadék gőzével kitöltött buborékról. Ezt a jelenséget kavitációnak, űrképződésnek nevezik.

A kavitáció önmagában veszélytelen, de bizonyos körülmények esetén veszélyes lehet. Ugyanis az áramló folyadék a képződő buborékokat természetesen magával ragadja. Ezek a buborékok, továbbhaladtuk során olyan helyre érkehetnek, ahol a nyomás már jóval nagyobb lehet a telítési gőznyomásnál. Ilyenkor a buborékot alkotó folyadékgőz rendkívül gyorsan kondenzálódik, „összeroppan”, ami bizonyos értelemben egy robbanásszerű folyamat megfordítottja, mely hang és erőhatással is jár. Amennyiben ez a hirtelen kondenzáció a szilárd test felülete mentén következik be, akkor ez a szilárd test károsodásával jár és sokszor viszonylag gyors tönkremenetelt eredményez.

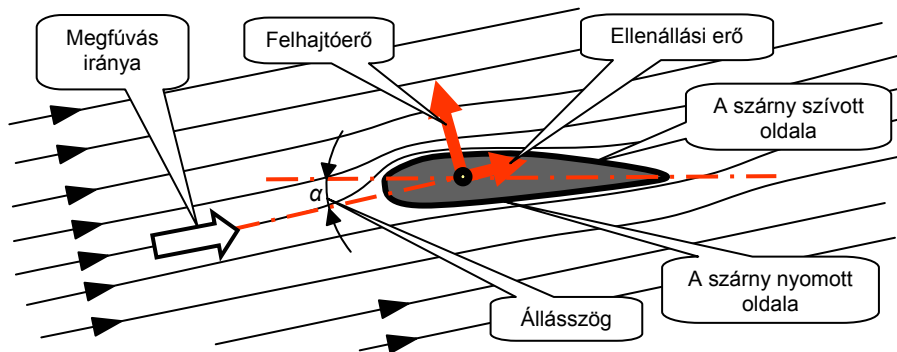
Ez a jelenség elsősorban nagy sebességű hajócsavarok, szivattyú járókerekek esetében fordulhat elő hibás tervezés esetén, de elvileg minden olyan pontban létrejöhet, ahol a helyi nyomás a hőmérséklethez tartozó telítési gőznyomást eléri.

### **Önellenőrző kérdések a kavitáció fejezethez**

1. Milyen kontínuumokban fordulhat elő kavitáció?
2. Hogyan zajlik le az űrképződés?
3. Hogyan történik a keletkezett gőzbuborékok megsemmisülése?
4. Milyen esetben lehet veszélyes a kavitáció?
5. Milyen veszéllyel járhat a kavitáció?

### 7.6.2 Szárnyprofil körüli áramlás

Végezetül, fontosságára való tekintettel az ún. szárnyak ill. szárnyprofilok körüli áramlások sajátosságaival külön is foglalkozunk



27. ábra Áramlás szárnyprofil körül

Az áramló kontínuumba helyezett szokványos testek esetében eddig csak az alaki ellenállási tényezőről ill. a közegellenállási erőről esett említés. A szárnyprofil egy olyan speciális formájú, elméletileg végtelen hosszúságú és hossza menetén azonos alakú keresztmetszettel (profilal) rendelkező test, melyen a közegellenállási erő mellett ún. felhajtóerő is keletkezik.

A 27. ábra egy szárnyprofilra érkező áramlás áramvonalait és a keletkező erőket mutatja.

A szárnyprofilra érkező áramlás a szárny alsó (az áramláshoz „közelebb” lévő) felületén túlnyomást hoz létre, ahhoz hasonló módon, ahogy a gömb elülső felületén is túlnyomás jön létre. Ez a szárny nyomott oldala.

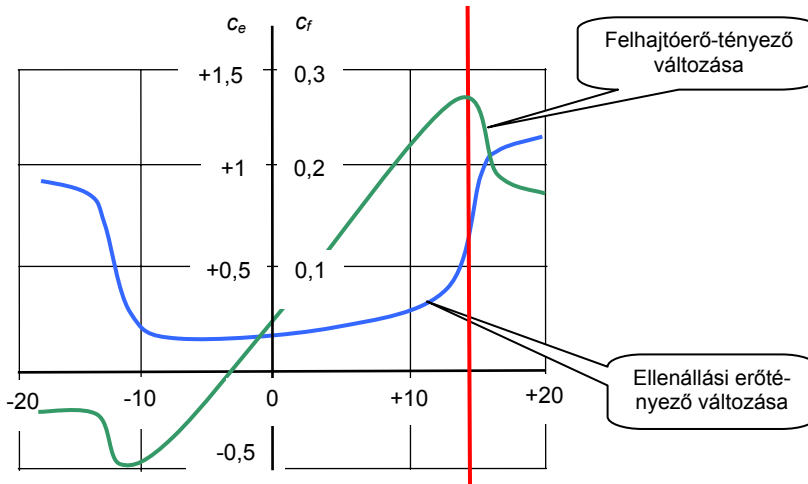
A szárny másik (az áramlástól „távolabb” lévő) oldalán egy bizonyos depresszió jön létre, ez a szárny szívott oldala.

A nyomáskülönbségnek köszönhetően felhajtóerő keletkezik. Ennek kiszámítása teljesen hasonló összefüggéssel történik, mint a közegellenállási erőé:

$$F_f = c_f \cdot A \cdot \frac{v_\infty^2}{2} \cdot \rho \quad (N)$$



Az összefüggésben ' $c_f$ ' a felhajtóerő-tényező, melyet az alaki ellenállási tényezőhöz hasonlóan többnyire kísérleti úton lehet meghatározni.



**28. ábra** szárnyprofil erőtényezőinek változása

Természetesen a szárnyprofilon is keletkezik ellenállási erő!

A 28. ábra tájékoztató jelleggel mutatja egy szárnyprofil ellenállási és felhajtóerő tényezőjének változását az állásszög függvényében.

A szárnynak tehát az a kedvező tulajdonsága van, hogy a 15°-ot meg nem haladó állásszögek esetén a keletkező felhajtóerő-tényező közel lineárisan nő az állásszöggel és ugyanakkor az ellenállási erő kis értékű. A két erőtényező összehasonlítása azt mutatja, hogy a felhajtóerő lényegesen nagyobb az ellenállási erőnél. A klasszikus, a felhajtóerőt maximálisan kihasználó repülés a szárnyprofil ezen kedvező tulajdonsága miatt lehetséges.

Ilyen kis állásszögek esetében a szárny felső, szívott oldalán nincsenek vagy csak alig vannak leválások. A szárnyprofil „felső” felülete és a zavartalan áramlás töretlenül egyenes áramvonalai között fokozatosan táguló „csatornában” a szárny felülete mentén a lassan csökkenő sebességű áramlás leválás nélkül követi a szárny felületét.

A szárny „alsó”, nyomott oldalán a helyzet éppen fordított: a zavartalan áramlás töretlenül egyenes áramvonalai és a szárny „alsó” felülete

által alkotott fokozatosan szűkülő csatornában az áramlás sebessége egyre nő, itt leválás nem fordulhat elő.

A 26. ábrán piros vonallal jelezett kb.  $15^\circ$ -nak megfelelő állásszög esetén a szárny szívott oldalán leválások jelennek meg, ami a felhajtóerőtényező hirtelen csökkenését és ezzel párhuzamosan az ellenállási erő hirtelen növekedését vonja maga után.

Az erőtényezők nagyságát és az állásszögtől való függésüket szélcsatornában végzett vizsgálatokkal lehet pontosan meghatározni. Bár ma már léteznek számítási módszerek is a szárnyprofil tervezésére, a szélcsatorna azonban az ellenőrzés eszközeként változatlanul fontos szerepet játszik.

### **Önellenőrző kérdések a szárnyprofil körüli áramlás fejezethez**

6. Mit kell szárnyprofil alatt érteni?
7. Milyen erők keletkeznek egy szárnyprofilon?
8. Milyen irányú a felhajtóerő a megfúvás irányára vonatkoztatva?
9. Mit értenek megfúvási szög alatt?
10. Mit értenek a szárny nyomott oldala alatt?
11. Mit értenek a szárny szívott oldala alatt?
12. A szárny melyik oldalán keletkezhetnek leválások? Miért?
13. Hogyan változik a felhajtóerő tényező az állásszög függvényében?
14. Hogyan változik az ellenállási erő tényező az állásszög függvényében?

## **8 A rendszer és környezete**

Az áramló kontínuum energetikai állapotának vizsgálata során az eddigiekben a kontínuum és környezete között kizárólag a mechanikai energia egyik vagy másik irányú átadását vizsgáltuk. A nyomásból származó erők munkája éppenséggel a környezet által az áramló kontínuumon a környezet által végzett munkát jelent.

Az összenyomható kontínuumok esetében, amint azt korábban már láttuk (3.2.2 fejezet), a kontínuum állapotát leíró állapotjelzők változása nem csak a mechanikai energia (munkavégzés) következménye, hanem szerepet játszik a környezetből érkező vagy oda távozó hőenergia is. Meg kell kísérelnünk az eddig használt energia-

megmaradási egyenletünket (Bernoulli-egyenlet) úgy átalakítani, hogy az alkalmassá váljon olyan esetekre, amikor az áramló kontínuum az eddig feltételezett egyszerű kapcsolaton túl bonyolultabb kapcsolatban is állhat a környezetével.

A továbbiakban, általánosságban rendszernek tekintjük az anyagi valóság egy általunk meghatározott szempont vagy szempontrendszer szerint elhatárolt részét, melyet a rendszer fala választ el az anyagi valóság többi részétől.

Példaként rendszernek lehet tekinteni egy csővezetékben áramló folyadékot vagy gázt, melyet a csőfal választ el az „anyagi valóság” többi részétől. A rendszert határoló falat a rendszer részének kell tekinteni.

A környezet alatt értenek általánosságban mindent, ami nem része az adott rendszernek.

A fal szerepe rendkívül fontos, hiszen ez határozza meg, hogy a rendszer és környezet között milyen kölcsönhatások jöhetnek létre.

A kölcsönhatások igen sokfélék lehetnek:

- mechanikai (munka)
- termikus (hőenergia)
- tömeg
- elektromos
- mágneses
- stb.

Ezen kölcsönhatások közül számunkra az első kettő a fontos, a többi kölcsönhatással kapcsolatban feltételezzük, hogy a rendszer fala azokat nem teszi lehetővé, vagy ha lehetővé is teszi, a kölcsönhatás elhanyagolhatóan kis befolyást gyakorol a rendszer állapotára. Valójában az eddigi vizsgálataink során, kimondatlanul azt feltételeztük, hogy a rendszer és környezet között a mechanikai kölcsönhatás az egyetlen ill. az egyetlen számottevő.

Rendszerünk fala tehát

- vagy rugalmas vagy merev, attól függően, hogy a mechanikai kölcsönhatást megengedi vagy kizárja,

- vagy diatermikus vagy adiatermikus, attól függően, hogy a termikus kölcsönhatást megengedi vagy kizárja.

Természetesen a rendszer fala lehet egyidejűleg pl. merev és adiatermikus, azaz egyidejűleg több kölcsönhatást megengedő vagy kizáró is. Fontos itt újra hangsúlyoznunk, hogy vizsgálódásaink során állandó jelleggel feltételezzük, hogy a rendszer fala a tömegi kölcsönhatást minden esetben kizárja! Ez praktikusán megfelel annak, hogy a rendszer nem „szivárog”, tömege állandó.

### **Önellenőrző kérdések a rendszer és környezetének kapcsolatához**

1. Mit kell érteni rendszer alatt termodinamikai szempontból?
2. Mit kell érteni környezet alatt termodinamikai szempontból?
3. Milyen alapvető tulajdonságú rendszerfalak vannak?
4. Melyek a legfontosabb kölcsönhatások a rendszer és környezet között energetikai szempontból?

## **8.1 A termodinamika I. főtétele**

Ahhoz, hogy a rendszer energetikai állapotát oly jól kifejező ill. követő Bernoulli-egyenletet alkalmassá tegyük a rendszer és a környezete közötti termikus kölcsönhatás követésére, ki kell egészítenünk a rendszer tömegegységére eső hőenergiával, melyet a rendszer az ebben az esetben diatermikus falon át képes felvenni ill. leadni. Ez azonban önmagában még nem elegendő. Egészen biztos ugyanis, hogy be kell vezetnünk egy olyan új jellemzőt, mely a helyzeti energiához hasonlóan a rendszer termikus állapotát képes megadni. Ez utóbbit nevezzük belsőenergiának és természetesen ennek is fajlagos, egy kilogrammra eső részét kell beírunk a kiegészített egyenletbe

$$\int_1^2 \left( \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds \right) + \left( \frac{c^2}{2} \right)_1^2 + g \cdot z_1^2 + \int_1^2 \left( \frac{\partial p}{\rho} \right) + q = u \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az egyenlet felírásakor az egyszerűség kedvéért feltételeztük, hogy a gravitációs erőter az egyetlen ható erőter (ez a leggyakoribb eset). 'q' a rendszer és a környezet között kicserélt, tömegegységre eső hőenergia, 'u' pedig a rendszer ún. belsőenergiája. Értelemszerűen, ha a rendszer hőenergiát vesz fel (pl. minden más paraméter változatlan-sága mellett!) akkor az összenergia nem maradhat állandó, a belső energiájának nőnie kell (ezt nyilván a hőmérséklet megváltozása jelzi), ezért a belső energia megváltozása az egyenlet jobb oldalára kerül.

Definíció szerint a belsőenergia megváltozása arányos a hőmérséklet változásával és függ a kontínuum anyagi tulajdonságaitól, amit a fajhővel (fajlagos hőkapacitás) lehet figyelembe venni.

A kapott egyenletet egyszerűsíteni lehet, ha megfontoljuk, hogy

- az egyenletet elsősorban összenyomható közegekre alkalmazzuk,
- az előforduló hőmérsékletváltozások igen gyakran elérik a néhány száz fokot is,
- a kontínuumok fajhője kb.  $10^3$  nagyságrendű vagy ahhoz közel álló,
- a gyakorlatban előforduló sebességek maximuma szokványos esetben nem több  $20 \text{ m/s}$ -nál,
- az előforduló gyorsulások többnyire igen mérsékeltek.

Az előzőekből következik, hogy a bal oldalon szereplő első három tag bízást elhanyagolható a többi mellett. Az ilyen módon egyszerűsített egyenletünk

$$w + q = u \left( \frac{J}{kg} \right)$$

A könnyebb áttekintés érdekében a nyomásból származó erők integrál-kifejezést a 'w'-vel jelöltük!

A kapott egyenlet tehát az összenyomható kontínuumokra vonatkoztatva az energia-megmaradás törvénye, melyet a termodinamika I. főtételének is szoktak nevezni. Azt fejezi ki, hogy a rendszerrel (termodinamikai rendszerrel) közölt hő és mechanikai energia a rendszer belsőenergiájának változását, növekedését eredményezi.

Az összefüggés mindaddig kellően pontos, amíg a kontínuum áramlási sebessége a szokványos mérnöki gyakorlatban előforduló néhány  $\text{m/s}$ -os értékeket jelentősen meg nem haladja.

A rendszeren végzett munka (a környezettől kapott mechanikai energia) a sűrűség helyett annak reciprokát, a fajtérfogatot (a tömegegység térfogatát) felhasználva

$$w = - \int_1^2 p \cdot dv \left( \frac{J}{kg} \right)$$

ahol a negatív előjel azért szükséges, mert a rendszeren a környezet által végzett munkát pozitívnak tekintve, ez a rendszer térfogatának csökkenését és ezzel együtt a nyomás növekedését eredményezi.

A belsőenergia megváltozása a korábban elmondottak szerint

$$u = c_v \cdot \int_1^2 dT \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Itt 'c<sub>v</sub>' az összenyomható kontinuum ún. állandó térfogaton vett fajhője. A fajhő ilyen megjelölése arra utal, hogy állandó térfogatú állapotváltozás esetén (merev falú rendszer – munkavégzés nem lehetséges!) a rendszerrel közölt hő teljes egészében a rendszer belsőenergiájaként tárolódik. Megjegyzendő, hogy a belsőenergia abszolút értéke közömbös, csak a megváltozása az érdekes, hasonlóan pl. a helyzeti energiához. Ennek következtében a belsőenergia zérus pontja szabadon megválasztható.

Az I. főtételt gyakran írják fel differenciális formában, mert így könnyebb bizonyos műveleteket elvégezni. Természetesen a tényleges számításokhoz végül mindig szükség van az integrálásra.

$$dq + dw = du \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Vizsgáljuk meg az I. főtétel speciális alakjait az eddig tárgyalt állapotváltozásokra vonatkoztatva.

### Állandó térfogatú állapotváltozás

Ebben az esetben a fal merev és diatermikus. Ennek következtében sem a környezet nem tud munkát végezni a rendszeren, sem pedig a rendszer nem tud munkát végezni a környezeten. Ebből következően az I. főtétel

$$dq = du = c_v \cdot dT \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

$$q_{1,2} = u_{1,2} = \int_1^2 c_v \cdot dT = c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

### Állandó nyomású állapotváltozás

Ebben az esetben a fal rugalmas és diatermikus. Ennek következtében a rendszer mind hőt mind mechanikai energiát kaphat a környezettől ill. képes hőt leadni és munkát végezni a környezetén. Ebből következően az I. főtétel

$$dq + dw = dq - p \cdot dv = du = c_v \cdot dT \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az egyenlet átrendezésével

$$dq = c_v \cdot dT + p \cdot dv \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Ha most felhasználjuk, hogy az általános gáztörvény differenciális formája

$$p \cdot dv + v \cdot dp = R \cdot dT,$$

ahol a bal oldal második tagja ebben az esetben, a nyomás állandósága miatt, zérus

$$dq = c_v \cdot dT + R \cdot dT = (c_v + R) \cdot dT = c_p \cdot dT \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

$$q_{1,2} = \int_1^2 c_p \cdot dT = c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az összenyomható közegek esetében tehát az eddig már definiált állandó térfogatú fajhő mellett egy másik fajhőt is definiálhatunk, melyet állandó nyomású fajhőnek nevezhetünk. A fenti összefüggés egyúttal a két fajhő közötti kapcsolatot is megadja. Az egyenletet Julius Robert von **Mayer** német fizikus a XIX. század második felében, James Prescott **Joule** angol fizikussal gyakorlatilag egy időben, a mechanikai munka hőegyenértékének meghatározását keresve állapította meg és ezért emlékére Mayer-egyenletként is emlegetik

$$c_p - c_v = R \quad \left( \frac{J}{kg \cdot K} \right)$$

Ez az egyenlet egyúttal meghatározza a specifikus gázállandó fizikai tartalmát is. Ezek szerint a specifikus gázállandó az 1 kg összenyomható közeg által 1 K hőmérsékletváltozás közben állandó nyomás mellett végzett munka, az ún. terjeszkedési munka.

### Állandó hőmérsékletű állapotváltozás

Ebben az esetben a fal rugalmas és diatermikus, de a hőmérséklet állandósága miatt a belsőenergia nem változik. Ebből következően az I. főtétel

$$dq = -dw = p \cdot dv \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Felhasználva a Boyle-Mariotte törvényt és az általános gáztörvényt

$$q_{1,2} = w_{1,2} = -\int_1^2 p \cdot dv = -p_1 \cdot v_1 \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v} = -p_1 \cdot v_1 \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Ez azt jelenti, hogy pl. amennyi munkát a környezet végez a rendszeren annyi hőt kell elvonni a rendszerből. A hőmérséklet állandósága csak így biztosítható!

### Adiabatikus állapotváltozás

Ebben az esetben a fal rugalmas és adiatermikus. Tehát a rendszer hőt nem vesz fel és nem ad le, azonban a környezet munkát végezhet rajta ill. a rendszer képes munkát végezni a környezetén. Ebből következően az I. főtétel

$$-p \cdot dv = dw = du = c_v \cdot dT \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Felhasználva az adiabatikus állapotváltozásra korábban felállított összefüggést (3.2.2 fejezet) és az általános gáztörvényt

$$u_{1,2} = w_{1,2} = -\int_1^2 p \cdot dv = -p_1 \cdot v_1^\kappa \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v^\kappa} = -p_1 \cdot v_1^\kappa \cdot \frac{1}{1-\kappa} \cdot (v_2^{1-\kappa} - v_1^{1-\kappa}) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Azonos átalakítások után

$$u_{1,2} = w_{1,2} = \frac{R}{\kappa-1} \cdot (T_2 - T_1) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Ez azt jelenti, hogy pl. amennyi munkát a rendszer a környezeten végez (a környezetben hasznosítható munka!) annyival csökken a rendszer belsőenergiája.

Az egyenlet segítségével, a Mayer-egyenletet is felhasználva meghatározható az ún. **adiabatikus kitevő** értéke is:



$$c_v \cdot (T_2 - T_1) = \frac{R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

$$\kappa = \frac{R}{c_v} + 1 = \frac{c_p - c_v}{c_v} + \frac{c_v}{c_v} = \frac{c_p}{c_v}$$

Kaptunk tehát még egy összefüggést az összenyomható kontínuumok fajhői között és megállapíthattuk, hogy az adiabatikus kitevő értéke az adott anyagra jellemző. Itt emlékeztetünk arra, hogy az adiabatikus kitevő értéke kétatomos molekulájú gázok esetében jó közelítéssel 1,4, háromatomos gázoknál pedig kb. 1,3. A pontos értékek táblázatokban találhatóak meg.

Egy kis kitérőként a fajhőkkel kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy azok nem állandók, hanem a kontínuumok többsége esetében a hőmérséklet emelkedésével értékük nő. Éppen ezért a gyakorlatban többnyire az ún. **közepes fajhővel** szoktak számolni, mely az adott hőmérséklettartományra érvényes átlagos érték. A gyakorlatban használt táblázatok egyezményesen a  $t_o = 0$  °C-tól számított különböző hőmérséklettartományokra vonatkozó átlagos értékeket adják meg. Ezek ismeretében egy tetszés szerinti tartományra az átlagos fajhő értéke a következő összefüggéssel határozható meg

$$\bar{c}_{t_1}^{t_2} = \frac{\bar{c}_{t_o}^{t_2} \cdot (t_2 - t_o) - \bar{c}_{t_o}^{t_1} \cdot (t_1 - t_o)}{t_2 - t_1} \quad (^\circ C)$$

Szükség esetén, a táblázatban nem szereplő hőmérséklettartományokhoz tartozó fajhőket lineáris interpolációval lehet meghatározni.

### **Politropikus állapotváltozás**

Ebben az esetben a fal rugalmas és diatermikus és egyetlen állapotjelző sem állandó. Amint azt a 3.2.2 fejezetben említettük, matematikailag semmi különbség nincs az adiabatikus állapotváltozásra vonatkozóan, mindössze azt kell szem előtt tartanunk, hogy a belsőenergia megváltozása ezúttal nem egyenlő a rendszeren végzett munkával!

$$w_{1,2} = \frac{R}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

$$u_{1,2} = c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

A két egyenletből

$$q_{1,2} = \left( \frac{R}{1-n} + c_v \right) \cdot (T_2 - T_1) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az első zárójelben lévő kifejezést a Mayer-egyenlet segítségével azonosan átalakítva egy újabb, ún. **politropikus fajhőt** is definiálhatunk

$$c_n = \frac{R}{1-n} + c_v = \frac{c_p - c_v}{1-n} + \frac{c_v \cdot (1-n)}{1-n} = c_v \cdot \frac{n - \kappa}{n - 1} \quad \left( \frac{J}{kg \cdot K} \right)$$

Ezzel a politropikus fajhővel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy egy virtuális fajhőről van csak szó, amit az is jelez, hogy ennek értéke adott esetben, ha a politropikus kitevő értéke kisebb az adiabatikus kitevő értékénél, akár negatív is lehet!

Az első főtételben szereplő mechanikai energia (munka) az adott állapotváltozás '**p-v**' koordinátarendszerben történő ábrázolása esetén szemléltethető is. A '**p-v**' koordinátarendszerben ugyanis az állapotváltozást szemléltető görbeszakasz alatti terület mérőszáma az állapotváltozás során 1 kg-nyi kontínuumra vonatkoztatott – az állapotváltozás irányától függően – a környezet által a rendszeren végzett ill. a rendszer által a környezeten végzett munka.

### **Önellenőrző kérdések a termodinamika I. főtétele fejezethez**

1. Hogyan egészíthető ki a Bernoulli-egyenlet úgy, hogy alkalmas legyen a környezetével termikus kapcsolatban lévő rendszer energetikai állapotának leírására is?
2. Mi a belső energia?
3. Mely állapotjelzők csoportjába tartozik a belső energia?
4. Mit fejez ki a termodinamika I. főtétele?
5. Milyen feltételezésekkel lehet felírni a termodinamika I. főtételét?
6. Hogyan határozható meg általánosságban a rendszeren végzett munka ill. a rendszer által a környezeten végzett munka?
7. Milyen speciális formát ölt a termodinamika I. főtétele izochor állapotváltozás esetén?
8. Milyen speciális formát ölt a termodinamika I. főtétele izobár állapotváltozás esetén?
9. Mit fejez ki a Mayer-egyenlet?
10. Hogyan értelmezhető fizikailag a specifikus gázállandó?
11. Milyen speciális formát ölt a termodinamika I. főtétele izotermikus állapotváltozás esetén?
12. Milyen viszonyban van az izotermikus kompresszió munkaszüksége a rendszer és környezet közötti hőcserével?

13. Milyen kapcsolatban van az adiabatikus kitevő a közeg fajhőivel?
14. Milyen jelleggel változik a fajhő a hőmérséklet függvényében?
15. Milyen módon határozható meg a tetszés szerinti hőmérséklet-tartományban érvényes közepes fajhő?
16. Hogyan értelmezhető a politropikus fajhő?

## 9 Körfolyamatok

Az I. főtétel egyértelmű kapcsolatot tár fel egy rendszerrel közölt hő és a rendszer által végzett munka között, tehát rámutat arra, hogy alkalmas módszerrel a hőenergia felhasználásával mechanikai energiához juthatunk. Ennek jelentősége óriási, hiszen az ún. hasznos munkavégzéshez (többnyire anyag-átalakítás) elsősorban mechanikai energiára van szükség, ami a természetben csak nagyon korlátozott mennyiségben áll rendelkezésre (áramló levegő, áramló víz energiája, emberi és állati munkavégző-képesség). Nem véletlen, hogy a hőenergia mechanikai munkává történő átalakíthatóságának felismeréséig és a XVIII. század végén a skót mérnök és feltaláló, James **Watt** révén történt gyakorlati megvalósításáig évezredek át csak nagyon lassan fejlődött technikai civilizációnk. Azóta azonban, a gyakorlatilag korlátlan mennyiségben előállítható mechanikai energiának köszönhetően hihetetlen fejlődés következett be. Különösen felgyorsult ez a fejlődés, amikor a villamos energia segítségével a hatékony energiaszállítás és elosztás is lehetővé vált.

Az I. főtétel azonban önmagában még nem mondja meg, hogyan lehetséges a hőenergia mechanikai energiává történő átalakítása.

Végig gondolva a korábban tárgyalt állapotváltozásokat (3.2.2 fejezet) láthatjuk, hogy hasznosítható munkát csak az ún. expanziós folyamatból (nyomáscsökkenés mellett bekövetkező térfogat-növekedés) nyerhetünk. Egyelőre ne foglalkozzunk azzal, hogy ez az expanziós folyamat izotermikus, adiabatikus vagy politropikus.

Könnyen beláthatjuk, hogy a mechanikai energiát szolgáltató expanziós folyamatot nem lehet vég nélkül folytatni, ugyanis a rendszer térfogata (az expanziót megvalósító gép mérete!) olyan nagy lesz, ami áthidalhatatlan nehézséget okoz, arról nem beszélve, hogy a nyomás csökkenése sem lehet végtelen. Ebből következik, hogy ciklikus működésű gépre van szükségünk, mely az adott expanziós folyamatot tetszés szerinti számban újra és újra megismétli.

Tehát az expandált közeget ismét expanzióképesé kell tennünk. Ez egy kompressziós folyamatot (térfogatcsökkenés mellett történő nyomásnövekedés) igényel.

Az is könnyen belátható, hogy a kompressziós folyamat végén nem lehet azonnal megkezdeni az expanziót, hiszen legfeljebb annyi munkát kaphatnánk vissza, amennyit a kompresszióhoz felhasználtunk. Gyakorlatilag ugyanaz a helyzet, mint az összenyomott rugó esetében, amelyik legfeljebb annyi munkát képes visszaadni, amennyit az összenyomás során elvégeztünk. A kompressziót követően tehát energiát (hőenergiát) kell közölnünk a rendszerrel. Ezáltal a rendszer olyan állapotban kerül, ahonnan elindítva az expanziót, több munkát képes szolgáltatni, mint amennyit a kompresszió során fel kellett használni.

Ezzel azonban még nem fejeződött be a teljes ciklus. Szükség van ugyanis egy olyan folyamatra, melynek során a rendszerből hőt vonunk el. Ennek elkerülhetetlensége ezen a ponton még nem látható be könnyen, de erre a kérdésre még vissza fogunk térni.

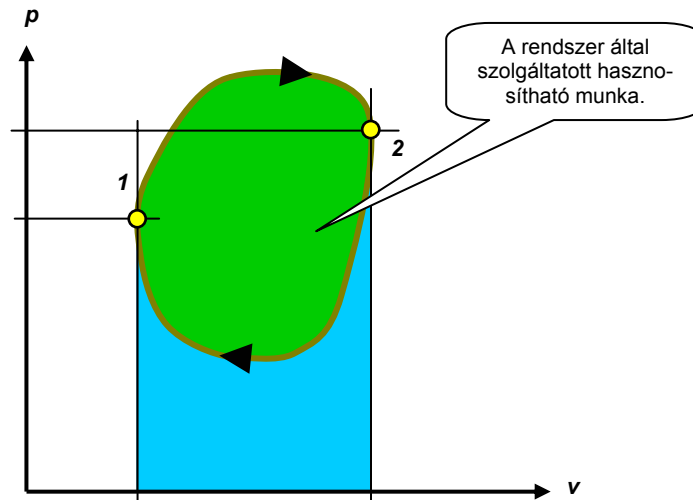
Összefoglalva: ahhoz, hogy a hőenergiából mechanikai energiát tudjunk előállítani egy olyan gépre van szükségünk, mely egy adott közegmennyiséggel a következő folyamatokat (állapotváltozásokat) valósítja meg ciklikusan, a következő sorrendben:

- kompresszió
- hőközlés
- expanzió
- hőelvonás.

Az egymást követő állapotváltozások egy ún. körfolyamatot alkotnak. Az itt elmondottakat a [29. ábra](#) szemlélteti általánosságban.

Az '1' és '2' pontokon átmenő, tetszőleges állapotváltozásokból felépülő körfolyamatra vonatkozóan az ábra szerint igaz, hogy az '1' pontból a '2' pont felé haladva a rendszer térfogata növekszik, ami egyértelműen utal arra, hogy a rendszer a környezetet összességében munkát végez. Miközben a '2' pontból visszaérkezünk az '1' pontba a rendszer térfogat csökken, ami azt jelenti, hogy a környezet munkát végez a rendszeren. Jól látható, hogy a rendszer tágulása során több munkát végez a környezeten (a zöld és a kék terület összege), mint

amennyi a környezet által elvégzett munka a rendszeren (a kék terület).



**29. ábra** A körfolyamat által szolgáltatott munka

Tehát az óramutató járásával megegyező körüljárási irányú tetszőleges körfolyamat folyamatosan hasznosítható munkát szolgáltat, ami arányos a körfolyamati görbe által körülhatárolt területtel.

A körüljárási irány kikötése fontos, ugyanis azonnal belátható, hogy a fordított irányú körüljáráshoz folyamatosan külső munka szükséges!

### Önellenőrző kérdések a körfolyamatok fejezethez

1. Milyen állapotváltozásból nyerhető hasznosítható munka a gyakorlatban?
2. Milyen folyamatok végrehajtása szükséges, egymást követően, hogy a hőenergiát mechanikai munkává lehessen átalakítani?
3. Hogyan igazolható a ' $p-v$ ' koordináta-rendszerben történő ábrázolással, hogy, az óramutató járásával megegyező körüljárási irányú tetszőleges körfolyamat hasznosítható munkát szolgáltat?

## 9.1 A termodinamika II. főtétele

A 29. ábrán történő szemléltetés gyenge pontja az, hogy a legfontosabb kérdésekre nem ad választ ill. útmutatást: mennyi hőenergiából mennyi mechanikai munka nyerhető, azaz milyen hatásfokú az adott körfolyamat, hogyan és meddig lehet javítani egy körfolyamat hatásfokát.

Ahhoz, hogy a feltett kérdésekre szemléletes választ lehessen adni meg kell ismerkednünk egy új ábrázolási móddal. Ezt a ' $p$ - $v$ ' koordináta-rendszer nyújtotta lehetőségek analógiájára lehet felépíteni.

Mint láttuk a mechanikai energia azért volt ábrázolható, mert a ' $p$ - $v$ ' koordináta-rendszerben érvényes, hogy

$$dw = -p \cdot dv \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Definiáljunk tehát a következő összefüggést

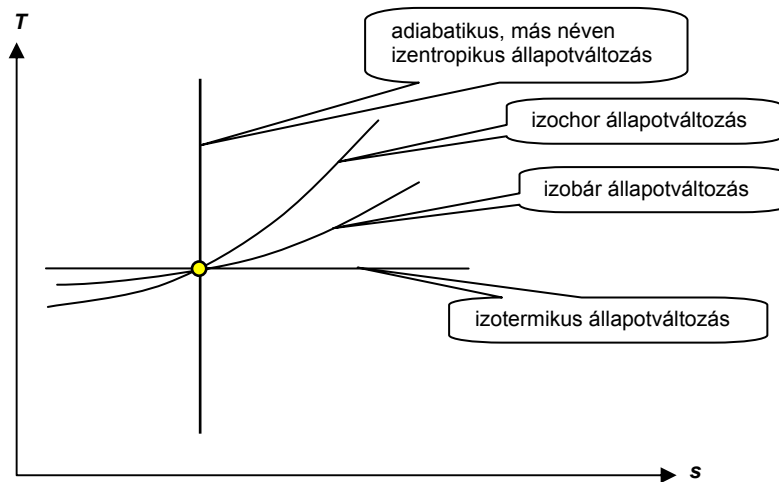
$$dq = T \cdot ds \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az összefüggésben a ' $s$ ' egy eddig nem használt és ezzel az összefüggéssel meghatározott új, virtuális állapotjelző, mely a hőmérséklet-hoz és nyomáshoz hasonlóan intenzív állapotjelző, a neve entrópia

$$ds = \frac{dq}{T} \quad \left( \frac{J}{kg \cdot K} \right)$$

Az entrópia fogalmát Rudolf Julius Emanuel **Clausius** vezette be a XIX. század második felében. Ennek a kifejezésnek nincs általánosan elfogadott magyar fordítása, de valójában ennél sokkal fontosabb az, hogy milyen célra használható.

Az entrópia segítségével az ún. ' $T$ - $s$ ' koordináta-rendszerben ábrázolva az állapotváltozásokat ugyanúgy tudjuk szemléltetni a hőmennyiségeket, mint ahogy a ' $p$ - $v$ ' koordináta-rendszerben a munkamennyiségeket tudtuk.



**30. ábra** Állapotváltozások a 'T-s' koordináta-rendszerben

A 30. ábra a legfontosabb állapotváltozások szemléltetését mutatja a 'T-s' koordináta-rendszerben.

Az izotermikus állapotváltozás menete triviális.

Az adiabatikus állapotváltozás esetén nem lévén termikus kölcsönhatás a rendszer és környezet között 'dq' nyilván zérus, amiből következik, hogy az entrópia ilyen esetben állandó. Ezért hívják egyes esetekben az adiabatikus állapotváltozást izentropikus állapotváltozásnak is. Az állandó nyomású és az állandó térfogatú állapotváltozások menetét exponenciális függvények írják le, hiszen pl. izobár állapotváltozás esetén, a fajhőt állandónak feltételezve

$$s = \int_1^2 \frac{dq}{T} = \int_1^2 \frac{c_p \cdot dT}{T} = c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \quad \left( \frac{J}{kg \cdot K} \right)$$

ahonnan

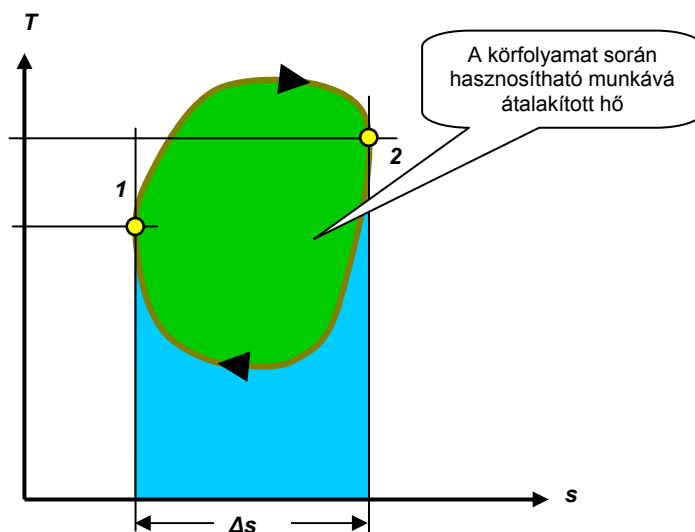
$$T_2 = T_1 \cdot e^{\frac{s_2 - s_1}{c_p}} \quad (K)$$

Az izobár és az izochor között csak az a különbség, hogy az utóbbi némileg meredekebb görbesereget jelent, hiszen a hatványkitevő nevezőjében szereplő állandó térfogatú fajhő, amint azt láttuk, kisebb mint az állandó nyomású.

Fontos felhívni a figyelmet arra, hogy az entrópia abszolút értéke ugyanúgy nem bír semmiféle jelentőséggel, ahogy az a helyzeti energia és a belsőenergia esetében is mellékes. Csak az entrópia megváltozásának van jelentősége, mivel ez jelzi a rendszer és a környezet közötti hőcserét. Az entrópia zéruspontját szabadon lehet megválasztani. Általános szokás szerint zérusnak tekintik az entrópiát atmoszférikus nyomáson és  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  hőmérsékleten.

Jóllehet az imént tárgyalt összefüggések segítségével mind az entrópia abszolút értéke (valamilyen választott zéruspontra vonatkoztatva!), mind megváltozása kiszámítható, csak a legritkább esetben szokták ezt a gyakorlatban megtenni. Az entrópia elsősorban a termodinamikai folyamatok szemléltetésére használható fel. Segítségével olyan összefüggések és törvényszerűségek mutathatók ki, amelyeket nélküle csak bonyolult módon lehetne megoldani.

Ha ezen bevezető után a ' $T$ - $s$ ' koordinátarendszerben ábrázolunk egy tetszőleges körfolyamatot (31. ábra) akkor arról a következők mondhatók el.



**31. ábra** A körfolyamat során munkává átalakított hőmennyiség

Az '1' és '2' pontokon átmenő, tetszőleges állapotváltozásokból felépülő körfolyamatra vonatkozóan az ábra szerint igaz, hogy az '1' pontból



a '2' pont felé haladva a rendszer entrópiája növekszik, ami egyértelműen utal arra, hogy a rendszer a környezetből hőt vesz fel.

Miközben a '2' pontból visszaérkezünk az '1' pontba a rendszer entrópiája csökken, ami azt jelenti, hogy a rendszer hőt ad le a környezetnek. Jól látható, hogy az entrópia-növekedés során több hőt vesz fel a rendszer (a zöld és a kék terület összege), mint amennyit a környezet felé lead (a kék terület).

Tehát az óramutató járásával megegyező körülmények irányú tetszőleges körfolyamat folyamatosan hasznosítható munkát szolgáltat, ami megegyezik a körfolyamati görbe által körülhatárolt terület által szemléltetett hőmennyiséggel.

Ne feledjük ugyanis, hogy egy teljes ciklus során a rendszer belső-energiájának teljes megváltozása éppen zérus, hiszen a kezdő és a végpontban a hőmérséklet azonos kell legyen!

A körülmények irány kikötése fontos, ugyanis azonnal belátható, hogy a fordított irányú körülményekhez (az óramutató járásával ellentétes) folyamatosan külső munka szükséges! Ilyenkor a hő magasabb hőmérsékletre történő „felszivattyúzása” történik, ami elvileg megfelel a hűtőszekrények hűtőrendszere által végzett folyamatnak.

A termodinamikai (energiatermelő) körfolyamat bizonyos értelemben egy vízturbina analógiájaként is felfogható. A vízturbina egy magasabban elhelyezkedő tartályból vagy tározó medencéből egy alacsonyabban elhelyezkedő, másik medencébe vagy csatornába átfolyó víz energiáját hasznosítja. Ehhez hasonlóan a termikus körfolyamat szerint működő gép egy magasabb hőmérsékletű „tartályból” egy alacsonyabb hőmérsékletű „tartályba” átfolyó közeg hőenergiáját hasznosítja. Ahogy az alsó és a felső víztartály szintje közötti különbség meghatározza a kinyerhető energia mennyiségét a vízturbina esetében úgy a két „tartály” hőmérséklete közötti különbség is meghatározó a termikus körfolyamat esetében. Végezetül, ahogy az alsó tartályba megérkező víz sem képes további munkavégzésre az adott berendezésben, úgy az alacsonyabb hőmérsékletű „tartályba” megérkező közegből sem lehet hasznos munkavégzés céljára további energiát kinyerni az adott berendezésben.

A fentiek alapján belátható, hogy nem lehetséges olyan körfolyamatot elképzelni, mely hőelvonás nélkül működik. A hőelvonás feltétlenül szükséges, ahhoz, hogy a folyamatos, ciklikus működés megvalósítható legyen.

Ugyancsak belátható a fentiek alapján, hogy a hőenergia nem alakítható át maradéktalanul mechanikai energiává.

A fenti két megállapítás a termodinamika II. főtételenek két legfontosabb lehetséges megfogalmazása.

A II. főtétele tehát nem egy számítások elvégzésre alkalmas egyenlet, hanem egy megállapítás, mely a bennünket körülvevő természetben tett, általános érvényességű megfigyelés, amit nem lehetséges levezetni más természeti törvényekből. A II. főtétele az energiamegmaradást kifejező I. főtételel egyenrangú annak érvényességét korlátozó, de azzal ellentétben nem áll alapvető törvényszerűség.

A II. főtétele számos más megfogalmazása közül itt még kettőt említünk meg:

- a hő, külső beavatkozás nélkül, csak a melegebb hely felől a hidegebb hely felé áramlik,
- zárt rendszerben, külső behatás nélkül a hőmérsékletkülönbségek a kiegyenlítődés felé változnak.

Ahhoz, hogy a körfolyamatok hatásfokára illetve a hatásfok javítására nézve tehessünk általános megállapításokat, vegyük ismét szemügyre a [31. ábrát](#).

Nyilvánvaló, hogy bármilyen is a hőközlési folyamat az annak során a környezetből felvett hő kifejezhető valamilyen átlagos hőmérséklettel és az ábrán megjelölt entrópia-különbséggel

$$q_{be} = \bar{T}_f \cdot \Delta s \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

ugyanilyen módon a környezetnek leadott hő

$$q_{el} = \bar{T}_a \cdot \Delta s \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

A körfolyamat ún. termodinamikai hatásfoka ezekkel

$$\eta = \frac{q_{be} - q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{\bar{T}_a \cdot \Delta s}{\bar{T}_f \cdot \Delta s} = 1 - \frac{\bar{T}_a}{\bar{T}_f}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy egy körfolyamat hatásfoka annál jobb minél magasabb hőmérsékleten történik a hőközlés és minél alacsonyabb hőmérsékleten történik a hőelvonás. Azt is láthatjuk, hogy a 100%-os termodinamikai hatásfok elérhetetlen, mivel ehhez a hőelvonás hőmérsékletének 0 K-nek kellene lennie, ami természetesen lehetetlen, sőt ennek számottevő megközelítése is az. Visszajutottunk a termodinamika II. főtételéhez.

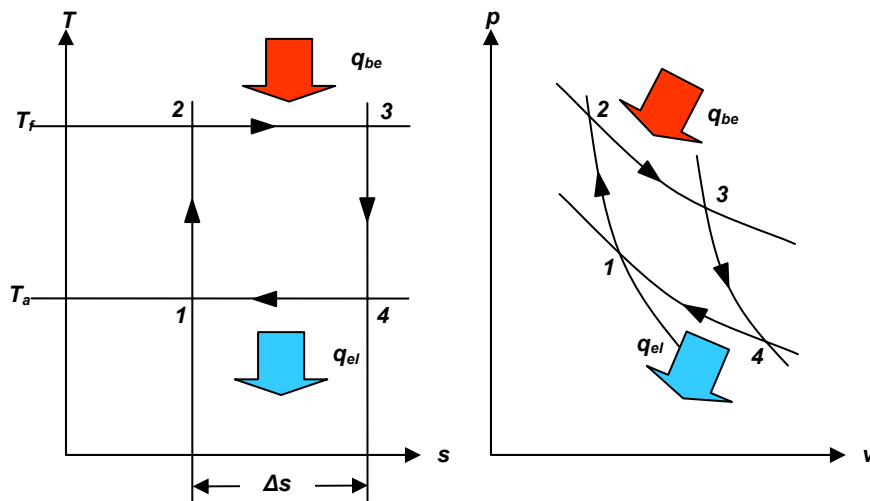
### Önellenőrző kérdések a termodinamika II. főtétele fejezetéhez

1. Mi az entrópia definíciós egyenlete?
2. Mi az entrópia mértékegysége?
3. Mely állapotjelzők csoportjába tartozik az entrópia?
4. Milyen görbe szemlélteti a '**T-s**' koordináta-rendszerben az izobár és az izochor állapotváltozást?
5. Ugyanazon a ponton átmenő izobár és izochor közül melyik fut meredekebben a '**T-s**' koordináta-rendszerben? Miért?
6. Hogyan igazolható a '**T-s**' koordináta-rendszerben történő ábrázolással, hogy, az óramutató járásával megegyező körüljárási irányú tetszőleges körfolyamat során hőenergia kerül átalakításra mechanikai energiává?
7. Hogyan mutatható ki a '**T-s**' koordináta-rendszerben történő ábrázolással, hogy hőelvonás nélkül nem lehetséges körfolyamatot elképzelni?
8. Hogyan mutatható ki a '**T-s**' koordináta-rendszerben történő ábrázolással, hogy a hőenergia soha sem alakítható át 100%-osan mechanikai energiává?
9. Hogyan fogalmazható meg a termodinamika II. főtétele?
10. Mitől függ elméletileg egy tetszőleges körfolyamat termodinamikai hatásfoka?
11. Hogyan igazolható matematikailag, hogy termodinamikai hatásfok soha sem lehet 100%-os?

#### 9.1.1 A Carnot-körfolyamat

Az előzőek alapján könnyen választ adhatunk arra a kérdésre, hogy adott hőmérsékleti korlátokat feltételezve melyik a lehető legjobb hatásfokú körfolyamat? A ' $T_f$ ' és a ' $T_a$ ' hőmérsékletekkel jelezett korlátok között nyilván egy derékszögű négyszög alakú körfolyamat biztosítja a

legjobb „kihasználást”.Ez a körfolyamat a 'T-s' koordinátarendszerben a következőképpen kell kinézzen.



32. ábra A Carnot-körfolyamat

A körfolyamatot alkotó állapotváltozások tehát

- 1-2 adiabatikus kompresszió
- 2-3 izotermikus hőközlés
- 3-4 adiabatikus expanzió
- 4-1 izotermikus hőelvonás

Az ezekből az állapotváltozásokból felépülő körfolyamatot az azt a XIX. század elején elsőként leíró francia fizikus Nicolas Léonard Sadi Carnot tiszteletére Carnot-körfolyamatnak nevezik.

A Carnot-körfolyamat termodinamikai hatásfoka természetesen

$$\eta = \frac{q_{be} - q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{T_a \cdot \Delta s}{T_f \cdot \Delta s} = 1 - \frac{T_a}{T_f}$$

Sajnálatos körülmény, hogy a Carnot-körfolyamatnak jobbára csak elméleti jelentősége van, a gyakorlatban nem valósítható meg. Ennek oka egyszerűen az a tény, hogy gázok esetében mind a hőközlés mind a hőelvonás csak változó hőmérséklet mellett valósítható meg. A felső és az alsó hőmérsékletkorlátot csak a hőközlés ill. hőelvonás legvégén

lehet elérni. Állandó hőmérséklet mellett történő hőközlés és hőelvonás, mint azt tudjuk, csak halmazállapot-változás esetén lehetséges. Az ezzel kapcsolatos kérdéseket a 9. fejezetben fogjuk érinteni.

A továbbiakban a gyakorlatban megvalósított számos termodinamikai körfolyamat közül a három alapesetet tekintjük át.

### Önellenőrző kérdések a Carnot-körfolyamat fejezethez

1. Milyen állapotváltozások, milyen sorrendben alkotják a Carnot-körfolyamatot?
2. Hogyan ábrázolható a Carnot-körfolyamat a ' $p$ - $v$ ' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
3. Hogyan ábrázolható a Carnot-körfolyamat a ' $T$ - $s$ ' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
4. Hogyan kell értelmezni azt, hogy a Carnot-körfolyamat a legjobb hatásfokú körfolyamat?
5. Miért nem lehet gázokkal megvalósítani a Carnot-körfolyamatot?

### 9.1.2 Az Otto-körfolyamat

Az Otto-körfolyamat a gyakorlatban használatos benzinüzemű, szikragújtásos motorok elméleti körfolyamata. ( 33. ábra)

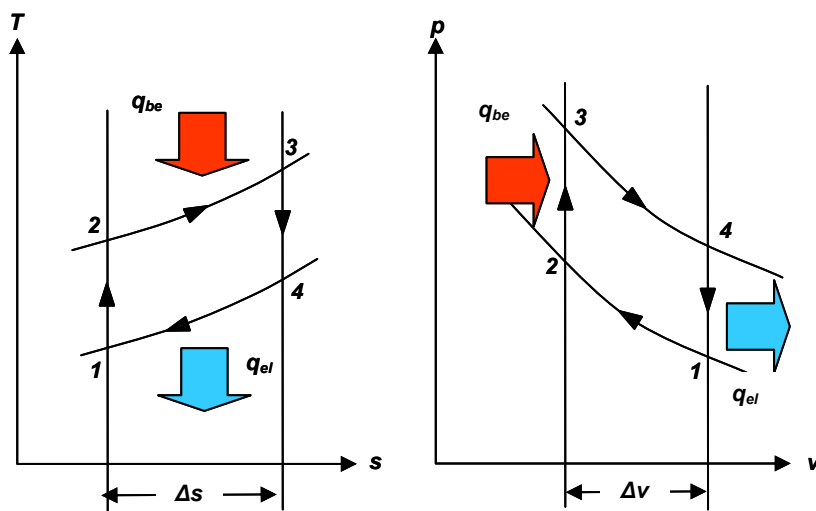
A körfolyamatot alkotó állapotváltozások tehát

- 1-2 adiabatikus kompresszió
- 2-3 izochor hőközlés
- 3-4 adiabatikus expanzió
- 4-1 izochor hőelvonás

Az ezekből az állapotváltozásokból felépülő körfolyamatot az azt megvalósító gépet a XIX. század végén megépítő német mérnök, Nicolaus August **Otto** tiszteletére Otto-körfolyamatnak nevezik.

Az Otto-körfolyamat termodinamikai hatásfoka

$$\eta_O = \frac{q_{be} - q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_v \cdot (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1 \cdot \left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{T_2 \cdot \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)}$$



33. ábra Az Otto-körfolyamat

Mivel a hőközlés és a hőelvonás is állandó térfogat mellett történik, a számlálóban és a nevezőben szereplő zárójeles kifejezések egymással egyenlők és így az összefüggés a gyakorlati számára kényelmesebb formára történő átalakításának további lépései

$$\eta_o = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\frac{T_2}{T_1}} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa-1}} = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}}$$

Tehát az Otto-körfolyamat termodinamikai hatásfoka kifejezhető a sűrítés során bekövetkező térfogat-változási viszonzyszámmal, amit kompresszió-viszonynak neveznek. Mindez természetesen nem mond ellent a termodinamikai hatásfokkal kapcsolatos általános megállapításainknak mindössze annak más formában történő kifejezéséről van itt szó.

Megjegyzendő itt, hogy a gyakorlatban nem ugyanazon kontínuummal ismétlődik meg a folyamat, hiszen a hőbevezetés az Otto-körfolyamatot megvalósító gépben a levegőben elkevert üzemanyag elégetésével történik, azaz a kontínuum a hőbevezetés során „elhasználódik”. A gyakorlati körfolyamat valójában az atmoszférán keresztül záródik be, a hőelvonás az atmoszférában elkeveredő égéstermékek lehűlése során valósul meg. Magát az atmoszférát úgy tekinthetjük a gyakorlati körfolyamatok többsége esetén, mint a rend-

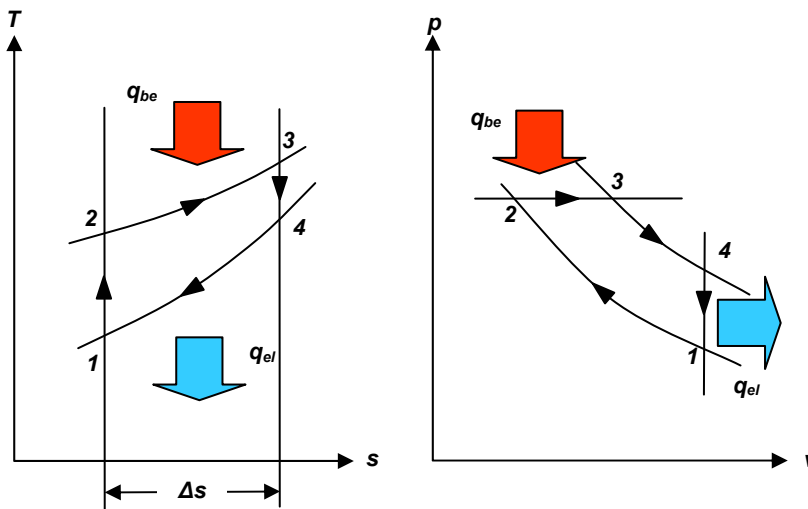
szerhez kapcsolódó olyan „tartály”, mely korlátlanul képes állapotának bármiféle megváltozása nélkül felvenni a munkát végzett közeget és korlátlanul képes azonos állapotú „friss” közeget szolgáltatni a körfolyamathoz.

**Önellenőrző kérdések az Otto-körfolyamat fejezethez**

1. Milyen állapotváltozások, milyen sorrendben alkotják az Otto-körfolyamatot?
2. Hogyan ábrázolható az Otto-körfolyamat a ' $p-v$ ' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
3. Hogyan ábrázolható az Otto-körfolyamat a ' $T-s$ ' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
4. Mi a jellemző, az Otto-körfolyamat hőközlési folyamatára?
5. Mit kell érteni azon, hogy egy körfolyamat az atmoszférán keresztül záródik?

**9.1.3 A Diesel-körfolyamat**

A Diesel-körfolyamat a gyakorlatban használatos kompressziós gyújtású motorok elméleti körfolyamata.



**34. ábra** A Diesel-körfolyamat

A kompresszió gyújtás alatt azt kell érteni, hogy a kompresszió közben olyan nagy mértékű az üzemanyag levegő keverék felmelegedése,

hogyan a gyulladás külső hőforrás alkalmazása nélkül, öngyulladással következik be.

A körfolyamatot alkotó állapotváltozások tehát

- 1-2 adiabatikus kompresszió
- 2-3 izobár hőközlés
- 3-4 adiabatikus expanzió
- 4-1 izochor hőelvonás

Az ezekből az állapotváltozásokból felépülő körfolyamatot az azt megvalósító gépet a XIX. század végén megépítő német mérnök, Rudolf Christian Karl **Diesel** tiszteletére Diesel-körfolyamatnak nevezik. Az Otto-körfolyamatra vonatkoztatva a különbség a hőközlési (égési) folyamatnál van. Míg az Otto-körfolyamat esetében egy rendkívül gyors, robbanásszerű égés zajlik le (innen származik a robbanómotor kifejezés), addig a dízel motor esetében az égés lényegesen lassúbb, az izobár állapotváltozással modellezhető.

A Diesel-körfolyamat termodinamikai hatásfoka

$$\eta_D = \frac{q_{be} - q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_p \cdot (T_3 - T_2)}$$

Anélkül, hogy a gyakorlati motorszerkesztés számára kényelmesebb formára történő átalakítás további lépéseit itt részleteznénk

$$\eta_D = 1 - \frac{1}{\kappa \cdot \varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{(\rho^\kappa - 1)}{(\rho - 1)}$$

ahol a már említett kompresszióviszony mellett megjelenik az ún. előzetes expanzióviszony, ami nem más, mint az égés során bekövetkező térfogatváltozásra jellemző viszonyszám  $\rho = v_3/v_2$ .

A Diesel-körfolyamat szintén az atmoszférán keresztül záródik be, akárcsak az Otto-körfolyamat.

### Önellenőrző kérdések a Diesel-körfolyamat fejezethez

1. Milyen állapotváltozások, milyen sorrendben alkotják a Diesel-körfolyamatot?
2. Hogyan ábrázolható a Diesel-körfolyamat a 'p-v' koordinátarendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
3. Hogyan ábrázolható a Diesel-körfolyamat a 'T-s' koordinátarendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?



4. Mi a jellemző, a Diesel-körfolyamat hőközlési folyamatára?
5. Mért jobb elvileg a Diesel-körfolyamat hatásfoka, mint az Otto-körfolyamaté?

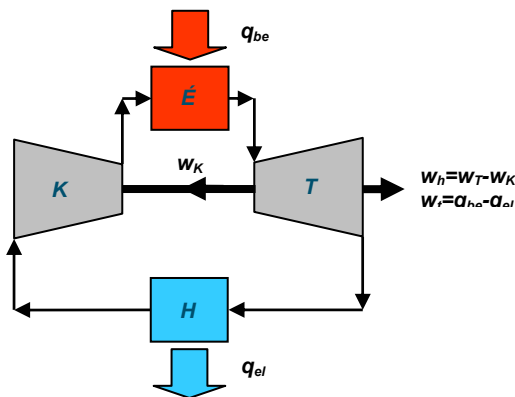
### 9.1.4 A gázturbina-körfolyamat

A gázturbina-körfolyamat a gyakorlatban használatos gázturbina berendezések elméleti körfolyamata.

Valójában nem egy gép valósítja meg az állapotváltozások mindegyikét. Különálló berendezés végzi a kompressziót (kompresszor), külön berendezésben történik a hőközlés (égéstér) és egy különálló, de a kompresszorral mechanikai kapcsolatban álló, a meghajtását biztosító expanziós gép (turbina) szolgáltatja a hasznosítható munkát.

A körfolyamat sajátossága, hogy az égés a Diesel-körfolyamathoz hasonlóan lassú, gyakorlatilag állandó nyomás mellett zajlik le, ugyanakkor a hőelvonás is állandó nyomáson történik, mivel a munkát végzett közeg a turbinából gyakorlatilag atmoszférikus nyomáson távozik.

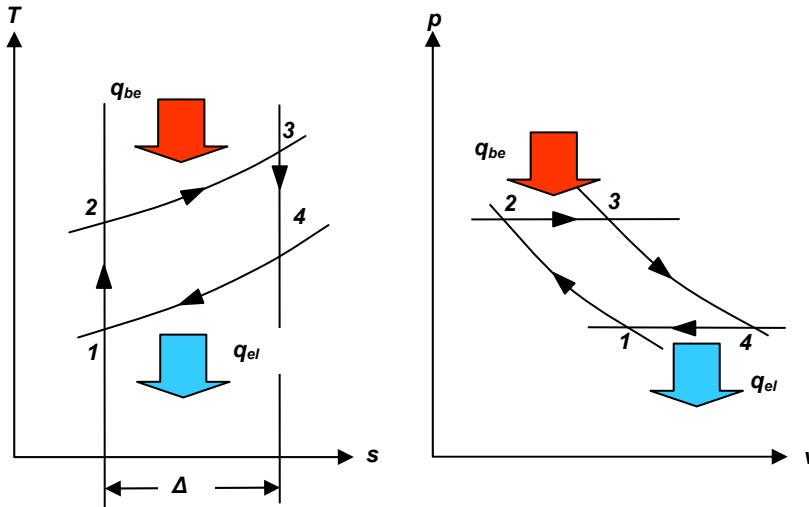
A körfolyamatot megvalósító berendezés elvi sémáját a 35. ábra mutatja.



35. ábra A gázturbina-körfolyamat kapcsolási vázlata

Az esetek többségében a gázturbina-körfolyamat is az atmoszférán keresztül záródik, de ebben az esetben, nagyobb stabil gépek esetében elvileg megoldható, hogy a hőközlés és a hőelvonás ún. felületi hőcserélőben történjen, aminek köszönhetően a rendszerben ugyan-

azon kontínuum-mennyiség kering és szenved el az állapotváltozásokat.



36. ábra A gázturbina-körfolyamat

A körfolyamatot alkotó állapotváltozások tehát

- 1-2 adiabatikus kompresszió
- 2-3 izobár hőközlés
- 3-4 adiabatikus expanzió
- 4-1 izobár hőelvonás

Az ezekből az állapotváltozásokból felépülő körfolyamatot nevezik gázturbina-körfolyamatnak, egyes szakirodalmi munkákban az azt megvalósító gépet a XIX. század végén megépítő amerikai mérnök, George **Brayton** tiszteletére Brayton-körfolyamatnak.

A gázturbina-körfolyamat termodinamikai hatásfoka

$$\eta_G = \frac{q_{be} - q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{q_{el}}{q_{be}} = 1 - \frac{c_p \cdot (T_4 - T_1)}{c_p \cdot (T_3 - T_2)}$$

Az Otto-körfolyamat termodinamikai hatásfokával kapcsolatban felírt összefüggéssel ezt összevetve nyilvánvaló, hogy a gázturbina-körfolyamat termodinamikai hatásfoka megegyezik az Otto-körfolyamatéval, tehát a kompresszió viszonyal is kifejezhető

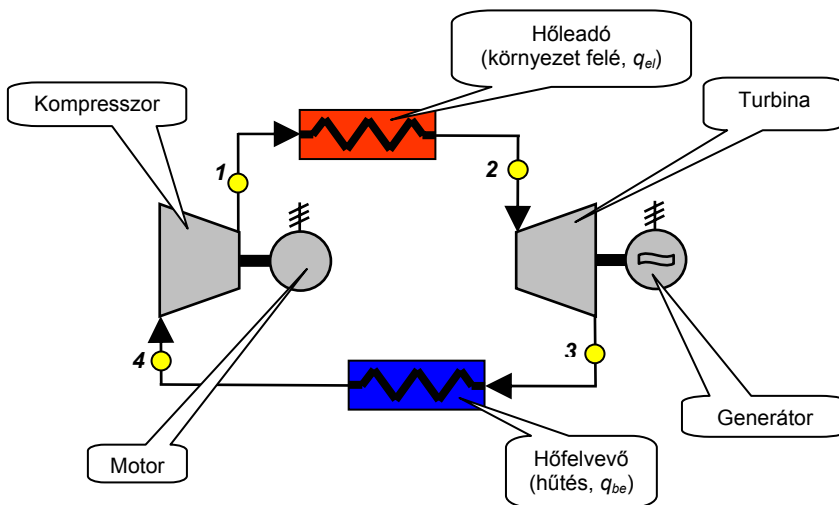
$$\eta_G = \eta_O = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}$$

**Önellenőrző kérdések a gázturbina-körfolyamat fejezethez**

1. Milyen állapotváltozások, milyen sorrendben alkotják a gázturbina-körfolyamatot?
2. Hogyan ábrázolható a gázturbina-körfolyamat a 'p-v' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
3. Hogyan ábrázolható a gázturbina-körfolyamat a 'T-s' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
4. Mi a jellemző, a gázturbina-körfolyamat hőelvonási folyamatára?
5. Hogyan igazolható, hogy a gázturbina-körfolyamat termodinamikai hatásfoka azonos az Otto-körfolyamatéval?

**9.2 Hűtő körfolyamatok**

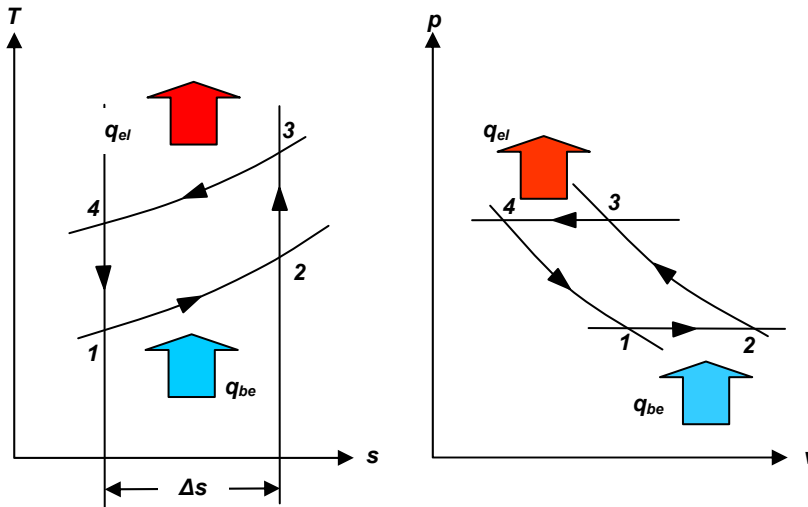
Amint azt említettük az óramutató járásával ellentétes körüljárási irányú termikus körfolyamat esetében a folyamat fenntartásához folyamatos külső munkavégzés szükséges.



**37. ábra** Gázzal működő hűtő körfolyamat kapcsolási vázlat

A folyamatot megvalósító berendezés elvi sémáját a 37. ábra mutatja.

Ilyen esetben, ismét hidraulikai analógiát hívva segítségül, hő „felszivattyúzása” történik egy alacsonyabb hőmérsékletű helyről egy magasabb hőmérsékletű helyre.



**38. ábra** Gázzal működő hűtő körfolyamat

A gyakorlatban az alacsonyabb hőmérsékletű hely egy zárt tér, ahol a környezeti hőmérsékletnél alacsonyabb hőmérsékletet kívánunk elérni és fenntartani. A zárt térből elszállított hő a környezetbe jut.

A leírtakat megvalósító körfolyamat, a körfolyamatot alkotó állapotváltozások tekintetében mindenben megegyezik a fentebb tárgyalt gázturbina körfolyamattal, mindössze a körüjárási irányt kell megfordítani (38.ábra).

A körfolyamatot alkotó állapotváltozások tehát

- 1-2 hőfelvétel a zárt térben (hűtés)
- 2-3 adiabatikus kompresszió (a közeg a környezeti hőmérsékletnél magasabb hőmérsékletre melegszik fel)
- 3-4 hőleadás a környezetbe
- 4-1 adiabatikus expanzió

Meg kell jegyezni, hogy – ellentétben a gázturbina-körfolyamattal – ebben az esetben egy ténylegesen zárt körfolyamatról van szó, azaz a rendszerben ugyanazon közegmennyiség kering és szenved el az

állapotváltozásokat. Itt ugyanis a hűtés oldalán lévő zárt tér miatt nem jöhet szóba, hogy a közeget a kompresszió vagy az expanzió végén a rendszerből „kiengedjük”!

A hőszivattyúként emlegetett berendezés is a fenti műveletet hajtja végre, de ott a zárt térben (fűtendő helyiség) szükséges hőmérsékletnél alacsonyabb, állandó vagy közel állandó hőmérsékletű helyről (talaj, talajvíz, stb.), külső munkabefektetés segítségével juttatunk hőt a zárt térbe.

Nyilvánvaló, hogy a hűtő körfolyamattal kapcsolatosan nem lehet termodinamikai hatásfokról beszélni.

A hűtő körfolyamat hatékonyságát a fajlagos hűtőteljesítménnyel, a hűtés során elvont hőmennyiség és a folyamat fenntartásához szükséges mechanikai energia hányadosával, lehet kifejezni.

Az Otto-körfolyamatnál bemutatott levezetés alapján a fajlagos hűtőteljesítmény

$$\varepsilon = \frac{q_h}{w} = \frac{c_p \cdot (T_2 - T_1)}{c_p \cdot (T_3 - T_4) - c_p \cdot (T_2 - T_1)} = \frac{1}{\frac{c_p \cdot (T_3 - T_4) - c_p \cdot (T_2 - T_1)}{c_p \cdot (T_2 - T_1)}}$$

$$\varepsilon = \frac{q_h}{w} = \frac{1}{\frac{c_p \cdot (T_3 - T_4)}{c_p \cdot (T_2 - T_1)} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}$$

Az itt leírt, gázzal működő folyamat a gyakorlatban gazdaságosan csak olyan esetekbe valósítható meg, amikor a közegmennyiség és a nyomásviszony elég nagy ahhoz, hogy az expanziós folyamatot megvalósító gép által szolgáltatott munkát gazdaságosan hasznosítani lehet (a fenti összefüggésben ezt feltételeztük!). Ilyen eset általában ipari méretű berendezéseknél áll elő, különösen akkor, ha a nyomásviszony is jelentős, azaz igen alacsony hőmérsékletre kell hűteni. Ha ezek a körülmények nem állnak fenn, akkor a folyamat hatékonysága nagyon kicsi. Ezért nem alkalmaznak ilyen, gázzal működő folyamatot háztartási berendezésekben.

A gyakorlatban előforduló fajlagos hűtőtéljesítmények 1,2 és 1,5 között helyezkednek el, tehát a befektetett mechanikai energiánál csak mindössze kb. 20-50%-al több a hűtés során elvont hőenergia.

### **Önellenőrző kérdések a hűtő körfolyamatok fejezetéhez**

1. Milyen fő elemekből épül fel egy gázzal működő hűtő-körfolyamat kapcsolási sémája?
2. A hűtő-körfolyamat kapcsolási sémájában szereplő egyes elemeknek mi a funkciója?
3. Hogyan ábrázolható a gázzal működő hűtő-körfolyamat a ' $p-v$ ' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
4. Hogyan ábrázolható a gázzal működő hűtő-körfolyamat a ' $T-s$ ' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?
5. Mivel jellemzik a hűtő-körfolyamatok hatékonyságát általánosságban?
6. Milyen feltételek esetén valósítható meg gazdaságosan gázzal működő hűtő-körfolyamat?
7. Milyen tartományban mozog a gázzal működő hűtő-körfolyamatok fajlagos hűtőtéljesítménye?
8. Mit értenek hőszivattyú alatt?

## **10 A gőz-körfolyamatok és a gőzdiagramok.**

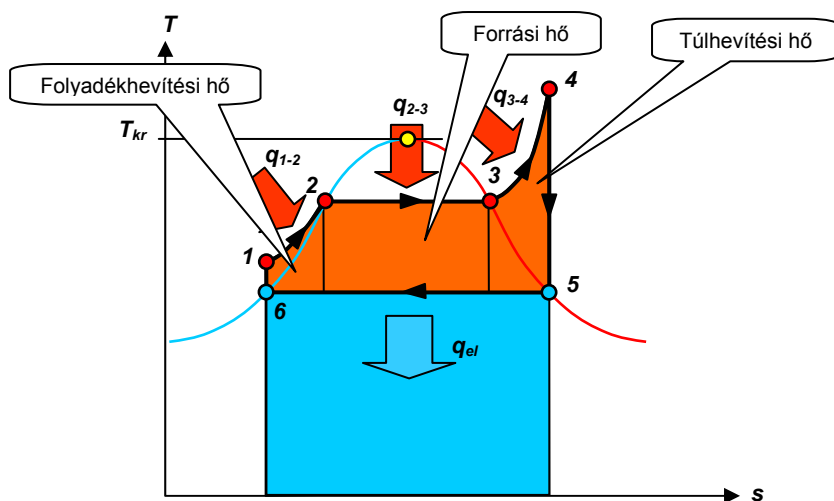
Az eddig tárgyalt körfolyamatok esetében a kontinuum minden állapotváltozás közben légnemű halmazállapotban volt. Ez a számítások viszonylag kényelmes elvégezhetőségét teszi lehetővé, hiszen a közegről feltételezhető volt, hogy többé-kevésbé megfelel az ideális gáztörvénynek. Szembe kellett azonban néznünk a gázok azon kedvezőtlen tulajdonságával, hogy mind a hőközlés, mind a hőelvonás során hőmérsékletük változik. Tekintettel arra, hogy a gyakorlatban adott hőmérséklet határok között kell megvalósítani a körfolyamatokat, ez a tulajdonság azt eredményezi, hogy a felső hőmérséklet határt csak a hőközlés végén, az alsó hőmérséklet határt pedig csak a hőelvonás végén érhetjük el.

Jobb hatásfok elérése érdekében olyan kontínuumokat kell alkalmaznunk, melyek az érintett hőmérséklet határok között változtatják a halmazállapotukat, ugyanis a halmazállapot-változás közben a hőmérséklet nem változik, tehát adott az elvi lehetőség a Carnot-körfolyamat bizonyos mértékű megközelítésére. Mindez azt jelenti, hogy a körfolyamatot át kell helyezni arra a területre, ahol a halmazállapot-változás határait jelző ún. határgörbék találhatók (3.1 fejezet).

## 10.1 A Rankine-Clausius körfolyamat

A 39. ábra a 3.1 fejezetben tárgyalt fázisegyensúlyi diagram körfolyamati szempontból fontos, folyadék – folyadék-légnemű – légnemű halmazállapot területeit és az ezeket egymástól elválasztó, a kritikus pontban találkozó alsó és felső határgörbét mutatja a ' $T$ - $s$ ' koordinátarendszerben. A két határgörbe, melyek a telített folyadék és a telített gőz állapotokat jelölik, szimmetrikus elhelyezkedésűek és együttesen egy harang alakú görbét alkotnak, melynek tetőpontján van a kritikus pont.

A koordinátarendszerbe berajzoltunk egy olyan termikus körfolyamatot, mely ezt a halmazállapot-változási területet is érinti (39. ábra).



39. ábra A Rankine-Clausius körfolyamat

A hőközlési folyamat a folyadék mezőben indul, az '1' jelű ponttól. Itt a folyadék telítetlen állapotban van, azaz hőmérséklete alacsonyabb, mint a nyomásához tartozó telítési hőmérséklet.

A folyadék melegedése során (állandó nyomás mellett) eléri a nyomásához tartozó telítési hőmérsékletet, megkezdődik a forrás ('2'). Az '1-2' görbeszakasz alatti terület a folyadék melegítéséhez szükséges hőmennyiséggel arányos.

A '2-3' görbeszakasz a folyadék-légnemű halmazállapot-változást jelzi. Ezen közben a nyomás mellett a hőmérséklet is állandó. A görbeszakasz alatti terület a forrás közben felvett ún. rejtett vagy idegen szóval latens hővel arányos.

A '3-4' görbeszakasz, melynek menete emlékeztet a gázokkal kapcsolatosan tapasztalt exponenciális görbe menetére a keletkezett gőzök túlhevítését, azaz a nyomáshoz tartozó telítési hőmérséklet fölé történő melegítését jelzi. A görbeszakasz alatti terület az ún. túlhevítési hő.

A hőközlés során felvett hő tehát

$$q_{be} = q_{fh} + q_{fo} + q_{th} = q_{1-2} + q_{2-3} + q_{3-4} \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

A '4' ponttól indul a magas hőmérsékletű (túlhevített) gőz adiabatikusnak feltételezett expanziója, mely a felső határgörbe elérésig tart ('5').

A hőelvonás a munkát végzett közeg kondenzálódásának (légnemű halmazállapotból folyékony halmazállapotba történő átmenet) megfelelő állandó nyomású és hőmérsékletű állapotváltozás. Az '5-6' egyenes alatt terület mutatja a kondenzáció során elvonásra kerülő rejtett hőt.

Végezetül a munkát végzett és lekondenzálódott, tehát ismételtlen folyadék halmazállapotba került közeget át kell szivattyúzni a hőközlés nyomására. Mivel a folyadék gyakorlatilag összenyomhatatlan (a folyadékmezőben az állandó nyomású görbék egymás közvetlen közelében futnak!), az ehhez szükséges munka mennyisége gyakorlatilag elhanyagolható az expanzió során nyert munkához képest.

A 36. ábrán bemutatott körfolyamatot a XIX. század végén William John Macquorn **Rankine** skót mérnök és fizikus írta le először és emlékére Rankine-körfolyamatnak (a szakirodalomban helyenként



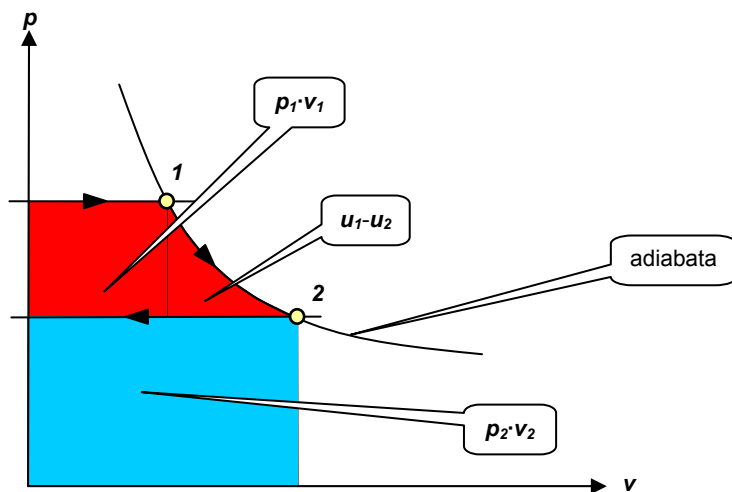


3. Hogyan ábrázolható a Rankine-Clausius körfolyamat a ' $T-s$ ' koordináta-rendszerben? Melyek a hőbevezetési és a hőelvonási folyamatok?

## 10.2 Az entalpia

A Rankine-Clausius körfolyamat számításokkal történő követése komoly nehézséget jelent. Ennek oka az, hogy a hőközlési és a hőelvonási folyamat esetében (leszámítva a folyadékmezőt) nem lehetséges egy bizonyos (esetleg átlagos) fajhőt definiálni ill. használni. A 39. ábrán jól látszik az is, hogy a nyomás változásával változik a rejtett hő nagysága is. További és az eddig említettekénél is nagyobb gondot okoz az, hogy az adiabatikus expanzió követése az eddig megismert összefüggésekkel nem lehetséges, mivel ebben a tartományban a kontinuumra nem érvényes az általános gáztörvény.

Mindezen problémák áthidalására vezette be a XIX. század végén Heike Kamerlingh **Onnes** holland fizikus az entalpia fogalmát. Ennek megértéshez a 41. ábra segítségével gondoljuk végig a következőket.



41. ábra Az entalpia és a technikai munka

Adiabatikus expanzió esetén a közeg a kezdő állapotban ' $u_1$ ' belső energiával továbbá azzal a tágulási munkával rendelkezik, amit a fo-

lyamatot végrehajtóba gépbe történő belépéskor elvégzett. A közeg állapota tehát az expanzió kezdetekor

$$u_1 + p_1 \cdot v_1 \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

összeggel jellemezhető.

Az adiabatikus expanzió után a közeg belsőenergiája ' $u_2$ ', azonban figyelembe kell venni azt a tágulási munkát, a mi ahhoz kell, hogy a közeget eltávolíthassuk az adiabatikus expanziót végrehajtó gépből azért, hogy újabb közegmennyiséggel ismételten elvégezhető legyen a folyamat. Ilyen módon a közeg állapota, előzőekben értelmezetthez hasonlóan, az expanzió végén a

$$u_2 + p_2 \cdot v_2 \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

összeggel jellemezhető.

E két összeg különbsége

$$(u_1 + p_1 \cdot v_1) - (u_2 + p_2 \cdot v_2) = w_t = \int_1^2 v \cdot dp \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

az a munkamennyiség, amit az adiabatikus expanzió ciklikus megismétlése során hasznosítani lehet, a koordináta-rendszerben az '1-2' görbeszakasz és a ' $p$ ' tengely közötti terület. Ezt a munkamennyiséget az eddigiek során már megismert munkától történő megkülönböztetés céljából technikai munkának is nevezik. A gondolatmenet lényege az, hogy az  $(u + p \cdot v)$  összeg megváltozása attól függetlenül megadja az adiabatikus expanzióból ciklikusan hasznosítható munka mennyiségét, hogy ismernék a folyamat lezajlására érvényes összefüggést az állapotjelzők között.

A belsőenergia és a ' $p \cdot v$ ' szorzattal leírt tágulási munka összegét, nevezte el Onnes entalpiának

$$i = u + p \cdot v \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Az entalpia tehát egy újabb intenzív állapotjelző, mely az entrópiához hasonlóan virtuális, tehát nem mérhető, csak számítható.

A fentieket kiterjesztve és az általánosításhoz differenciális formában felírva az entalpia definíciós egyenlete a következő:

$$di = du + d(p \cdot v) \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Számunkra ennek az általános egyenletnek az állandó nyomású és az adiabatikus állapotváltozásra érvényes speciális alakja az érdekes.

### **Állandó nyomású állapotváltozás**

A definíciós egyenletet kifejtve

$$di = du + d(p \cdot v) = du + p \cdot dv + v \cdot dp = du + p \cdot dv = dq \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Ez azt jelenti, hogy az állandó nyomású állapotváltozás esetén a végállapotú és a kezdeti állapotú entalpia különbsége éppen az a hőmennyiség, amit a közeg felvett vagy leadott az állandó nyomású állapotváltozás során.

### **Adiabatikus állapotváltozás**

A definíciós egyenletet kifejtve

$$di = du + d(p \cdot v) = du + p \cdot dv + v \cdot dp = dq + v \cdot dp = v \cdot dp = dw, \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Ez azt jelenti, hogy az adiabatikus állapotváltozás esetén a végállapotú és a kezdeti állapotú entalpia különbsége éppen az a munkamennyiség, amit a közeg a ciklikusan megismételt expanzió során szolgáltatni tud a környezet számára (technikai munka).

### **Önellenőrző kérdések az entalpia fejezethez**

1. Mi az entalpia definíciós egyenlete?
2. Mi az entalpia mértékegysége?
3. Milyen állapotjelzők csoportjába tartozik az entalpia?
4. Milyen állapotban tekintik egyezményesen zérusnak az entalpiát?
5. Hogyan használható az entalpia az izobár állapotváltozások esetén?

## 6. Hogyan használható az entalpia az adiabatikus állapotváltozások esetén?

### 10.3 A vízgőzdiagram felépítése

Természetesen az entalpia fogalmának bevezetése még nem oldotta meg a bevezetőben említett számítási nehézségeket. Az entalpia definíciós egyenlete alapján, jórészt mérési eredményekből meghatározott fajhők segítségével el lehet készíteni egy olyan táblázatot, mely egy adott közegre vonatkozóan a nyomás és a hőmérséklet függvényében tartalmazza az entalpia értékeket. Ha pedig ez adott, akkor a számítások gyakorlatilag a táblázatból kikeresett kezdeti és végállapotú entalpiák közötti különbség kiszámítására redukálódnak.

A további egyszerűsítés érdekében a táblázatok alapján ún. entalpiadiagramok (más néven '*i-s*' diagramok) készülnek, ahol a független változó az entrópia és a paraméteres görbeseregek az izobárok és az izotermákat mutatják. Az entrópia független változónak történő kiválasztása azzal az előnnyel jár, hogy az oly nagy jelentőséggel bíró adiabatikus expanzió egy függőleges egyenessel ábrázolható az '*i-s*' diagramban.

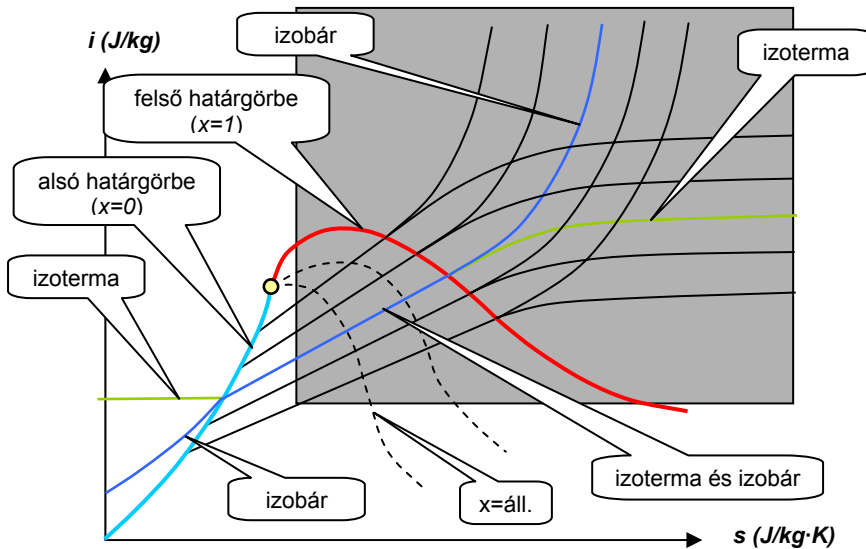
A gyakorlatban legfontosabb közegre, a vízre igen nagy pontosságú és részletesen kidolgozott entalpiatáblázatok és diagramok állnak rendelkezésre.

Az entalpiadiagramok használatának áttekintése előtt gondoljuk meg, hogy az entalpia abszolút értéke ugyanúgy nem bír jelentőséggel, mint az entrópiáé, vagy a helyzeti energiáé. Éppen ezért szabadon választható meg az entalpia zérus pontja. Egyezményesen zérusnak tekintik az entalpiát atmoszférikus nyomáson és 0 °C-on.

Ugyancsak fontos, hogy folyadék állapotban az entalpia értéke nagyon jó közelítéssel egyenlőnek vehető a Celsius fokban kifejezett hőmérséklet és a víz fajhőjének szorzatával

$$i_{\text{víz}} \approx c_{\text{víz}} \cdot t \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

Ennek megfelelően az entalpiadiagram csak a két határgörbe közötti tartomány egy részét és különösen a túlhevített gőz mezőt szokta ábrázolni (42. ábra).



42. ábra Az 'i-s' diagram szerkezete

Az 'i-s' diagramban az alsó és a felső határgörbe aszimmetrikus elhelyezkedésű és a kritikus pont kissé „oldalra csúszott”.

Az izobárok a folyadék mezőben az alsó határgörbéhez egészen közel futnak, aminek a folyadék összenyomhatatlansága az oka. A két határgörbe között az izobárok egyenesek és a felső határgörbe felé haladva enyhén széttartanak, azaz meredekségük a nagyobb nyomások felé enyhén nő. A felső határgörbe után az izobárok törésmentesen folytatódnak és egyre határozottabban felveszik a gázok esetében már tapasztalt exponenciális jelleget.

Az izotermák a folyadékmezőben természetesen vízszintesek, hiszen állandó hőmérséklet mellett állandó az entalpia is. A két határgörbe között az izotermák az izobárokhoz hasonlóan egyenesek, hiszen egyfelől a halmazállapot-változás közben a hőmérséklet állandó, másfelől pedig a nyomás meghatározza a forrási (telítési) hőmérsékletet és viszont, a hőmérséklet meghatározza a telítési nyomást. A felső határgörbénél az izotermák megtörnek és kisebb nagyobb „emelkedés” után fokozatosan vízszintesbe mennek át. A felső határgörbétől távol az entalpia ismét csak a hőmérséklet függvénye, azaz állandó hőmérséklet esetén állandó az értéke.

A két határgörbe között szaggatott vonallal szokták összekötni az izobárok határgörbék közötti szakaszának egymásnak megfelelő osztópontjait, melyek az azonos gőztartalmat jelölik az egyes izobárok. Ezek a görbék 'x' paraméterrel vannak jelölve. Természetesen az alsó határgörbén  $x=0$  a felsőhatárgörbén pedig  $x=1$ .

Megjegyezzük, hogy némely 'i-s' diagramokon az állandó fajtérfogatókat jelölő görbéket is bejelölik, itt azonban ezeket mellőztük, mivel menetük csak kevéssel tér el (kissé meredekebb) a sokkal nagyobb fontossággal bíró izobárokétól és így az ábrát áttekinthetetlenül bonyolulttá tették volna.

Ahogy arra utaltunk a gyakorlatban nincs szükség a teljes 'i-s' diagramra, csak annak a 42. ábrán sötétítéssel megjelölt részét szokták megadni. Ezen a területen helyezkednek el azok az állapotok, melyek a gyakorlati alkalmazás szempontjából fontosak.

Fontos tudni, hogy egyezményes jelöléssel egy felső indexben elhelyezett vesszővel (') jelölik a telített folyadékra (az alsó határgörbén) érvényes értékeket és két felső indexbe tett vesszővel (") a száraz telített gőzre (a felső határgörbén) érvényes értékeket (pl.  $i''$  a telített folyadék entalpiája).

Az 'i-s' diagram segítségével az entalpia konkrét értékét úgy határozzuk meg, hogy a megadott nyomás és hőmérséklet ismeretében a megfelelő görbék metszéspontjától elindulva olvassuk le azt a függőleges tengelyen.

Egyes esetekben fontos lehet a két határgörbe közötti ún. nedvesgőz tartományban lévő állapotokhoz tartozó entalpia, ami leolvasással nem mindig határozható meg. Ilyenkor az adott nyomáshoz tartozó telített folyadék és a telített gőz entalpiájának segítségével a gőztartalommal arányosan, számítással lehet meghatározni az entalpiát:

$$i_x = i' + (i'' - i') \cdot x \quad \left( \frac{J}{kg} \right)$$

A jegyzet mellékletében megtalálható a vízgőz 'i-s' diagramja.

**Önellenőrző kérdések a vízgőzdiagram felépítése fejezethez**

1. Vázolja fel a vízgőz '*i-s*' diagramját és jelöljön meg benne egy izobárt, mely a folyadékmezőből indulva a túlhevített mezőben ér véget!
2. Vázolja fel a vízgőz '*i-s*' diagramját és jelöljön meg benne egy izotermt, mely a folyadékmezőből indulva a túlhevített mezőben ér véget!
3. Vázolja fel a vízgőz '*i-s*' diagramját és jelölje meg benne az állandó gőztartalmat jelölő görbék menetét a nedvesgőz tartományban!
4. Hogyan ábrázolható az adiabatikus állapotváltozás az '*i-s*' diagramban?
5. Hol találhatók azok az állapotok az '*i-s*' diagramban, melyekre nézve  $x=0$ ?
6. Hol találhatók azok az állapotok az '*i-s*' diagramban, melyekre nézve  $x=1$ ?
7. Milyen egyezményes jelöltést használnak a telített folyadék és a telített gőz állapotokhoz tartozó állapotjelzőkre?
8. Hogyan határozható meg számítással a nedvesgőz entalpiája?

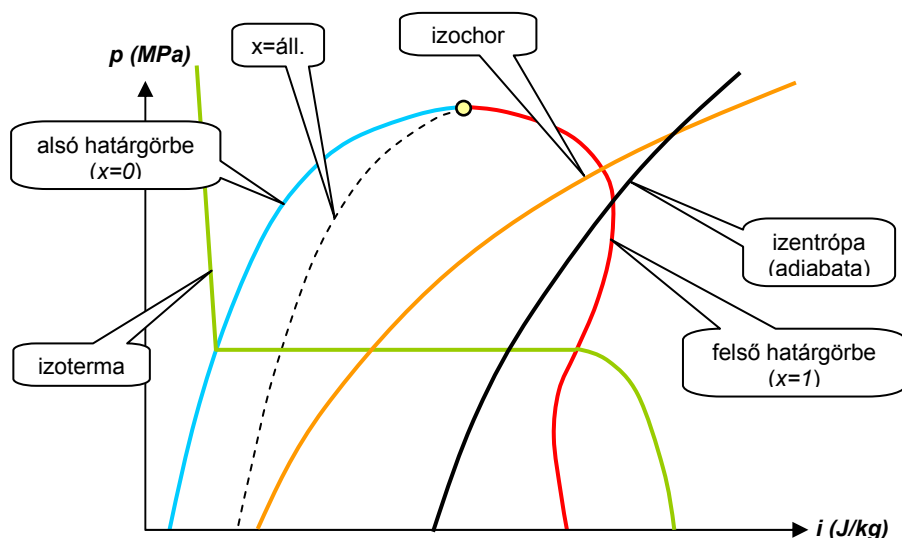
## 10.4 A hűtő közegek '*logp-i*' diagramjainak felépítése

Utaltunk arra, hogy a gázzal működő hűtő-körfolyamatok hatékonysága meglehetősen mérsékelt. Igen jelentős hatékonyságnövelés érhető el, ha a hűtő-körfolyamatot is „áthelyezzük” a halmazállapot-változási tartományba ill. annak közelébe. A körfolyamat követéséhez a gyakorlatban az ún. '*logp-i*' diagramok használata terjedt el. Nevéből adódóan a '*logp-i*' diagram független változója a korábban már megismert entalpia, a függő változó pedig a nyomás tízes alapú logaritmus. A 43. ábra egy '*logp-i*' diagram felépítését mutatja.

A 43. ábrán a triviális menetű izobárokat nem tüntettük fel. Az izoterma a két határgörbén megtörik, akár csak az '*i-s*' diagramon. A folyadék mezőben csaknem függőleges futású és a felső határgörbe után a túlhevített mezőben is viszonylag gyorsan függőleges lesz, ami nem meglepő, hiszen már tudjuk, hogy az entalpia mindkét mezőben csak a hőmérséklet függvénye. Ugyancsak értelemszerű, hogy a két határgörbe között az izoterma vízszintes, együtt halad az izobárral.

A 43. ábrán egyértelműen látható az adiabaták (izentrópák) menete. Ezek a görbék csekély mértékben meredekebben futó görbesereget adnak, mint az izochorok görbeserege.





43. ábra A  $\log p$ - $i$  diagram felépítése

Az ' $i$ -s' diagramhoz hasonlóan itt is megfigyelhetők az állandó gőztartalmat jelző görbék, melyek a két határgörbe közötti nedvesgőz tartományban az izobárok arányos osztásával és az egymásnak megfelelő osztópontok összekötésével kaphatók meg.

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban használt  $\log p$ - $i$  diagramoknak a „középső részét” nem szokták ábrázolni, mivel arra a területre nem esnek állapotok. A gyakorlati szempontból fontos területek a két határgörbe közvetlen közelében vannak.

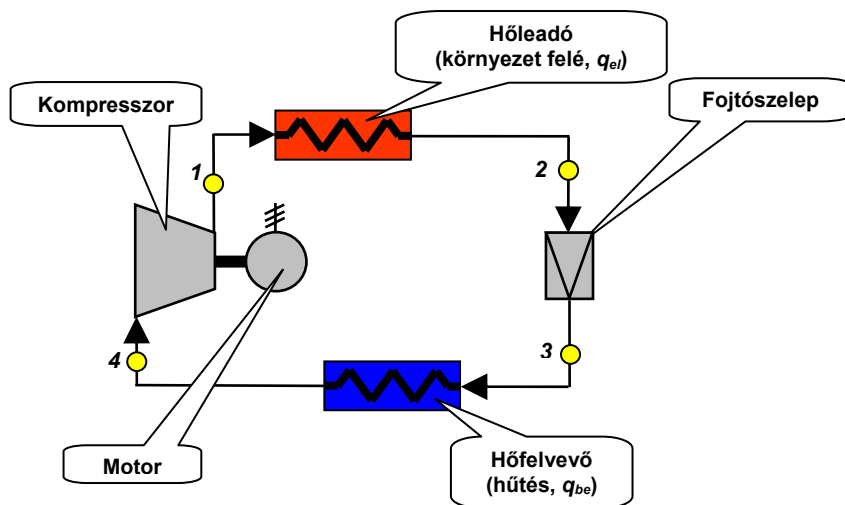
A jegyzet mellékletében megtalálható az ammónia  $\log p$ - $i$  diagramja.

#### Önellenőrző kérdések a hűtő közegek $\log p$ - $i$ diagramjainak felépítése fejezethez

1. Vázolja fel a hűtőközegek  $\log p$ - $i$  diagramját és jelöljön meg benne egy izotermát, mely a folyadékmezőből indulva a túlhevített mezőben ér véget!
2. Vázolja fel a hűtőközegek  $\log p$ - $i$  diagramját és jelöljön meg benne a nedvesgőz mezőben lévő egyazon ponton átmenő izentrópát és izochort!

## 10.5 A kompresszoros hűtő körfolyamat

A változó sűrűségű közeggel megvalósított körfolyamat nagyon hasonló a gázzal működő körfolyamathoz. A 44. ábra a kapcsolási sémát mutatja.



44. ábra Kompresszoros hűtőberendezés kapcsolási vázlatja

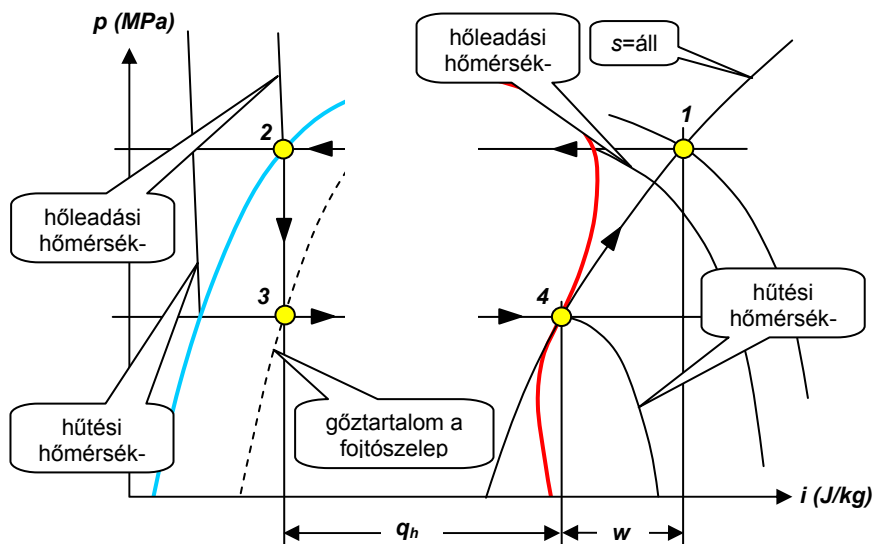
Tekintettel arra, hogy a hőleadó hőcserélőből folyadék állapotú közeg lép ki, ezért a turbina helyét a fojtószelep vette át, mely képes az expanzió „lebonyolítására”. A fojtószelep lényegében egy igen gondosan beállított méretű nyílás, melyen áthaladva a közeg éppen akkora nyomásvesztést szenved el, amennyi a kompresszor utáni és a kompresszor előtti nyomások különbsége.

A fojtószelepen átáramló közeg nyomása tehát lecsökken (közben a közeg lehűl), munkavégzés azonban nem történik. Az ilyen állapotváltozás közben a közeg entalpiája gyakorlatilag állandó marad.

A 45. ábra egy ún. kompresszoros hűtő-körfolyamatot mutat a 'logp-i' diagramban.

Mint látható minden fontos adat kényelmesen leolvasható diagramról. Fontos szempont az ilyen berendezéseknél, hogy a hűtést megvalósító hőcserélőből kilépő közeg légnemű halmazállapotban legyen, de

legalábbis gőztartalma közel 100%-os legyen ellenkező esetben a kompresszor ún. folyadékütést kaphat, ami a tönkremenetelét eredményezi, mivel a folyadék gyakorlatilag összenyomhatatlan.



**45. ábra** Kompresszoros hűtő körfolyamat a 'log*p*-*i*' diagramban

A változó sűrűségű közeggel megvalósított hűtő-körfolyamatok jóval hatékonyabbak a gázzal működőknél. A fajlagos hűtőtéljesítmény ezeknél elérheti a 3,5 értéket is. Ipari berendezésekben többnyire ammóniát alkalmaznak kedvező műszaki tulajdonságai és olcsósága miatt. Ugyanakkor hátrányos, hogy az ammónia, ha kikerül a zárt rendszerből, egészségkárosodást okozhat. Kisebb berendezésekben különféle, speciálisan hűtési célra kifejlesztett, vegyipari módszerekkel előállított, többnyire szénhidrogén alapú anyagok fordulnak elő.

### Önellenőrző kérdések a kompresszoros hűtő körfolyamat fejezet-hez

1. Milyen fő elemekből épül fel egy kompresszoros hűtő-körfolyamat kapcsolási sémája?
2. A kompresszoros hűtő-körfolyamat kapcsolási sémájában szereplő egyes elemeknek mi a funkciója?

3. Hogyan ábrázolható a kompresszoros hűtő-körfolyamat a '*logp-T*' diagramban? Melyik a kompresszor munkáját és melyik a hűtést jelölő folyamat?
4. Milyen állapotban van a fojtószelepből kilépő munkaközeg a kompresszoros hűtő-körfolyamatban?
5. Mit kell érteni folyadékútés alatt a kompresszoros hűtő-körfolyamat kapcsán?
6. Milyen tartományban mozog a kompresszoros hűtő-körfolyamatok fajlagos hűtőtéljesítménye?

## 11 A nedves levegő állapotváltozásai

A levegőről tudjuk, hogy gázkeverék. Ugyanakkor eddig még nem foglalkoztunk azzal, hogy a levegő változó mennyiségű vizőt is tartalmaz. Kézenfekvő, hogy a vízgőzre vonatkozóan is érvényesnek tekintsük a gázkeverékekre vonatkozó alapvető szabályokat (3.2.3 fejezet), azzal a kikötéssel, hogy bizonyos körülmények között a vízgőz képes kiválni a levegőből.

A vízgőz mennyisége az időjárás függvényében, zárt térben pedig az ott folytatott tevékenység következtében változhat meg. Tekintettel arra, hogy mind az emberi tartózkodásra mind a technológiai célokra épített árt terek esetében a levegő hőmérséklete mellett a nedvességtartalom is fontos, külön fejezetben kell foglalkoznunk a nedves levegő állapotának leírásával, lehetséges állapotváltozásaival és a változó környezeti körülmények mellett előírt zárt téri légállapotok elérését célzó ún. klímaberendezésekben lejátszódó/végrehajtandó állapotváltozásokkal.

### 11.1 A nedves levegő állapotának jellemzése

A levegőben lévő vízgőz mennyiségének megadása két módon történhet.

Az egyik esetben azt adják meg, hogy pl. 1 kg száraz levegő hány kg vízgőzt tartalmaz. Ez az abszolút nedvességtartalom, amit 'x'-el jelölnek, mértékegysége (kg/kg) és jelentése: az 1 kg száraz levegőben lévő vízgőz mennyisége kilogrammban. Természetesen ezek az értékek

többnyire igen kicsik, hiszen 1 kg levegőbe többnyire csak néhány gramm vízgőz van.

Az abszolút nedvességtartalomnál sokkal fontosabb az ún. relatív nedvességtartalom. Ez azt adja meg, hogy az aktuális nedvességtartalom hogyan aránylik az adott hőmérsékleten a levegő által maximálisan felvehető nedvességtartalomhoz. A levegő ugyanis nem képes korlátlan mennyiségű nedvességet felvenni. Egy bizonyos ponton túl a nedvesség kiválik, a hőmérséklettől függően apró vízcseppek (köd) vagy jégkristályok (0 °C alatt) formájában. A nedvességkiválás megkezdődhet állandó hőmérsékleten, amikor a levegő már a további, érkező nedvesség már nem képes „bepárologni” a levegőbe, vagy olyankor, amikor a hőmérséklet csökkenése következtében a levegő fokozatosan olyan állapotba kerül, amikor már nem képes gőz halmazállapotban tartani a teljes nedvességtartalmat.

Az elmondottak alapján a relatív nedvességtartalom a vízgőz parciális gőznyomásának és a levegő hőmérsékletéhez tartozó telítési gőznyomásnak a hányadosaként fejezhető ki.

$$\varphi = \frac{p_g}{p_{gs}}$$

Nyilvánvaló ugyanis, hogy a nedvességfelvétel során a mennyiség növekedése miatt a vízgőz parciális gőznyomása is nőn fog. Ez azonban nem tarthat a végtelenségig, ha eléri a levegő hőmérsékletéhez tartozó telítési gőznyomás (a fázisegyensúlyi diagramban vagy a vízgőz 'i-s' diagramjában a két határgörbe között az adott hőmérséklettel együttl futó nyomás) értékét akkor a levegő telítetté válik, relatív nedvességtartalma 100%-os lesz. Értelemszerűen a nedvességet egyáltalán nem tartalmazó levegő relatív nedvességtartalma 0%, ekkor ugyanis a vízgőz parciális nyomása zérus.

A relatív nedvességtartalom fenti összefüggés szerint történő meghatározása gyakorlatilag nem lehetséges, hiszen a hőmérséklet alapján a telítési gőznyomás ugyan táblázatból meghatározható, de a vízgőz parciális gőznyomását mérésel nem, csak számítással lehet meghatározni. Ugyanakkor léteznek olyan műszerek (higrométer), melyekben olyan, vékony szál (lőszőr, emberi haj vagy más organikus vagy anor-

ganikus anyagú szál) található, mely képes a levegőből nedvességet felvenni és a nedvességtartalom-változás közel arányos hosszváltozást idéz elő. Ezt a hosszváltozást mechanikus módszerekkel megfelelően felnagyítva, a műszer kalibrálása (hiteles műszerrel történő összehasonlítás) után, a relatív nedvességtartalom közvetlenül leolvasható.

Az abszolút és a relatív nedvességtartalom egymástól nem független. A gázkeverékekre érvényes Dalton törvények szerint a levegő száraz és nedves részére is felírható az általános gáztörvény

$$p_l \cdot V = m_l \cdot R_l \cdot T \text{ ill. } p_g \cdot V = m_g \cdot R_g \cdot T$$

A két egyenletet egymással elosztva és felhasználva az abszolút nedvességtartalomra tett definíciót, a száraz levegő specifikus gázállandóját és a levegőben lévő vízgőz közelítő gázállandóját

$$\frac{p_l}{p_g} = \frac{m_l}{m_g} \cdot \frac{R_l}{R_g} = \frac{m_l}{m_g} \cdot \frac{287}{462} = \frac{0,622}{x}$$

Felhasználva, hogy a parciális nyomások összege az atmoszférikus nyomás és a vízgőz parciális nyomását helyettesítve a relatív nedvességtartalom és a hőmérséklettől függő telítési gőznyomás szorzatával, végül

$$\varphi = \frac{x}{x + 0,622} \cdot \frac{p}{p_{gs}}$$

A relatív nedvességtartalom mellett igen nagy fontossággal bír a nedves levegő entalpiája, mely általánosságban a következőkből áll:

- a „száraz” komponensek entalpiája,
- a levegőben lévő nedvesség 0 °C-on vett rejtett hője (kb. 2500 kJ/kg),
- a levegőben lévő vízgőz 0 °C-ról az adott hőmérsékletre történő túlhevítési.

Ezzel a módszerrel a változó rejtett hő helyett egy állandó értékkel kell számolni. Ugyanakkor a vízgőz fajhőjére nézve el kell fogadnunk egy közepes értéket a leginkább fontos 0-100 °C hőmérséklettartományra (kb. 1,86 kJ/kg).

**Önellenőrző kérdések a nedves levegő állapotának jellemzése fejezethez**



landó entalpiákat. Az entalpiát, a korábbiakban is alkalmazott megállapodás szerint zérusnak tekintjük  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  esetén.

A koordináta-transzformációnak köszönhetően a  $t$ -áll. görbék meredeksége jelentősen csökkent és megnőtt az a terület, ahol a gyakorlat szempontjából fontos légállapotok találhatóak. A  $t$ -áll. görbéket tehát egy kis szög alatt felfelé futó, enyhén széttartó egyenesekből álló görbesereg mutatja.

Természetesen az egyes izotermák csak a telítési görbéig ( $\varphi=1$ ) értelmezhetők. Az egyes izotermák hossza, a végponthoz tartozó abszolút nedvességtartalom az abszolút és a relatív nedvességtartalom közötti összefüggésből kapható meg, ha a relatív nedvességtartalom értékét 1-nek vesszük, ' $p$ ' helyébe az atmoszférikus nyomást és a ' $p_{gs}$ ' helyébe az adott hőmérséklethez tartozó telítési gőznyomást helyettesítjük (táblázatból kikeresve!). Ilyen módon megrajzolható az egész telítési görbe és ugyanezt a módszert értelemszerűen követve a különféle állandó relatív nedvességtartalom görbék is megszerkeszthetők.

Az ' $i$ - $x$ ' diagramot alapvetően két területre osztja a  $\varphi=1$ , ún. telítési görbe. A görbe feletti tartományban található a gyakorlat szempontjából fontos, stabil légállapotok. Ez az ún. telítetlen mező. A telítési görbe alatti terület az ún. telített, vagy más néven köd mező. Ebben a mezőben stabil légállapotok nem találhatóak.

Egy bizonyos légállapot ezek alapján a hőmérséklet és a relatív nedvességtartalom összetartozó értékeinek megadásával határozható meg. Ehhez a ponthoz kapcsolódóan leolvasható természetesen az entalpia, az abszolút nedvességtartalom valamint a segédegyenes felhasználásával a levegőben lévő vízgőz parciális nyomása is.

Meg kell még emlékezni az ' $i$ - $x$ ' diagram ún. keretléptékéről, mely három oldalról fogja körül a diagramot. Ez a keretlépték a levegőbe víz vagy gőz beporlasztásakor bekövetkező állapotváltozás irányának valamint a zárt térben adott nagyságú hő (entalpiakülönbség) és nedvességmennyiség (abszolút nedvességtartalom-különbség) hatására bekövetkező állapotváltozás irányának meghatározására szolgál. Ezen tantárgy kereti között csak a vízzel vagy gőzzel történő nedvesítés eseteinek vizsgálatára szorítkozhatunk. Ilyen esetben az állapotváltozás irányát úgy kapjuk meg, hogy a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -t jelentő pontot és a nedvesítésre használt víz vagy gőz entalpiájának megfelelő értéket összeköt-



ve, a kapott egyenessel párhuzamost húzunk a kiindulási állapotot jelölő ponton át.

Bár gyakorlati szempontból kevés jelentőséggel bír, de utalunk arra, hogy a köd mezőben  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  alatt az entalpia vonalak meredeksége megnő, mivel a jég fajhője eltér a víz fajhőjétől!

A jegyzet mellékletében megtalálható a nedves levegő '*i-x*' diagramja.

### **Önellenőrző kérdések az '*i-x*' diagram felépítése fejezethez**

1. Vázolja fel a nedves levegő '*i-x*' diagramját és jelöljön meg benne egy izotermát! Hol van az izoterma vége?
2. Vázolja fel a nedves levegő '*i-x*' diagramját és jelöljön meg benne egy állandó entalpiát jelölő vonalat?
3. Mely két állapotjelző segítségével szokták megadni a nedves levegő állapotát az '*i-x*' diagramban?
4. Vázolja fel a nedves levegő '*i-x*' diagramját és jelöljön meg benne az ún. ködmezőt!
5. Milyen állapotban van a nedves levegőben lévő vízgőz a telítési görbe fölött ábrázolt állapotokban?
6. Mire szolgál a nedves levegő '*i-x*' diagramjának keretléptéke?
7. Hogyan határozható meg a nedves levegő szokványos felépítésű '*i-x*' diagramján a levegőben lévő vízgőz parciális gőznyomása?

## **11.3 A nedves levegő állapotváltozásai**

A gyakorlatban valójában mindössze három alapvető állapotváltozást tudunk megvalósítani:

- felületi hőcserélőben történő fűtés vagy hűtés,
- nedvesítés (víz beporlasztásával vagy gőz befúvatásával),
- különböző állapotú levegőmenyiségek keverése.

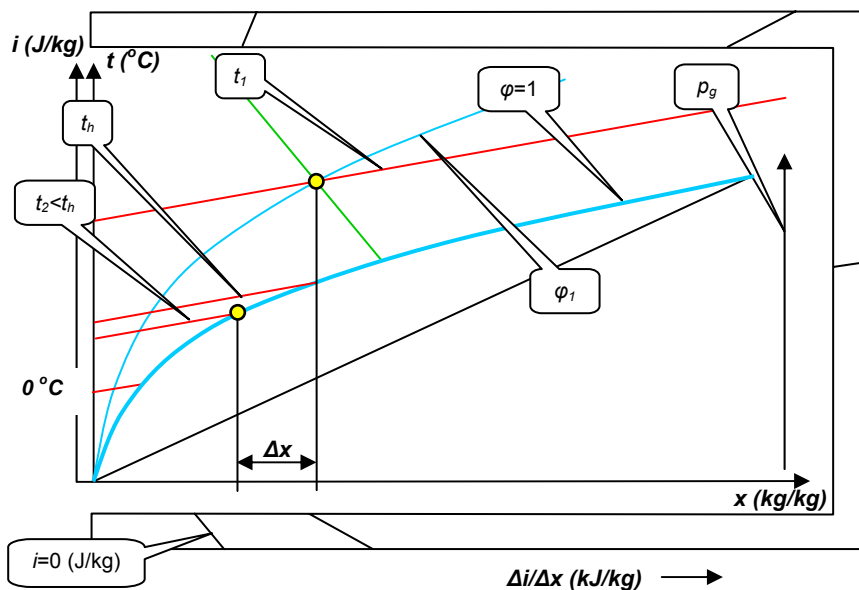
### **Fűtés vagy hűtés felületi hőcserélőben**

Az állapotváltozás jellemzője, hogy az abszolút nedvességtartalom állandó marad.

A hőmérséklet emelése azt eredményezi, hogy a levegő "kiszárad" relatív nedvességtartalma csökken. Hűtés esetén ezzel ellentétes fo-

lyamat játszódik le, a levegő egyre „nedvesebb” lesz, relatív nedvességtartalma növekszik. Ez vég nélkül nem folytatódhat!

Ha a hűtés során olyan hőmérsékletet kívánunk elérni, mely az állandó abszolút nedvességtartalom függőlegese és a telítési görbe metszéspontjához befutó izoterma által jelzett ún. harmatpontnál alacsonyabb, akkor a levegőből nedvességekiválás indul meg (pl. ködformájában vagy a cseppek formájában a hideg felületeken) és a továbbiakban a levegő már folyamatosan telített állapotban marad (47. ábra).



**47. ábra** A felületi hűtés ábrázolása az 'i-x' diagramban

A diagramról leolvasható a hűtés során 1 kg száraz levegőre vonatkoztatva kiváló nedvesség mennyisége is.

Megjegyezzük itt, hogy a gyakorlatban a levegő abszolút nedvességtartalmának csökkentése szinte mindig ezzel a módszerrel történik.

**Nedvesítés**

Az állapotváltozás jellemzője, hogy az abszolút nedvességtartalom növekszik. Az állapotváltozás irányát elvileg a keretlépték segítségével lehet meghatározni a következő lépések szerint:



gezni, hanem egy tartályban lévő, nagyobb mennyiségű víz keringetésével, melyhez az elfogyó mennyiség mértékében adnak friss vizet. Ilyen körülmények között a levegő egy közel állandó entalpiájú állapotváltozást szenved el. Éppen ezért a gyakorlatban alkalmazott, vízbeperlasztásos nedvesítő kamrák esetében az állapotváltozást gyakorlatilag állandó entalpia szerinti állapotváltozással modellezik. Ilyen esetekben az állapotváltozás végpontja a 48. ábrán '3' jelölésű pont lesz. Az ehhez a ponthoz befutó izoterma az ún. nedves hőmérsékletet ( $t_n$ ) jelöli.

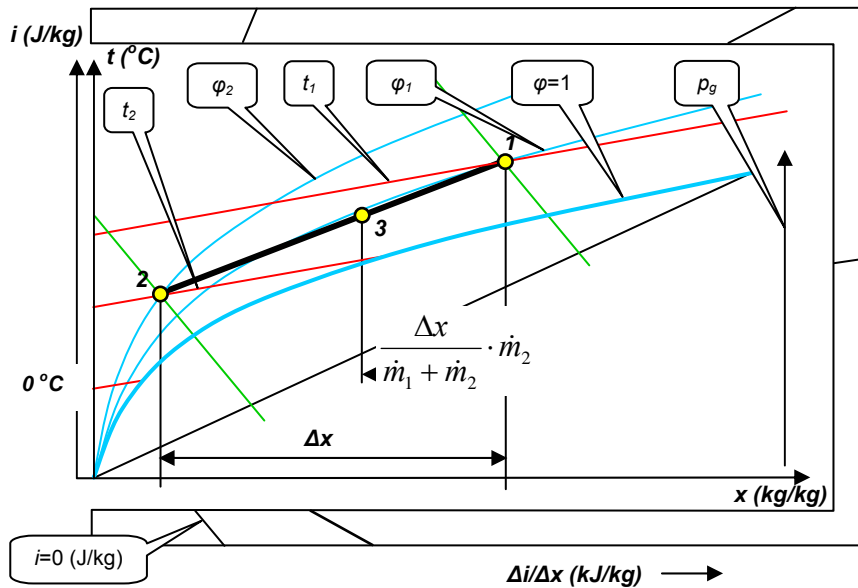
Az elmondottak csak alacsony hőmérsékletű vízre igazak, magasabb hőmérsékletű víz és gőz esetén természetesen nem!

A nedves hőmérséklet fogalmának bevezetése lehetővé teszi, hogy relatív nedvességtartalmat az ' $i-x$ ' diagramra támaszkodva mérésrel is meg tudjuk határozni. Az eljárás lényege, hogy ugyanazon a helyen egymás mellett két hőmérőt kell alkalmaznunk. Az egyik a normál (száraz) hőmérsékletet méri, a másik esetében a higanytartály köré valamilyen laza, a levegőt átteresztő, folyamatosan nedvesen tartott anyagot helyezünk (pl. vatta). Az utóbbi hőmérő az ún. nedves hőmérsékletet fogja mutatni. Az ' $i-x$ ' diagramon a nedves hőmérséklet vonalán elindulva és a telítési görbéig menve, majd onnan az állandó entalpia vonalát követve a „száraz” hőmérséklet vonalával alkotott metszéspontjánál leolvasható a relatív nedvességtartalom.

A nedves hőmérséklettel kapcsolatban jó megjegyezni, hogy értéke annál jobban eltér a „száraz” hőmérséklettől, minél szárazabb a levegő. Ezért fázunk a vízből kilépve, nedves testtel jobban, ha száraz a levegő, mintha a relatív nedvességtartalom nagyobb.

### **Keverés**

Az állapotváltozásra a keverésre általánosan érvényes összefüggéseket kell alkalmazni. Ez azt jelenti, hogy a két légállapotnak megfelelő pontokat kell megkeresni az ' $i-x$ ' diagramban, majd az ezeket összekötő ún. keverő egyenesen a fordított tömegarányok szerint (a nagyobb mennyiségű közeghez közelebb) találjuk meg a keverés után kialakuló állapotot (49. ábra).



49. ábra A keverés ábrázolása az 'i-x' diagramban

A diagramról ezután már minden fontos jellemzőt meg lehet határozni.

**Önellenőrző kérdések a nedves levegő állapotváltozásai az 'i-x' diagramban fejezethez**

8. Hogyan változik a levegő relatív nedvességtartalma felületi hőcserélőben történő melegítés során?
9. Hogyan változik a levegő relatív nedvességtartalma felületi hőcserélőben történő hűtés során?
10. Mi a harmatponti hőmérséklet?
11. Mi történik, ha a levegőt felületi hőcserélőben a harmatponti hőmérséklet alá hűtik?
12. Milyen módon lehet a legegyszerűbben csökkenteni a levegő abszolút nedvességtartalmát?
13. Hogyan játszódik le a levegő nedvesítése?
14. Milyen mértékű nedvesítés valósítható meg a gyakorlatban?
15. Miért lehet többnyire azonosnak venni a vízbeporlasztással történő nedvesítés állapotváltozási vonalát az állandó entalpia vonalával?
16. Mi a nedves hőmérséklet?

17. Mikor fázik kevésbé a vízből kilépő ember, ha a levegő nedvességtartalma magas vagy ha alacsony? Miért?
18. Hogyan lehet meghatározni a relatív nedvességtartalmat hőmérsékletméréssel?
19. Mit kell érteni keverő egyenes alatt az 'i-x' diagramban?
20. Hogyan kell meghatározni a keverés utáni állapotot a tömegáramok ismeretében?

## 12 A légkondicionálás alapjai

Légkondicionálásnak nevezzük az emberi tartózkodásra vagy bizonyos „kényes” technológiák számára szolgáló zárt terek szellőző levegője hőmérsékletének és páratartalmának meghatározott állapotra történő beállítását.

Az emberek hőtechnikai értelemben vett komfortérzete attól függ, hogy a test belső kb. 37 °C hőmérsékletét szervezetünk vegetatív működés során képes-e fenntartani. Ez azt jelenti, hogy komfortosan érezzük magunkat, ha tudatosan nem kell foglalkoznunk testünk hőháztartásával. Ekkor ugyanis az egyébként állandóan működő önszabályozó rendszerünk saját tudatos beavatkozásunk nélkül tud gondoskodni a szervezetünk optimális hőmérsékletének fenntartásáról.

Ha tehát nehezebb fizikai munkát végzünk, akkor a külső körülmények változtatásával kell gondoskodnunk arról, hogy a termelt többlet hőtől meg tudjunk szabadulni, lehetőleg izzadás nélkül. Ilyenkor viszonylag alacsonyabb hőmérséklet biztosítása és/vagy a ruházat könnyítése segítség lehet. Az izzadság megjelenése, ami a fokozott hőleadást hivatott elősegíteni, mindenképpen azt jelenti, hogy komfortérzetünk határán túl vagyunk.

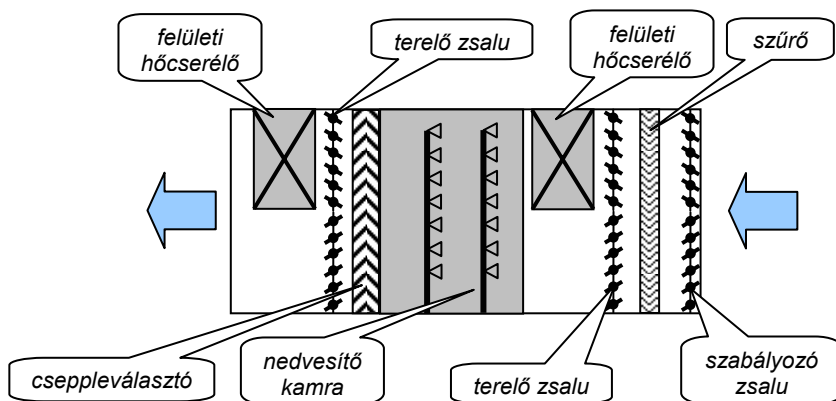
Az emberek által optimálisnak érzett környezeti feltételek azonban ugyanolyan ruházattal és tevékenységet végző emberek esetében sem azonosak. Számos szubjektív, az egyes emberektől függő tényező is szerepet játszik, mint például: a kor, az egészségi állapot, a pszichés állapot, megszokás, stb.

Mindebből következik, hogy olyan légállapotot biztosítani, ami mindenki számára egyformán kellemes, nem lehet. Éppen ezért készültek szabványok, melyek sok emberrel kapcsolatosan végzett mérésekre

és egyéb vizsgálatokra alapozva meghatározzák, hogy – elsősorban a végzett tevékenység függvényében – milyen hőmérséklet és páratartalom biztosítása szükséges a komfortérzet, ill. a megfelelő munkateljesítmény fenntartásához.

Csak tájékoztató jelleggel említjük itt meg, hogy az emberi tartózkodásra szolgáló helyiségek esetében a szokásos hőmérséklettartomány 18-22 °C közötti, a végzett tevékenységtől és a ruházattól függően. Nehezebb fizikai munka esetén alacsonyabb hőmérséklet, ülőmunka esetén a magasabb érték az előírt. A relatív páratartalom az emberi tartózkodásra szolgáló helyiségek esetében kb. 60%.

A technológiai célokat szolgáló helyiségek esetében elsősorban a páratartalom tekintetében lehetnek eltérések. Például könyvtárakban, múzeumokban egyes esetekben ennél nagyobb, finommechanikai gyártóhelyiségekben az előbb említettnél alacsonyabb páratartalom is szükséges lehet.



**50. ábra** Légkondicionáló berendezés kapcsolási vázlata

A levegő kívánatos állapotát, hőmérséklet és páratartalom beállító berendezést klímaberendezésnek vagy légkondicionáló berendezésnek nevezik. Az 50. ábra egy egyszerű légkondicionáló berendezés fő elemeit mutatja.

A klímaberendezésbe a levegő egy szabályozó zsalun át érkezik. Ez a zsalu mennyiségi szabályozást és lezárást tesz lehetővé.

Az érkező levegőt a benne lévő szilárd lebegő anyagtól (por) meg kell tisztítani. A szűrés a szükségletektől függően több fokozatú is lehet.

A szűrő után található terelő zsalu arra szolgál, hogy a szükségletek szerint a levegő egészét vagy csak egy részét a felületi hőcserélőre terelje.

A felületi hőcserélő után következik a nedvesítő kamra, mely a levegő nedvességtartalmának szabályozására szolgál. A nedvesítő kamra után feltétlenül szükség van cseppeválasztóra, hogy a levegő ne vihesen tovább apró cseppeket.

A nedvesítés után egy további hőcserélő szükséges. Az ez előtt elhelyezett terelő zsalu szerepe azonos a már korábban említett zsaluéval.

### **Önellenőrző kérdések a légkondicionálás alapjai fejezethez**

1. Mit kell légkondicionálás alatt érteni?
2. Mitől függ az ember hőtechnikai értelemben vett komfortérzete?
3. Milyen hozzávetőleges hőmérséklet és relatív nedvességtartalom érték illetve tartomány lehet elfogadható az emberi tartózkodásra szolgáló zárt tér esetében?
4. Mi a következménye a túlzottan alacsony relatív nedvességtartalomnak az emberi tartózkodásra szolgáló zárt tér esetében?
5. Mi a következménye a túlzottan magas relatív nedvességtartalomnak az emberi tartózkodásra szolgáló zárt tér esetében?
6. Milyen fő elemekből épül fel egy légkondicionáló berendezés? Melyik elemnek mi a funkciója?

## **12.1 Klímaberendezések nyári üzeme**

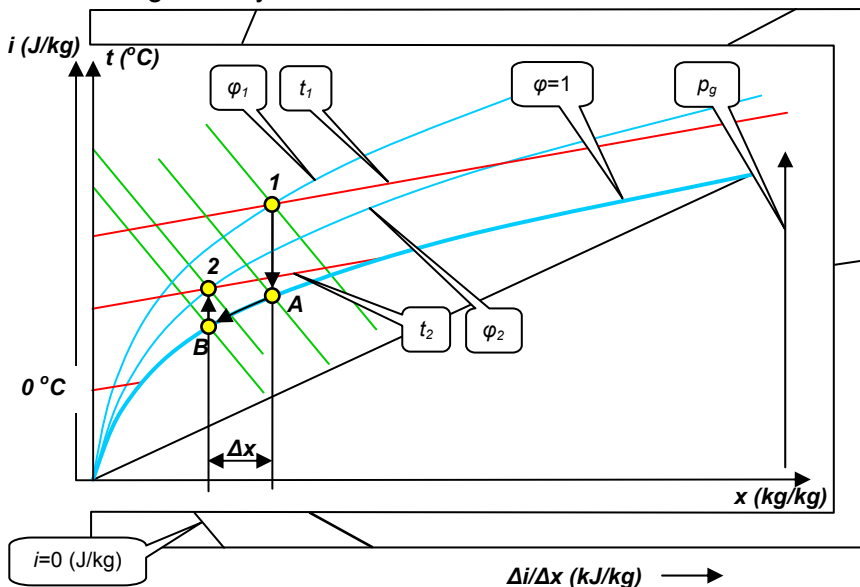
Az [50. ábrán](#) bemutatott fő elemekből álló klímaberendezés nyári üzemét az [51. ábra](#) mutatja.

A nyári időszakban a környezeti levegő állapotát mutatja az '1' pont. A hőmérséklet magas és a levegő a kívánatosnál szárazabb. Az ábra mutatta kép akkor sem változik lényegesen, ha a környezeti levegő páratartalma magasabb a kívánatosnál.

Ahhoz, hogy az '1' pont által jelölt környezeti állapotból a levegőt a kívánatos '2' állapotba eljuttathassuk, az [50. ábra](#) klímaberendezésére is pillantva és szem előtt tartva, hogy milyen állapotváltozásokat lehet



a gyakorlatban végrehajtani, először a levegőt le kell hűteni, majd pedig fel kell melegíteni. A hűtést a '2' állapothoz tartozó harmatponti hőmérsékletig kell folytatni.



51. ábra Légkondicionáló berendezés nyári üzeme

A hűtés során a levegőből a megjelölt mennyiségű nedvesség kiválik, gondoskodni kell tehát annak elvezetéséről. Jól látszik az ábrán, hogy az egyszerű hűtéssel nem lehet célt érni, mert a levegő relatív nedvességtartalma az elfogadhatónál magasabb lesz, kedvezőtlen esetben a hidegebb felületeken páralecsapódás is bekövetkezhetne.

Tanulságos megfigyelni, hogy a nyári időszakban a nedvesítő kamrára nincs szükség, azt le lehet állítani, pedig a környezeti levegő „szárazabb” mint a kívánatos állapotban lévő. Mindez ismételten ráirányítja a figyelmet arra, hogy a relatív nedvességtartalom a hőmérséklet változásával jelentősen változik!

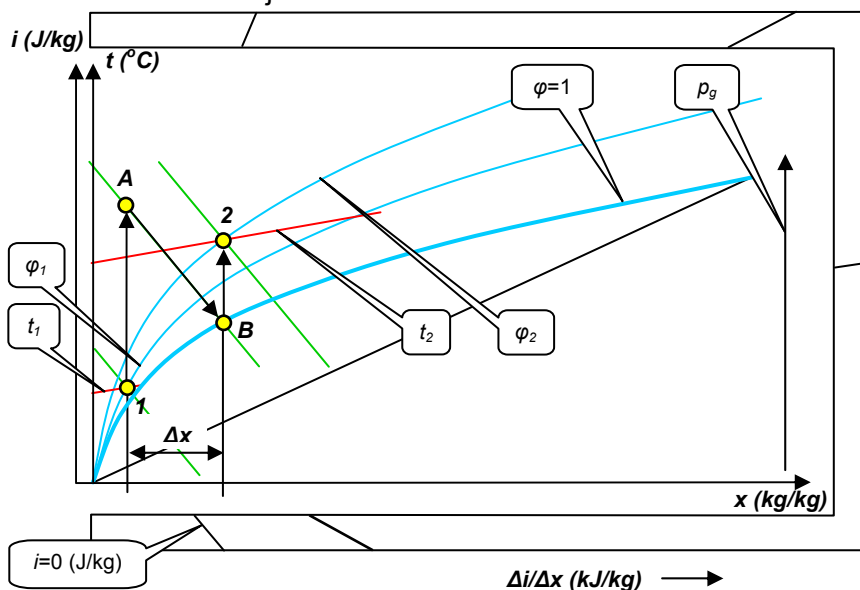
A hűtés során  $i_1 - i_A$  hőmennyiség elvonása, a fűtés során pedig  $i_2 - i_B$  hőmennyiség bevezetése szükséges.

**Önellenőrző kérdések a klímaberendezések nyári üzeme fejezetéhez**

1. Milyen állapotváltozásokon át lehet eljutni a nyáron szokásos környezeti légállapotból a zárt térben szokásos légállapotba?
2. Van-e szükség nedvesítésére a klímaberendezés nyári üzeme során?
3. Miért nem lehet megvalósítani általában a klímaberendezés nyári üzemét egy fokozatú hűtéssel?
4. Miért van szükség nyáron is fűtésre a klímaberendezésben?

### 12.2 Klímaberendezések téli üzeme.

Az 50. ábrán bemutatott fő elemekből álló klímaberendezés nyári üzemét az 52. ábra mutatja.



52. ábra Légkondicionáló berendezés téli üzeme

A téli állapotra az a jellemző, hogy a hőmérséklet alacsony és a környezeti levegő relatív nedvességtartalma a telítési állapot közelében van (télen gyakori a köd!).

A környezeti állapotot jelölő '1' pontból három lépésben juthatunk el a kívánatos '2' állapotba. Először a belépő levegőt fel kell fűtenünk arra a hőmérsékletre (A), melyről egy telítési állapotig történő nedvesítéssel éppen a '2' állapothoz tartozó harmatponti hőmérséklet elérhető (B). Így végül egy egyszerű fűtéssel elérhetjük a kívánt állapotot.

Az 52. ábráról leolvasható, hogy a két fokozatban történő fűtés hőenergia-szüksége

$$q = (i_A - i_1) + (i_2 - i_B) = i_2 - i_1 \quad \left( \frac{kJ}{kg} \right)$$

Az áran megjelölt  $\Delta x$  nedvességváltozás az 1 kg száraz levegőre vonatkoztatott, a nedvesítő kamra víztartályába adagolandó pótvíz mennyiségét jelenti.

### Önellenőrző kérdések a klímaberendezések téli üzeme fejezethez

1. Milyen állapotváltozásokon át lehet eljutni a télen szokásos környezeti légállapotból a zárt térben szokásos légállapotba?
2. Van-e szükség ilyenkor a levegő nedvesítésére?
3. Miért nem lehet megvalósítani általában a klímaberendezés téli üzemét egy fokozatú fűtéssel?
4. Van-e szükség téli üzem esetében is hűtésre a klímaberendezésben?
5. Kell-e nedvességkiválással számolni a klímaberendezés téli üzeme során?

## 13 A hőterjedés

Mint azt a termodinamika II. főtétele kapcsán megállapítottuk a hő – külső beavatkozás nélkül – minden esetben a melegebb helyről a hidegebb helyre áramlik. Nem ejtettünk szót azonban arról, hogy a hő terjedésére milyen törvényszerűségek vonatkoznak.

A hőterjedés módja döntően attól függ, hogy a melegebb és a hidegebb hely közötti teret milyen halmazállapotú anyag tölti ki. Természetesen arra is tekintettel kell lenni, hogy adott esetben a melegebb és a hidegebb „hely” szerepét is többnyire valamilyen kontinuum tölti be a gyakorlatban.

### 13.1 A hővezetés

A hőterjedés azon formáját nevezik hővezetésnek, amikor a hő egy adott anyag részecskéinek közvetlen érintkezése során terjed.

Kizárólag vezetéssel terjed a hő a szilárd halmazállapotú anyagokban. A nyugalomban vagy lamináris áramlásban lévő kontínuumokban, az áramlás irányára merőlegesen, a hő szintén vezetés útján terjed.

Az összenyomható és összenyomhatatlan kontínuumok esetében a nyugalom biztosítása igen nehéz, tekintettel arra, hogy a hőmérsékletkülönbség hatására előálló sűrűségkülönbség automatikusan áramlást generál. A nyugalom feltételei leginkább két egymással párhuzamos, egymáshoz közel lévő sík felület (két rétegű üvegezés) közé zárt levegő esetében biztosítható.

### 13.1.1 Hővezetés sík falban

Két egymással párhuzamos sík felülettel határolt szilárd testen át történő hővezetésre a francia fizikus és matematikus, Jean Baptiste Joseph **Fourier** állított fel egy tapasztalati összefüggést a XIX. század elején. Megfigyelése szerint a vezetés útján időegység alatt terjedő hő (hőáram) mennyisége egyenesen arányos a hőmérsékletkülönbséggel, fordítottan arányos a felületek távolságával és arányos a szilárd test anyagára jellemző ún. hővezetési tényezővel

$$\dot{q} = \lambda \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{J}{m^2 \cdot s} \right) = \left( \frac{W}{m^2} \right)$$

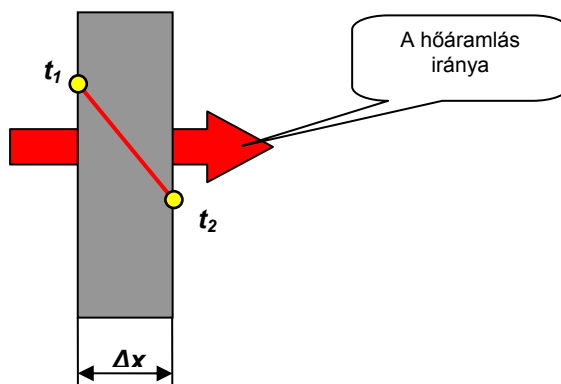
Az összefüggésben a ' $\Delta x$ ' a két hely távolsága, ' $\Delta t$ ' a hőmérsékletkülönbség, ' $\lambda$ ' pedig a szilárd test anyagára jellemző ún. hővezetési tényező. Az összefüggés szerint tehát a sík falban a hőmérsékletváltozást egy egyenes írja le (53. ábra).

Az összefüggés alapján a hővezetési tényező mértékegysége

$$[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$$

azaz szavakban kifejezve a hővezetési tényező az egységnyi vastagságú szilárd falon át, egységnyi hőmérsékletkülönbség hatására, időegység alatt vezetéssel átmenő hőmennyiség.

Az 53. ábrán az egyenes iránytangense annál kisebb minél nagyobb a hővezetési tényező (hőszigetelő anyagok esetén nagy a hőmérsékletváltozás, jó hővezető anyagok esetében kicsi).



**53. ábra** Hőmérsékletváltozás sík falban

A hővezetési tényező nem állandó, hanem a hőmérséklet függvényében változik. Ez a változás kisebb hőmérsékletkülönbségek esetében elhanyagolható. Nagyobb hőmérsékletkülönbségek esetében, köszönhetően annak, hogy a hővezetési tényező többnyire a hőmérséklet lineáris függvénye, a közepes hőmérsékletnek megfelelő átlagértékkel lehet számolni.

A hővezetési tényezővel ill. a hővezetési tulajdonság és az elektromos vezetőképesség között is fennáll az analógia. Az elektromosan vezető anyagok (fémek) hővezetési tényezője jó. Ezzel ellentétben a nem fémes anyagok hővezetési tényezője lényegesen rosszabb, ezek hőszigetelő tulajdonságúak. Mindennek alapvető magyarázata, hogy a fémekben sok a szabad elektron, melyek feszültségkülönbség hatására történő áramlása az elektromos áram és ezek szerint a hőáramlásban is szerepet játszik mozgásuk.

Külön meg kell emlékeznünk a szerves és szervetlen szálak anyagokból kialakított laza szerkezetű rétegekről, melyek különösen kis hővezetési tényezőjűek, azaz kiváló hőszigetelők. Ennek oka azonban nem az anyagnak magának a tulajdonságaiban keresendő, hanem a szálak közötti, igen bonyolult szerkezetű teret kitöltő levegő. A levegőnek és általában minden gáznak, kis nyomásokon a hővezetési tényezője igen kicsi.

Ezen felismerésen alapul a hőszigetelő anyagok gyártásának elmélete. Jó hőszigetelő képességű anyag előállításához annak szerkezetét úgy kell kialakítani, hogy abban a lehető legtöbb és a lehető legapróbb

légzárvány legyen (műanyag habok, laza szerkezetű, bolyhos szövet, stb.). Az apró légzárványokon belül a hő vezetéssel terjed. Nagyobb légzárványok esetén kevésbé jó a hőszigetelő-képesség, mivel a ezekben a bezárt levegő már nem marad nyugalomban, hanem a hőmérsékletkülönbség hatására a zárványon belül áramlásba jön.

Végezetül megjegyezzük, hogy a folyadékok hővezető-képessége viszonylag jó, ami ismét csak az anyag szerkezetére vezethető vissza.

A hővezetésre vonatkozó összefüggés megértéshez jól használhatunk egy villamos analógiát. A feszültség szerepét itt a hőmérsékletkülönbség tölti be, a hőáram megfelel az áramerősségnek és végül az elektromos ellenállás szerepét a falvastagság és a hővezetési tényező hánnyadosa, a hőellenállás tölti be

$$\dot{q} = \frac{\Delta t}{R} \left( \frac{W}{m^2} \right)$$

Ez a villamos analógián alapuló értelmezés jó segítséget nyújt olyan, a gyakorlatban elég sűrűn előforduló esetek kezelésére, amikor a hővezetés olyan sík falon keresztül valósul meg, mely több, különböző anyagú rétegből épül fel. Ilyen esetben a többretegű sík fal eredő hőellenállása nyilván az egyes rétegek hőellenállásainak összege, hasonlóan ahhoz, ahogy a sorba kapcsolt elektromos ellenállások eredője az egyes ellenállások összege

$$R_e = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{\lambda_i} \left( \frac{m^2 \cdot K}{W} \right)$$

Ezzel az eredő hőellenállással ugyanazon Fourier-összefüggést alkalmazhatjuk a többretegű sík fal esetében is.

### 13.1.2 Hővezetés hengeres falban

A gyakorlatban sűrűn előforduló feladat a környezeti hőmérsékletnél magasabb vagy alacsonyabb hőmérsékletű kontínuumokat szállító csővezetékek hőszigetelése.

Erre a problémára a sík falra felállított Fourier-összefüggés közvetlenül nem alkalmazható, ugyanis pl. a belülről kifelé történő hőáramlás során a felület egyre nő. A hőáram állandósága miatt pedig ennek a következménye az kell legyen, hogy az egységnyi vastagságú rétegben a hőmérsékletváltozás egyre kisebb.

A Fourier-féle összefüggés hengeres falra érvényes alakjának felírásához alakítsuk át a hővezetési egyenletet differenciális formára, figyelemmel arra, hogy csövek esetében poláris koordinátarendszert célszerű alkalmazni

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} A \quad (W)$$

A negatív előjel azért szükséges, mert a hőterjedés iránya ellentétes a hőmérsékletváltozás irányával (a hő a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb hőmérsékletű hely felé terjed!).

Ha most 'A' helyébe a középponttól 'r' távolságban lévő 'dr', elemi vastagságú felületet annak jellemzőivel helyettesítjük, akkor a differenciál-egyenletünk a következő alakú lesz

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} 2 \cdot r \cdot \pi \cdot l \quad (W)$$

A változók ('r' és 't') szétválasztása, az integrálás és az újrendezés után a hengeres falakra érvényes Fourier-összefüggés a következő

$$\dot{q} = \frac{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta t}{\ln\left(\frac{d_k}{d_b}\right)} \quad (W)$$

A csövek esetében igen gyakori, hogy az egységnyi hosszúságú csőszakaszra vonatkoztatják a hőáramot, ami persze nem más, mint az egységnyi hosszra eső hőveszteség.

$$\dot{q} = \frac{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Delta t}{\ln\left(\frac{d_k}{d_b}\right)} \quad \left(\frac{W}{m}\right)$$

Természetesen ezúttal is lehetséges a hőellenállás értelmezése, aminek szerepét hengeres falakra a

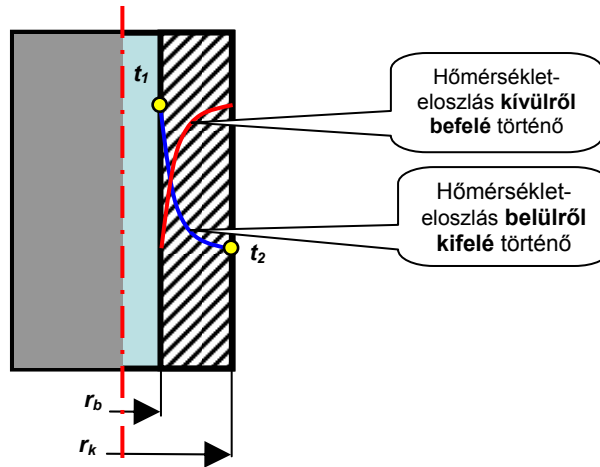
$$R = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{d_k}{d_b}\right) \quad \left(\frac{m \cdot K}{W}\right)$$

összefüggés veszi át. Vegyük észre, hogy itt a hőellenállás mértékegysége nem azonos a sík falakra kapott hőellenállásával!

A hőellenállás segítségével a többretegű hengeres falakra (szigetelt csövek) az eredő hőellenállással felírt Fourier-összefüggés a hosszegységre vonatkoztatva

$$\dot{q} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta t}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \left( \frac{d_{k,i}}{d_{b,i}} \right)} \quad \left( \frac{W}{m} \right)$$

Az összefüggésekből látható, hogy a hengeres falban, ellentétben a sík fallal, a hőmérsékletváltozást nem egyenes, hanem logaritmikus függvény írja le (54. ábra).



**54. ábra** Hőmérsékletváltozás hengeres falban

A fejezet elején előre jelzett jelleg tehát valóban megfigyelhető, akár belülről kifelé, akár kívülről befelé irányuló hőáramról van is szó.

Fontos megjegyeznünk, hogy a hengeres falakra érvényes, viszonylag bonyolult összefüggés alkalmazásától nyugodtan el lehet tekinteni és helyette a sík falakra érvényes, jóval egyszerűbben használható összefüggést alkalmazhatjuk, ha a csőfal vastagsága a belső átmérőhöz képest kicsi. Ez az eset a gyakorlatban szokásos ún. normál falvastagságú csövek esetében mindig fennáll, hiszen a falvastagság még a nagyobb átmérők esetében is csak néhány milliméter. Ugyanakkor a szigeteléssel ellátott csövek esetében mindenképpen a bonyolultabb összefüggést kell használni.

**Önellenőrző kérdések a hővezetés fejezethez**

1. Mi a hővezetés, mint hőterjedési forma sajátossága?



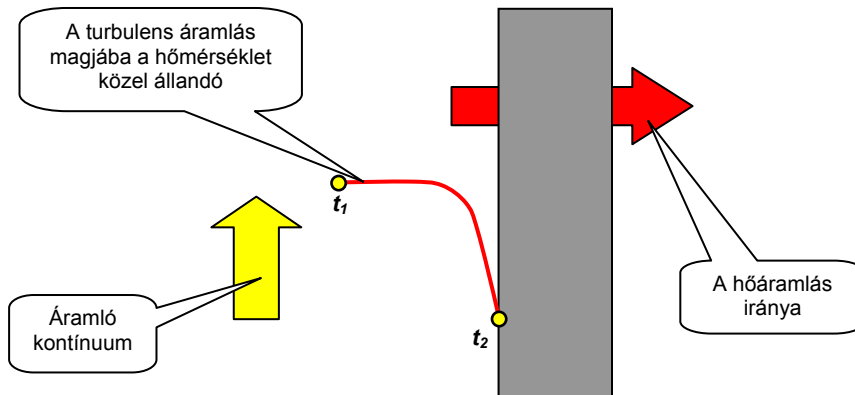
2. Mit fejez ki a Fourier-féle tapasztalati törvény?
3. Milyen villamos analógiát lehet alkalmazni a hővezetésre?
4. Milyen jellegű a hőmérsékletváltozás sík falban?
5. Mi a hővezetési tényező?
6. Hogyan lehet figyelembe venni a hővezetési tényező hőmérséklet függvényében történő változását?
7. Mit kell hőellenállás alatt érteni sík falban lezajló hővezetés esetén?
8. Hogyan írható fel a több rétegű sík falban kialakuló hőáram?
9. Hogyan számítható ki a hengeres falban kialakuló hőáram?
10. Mit lehet hőellenállás alatt érteni hengeres falban lezajló hővezetés esetén?
11. Milyen a hőmérsékletváltozás hengeres falban lezajló hővezetés esetén? Miért?
12. Hogyan írható fel a több rétegű hengeres falban kialakuló hőáram?
13. Milyen esetben lehet a sík falra érvényes összefüggést alkalmazni hengeres falban lezajló hővezetés esetére?
14. Miért kötelező csövek hőszigetelésének számítása során a hengeres falra érvényes összefüggést alkalmazni?

## 13.2 A hőátadás

A hőátadás a hőterjedésnek az a módja, amikor az áramló kontínuum hőt ad le vagy vesz fel valamilyen szilárd felületre ill. felületről.

A hőterjedésnek erre az esetére más törvények érvényesek, mint a hővezetésre. Bár kétségtávol szerepet játszik az ilyen esetben kialakuló hőáram nagyságában az is, hogy az áramló kontínuumnak milyen anyagi jellemzői (ezek között milyen a hővezetési tényezője) vannak, de e mellett meghatározó jelentőségű az, hogy a kontínuum áramlása milyen (lamináris vagy turbulens).

Nyilvánvaló ugyanis, hogy a lamináris áramlás esete közelebb áll a hővezetéshez, míg az intenzív keveredéssel együtt járó turbulens áramlás esetén, amikor lehetséges, hogy a részecskék a mozgásuknak köszönhetően közvetlenül is adjanak át hőt a szilárd test felületére, jóval nagyobb hőáramok alakulnak ki.



**55. ábra** Hőmérsékletváltozás a hőátadás során

Ugyancsak megfigyelhető, és a turbulens áramlásra jellemző intenzív keveredés miatt a turbulens áramlásokban, a szilárd test felületétől távolabb (a határreteken kívül) gyakorlatilag mindenütt ugyanaz a hőmérséklet mérhető. A hőmérsékletváltozás jellegét szilárd test mellett áramló kontínuumban az 55. ábra mutatja.

A szilárd test felülete és az áramló kontínuum közötti hőátadás jelenségére Newton állított fel egy tapasztalati összefüggést

$$\dot{q} = \alpha \cdot \Delta t \left( \frac{W}{m^2} \right)$$

Az összefüggésben ' $\alpha$ ' az ún. hőátadási tényező, ami az egységnyi hőmérsékletkülönbség hatására, időegység alatt a felületegységen átadott hőmennyiséget jelenti

$$[\alpha] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

Bár a fejezet bevezetőjében elmondottakból következik, de külön ki kell hangsúlyozni, hogy a hőátadási tényező elsősorban a kontínuum áramlásának jellemzőitől, így pl. a  $Re$ -számtól függ. E mellett fontos szerepet játszanak a hőátadási tényező értékében a kontínuum anyagi jellemzői, úgymint a hővezetési tényező, a fajhő, a kinematikai viszkozitás és a sűrűség.

A hőátadási tényező tehát nem anyagi jellemző. Meghatározása döntően modellkísérletek alapján felállított, hasonlósági kritériumokat (hasonlósági számokat) tartalmazó ún. kritériális egyenletek segítségével történik.

A hőátadási folyamatok modellezésénél a  $Re$ -szám által kifejezett hasonlóság mellett további hasonlósági feltételek teljesülése lehet szükséges. Ezeket a hasonlósági feltételeket kifejező mértékegység nélküli (dimenziótlan) hasonlósági számok a következők:

- Grashof-szám ( $Gr$ -szám)
- Prandtl-szám ( $Pr$ -szám)
- Nusselt-szám ( $Nu$ -szám)

### A $Gr$ -szám

A *Grashof*-szám, mely a XIX. században élt német mérnök, Franz **Grashof**, emlékéét őrzi, nem más, mint a felhajtóerő és a súrlódási erő viszonyozsáma.

Ebből következően a  $Gr$ -szám is az áramlásra jellemző, mint a  $Re$ -szám, de az olyan áramlásokra, amikor az áramlás nem kényszerített, hanem azt a hőmérsékletkülönbség hatására kialakuló sűrűségkülönbség generálja.

Ebből persze következik, hogy a  $Re$ -szám és a  $Gr$ -szám soha sem szerepel egyazon összefüggésben!

A  $Gr$ -szám kiszámítására szolgáló definíciós összefüggés

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot \Delta t \cdot l^3}{\nu^2}$$

Az összefüggésben ' $\beta$ ' a közeg köbös hőtágulási tényezője, ' $l$ ' az áramlásra jellemző lineáris méret (pl. egy függőleges csődarab esetében a cső hossza, de egy vízszintes csődarab esetében annak átmérője). A nevezőben a kinematikai viszkozitás szerepel.

A ' $\Delta t$ ' hőmérsékletkülönbség az áramló kontíniumra jellemző hőmérséklet és a fal jellemző hőmérséklete közötti különbség. A különböző anyagi jellemzőket az említett két hőmérséklet számtani közepének megfelelő hőmérsékleten kell venni!

## A Pr-szám

A *Prandtl*-szám, mely Ludwig **Prandtl**, az 1953-ban elhunyt német fizikus, az aerodinamika úttörőjének nevét viseli, a közeg anyagi jellemzőiből képzett hasonlósági szám. Éppen ezért sokszor anyagjellemző-számnak is szokták nevezni.

Számos olyan anyagjellemző táblázat létezik, mely közvetlenül a *Pr*-szám értékét tartalmazza, ráadásul a hőmérséklet függvényében. A *Pr*-szám kiszámítására szolgáló definíciós összefüggés

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}} = \frac{\nu}{a}$$

Mint látható *Pr*-szám a kinematikai viszkozitást, a hővezetési tényezőt, a sűrűséget és a fajhőt tartalmazza. Sok táblázatban a 'a'-val megjelölt anyagjellemző szerepel, ennek neve hőmérsékletvezetési tényező, mértékegysége természetesen ( $m^2/s$ ).

## A Nu-szám

A *Nusselt*-szám az ún. hőhasonlósági szám, mely bevetőjéről, az 1957-ben elhunyt Wilhelm **Nusselt**-ről kapta nevét. Ennek kiszámítása szolgáló definíciós összefüggés

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}$$

Ez a hasonlósági szám tartalmazza tehát a keresett hőátadási tényező értékét.

A kísérletek alapján olyan kritériális egyenleteket állítottak fel, melyek az alábbi általános szerkezetűek

$$\text{Nu} = C \cdot \text{Re}^m \cdot \text{Gr}^n \cdot \text{Pr}^p \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^q$$

Az egyenletben szereplő hatványkitevők és a 'C' konstans kísérletek alapján kerül meghatározásra és a vizsgált esettől függően más és más értékűek. Az egyes esetekre érvényes konkrét összefüggést az ezen a téren rendkívül gazdag szakirodalomban lehet megtalálni.

A fentebb a  $Gr$ -szám kapcsán elmondottak szerint ' $m$ ' és ' $n$ ' közül az egyik mindig zérus. Kényszerített áramlások esetén ' $n$ ', szabad áramlások esetén ' $m$ '. Az egyenlet utolsó tényezője természetesen csak akkor játszik szerepet (hatványkitevője akkor különbözik zérustól) ha a csőben vagy cső körül lezajló áramlásról van szó.

A hőátadási tényező meghatározása tehát a következő módon történik:

- az adott problémára vonatkozóan el kell dönteni, hogy a  $Re$ -szám vagy a  $Gr$ -szám a mértékadó az áramlásra,
- el kell dönteni, hogy mi a jellemző, ún. vonatkoztatási hőmérséklet,
- táblázatok alapján meg kell határozni az anyagjellemzőket a vonatkoztatási hőmérsékleten,
- meg kell határozni az egyenlet jobb oldalán szereplő hasonlósági számokat,
- a szakirodalomból ki kell keresni az adott esetre érvényes kritériális egyenletet és segítségével meg kell határozni a  $Nu$ -számot,
- a  $Nu$ -számból ki kell számítani a hőátadási tényezőt.

A 4. táblázat néhány esetre vonatkozóan a hőátadási tényező általában előforduló értéktartományáról ad nagyságrendi tájékoztatást.

Közeg	Hőátadási tényező tájékoztató érté- kei ( $W/m^2 \cdot K$ )
Gáz (levegő és más hasonló gáz)	$10^0 - 10^2$
Folyadék (víz és más hasonló folyadék)	$10^2 - 10^3$
Kondenzálódó vízgőz és forrásban lévő víz	$10^4$

#### 4. táblázat Tájékoztató hőátadási tényezők

#### Önellenőrző kérdések a hőátadás fejezethez

1. Mi a hőátadás, mint hőterjedési forma sajátossága?
2. Mit fejez ki a Newton-féle hőátadási alaptörvény?
3. Mi a hőátadási tényező?
4. Milyen tényezőktől függ a hőátadási tényező?
5. Mi a  $Nu$ -szám?

6. Milyen általános szerkezetű kritériális egyenletből számítható ki a  $Nu$ -szám?
7. Hogyan lehet meghatározni a  $Nu$ -számra vonatkozó kritériális egyenlet állandóját és hatványkitevőit?
8. Milyen áramlások esetében szerepel a  $Nu$ -szám összefüggésében a  $Gr$ -szám?
9. Milyen áramlások esetében szerepel a  $Nu$ -szám összefüggésében a  $Re$ -szám?
10. Milyen áramlások esetében szerepel a  $Nu$ -szám összefüggésében a  $Gr$ -szám és a  $Re$ -szám is?
11. Mi a  $Pr$ -szám?
12. Milyen lépéseken át lehet meghatározni a hőátadási tényezőt?
13. Milyen tájékoztató értékeket lehet figyelembe venni a gázok és a folyadékok hőátadási tényezőinek becslésekor?

### 13.3 A hőszugárzás

A hőszugárzás a hőterjedésnek az a formája, mely nem igényli közvetítő közeg jelenlétét, mivel elektromágneses sugárzás. Mindamelllett a hőszugárzás olyankor is fellép, ha van közvetítő közeg, azaz pl. a hőátadással együtt.

Az elektromágneses sugárzások szerepük, fontosságuk, keletkezésük, stb. szerint igen sokfélék, de alapjában hullámhosszuk szerint osztályozhatók. A legrövidebbek a  $10^{-15}$  m hullámhosszú ún. kozmikus sugarak, melyek tulajdonképpen a különböző radioaktív folyamatok során keletkező gammasugarak. A legnagyobb hullámhosszúságúak a  $10^8$  m hullámhosszú ún. hosszú rádióhullámok. Jóllehet minden elektromágneses sugárzásnak van hőhatása, a gyakorlati szempontból jelentős tartomány meglehetősen szűk, a látható fény hullámhossztartományának felső határához kapcsolódó ún. infravörös sugarak tartományát (hullámhossz kb.  $10^{-6}$  –  $10^{-4}$  m) öleli fel.

A hőszugárzás alapösszefüggése a Joseph **Stefan** szlovén és Ludwig Eduard **Boltzmann** osztrák fizikus által a XIX. Század végén felállított és emlékükre ma Stefan-Boltzmann törvény, mely a felületegység által időegység alatt kisugárzott hőmennyiséget adja meg

$$\dot{q} = \varepsilon \cdot c_o \cdot T^4 \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

Az összefüggésben 'c<sub>o</sub>' a sugárzásos hőátadással kapcsolatosan általános viszonyítási alapnak tekintett ún. abszolút fekete test sugárzási tényezője, 'ε' a sugárzó test ún. feketeségi foka.

Az abszolút fekete test minden ráeső sugárzást elnyel és folyamatos színekép szerint (minden hullámhosszon) sugároz ki energiát, természetesen nem minden hullámhosszon azonos intenzitással. Az abszolút fekete test elméleti úton meghatározott sugárzási tényezője, az ún. Boltzmann-állandó

$$c_o = 5,767 \cdot 10^{-8} \left( \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \right)$$

A feketeségi fok azt fejezi ki, hogy az adott test az abszolút fekete test sugárzókéességét milyen mértékben közelíti meg. Ebből adódóan a feketeség fok mindig kisebb, mint az egység.

A feketeségi fok több tényező függvénye. A legfontosabb ezek közül a felület érdessége és anyaga. A sima, fényes és kemény felületek kevés rájuk eső sugárzást nyelnek el (kevésbé melegszenek fel és ezért kevésbé sugárzók), ezzel szemben az érdes, puha és fénytelen felületek jól megközelítik az abszolút fekete testet, legalábbis a hőterjedés szempontjából fontos tartományban (sok rájuk eső sugárzást elnyelnek, jobban felmelegszenek és nagyobb a kisugárzásuk). A 3. táblázatban néhány anyagra érvényes feketeségi fok tájékoztató értéke található

Anyag	Hőmérséklet ill. tartomány (°C)	Feketeségi fok
Alumínium, csiszolt	225 – 375	0,039 – 0,057
Alumínium, 600 °C-on oxidált	200 – 600	0,11 – 0,19

Vas, csiszolt	425 – 1020	0,114 – 0,377
Vas, csiszoló anyaggal frissen megmunkált	20	0,242
Vas, oxidált vas	100	0,736
Vasoxid	500 – 1200	0,85 – 0,95
Acél, csiszolt lemez	940 – 1100	0,55 – 0,61
Acél, 600 °C-on oxidált	200 – 600	0,80
Arany, gondosan csiszolt	225 – 635	0,018 – 0,035
Sárgaréz, hengerelt lemez természetes felülettel	22	0,06
Sárgaréz, matt lemez	50 – 350	0,22
Higany, igen tiszta	0 – 100	0,09 – 0,12
Nikkel, csiszolt	225 – 375	0,07 – 0,087
Nikkel, 600 °C-on oxidált	200 – 600	0,37 – 0,48
Ezüst, csiszolt	225 – 625	0,0198 – 0,0324
Víz	0 – 100	0,95 – 0,963
Gipsz	20	0,903
Tölgyfa, gyalult	20	0,895
Tégla, vörös, érdes	20	0,93
Tégla, tűzálló	-	0,8 – 0,9
Tégla, samott	1100	0,85
Lakk, fehér, érdes vaslemezen	23	0,906
Lakk, fekete, fényes vaslemezen	25	0,875
Korom, gyertyakorom	95 – 270	0,952
Üveg, sima	22	0,937
Vakolat, érdes, meszes	10 – 88	0,91
Zománc, fehér, vaslemezen	19	0,897

### 5. táblázat Néhány anyag feketeségi foka

A táblázatra pillantva látható, hogy a közhiedelemmel ellentétben nem a szín a meghatározó a feketeségi fok, azaz az elnyelt és kisugárzott hőáram tekintetében.

Pusztán kényelmi okokból a Stefan-Boltzmann törvényt szokták olyan módon is felírni, hogy a Boltzmann-állandó nagyságrendjét az abszolút hőmérséklet osztójába írják, így kisebb számokkal, kényelmesebben lehet számolni



$$\dot{q} = \varepsilon \cdot 5,767 \cdot \left( \frac{T}{100} \right)^4 \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

A sugárzó testek közötti hőcsere a Stefan-Boltzmann törvény alapján a két hőmérséklet negyedik hatványai közötti különbséggel arányos

$$\dot{q} = \varepsilon_{red} \cdot 5,767 \cdot \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \varphi_{1,2} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

Az összefüggésben ' $\varepsilon_r$ ' a két felület feketeségi fokából meghatározható ún. redukált feketeségi fok, ' $\varphi_{1,2}$ ' pedig a két felület méreteiből és egymáshoz viszonyított helyzetéből (a normálisok egymáshoz képesti elhelyezkedése) meghatározható ún. besugárzási tényező.

A hőáram összefüggésében a redukált feketeségi fok és a besugárzási tényező meghatározása általában igen bonyolult geometriai számításokat igényel. Ezért itt, a levezetések mellőzésével, a redukált feketeségi fok összefüggését csak két olyan esetre adjuk meg, amikor a besugárzás tökéletes vagy közel tökéletes ( $\varphi_{1,2}=1$ ),

- a két felület párhuzamos, egymáshoz közel áll és kb. azonos méretű,
- az egyik felülettel határolt test ('1') a másik test által alkotott zárt felületen ('2') belül helyezkedik el.

A tökéletes besugárzás az első esetben azt jelenti, hogy a két test sugárzása kölcsönösen és maradéktalanul a másik test felületére jut. Ez a második esetben is igaz. Könnyen belátható, hogy a zárt térben lévő test minden sugárzása a zárt teret alkotó felületre érkezik. Kissé nehezebben fogadható el, hogy a zárt teret alkotó felület esetében a sugárzásos hőcsere ismét csak a két felület között lehet, hiszen a zárt teret alkotó felület önmagával nem lehet sugárzásos hőcserében, mivel az azonos hőmérsékletű helyek között nem lehet semmiféle hőcsere!

A fent említett két speciális esetre vonatkozóan, a levezetés mellőzésével, a redukált feketeségi fok mindkét esetben azonos módon határozható meg

$$\varepsilon_{red} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$$

Természetesen a párhuzamos felületek közötti sugárzásos hőcsere esetén  $A_1=A_2$ .

Figyeljük meg a redukált feketeségi fok összefüggését. Azokban az esetekben, amikor a zárt tér felülete ('2') sokszorosan meghaladja a zárt térben lévő test felületét ('1'), akkor a környezet gyakorlatilag abszolút fekete testnek tekinthető ( $\varepsilon_2 \approx 1$ ), hiszen a nevezőben lévő második tag a zárt teret alkotó felület tényleges feketeségi fokától függetlenül közel esik a zérushoz ( $A_1/A_2 \approx 0$ ). Ekkor a redukált feketeségi fok helyébe a zárt térben lévő test felületének feketeségi foka helyettesíthető.

Végezetül megjegyzésre ajánljuk, hogy a sugárzással átvitt hő általában csak akkor számottevő a hőátadással átvitt mellett, ha a hőmérsékletkülönbség több száz fok, és a hőleadó felület hőmérséklete megközelíti a látható izzáshoz tartozó hőmérsékletet (500 – 700 °C). Mindennek nem mond ellent, de érdekességként megemlítjük, hogy az ember bőre (a testfelület bizonyos részein) olyan érzékeny, hogy már néhány 10 foknyi hőmérsékletkülönbség esetén is képes érzékelni a sugárzás útján felvett vagy leadott hőt.

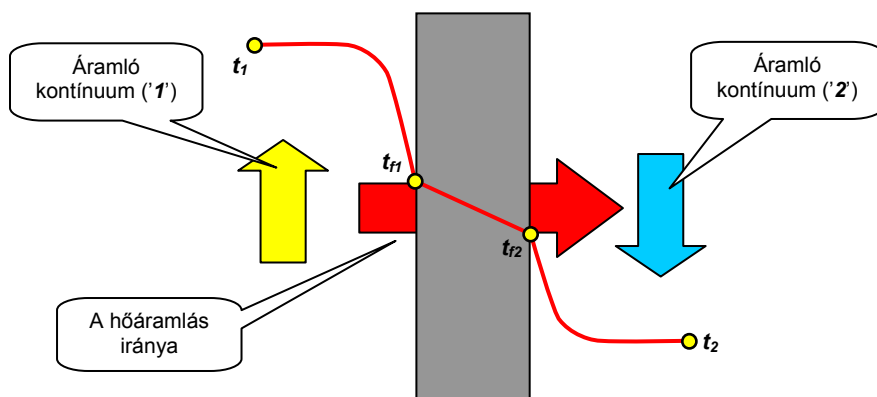
### **Önellenőrző kérdések a hőszugárzás fejezethez**

1. Mi a hőszugárzás, mint hőterjedési forma sajátossága?
2. Az elektromágneses sugárzások mely tartománya a legfontosabb a hőterjedés szempontjából?
3. Hogyan írható fel a sugárzás során kibocsátott hőáram?
4. Mi az abszolút fekete test?
5. Mi feketeségi fok?
6. Mitől függ a feketeségi fok?
7. Miért szerepeltetik gyakorta az abszolút hőmérséklet 100-ad részét a Stefan-Boltzmann törvényben?
8. Hogyan írható fel a két test közötti sugárzásos hőcsereére vonatkozó általános összefüggés?
9. Mi a besugárzási tényező?
10. Milyen esetekben beszélünk teljes besugárzásról?
11. Hogyan kell kiszámítani teljes besugárzás esetén a redukált feketeségi fok értékét?
12. Miért lehet a kis méretű felületek és a környezet közötti sugárzásos hőcsere esetén a redukált feketeségi fokot közelítőleg egyenlőnek venni a felület feketeségi fokával?

13. Milyen lépéseken át lehet meghatározni a hőátadási tényezőt?
14. Milyen tájékoztató értékeket lehet figyelembe venni a gázok és a folyadékok hőátadási tényezőinek becslésekor?
15. Milyen esetben nem lehet figyelmen kívül hagyni a sugárzással átvitt hőt?

### 13.4 A hőátvitel

A mérnöki gyakorlatban sűrűn előforduló feladat, hogy a rendszert alkotó kontínuummal hőt kell közölni, vagy belőle hőt kell elvonni a rendszer szilárd falán át és a hő, a környezet szerepét betöltő másik kontínumból érkezik, vagy oda kerül átadásra. Ez az összetett folyamat, mely tehát egy hőátadásból (a rendszerben lévő kontínuum és a rendszer fala között), egy hővezetésből (a rendszer falában zajlik le) és egy további hőátadásból (a rendszer fala és a környezet között) áll, a hőátvitel rövid megnevezést kapta (56. ábra).



56. ábra A hőmérsékletváltozás a hőátvitel során

Az 56. ábrán bemutatott három hőmérsékletkülönbségre a megfelelő összefüggéseket felírva (egyelőre sík falat feltételezve!), majd a három hőmérsékletkülönbséget összeadva és a kapott egyenletet a hőátadásra érvényes Newton-féle összefüggéshez hasonló formára rendezve a következő összefüggést kapjuk

$$\dot{q} = k \cdot \Delta t \left( \frac{W}{m^2} \right)$$

melyben 'k' a hőátviteli tényező, ami a fent leírt levezetés szerint a két kontínuum oldalán érvényes hőátadási tényezők, az elválasztó fal hővezetési tényezője és vastagsága alapján számítható ki

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left( \frac{W}{m^2 \cdot K} \right)$$

Az összefüggés szerkezetéből adódik, hogy adott falvastagság és hővezetési tényező esetén a hőátviteli tényező mindenképpen kisebb, mint a két közeg oldalán jelentkező hőátadási tényezők bármelyike. Ennek természetes következménye, hogy adott fal esetén a hőátviteli tényező növelése vagy csökkentése a leghatékonyabban minden esetben a rosszabbik hőátadási tényező változtatásával érhető el.

Értelemszerűen kell alkalmazni a hőátviteli tényező összefüggését olyan esetben, amikor a sík fal több rétegből épül fel.

Ha a hőátvitelre kapott összefüggést szeretnénk szigetelt csövekre vonatkoztatni, akkor szembe találkoznak a problémával, hogy felületként a belső vagy a külső felületet tekintjük alapnak. Mivel egy hosszabb csővezeték esetében sem a teljes külső, sem pedig a teljes belső felület nem bír jelentőséggel, ráadásul ha felületegységre számolunk, akkor mindig hozzá kellene tennünk, hogy a külső vagy a belső felület egységére számoltunk-e, a leghelyesebb, ha ezúttal is a hosszegységre vonatkoztatjuk a hőáramot.

Ezen megfontolás alapján a hőátvitelre kapott összefüggés a gyakorlati szempontból igen fontos, szigetelt csövek esetében, az előzőekben sík falakra elmondott módszert követve, az alábbi alakban írható fel

$$\dot{q} = 2 \cdot \pi \cdot k_h \cdot \Delta t \left( \frac{W}{m} \right)$$

ahol a 'k<sub>h</sub>' tényező a sík falakra talált hőátviteli tényező szerepét tölti be, és a következő módon számítható ki a levezetés szerint

$$k_h = \frac{1}{\frac{1}{d_b \cdot \alpha_b} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \left( \frac{d_{k,i}}{d_{b,i}} \right) \right) + \frac{1}{d_k \cdot \alpha_k}} \left( \frac{W}{m \cdot K} \right)$$

Vegyük észre, hogy a hőátviteli tényező mértékegysége ezúttal a hővezetési tényezőével egyezik meg, mivel a hőáram sem a felületegységre, hanem a cső hosszának egységére esik.

Az összefüggést bizvást lehet egyszerűsíteni, ha megfontoljuk, hogy a több rétegű hengeres fal egyes rétegeinek hőellenállásai közül nyilván a szigetelésé messze a legnagyobb. Ezért nem feltétlenül kell minden réteg hőellenállását figyelembe venni!

### 13.4.1 Hőátvitel bordázott felületen

Gyakorta előfordul, hogy azokat a felületeket, melyek mentén a kialakuló hőátadási tényező túlzottan kicsi, bordázattal látják el, a felület nagyságának és így a hőáram nagyságának növelése érdekében.

Az ilyen módon megnövelt felület azonban teljes nagyságában nem vehető figyelembe, ugyanis a bordák mentén a bordatőtől távolodva a hőmérséklet csökken. Ez a hőmérsékletcsökkenés a borda kialakításának függvénye és az ún. bordahatásfokkal veszik figyelembe

$$\eta_b = \frac{t_{\text{bordaközepes}} - t_2}{t_{\text{bordatő}} - t_2}$$

Az összefüggésben ' $t_2$ ' a környezet hőmérséklete.

A bordahatásfok meghatározása zárt alakú összefüggések segítségével nem lehetséges, mivel az ehhez szükséges ' $t_{\text{bordaközepes}}$ ' hőmérsékletet csak a borda, általában nehezen leírható, hőmérséklet-eloszlásából lehet meghatározni. Ezért a gyakorlatban a bonyolult összefüggéseket olyan diagramokban dolgozzák fel, melyekből az adott borda legfontosabb geometriai adatai alapján már könnyen meghatározhatók azok a tényezők, amelyek segítségével a bordahatásfok kiszámítható.

Annyi minden esetre megjegyezhető, hogy a bordahatásfok akkor jó, ha a borda vastagsága kicsi és az alapfelülettől távolodva csökken. Az ilyen borda nagyobb tömegben történő gyártása általában gazdaságtalan.

A másik kérdés a borda magassága. Nagyobb magasság esetén a felület, jelentékenyen nagyobb, ugyanakkor a bordamagasság növelé-

sével csökken a borda közepes hőmérséklete, ami kedvezőtlen a bordahatásfok szempontjából.

Összefoglalva a jó hatásfokú bordázat magassága többnyire csekély és inkább sűrűségének növelésével érdemes a nagyobb felület elérésére törekedni.

A bordázott felület esetében a fentiek szerint két egymással ellentétes hatást kell egyidejűleg figyelembe venni. Az egyik a felületnövelés a másik a bordahatásfok.

A sík felületen át megvalósuló hőáramra korábban felírt összefüggést ezúttal a következő formában célszerű felírni

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta t \quad (W)$$

ahol 'A' a bordázatlan sík felület nagysága, a hőátviteli tényező pedig

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\psi_1 \cdot \eta_{b1} \cdot \alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\psi_2 \cdot \eta_{b2} \cdot \alpha_2}} \quad \left( \frac{W}{m^2 \cdot K} \right)$$

A hőátviteli tényező összefüggésébe bevezetett ' $\psi$ ' felületnövelési tényező azt veszi figyelembe, hogy az adott közeg oldalán a bordázattal megnövelt felület hányszor nagyobb a bordázatlan felületnél, ' $\eta_b$ ' pedig az adott oldalon érvényes bordahatásfok. Igen ritkán fordul elő, hogy mindkét felületet bordázattal látják el, ilyenkor a bordázatlan felület oldalán mindkét tényező értéke 1.

Hengeres felületek (csövek) esetében a bordázat alkalmazása nyilván ésszerűtlen akkor, ha hőszigetelést alkalmazunk. A bordázattal ellátott csövet tehát a gyakorlatban mindig vékony falúnak lehet tekinteni. Az ilyen módon elkövetett hiba csökkentése érdekében célszerű a külső és a belső felület átlagát venni referenciának és a felületnövelési tényezőt mindkét oldalon erre vonatkoztatni. Ez az átlag valójában a logaritmikus átlag, de tekintettel arra, hogy vékonyfalú csövek esetén  $r_k/r_b \ll 2$ , a számtani átlag is alkalmazható, mivel alig tér el a logaritmikus átlagtól.

Mindezen megfontolások után nyilvánvaló, hogy a bordázott csövek esetében a sík falra érvényes összefüggéseket alkalmazhatjuk mind a

hőáramra mind a hőátviteli tényezőre, mindössze arra kell ügyelnünk, hogy ezúttal 'A' a bordázatlan cső külső és belső felületének átlaga.

Végezetül megemlítjük hogy a bordázattal ellátott felület gyártása rendkívül munkaigényes és ebből következően költséges. Ezért bordázott felületet csak előzetes gazdaságossági vizsgálat után, akkor alkalmaznak, ha semmilyen más lehetőség nem kínálkozik a megoldásra. Különösen igaz ez a csövek kétoldali bordázására.

Külön ki kell hangsúlyozni, hogy a borda és az alapfelület között tökéletes, fémes kapcsolat szükséges a borda teljes tökeresztmetszetében, ellenkező esetben a bordahatásfok a reméltnek csak törtrésze lesz. Ennek a feltételnek a biztosítása szintén jelentős munkaigényű és így nagy költséggel jár.

Feltétlenül kerülni kell a felület bordázását, ha a közegek tulajdonságai miatt a bordaközök eltömődésének veszélye fennáll. A bordaközök eltömődése esetén a hőáram rohamos csökkenése következik be.

### **Önellenőrző kérdések a hőátvitel fejezethez**

1. Mi a hőátvitel?
2. Hogyan határozható meg a hőátviteli tényező sík falon át történő hőátvitel esetén?
3. Melyik közeg hőátadási tényezőjét kell változtatni, ha azt akarjuk, hogy változatlan tulajdonságú fal esetén a lehető legnagyobb legyen a hőátviteli tényező növekedése?
4. Hogyan írható fel a szigetelt cső falán át kialakuló hőáram?
5. Miért és mikor szoktak bordázást alkalmazni a hőcserélő felületen?
6. Mi a bordahatásfok?
7. Milyen feltételek teljesítésére célszerű törekedni jó hatásfokú borda készítése érdekében?
8. Hogyan írható fel a bordázott felület hőátviteli tényezője?
9. Mi a felületnövelési tényező?
10. Mi a következménye annak, ha a bordák nem teljes tökeresztmetszetükkel kapcsolódnak fémesen az alapfelülethez?
11. Mi a következménye annak, ha a bordaközök eltömődnek?

## 14 A hőcserélő berendezések

Bevezetőben szeretnénk előrebocsátani, hogy az általánosan használt hőcsere ill. hőcserélő kifejezéseket természetesen nem szabad szó szerint érteni. Jól tudjuk, hogy a hő, külső beavatkozás nélkül, minden esetben a melegebb helyről (közegeből) a hidegebb hely (közeg) felé terjed. Tehát szó sincs tényleges „cseréről”, hanem a melegebb közeg lehűléséről. Mindezek ellenére, nem csak a magyar, hanem minden más idegen nyelvben is a hőcsere ill. hőcserélő kifejezést használják és ettől mi sem térünk el.

Az áramló kontínuumok közötti hőcserét megvalósító berendezést hőcserélőnek nevezzük.

A hőcserélőkre vonatkozó energetikai alapösszefüggés az ún. hőmérleg-egyenlet, ami lényegében az energia-megmaradás törvénye. Azt fejezi ki, hogy a melegebb közeg által (elméletileg állandó nyomáson) leadott hőt a hidegebb közeg (elméletileg ugyancsak állandó nyomáson) maradéktalanul felveszi.

$$\dot{Q}_m = c_{p,m} \cdot \dot{m}_m \cdot \Delta t_m = c_{p,h} \cdot \dot{m}_h \cdot \Delta t_h = \dot{Q}_h \quad (W)$$

A fenti, hőmérleg-egyenletként is emlegetett összefüggés persze csak akkor igaz, ha elhanyagoljuk a környezet felé leadott hőt, a hőcserélő hőveszteségét. Tekintettel azonban arra, hogy a hőcserélőket általában szigeteléssel látják el ennek a hőveszteségnek a csökkentése érdekében és egyébként a megmaradó hőveszteség a hőcserélőben kicserélt hőmennyiséghez képest elhanyagolható, ezzel a feltételezéssel nem követünk el számottevő hibát.

A gyakorlatban a tömegáram és a fajhő nem külön-külön fontos, hanem ezek szorzata tölt be számos esetben meghatározó szerepet. A két mennyiség szorzatát a hőcserélő-készülékekkel foglalkozó szakirodalom a vízártékáram vagy hőkapacitásáram elnevezéssel illeti

$$W = c_p \cdot \dot{m} \quad \left( \frac{W}{K} \right)$$



**Önellenőrző kérdések a hőcserét megvalósító berendezések fejezetéhez**

1. Mi a hőmérleg egyenlet?
2. Milyen feltétellel szokták felírni a hőmérleg egyenletet?
3. Mi a víztértékáram?

**14.1 Felületi hőcserélők**

A felületi hőcserélő jellegzetessége, hogy a hőcserében résztvevő két közegét egymástól egy szilárd fal választja el. A fal szerepe, hogy megakadályozza a két közeg keveredését. Ebből következik, hogy a fal vastagsága a lehető legkisebb, amit a két közeg nyomása közötti különbség még éppen megenged.

Ebből következik, hogy a hőcserélők esetében nem jelent számottevő hibát, ha a két közegét elválasztó fal hőellenállását elhanyagoljuk. Mint említettük az elválasztó fal mindig csak minimális vastagságú és jó hővezetési tényezőjű anyagból (fém) készül és így a fal hőellenállása a nem különösebben magas hővezetési tényezőjű acél alkalmazása esetén is  $10^{-5}$  nagyságrendű, amit bizvást figyelmen kívül lehet hagyni a folyadékoknál általánosan kb.  $10^{-2}$ - $10^{-3}$ , a gázoknál pedig  $10^{-1}$ - $10^{-2}$  nagyságrendű hőellenállás mellett.

$$k \approx \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} \left( \frac{W}{m^2 \cdot K} \right)$$

A fenti közelítésnek köszönhetően nyilvánvaló, hogy a közelítő összefüggés alkalmazható abban az esetben is ha a két közegét egymástól hengeres fal választja el.

Abban az esetben, amikor folyadék és gáz közötti hőcseréről van szó, az első közelítő számításoknál a folyadékoldal hőátadási tényezőjét is figyelmen kívül lehet hagyni, hiszen annak értékétől függetlenül a hőátviteli tényező soha sem lehet jobb, mint a hőcserében résztvevő gáz oldalán megvalósítható hőátadási tényező!

A felületi hőcserélőben lejátszódó hőterjedési folyamat annyiban tér el az előzőekben tárgyalt hőátviteltől, hogy amíg ott hallgatólagosan feltételeztük, hogy a felület mentén a két közeg hőmérséklete közötti különbség mindenütt azonos, addig itt erről természetesen szó sincs illetve csak bizonyos speciális feltételek fennállása esetén fordul elő.

### 14.1.1 A közepes hőmérsékletkülönbség

A hőáramra korábban felírt összefüggésbe tehát

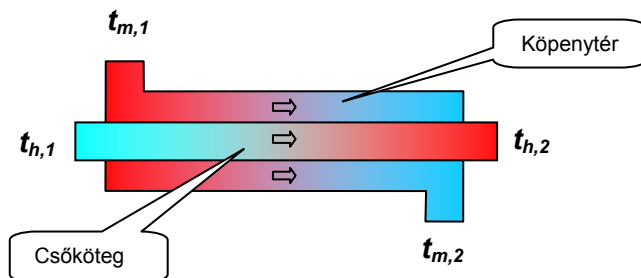
$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta t_k \quad (W)$$

' $\Delta t_k$ ' az ún. logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség helyettesítendő.

A logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség meghatározása általánosságban attól függ, hogy a két közeget elválasztó felület két oldalán a közegek egymáshoz képest milyen irányban áramlanak. A két alapeset matematikailag viszonylag egyszerűen tárgyalható.

#### Párhuzamos egyenáram

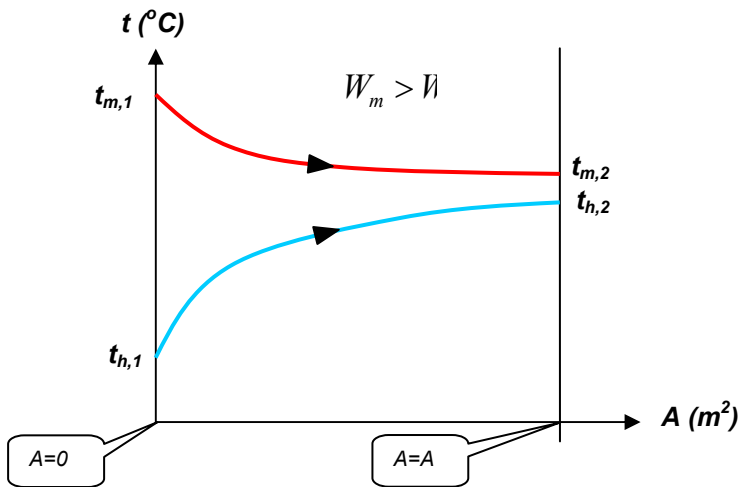
A párhuzamos egyenáramlás legegyszerűbb megvalósítását az 57. ábra mutatja.



57. ábra Párhuzamos egyenáramlású hőcsere

Az ábra szerint a hidegebb közeg a csövek belsejében, a melegebb közeg pedig a csövek körüli ún. köpenytérben áramlik, de semmit sem változtat, ha a közegeket felcseréljük.

Az 58. ábra a hőmérsékletváltozás jellegét mutatja párhuzamos egyenáramlás esetére.



**58. ábra** Hőmérsékletváltozás párhuzamos egyenáramlásnál

Külön bizonyítás nélkül is belátható, hogy a hőmérsékletek változása logaritmikus jellegű és aszimptotikusan simul egy bizonyos közös kilépő hőmérséklethez, mely bizonyosan a következő összefüggés szerint határozható meg

$$t_k = \frac{W_m \cdot t_{m,1} - W_h \cdot t_{h,1}}{W_m + W_h} \quad (^\circ\text{C})$$

azonban csak végtelen nagy felület esetén érhető el.

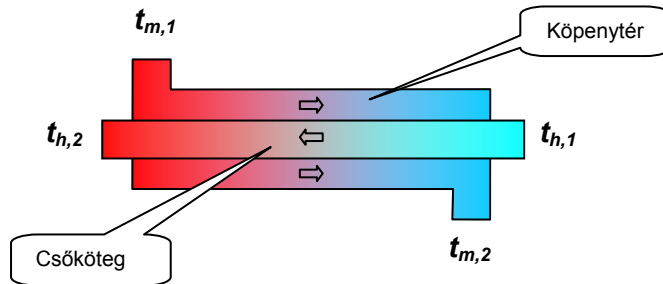
Véges felület esetén a felület mentén logaritmikusan változó hőmérsékletkülönbség átlaga a belépésnél és a kilépésnél lévő hőmérsékletkülönbségek ún. logaritmikus átlagaként számítható ki

$$\Delta t_k = \frac{(t_{m,1} - t_{h,1}) - (t_{m,2} - t_{h,2})}{\ln\left(\frac{t_{m,1} - t_{h,1}}{t_{m,2} - t_{h,2}}\right)} = \frac{\Delta t_{A=0} - \Delta t_{A=A}}{\ln\left(\frac{\Delta t_{A=0}}{\Delta t_{A=A}}\right)} \quad (^\circ\text{C})$$

Az 58. ábra alapján megállapítható, hogy a melegebb közeg víztértárama a nagyobb, mivel ennek a közegnek a hőmérsékletváltozása a kisebb.

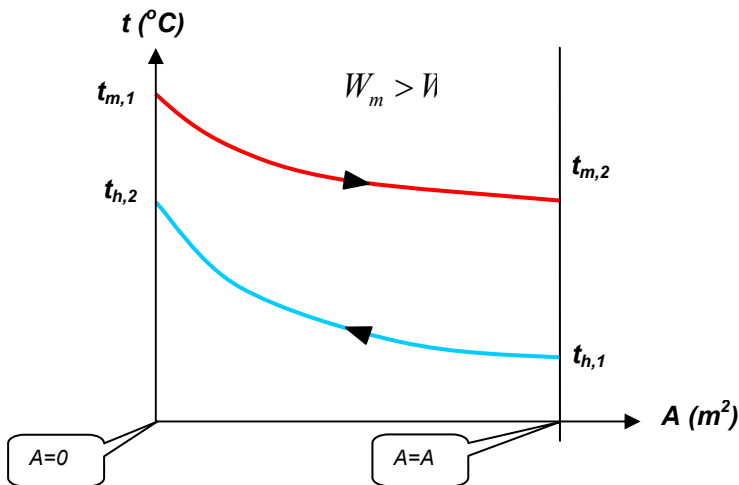
### **Párhuzamos ellenáramlás**

A párhuzamos ellenáramlás mindössze abban különbözik a párhuzamos egyenáramtól, hogy pl. a csőkötegben megfordítjuk az áramlás irányát (59. ábra).



**59. ábra** Párhuzamos ellenáramlású hőcsere

Ebben az esetben a hőmérséklet-lefutás egészen más képet mutat, bár változatlanul megmarad a logaritmusos jelleg. (60. ábra)



**60. ábra** Hőmérsékletváltozás párhuzamos ellenáramlásnál

Ebben az esetben azonban, gondolatban a végtelenségig növelve a hőcserélő-felületet a tökéletes „hőcserélődéshez” közeledünk. Ez azt jelentené, hogy a melegebb közeg kilépő hőmérsékletet a hidegebb közeg belépő hőmérsékletével lenne egyenlő, é viszont. Ez a helyzet azonban elméletileg sem állítható elő, mert ebben az esetben a két

közeg közötti hőmérsékletkülönbség zérus lenne, amikor – mint azt tudjuk – megszűnik a hőáramlás!

Annak ellenére, hogy a hőmérséklet-lefutás jelentősen különbözik a párhuzamos egyenáramétól a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség ugyanazzal a logaritmikus átlaggal határozható meg, de ezáltal a 'A=0'-nál és 'A=A'-nál, a 60. ábra szerinti hőmérsékletkülönbséget kell helyettesíteni.

Az itt leírt két alapeset mellett a gyakorlatban nagyon sokféle áramlási rendszert alkalmaznak. Ezek közül külön kiemeljük az elsősorban légemű és folyékony kontínuumok közötti hőcsere esetén gyakran alkalmazott ún. keresztáramlást. Keresztáramlás esetén az elnevezésnek megfelelően az elválasztó felület két oldalán a közegek egymás irányát keresztezően áramlanak.

A árhuzamos egyen- és ellenáramlástól különböző esetekben a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség kiszámítására – az áramlási rendszertől függően – bonyolultnál bonyolultabb összefüggések léteznek.

Kimutatható, hogy az összes elképzelhető áramlási rendszert tekintve (csaknem kivétel nélkül) a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség a párhuzamos ellenáramlás esetén a legnagyobb és a párhuzamos egyenáramlás esetén a legkisebb. Ez azt jelenti, hogy a párhuzamos ellenáramlású hőcserélő tekinthető a leghatékonyabbnak, azaz adott hőáram esetén ilyen rendszer mellett van szükség a legkisebb hőcserélő-felületre.

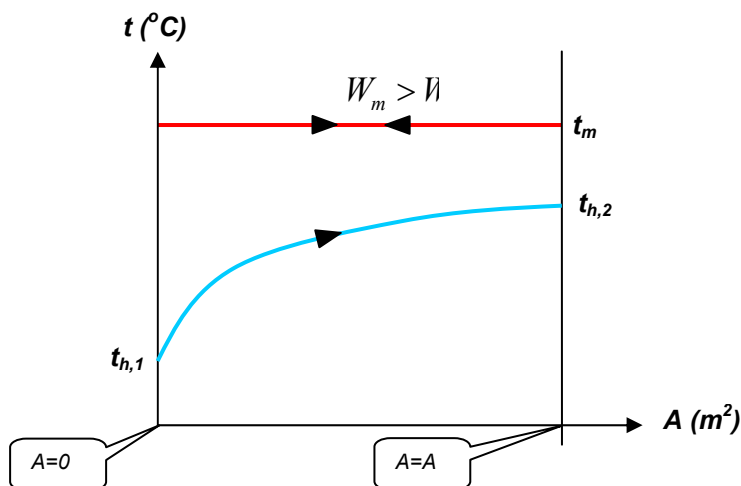
Az elmondottakból kiindulva kézenfekvő alapnak tekinteni a párhuzamos ellenáramlásra érvényes logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbséget és a tetszőleges áramlási rendszer esetére érvényes érték ebből az alábbi összefüggés szerint írható fel

$$\Delta t_k = \varepsilon \cdot \Delta t_{k,ell} \quad (^\circ C)$$

Természetesen igaz, hogy az összefüggésben szereplő 'ε', ún. korrekciós tényezőről jobbra csak azt tudhatjuk biztosan, hogy értéke kisebb 1-nél. Pontos meghatározása éppen olyan bonyolult, és szintén az áramlási rendszertől függ, mint a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbségé. A szakirodalomban léteznek azonban olyan diagramok, amelyek segítségével lehet tájékozódni a korrekciós tényező értékéről.

Végezetül felhívjuk a figyelmet arra, hogy azokban az esetekben, amikor a két közeg közül bármelyik a hőcsere közben halmazállapot-változást szenved el (hőmérséklete állandó!), akkor az eddig sokat emlegetett áramlási rendszer már semmiféle szerepet sem játszik a logaritmusos közepes hőmérsékletkülönbség meghatározásában, a korrekciós tényező 1.

Ilyen esetre vonatkozó példát mutat a 61. ábra, ahol kondenzálódó gőz adja át hőjét egy másik, folyékony vagy légnemű közegnek.



**61. ábra** Hőmérsékletváltozás halmazállapot-változásos hőcserénél

A melegebb közeg hőmérsékletét jelölő vonalon alkalmazott kettős nyíl utal arra, hogy ilyen esetben a logaritmusos közepes hőmérsékletkülönbség szempontjából már közömbös a közegek egymáshoz viszonyított áramlási iránya.

Halmazállapot-változásos hőcsere esetén a hőáram természetesen a telített gőz és a telített folyadék entalpiájának táblázatból kikeresett értékei közötti különbség és a tömegáram szorzata, hiszen a víztértékáram végtelen nagynek tekintendő.

### 14.1.2 A szükséges hőcserélő-felület

Egy adott hőközlési feladathoz szükséges hőcserélő-felület nagyságának meghatározásakor kiinduló adatként a két közeg tömegárama és

be- ill. kilépő hőmérsékletei közül (összesen hat adat) öt adott szokott lenni. A hőcserélő-felület nagyságának meghatározása a következő fő lépések szerint végezhető

1. A hőmérleg egyenlet segítségével kiszámítjuk a hiányzó (hatodik) adatot.
2. A hőcserélő áramlási jellegére vonatkozó döntés után kiszámítjuk a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbséget.
3. A hőcserélőre vonatkozó előzetes koncepció alapján közelítő számításokat végzünk a hőátviteli tényezőre vonatkozóan.
4. A hőcserélőben átvitelre kerülő hőáramból a hőátviteli tényező és a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség segítségével kiszámítjuk a szükséges hőcserélő-felületet.
5. A kapott felület elrendezésére vonatkozó konkrét terv alapján ellenőrző számításokat kell végezni mind a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbségre, mind pedig a hőátviteli tényezőre.

A fent leírt lépéseket a szükség szerinti számban ismételni kell, amíg a kiindulásnál feltételezett és az ellenőrzés során kapott hőátviteli tényező különbsége egy előre kitűzött hibahatáron belülre nem kerül.

### 14.1.3 A kilépő közeghőmérsékletek

A felületi hőcserélőkkel kapcsolatban a fentinel jóval gyakrabban felmerülő probléma, hogy egy már létező hőcserélő esetében kell meghatározni, hogy adott tömegáramú és hőmérsékletű közegeket abba bebocsátva, milyen kilépő hőmérsékletek fognak adódni.

Természetesen igaz az, hogy egy adott hőcserélőbe nem lehet tetszőleges tömegáramú és hőmérsékletű közeget bebocsátani, hiszen a berendezést nyilván bizonyos tömegáramra és hőmérsékletekre tervezték. Mindamellet könnyen belátható, hogy bizonyos tartományon belül mind a tömegáram mind pedig a hőmérséklet lehet változó. A továbbiakban feltételezzük, hogy mind a tömegáram mind a hőmérséklet a hőcserélőre érvényes évleges érték közelében marad.

Tisztán matematikailag tekintve a problémát a korábban említett hat adat (két tömegáram és négy hőmérséklet) közül ezúttal négy ismert. A fennmaradó kettő kiszámítására két egyenletünk van, a hőmérleg egyenlet és a hőáramra vonatkozó összefüggés, melyhez kapcsolódik a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség összefüggése. A feladat tehát elvileg megoldható, azonban a logaritmikus közepes hőmérsék-

letkülönbőség összefüggésének szerkezete miatt abból a keresett kilépő hőmérsékleteket.

A probléma megoldására több módszer is létezik, melyek közül a hazai szakirodalomban és gyakorlatban általánosan használt, az 1993-ban elhunyt Fran **Bošnjaković** horvát fizikus emlékét őrző ún. Bošnjaković-féle módszert ismertetjük.

A módszer alapja az ún. hatásosságfüggvény, mely definíciója szerint a kisebb víztérfáramú közeg hőmérsékletváltozásának és a felületi hőcserélőbe belépő közegek hőmérsékletei különbségének (ez a maximális hőmérséklet az adott hőcserélőre!) hányadosa, azaz

$$\Phi = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_{\max}} < 1$$

A hatásosság függvény tehát mértékegység nélküli számot ad.

Bošnjaković kimutatta, hogy a hatásosságfüggvény minden esetben kifejezhető két mértékegység nélküli változó, az ún. hőátviteli szám ( $N$ ) és a hőcserélőben résztvevő közegek víztérfáramainak viszonyszáma ( $R$ ), mint paraméter függvényében.

A hatásosságfüggvénynél már alkalmazott módon a kisebb víztérfáramú közeget vonatkoztatási alapnak tekintve a hőátviteli szám

$$N = \frac{k \cdot A}{W_1}$$

a víztérfáramviszony alatt pedig

$$R = \frac{W_1}{W_2} \leq 1$$

értendő.

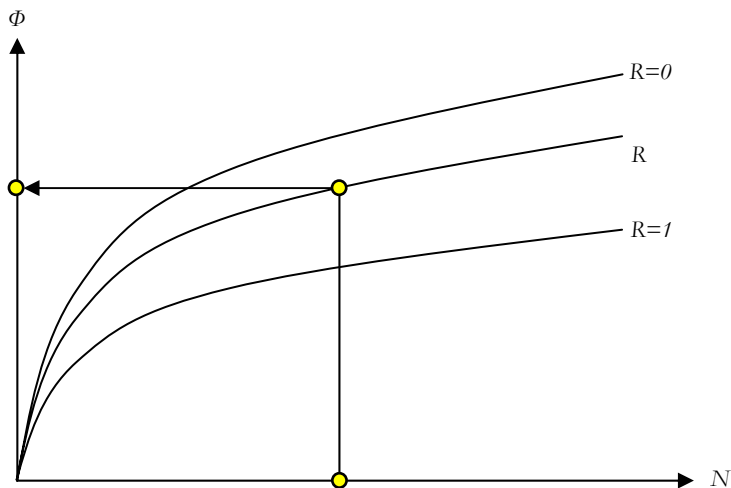


A hatásosságfüggvény felírható a hőátviteli szám és a vízértékáramviszony függvényében, de az összefüggések a párhuzamos egyenáramlásra és a párhuzamos ellenáramlásra is kényelmetlenül bonyolultak:

$$\Phi_{ell} = \frac{1 - e^{-N \cdot (1-R)}}{1 - R \cdot e^{-N \cdot (1-R)}} \quad \text{ill.} \quad \Phi_{egy} = \frac{1 - e^{-N \cdot (1+R)}}{1 + R}$$

Ezért Bošnjaković diagramokon dolgozta fel az egyenlet megoldásait.

Tájékoztató jelleggel, a diagramok szerkezetét és használatát az 62. ábrán mutatjuk be.



**62. ábra** A Bošnjaković diagramok felépítése

A Bošnjaković diagramok felhasználásával a kilépő hőmérsékletek meghatározása a következő lépések szerint történhet

1. Ki kell számítani a közegek vízértékáramait, hogy eldönthető legyen, melyik a kisebb.
2. A hőcserélőre vonatkozóan rendelkezésre álló adatok és információk alapján becslést kell készíteni a hőátviteli tényező értékére.
3. Ki kell számítani a hőátviteli számot ( $N$ ) és a vízértékáramviszonyt ( $R$ ).

4. Az adott hőcserélőre vonatkozó Bošnjaković diagramból ' $N$ ' függvényében és ' $R$ ' paraméter szerint meg kell határozni a hatásosságfüggvény értékét ( $\Phi$ ).
5. A hatásosságfüggvényből kiszámítható a kisebb vízáramú közeg hőmérsékletváltozása, aminek ismeretében (a hőmérleg egyenletet is felhasználva) már könnyen kiszámítható mindkét közeg kilépő hőmérséklete és a hőáram is.

A szakirodalomban a hatásosságfüggvény meghatározásához csak az alapesetekre (párhuzamos egyenáramlás és ellenáramlás) valamint a keresztáramlás esetére állnak rendelkezésre a diagramok. Más áramlási rendszerű hőcserélőkre egyes szakirodalmi munkákban a hatásosság-függvények megtalálhatók, de ezek a függvények már igen bonyolultak. Tájékozódáshoz pl. célszerű lehet mind a párhuzamos ellenáramlásra mind a párhuzamos egyenáramlásra meghatározni a kilépő hőmérsékleteket. A tényleges kilépő hőmérsékletek a kapott értékek között lesznek, attól függően egyikhez vagy másikhoz közelebb, hogy az adott áramlási rendszer melyikre hasonlít jobban.

Megjegyezzük, hogy halmazállapot-változást elszenvedő közeg vízáramú természetesen végtelen nagynak tekintendő, hiszen a hozzá kapcsolódó hőmérsékletváltozás zérus. Értelemszerűen ilyenkor a vízáramú viszony zérus és közömbös, hogy melyik diagramból dolgozunk!

A jegyzet mellékletében megtalálhatók a [párhuzamos egyen-](#) és [ellenáramlás](#) valamint a [keresztáramlás](#) esetére vonatkozó Bošnjaković diagramok.

A diagramok alapján megállapítható, hogy a hőátviteli szám csökkenésével a különböző áramlási rendszerű hőcserélők közötti különbség egyre jobban elmosódik.

Ezért a [kis hőátviteli számokra érvényes hatásosság diagramon](#) együtt van ábrázolva mindhárom alapvető áramlási típus hatásosságának meghatározásához szükséges paraméter-görbék.

### **Önellenőrző kérdések a felületi hőcserélők fejezetéhez**

1. Milyen esetben alkalmaznak felületi hőcserélőt?

2. Miért nem kell külön tekintettel lenni általában arra, hogy a hőcserélőben a közegeket egymástól elválasztó felület hengeres vagy sík?
3. Mi a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség?
4. Milyen a hőmérséklet-lefutás a párhuzamos egyenáramlású hőcserélőben?
5. Milyen a hőmérséklet-lefutás a párhuzamos ellenáramlású hőcserélőben?
6. Milyen hőmérséklethez tartanak a kilépő hőmérsékletek párhuzamos egyenáramlású hőcserélő esetén?
7. Milyen állapothoz tart a párhuzamos ellenáramlású hőcserélőben kialakuló hőmérséklet-lefutás?
8. Mit kell érteni azon, hogy a párhuzamos ellenáramlású hőcserélő a létező leghatékonyabb felületi hőcserélő?
9. Mit vesz figyelembe a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség korrekciós tényezője?
10. Milyen hatással van a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség korrekciós tényezőjére, ha a hőcserélőben résztvevő közegek valamelyike halmazállapot-változást szenved el?
11. Milyen fő lépéseken át lehet meghatározni egy adott hőcserélőhöz szükséges hőcserélő-felület nagyságát?
12. Mi a Bošnjaković-féle hatásosságfüggvény?
13. Mi a hőátviteli szám?
14. Mi a vízáramviszony?
15. Milyen fő lépéseken át lehet meghatározni egy adott hőcserélő esetében a közegek kilépő hőmérsékleteit?

## 14.2 Keverő hőcserélők

Különleges esetekben megoldható a hőcsere oly módon is, hogy a két közeget ugyanazon térbe bevezetjük és gondoskodunk arról, hogy azok a lehető legjobban összekeveredjenek és így a részecskék közvetlen érintkezés útján adják át a hőt egymásnak. Azt a berendezést, melyben ez a keveredés lejátszódik keverő hőcserélőnek nevezik.

Keveréses hőcserét lehet elvileg lebonyolítani, ha

- a két közeg halmazállapota azonos,
- az egyik közeg folyadék a másik pedig a saját gőze,
- az egyik közeg gáz, a másik pedig apró cseppekre elporlasztott folyadék esetleg gőz.

Értelemszerűen kizárja a keveréses hőcsere alkalmazását, ha technológiai vagy egészségvédelmi okokból a két közeg nem keverhető össze!

Két azonos halmazállapotú közeg keverése a párhuzamos egyenáramlású hőcseréhez hasonlóan egy közös hőmérséklet kialakulását eredményezi. A közös hőmérséklet ezúttal azonban, a közvetlen és nagy felületen történő érintkezésnek köszönhetően ténylegesen ki is alakul. A hőmérleg egyenletből kifejezve

$$t_k = \frac{W_m \cdot t_m - W_h \cdot t_h}{W_m + W_h} \quad (^\circ\text{C})$$

Folyadék és saját gőzének keverése egyszerűen a gőznek a folyadékon történő átbuborékoltatásával valósítható meg. Ilyenkor a hőmérleg egyenlet a következő alakú

$$W_f \cdot (t_{f,ki} - t_{f,be}) = \dot{m}_g \cdot (i_{g,be} - i'') + \dot{m}_g \cdot (i'' - i') + W_g \cdot (t' - t_{f,ki}) \quad (W)$$

Az egyenlet felírásakor túlhevített gőz alkalmazását tételeztük fel ezért az egyenlet jobb oldalán először a túlhevítési hőt, majd a kondenzáció során felszabaduló hőt és végül a kondenzátum lehűléséből származó hőt is feltüntettük. Ebből az egyenletből lehet kifejezni a közös kilépő hőmérsékletet

$$t_{f,ki} = \frac{\dot{m}_g \cdot (i_{g,be} - i'') + \dot{m}_g \cdot (i'' - i') + W_g \cdot t' + W_f \cdot t_{f,be}}{W_f + W_g} \quad (^\circ\text{C})$$

Az eddig említett két esetben nem szükséges külön foglalkozni a keverő hőcserélő méretével, ami ebben az esetben a térfogatot jelentené.

A gáz és az elporlasztott folyadék, vagy a gázba befúvatott gőz közötti hőcsere leggyakoribb esetét már tárgyaltuk a nedves levegő kapcsán a 11.3 fejezetben. A nedvesítő kamra szükséges méretének meghatározása, különösen pedig az áramlás irányába eső méret meghatározása igen fontos kérdés. Hibás méretezés esetén nem valósul meg a telítési állapotig történő nedvesítés, ami a klímaberendezés működését bizonytalanná teszi.

A nedvesítő kamra méretének meghatározása elvileg a következő összefüggésből lehetséges

$$\dot{Q} = k_v \cdot V \cdot \Delta t \quad (W)$$

Az egyenletben a hőáram az ' $i-x$ ' diagram alapján határozható meg. A legnagyobb gondot a ' $k_v$ ', térfogategységre vonatkoztatott hőátviteli tényező ( $W/m^3 \cdot K$ ) meghatározása jelenti. A térfogati hőátviteli tényező meghatározása kísérletek alapján felállított összefüggésekből lehetséges a  $Re$ -szám és a  $Pr$ -szám függvényében.

### Önellenőrző kérdések a keverő hőcserélők fejezetéhez

1. Milyen esetben alkalmaznak keverő hőcserét?
2. Hogyan lehet meghatározni a keveréses hőcsere esetén kialakuló közös hőmérsékletet azonos halmazállapotú közegek esetén?
3. Hogyan lehet meghatározni a keveréses hőcsere esetén kialakuló közös hőmérsékletet folyadék és saját gőzének keverése esetén?
4. Milyen elvi összefüggés írható fel a vízbeporlasztásos vagy gőzbefúvásos nedvesítő kamrában kialakuló hőáramra?
5. Mit értenek térfogati hőátviteli tényező alatt?

## 14.3 Regeneratív hőcserélők

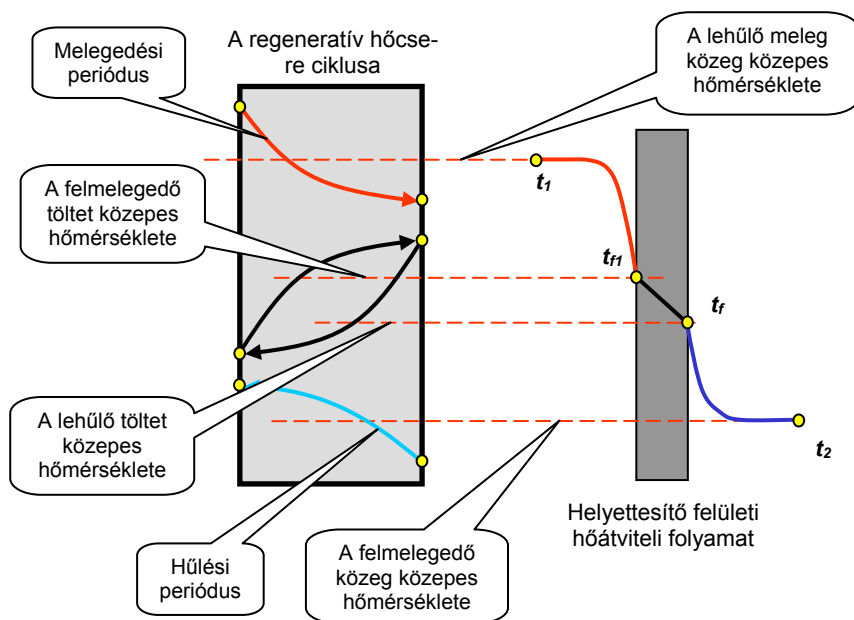
Különleges, elsősorban vegyipari folyamatoknál a hőleadó közeget nagy hőkapacitású, porózus anyagot tartalmazó tartályon áramoltatják át és ezzel a töltetanyagot felhevítik. Ezt követően a hőleadó közeget elterelik és a felmelegített porózus anyagon a hőfelvevő közeget vezetik át, mely a töltetanyagot lehűtve attól hőt vesz át. Két azonos töltetű tartály alkalmazásával kialakított berendezés együttesen a regeneratív hőcserélő. A hőleadó és a hőfelvevő közeg áramlását periodikusan változtatva kvázi folyamatos hőcsere valósítható meg.

Az itt leírt folyamatot nevezik regeneratív hőcserének, arra utalva, hogy a töltetanyag állapota újra és újra regenerálásra kerül, alkalmassá válik hő felvételére ill. leadására.

A folyamat alapjaiban instacionárius és ezért tárgyalása meglehetősen bonyolult ill. csak empirikus módszerekkel végezhető. A 63. ábra a regeneratív hőcserélőben lejátszódó hőmérsékletváltozásokat szemlélteti.

A 63. ábra mutatja, hogy mind a töltetanyag, mind pedig az éppen átáramló közeg hőmérséklete a ciklus során változik, tehát a hőcsere

valóban instacionárius, mégpedig minden vonatkozásban. A 63. ábra jobb oldala tájékoztatásul mutatja azt a hőátviteli folyamatot, mely a regeneratív folyamat elvi helyettesítője. Azon túl, hogy a megjelölt hőmérsékletek meghatározása is nehézkes, külön gondot okoz az ilyen esetre értelmezhető ún. regeneratív hőátviteli tényező meghatározása, melynek összefüggése számos tapasztalati úton felvehető tényezőt tartalmaz.



**63. ábra** Hőmérsékletváltozás regeneratív hőcsere során

Mivel a regeneratív hőcsere a gyakorlatban csak ritkán fordul elő, ezért további részletekkel itt nem foglalkozunk.

**Önellenőrző kérdések a regeneratív hőcserélők fejezethez**

1. Mit értenek regeneratív hőcsere alatt?
2. Mi a töltetanyag szerepe a regeneratív hőcserélőben?
3. Hogyan változik a meleg és a hideg közeg valamint a töltetanyag hőmérséklete a regeneratív hőcsere során?
4. Hogyan helyettesíthető a regeneratív hőcsere egy hőátviteli folyamattal?

## Felhasznált és ajánlott irodalom

- Dr. Fűzy Olivér: **Áramlástechnikai Gépek**  
Tankönyvkiadó 1978
- Gruber József: **Folyadékok mechanikája**  
Tankönyvkiadó 1973
- Hans Faltin: **Műszaki Hőtan**  
Műszaki Könyvkiadó 1970
- Jászay Tamás: **Termodinamika**  
Műegyetemi Kiadó 1998
- Kuzman Raznjevič: **Hőtechnikai Táblázatok**  
Műszaki Könyvkiadó 1964
- Dr. Lajos Tamás: **Az áramlástan alapjai**  
Műegyetemi kiadó 2000.
- Dr. Menyhárt József: **Az épületgépészet kézikönyve**  
Műszaki Könyvkiadó 1977
- Mihejev, Mihail Aleksandrovič: **A hőátadás gyakorlati számításának alapjai**  
Tankönyvkiadó 1990
- Palkovics Szilárd: **Munkalapok hőcserélő berendezések hőtechnikai méretezéséhez**  
Műegyetemi Kiadó 1997
- Dr. Pásztor Endre  
Dr. Konecsny Ferenc: **Műszaki Hő- és Áramlástan 1/1**  
Műegyetemi Kiadó 1995
- Dr. Pásztor Endre  
Dr. Konecsny Ferenc: **Műszaki Hő- és Áramlástan 1/2**  
Műegyetemi Kiadó 1995
- Dr. Pásztor Endre  
Dr. Konecsny Ferenc: **Műszaki Hő- és Áramlástan 2**  
Műegyetemi Kiadó 1995

## Tárgymutató

### A,Á

abszolút fekete test.....	183
abszolút nedvességtartalom.....	156
abszolút nulla fok: Lord Kelvin.....	16
adiabatikus állapotváltozás.....	25
adiabatikus kitevő.....	120
adiatermikus: fal.....	116
állásszög.....	112
általános gáztörvény.....	19
anyagmegmaradás törvénye: kontinuitás ill. folytonosság törvénye ..	51
áramlás magja: turbulens áramlás.....	78
áramlástani hasonlóság: modellezés.....	69, 72
áramvonal.....	48
<b>Archimédész:</b> felhajtóerő törvénye.....	42
átmeneti áramlás.....	78
atmoszférán keresztül záródó körfolyamat.....	134
<b>Avogadro:</b> Avogadro törvénye.....	20

### B

belsőenergia.....	117
<b>Bernoulli:</b> Bernoulli-egyenlet.....	56
Bernoulli-egyenlet.....	58
besugárzási tényező: hőszugárzás.....	185
<b>Blasius:</b> csősúrlódási tényező.....	90
Blasius-összefüggés: csősúrlódási tényező.....	90
<b>Boltzmann:</b> hőszugárzás.....	182
Boltzmann-állandó: hőszugárzás, abszolút fekete test.....	183
bordahatásfok.....	189
<b>Bošnjaković:</b> hőcserélők.....	200
<b>Boyle:</b> Boyle-Mariotte törvény.....	14
<b>Brayton:</b> gázturbina-körfolyamat.....	138



C

<b>Carnot:</b> körfolyamat .....	132
Carnot-körfolyamat .....	132
<b>Celsius:</b> Celsius hőmérsékletszála .....	16
centrifugális erőtér potenciálja .....	33
<b>Chézy:</b> áramlás nyitott csatornában .....	102
<b>Clausius:</b> entrópia .....	126

Cs

csővezetékes szállítás hatásfoka .....	98
csővezetékes szállítás költsége .....	97
csővezetékes szállítás teljesítmény-szüksége .....	96
csővezetéki állandó .....	94
csővezetéki jelleggörbe .....	94

D

<b>Dalton:</b> gázkeverékek .....	27
diatermikus: fal .....	116
<b>Diesel:</b> körfolyamat .....	136
Diesel-körfolyamat .....	135
dilatáló közeg: reológia .....	68
dimenzióanalízis .....	85
dimenziómátrix: dimenzióanalízis .....	85
dinamikai viszkozitási tényező .....	65
dinamikus nyomás .....	59
divergencia: nabla .....	53
dúc profil .....	108

E,É

egyenértékű átmérő .....	83
egyenes csövek nyomásvesztesége: Hagen-Poiseuille egyenlet .....	82
egyensúlyi termodinamika .....	26
ekvipotenciális felület .....	33
ellenőrző felület: impulzus-tétel .....	60
első főtétel .....	117
energiaátalaklás nyitott csatornában .....	102
entalpia .....	148
entalpiadiagram .....	149
entrópia .....	126

<b>Euler</b> .....	<b>43</b>
expanzió .....	<b>22</b>
extenzív állapotjelző .....	<b>15</b>
<b>F</b>	
<b>Fahrenheit:</b> Fahrenheit hőmérsékletskála .....	<b>16</b>
fajlagos extenzív állapotjelző.....	<b>15</b>
fal: rendszere.....	<b>115</b>
fázisegyensúlyi diagram .....	<b>10</b>
feketeségi fok .....	<b>183</b>
felhajtóerő: Archimédész törvénye .....	<b>42</b>
felületi feszültség .....	<b>35</b>
felületnövelési tényező: bordázat .....	<b>190</b>
fojtószelep .....	<b>154</b>
folyadéktelítési görbe.....	<b>12</b>
folytonosság törvénye: kontinuitás törvénye.....	<b>51</b>
<b>Fourier:</b> hővezetés.....	<b>172</b>
<b>Froude:</b> Froude-szám .....	<b>71</b>
Fr-szám: kiszámítása .....	<b>71</b>
<b>G</b>	
<b>Gay-Lussac:</b> Gay-Lussac I. és II. törvénye .....	<b>21</b>
gáz.....	<b>14</b>
gázturbina-körfolyamat .....	<b>138</b>
gázturbina-körfolyamat kapcsolási vázlata.....	<b>137</b>
geometriai hasonlóság: modellezés .....	<b>69</b>
gőz.....	<b>14</b>
gőztelítési görbe .....	<b>12</b>
<b>Grashof:</b> Gr-szám .....	<b>179</b>
<i>Grashof</i> -szám .....	<b>179</b>
gravitációs erőter potenciálja.....	<b>32</b>
Gr-szám kiszámítása .....	<b>179</b>
<b>H</b>	
<b>Hagen:</b> egyenes csövek nyomásvesztesége .....	<b>82</b>
Hagen-Poiseuille egyenlet.....	<b>82</b>
<b>Hamilton:</b> nabla operátor .....	<b>53</b>
háromsponti hőmérséklet .....	<b>14</b>
harmatpont .....	<b>162</b>

határréteg .....	64
hatásosságfüggvény: hőcserélők .....	200
hidraulikailag sima cső .....	90
hidrosztatika alaptörvénye .....	32
higrométer .....	157
homlokfelület .....	108
hőátadás .....	177
hőátviteli szám: hőcserélők .....	200
hőátviteli tényező .....	188
hőellenállás .....	174
hőerőmű kapcsolási vázlata .....	145
hőkapacitásáram: vízártékáram .....	192
hőmérleg-egyenlet .....	192
hőszivattyú .....	141
hővezetési tényező .....	172

## I,Í

ideális kontínuum .....	29
ideális sebességprofil .....	63
impulzus erő .....	61
impulzus-tétel .....	62
intenzív állapotjelző .....	15
<i>i</i> -s diagram .....	150
<i>i</i> -x diagram .....	159
izentrópikus állapotváltozás .....	127
izobár: állandó nyomású .....	21
izochor: állandó térfogatú .....	21
izotermikus: állandó hőmérsékletű .....	21

## J

<b>Joule</b> .....	119
--------------------	-----

## K

kapillaritás: felemelkedés és lesüllyedés .....	38
<b>Kármán</b> : Kármán-féle örvénysor .....	109
kavitáció .....	111
<b>Kelvin</b> : abszolút hőmérsékletskála .....	16
kényszerített áramlás .....	81
keresztáramlás .....	197

keretlépték.....	160
keverő egyenes.....	164
kinematikai viszkozitási tényező.....	66
kompresszió.....	22
kompresszoros hűtő körfolyamat.....	155
kompresszoros hűtőberendezés kapcsolási vázlata.....	154
kontinuitástörvénye: folytonosság törvénye.....	51
kontínuum.....	8
konvektív gyorsulás.....	45
korrekciós tényező: logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség ...	197
köd mező.....	160
köpenytér: hőcserélő.....	194
környezet.....	115
közepes fajhő.....	121
kritériális egyenlet.....	180
kritikus hőmérséklet.....	12
kritikus nyomás.....	12
kritikus pont.....	12
kvázistacionárius áramlás.....	78

## L

<b>Lagrange</b> .....	42
lamináris áramlás: réteges áramlás.....	75
lamináris sebességprofil.....	76
látszólagos gázállandó.....	28
látszólagos móltömeg.....	28
leválás.....	92
leválási buborék: leválási tér.....	106
leválási pont vándorlása: leválási buborék.....	107
lineáris tehetetlenségi erőter potenciálja.....	33
logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség.....	195
<i>logp</i> -i diagram felépítése.....	153
lokális gyorsulás.....	45

## M

<b>Mariotte</b> : Boyle-Mariotte törvény.....	14
második főtétel.....	130
<b>Mayer</b> : Mayer-egyenlet.....	119
<b>Mollier</b> : 'i-x' diagram.....	159

## N

nabla operátor .....	53
<b>Navier</b> : Navier-Stokes egyenlet .....	69
nedves hőmérséklet .....	164
nedvesített kerület: egyenértékű átmérő .....	103
nedvesítő folyadék.....	37
nem nedvesítő folyadék.....	38
<b>Newton</b> .....	57
newtoni közeg: reológia.....	67
<b>Nusselt</b> .....	180
<i>Nusselt</i> -szám.....	180
Nu-szám kiszámítása .....	180

## Ny

nyitott csatorna: áramlási sebesség .....	102
nyomásmagasság .....	59, 96
nyomásveszteség.....	74
nyomvonal .....	48

## O, Ó

<b>Onnes</b> : entalpia.....	146
optimális csőátmérő.....	99
<b>Otto</b> : körfolyamat.....	133
Otto-körfolyamat .....	134

## Ö, Ó

összenyomhatatlan kontínuum.....	17
össznyomás.....	59

## P

pálya .....	48
párhuzamos egyenáramlás .....	194
párhuzamos ellenáramlás .....	196
<b>Pascal</b> : nyomás.....	31
plasztikus közeg: reológia .....	67
<b>Poiseuille</b> : egyenes csövek nyomásvesztesége .....	82
<b>Poisson</b> : Poisson-egyenlet.....	23
politropikus állapotváltozás.....	24
politropikus fajhő.....	122

potenciál .....	33
<b>Prandtl</b> .....	180
<i>Prandtl</i> -szám .....	180
Pr-szám kiszámítása .....	180
pszeudoplasztikus közeg: reológia.....	68
<b>R</b>	
<b>Rankine</b> : körfolyamat.....	144
Rankine-Clausius körfolyamat.....	143
redukált feketeségi fok: hőszugárzás .....	185
regeneratív hőcserélő.....	205
relatív érdesség .....	89
relatív nedvességtartalom .....	157
rendszer.....	115
Re-szám: kiszámítása .....	70
réteges áramlás: lamináris áramlás.....	75
<b>Reynolds</b> : Reynolds-szám.....	71
<b>S</b>	
sebességmagasság.....	59
sebességprofil .....	75
specifikus gázállandó .....	119
statikus nyomás.....	59
statikus szállítómagasság.....	96
<b>Stefan</b> : hőszugárzás.....	182
Stefan-Boltzmann törvény .....	182
<b>Stokes</b> : Navier-Stokes egyenlet.....	69
<b>Sz</b>	
szabad áramlás .....	81
szállítómagasság.....	96
száraz telített gőz .....	151
szárny nyomott oldala.....	112
szárny szívott oldala .....	112
szárnyprofil .....	112
szubsztanciális derivált.....	46
<b>T</b>	
tapadási feltétel .....	64

technikai munka.....	147
telítési görbe.....	160
telítetlen mező.....	160
telített folyadék.....	151
térfogatáram.....	55
térfogati hőátviteli tényező: keveréses hőcsere.....	205
tixotróp közeg: reológia.....	68
tökéletes besugárzás: hőszugárzás.....	185
tömegáram.....	55
turbulens áramlás: kavargó, gomolygó áramlás.....	77
turbulens áramlás sebességprofilja.....	78
<b>V</b>	
valóságos kontínuum.....	30
vegyes fázis.....	11
vesztéses Bernoulli-egyenlet.....	73
vesztési tényező.....	91
vesztésmagasság.....	96
vízértékáram: hőkapacitásáram.....	192
vízértékáramviszony: hőcserélők.....	200
<b>W</b>	
<b>Watt</b> .....	123
<b>Z</b>	
zárt áramlás.....	75
zavartalan áramlás.....	104

## Ábrajegyzék

<b>1. ábra</b>	A fázisegyensúlyi diagram felvétele .....	10
<b>2. ábra</b>	Fázisegyensúlyi diagram.....	11
<b>3. ábra</b>	Az izoterma .....	22
<b>4. ábra</b>	A politropikus kitevő értékei .....	24
<b>5. ábra</b>	Vízcsepp szilárd test felületén .....	37
<b>6. ábra</b>	Higanycsepp szilárd test felületén .....	38
<b>7. ábra</b>	Kapillaritás.....	38
<b>8. ábra</b>	A folyadéknyomásból származó vízszintes erőkomponens .....	40
<b>9. ábra</b>	Stacionárius áramvonalak.....	49
<b>10. ábra</b>	Instacionárius áramvonalak .....	50
<b>11. ábra</b>	Az ideális sebességprofil .....	63
<b>12. ábra</b>	A határreteg lamináris (réteges) áramlásban .....	64
<b>13. ábra</b>	Reológiai görbék.....	67
<b>14. ábra</b>	Lamináris áramlás sebességprofilja csőben.....	76
<b>15. ábra</b>	Turbulens áramlás sebességprofilja csőben .....	78
<b>16. ábra</b>	A folyadékáramlás láthatóvá tétele.....	80
<b>17. ábra</b>	Az egyenértékű átmérő.....	83
<b>18. ábra</b>	A csősúrlódási tényező változása .....	89
<b>19. ábra</b>	A csővezetéki jelleggörbe .....	94
<b>20. ábra</b>	A statikus szállítómagasság és veszteségmagasság .....	97
<b>21. ábra</b>	Az optimális csőátmérő.....	99
<b>22. ábra</b>	Energiaátalakulás nyitott csatornában.....	102
<b>23. ábra</b>	A relatív nyomás változása gömb felszínén .....	105
<b>24. ábra</b>	A gömb alakú ellenállás-tényezőjének változása .....	107
<b>25. ábra</b>	Az áramlástanilag ideális alak .....	108
<b>26. ábra</b>	A Kármán-féle örvénysor hatása .....	110
<b>27. ábra</b>	Áramlás szárnyprofil körül .....	112
<b>28. ábra</b>	szárnyprofil erőtényezőinek változása.....	113
<b>29. ábra</b>	A körfolyamat által szolgáltatott munka .....	125
<b>30. ábra</b>	Állapotváltozások a 'T-s' koordinátarendszerben.....	127
<b>31. ábra</b>	A körfolyamat során munkává átalakított hőmennyiség.....	128
<b>32. ábra</b>	A Carnot-körfolyamat.....	132
<b>33. ábra</b>	Az Otto-körfolyamat .....	134
<b>34. ábra</b>	A Diesel-körfolyamat.....	135
<b>35. ábra</b>	A gázturbina-körfolyamat kapcsolási vázlata .....	137
<b>36. ábra</b>	A gázturbina-körfolyamat .....	138
<b>37. ábra</b>	Gázzal működő hűtő körfolyamat kapcsolási vázlata.....	139
<b>38. ábra</b>	Gázzal működő hűtő körfolyamat .....	140
<b>39. ábra</b>	A Rankine-Clausius körfolyamat .....	143
<b>40. ábra</b>	Hőerőműi berendezés kapcsolási vázlata .....	145
<b>41. ábra</b>	Az entalpia és a technikai munka .....	146
<b>42. ábra</b>	Az 'i-s' diagram szerkezete .....	150

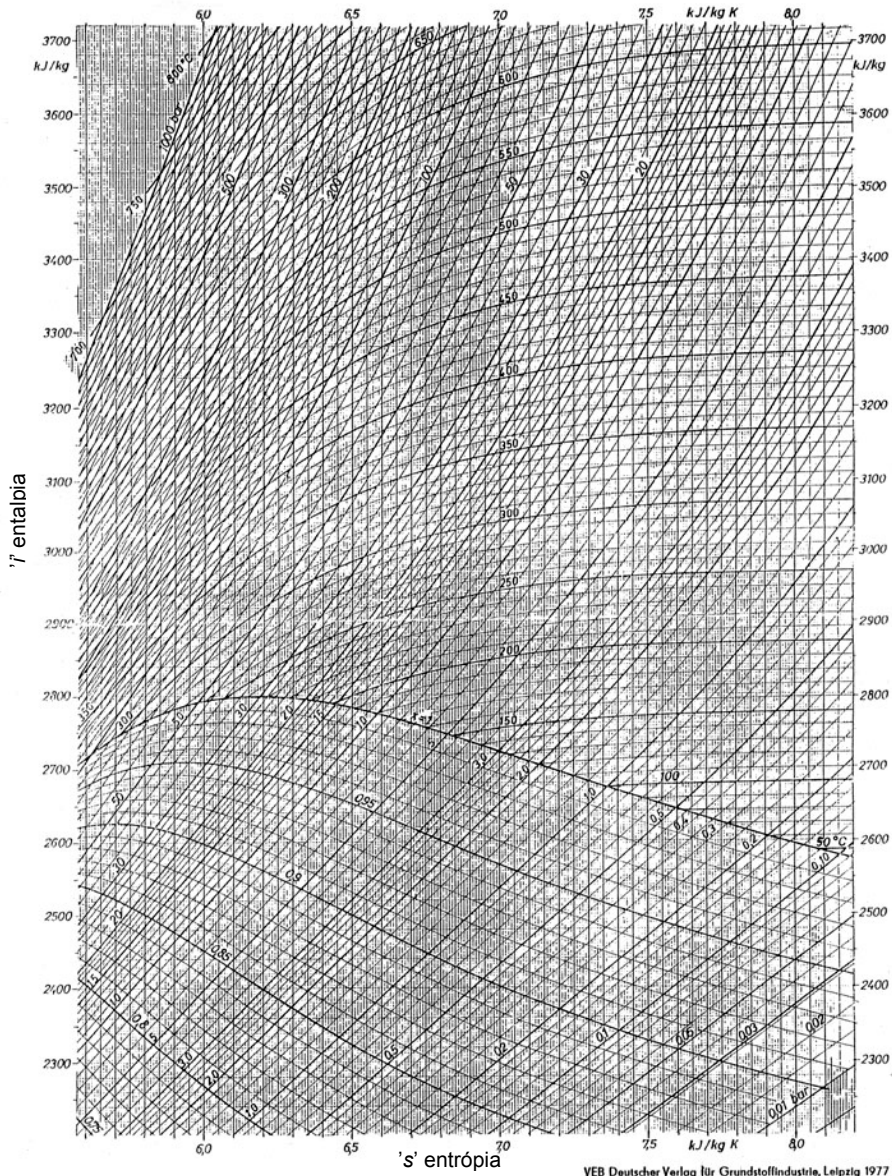


<b>43. ábra</b>	A ' <b>logp-i</b> ' diagram felépítése .....	153
<b>44. ábra</b>	Kompresszoros hűtőberendezés kapcsolási vázlata .....	154
<b>45. ábra</b>	Kompresszoros hűtő körfolyamat a ' <b>logp-i</b> ' diagramban .....	155
<b>46. ábra</b>	Az ' <b>i-x</b> ' diagram felépítése .....	159
<b>47. ábra</b>	A felületi hűtés ábrázolása az ' <b>i-x</b> ' diagramban .....	162
<b>48. ábra</b>	Az adiabatikus nedvesítés ábrázolása az ' <b>i-x</b> ' diagramban ...	163
<b>49. ábra</b>	A keverés ábrázolása az ' <b>i-x</b> ' diagramban .....	165
<b>50. ábra</b>	Légkondicionáló berendezés kapcsolási vázlata.....	167
<b>51. ábra</b>	Légkondicionáló berendezés nyári üzeme .....	169
<b>52. ábra</b>	Légkondicionáló berendezés téli üzeme .....	170
<b>53. ábra</b>	Hőmérsékletváltozás sík falban .....	173
<b>54. ábra</b>	Hőmérsékletváltozás hengeres falban .....	176
<b>55. ábra</b>	Hőmérsékletváltozás a hőátadás során .....	178
<b>56. ábra</b>	A hőmérsékletváltozás a hőátvitel során .....	187
<b>57. ábra</b>	Párhuzamos egyenáramlású hőcsere .....	194
<b>58. ábra</b>	Hőmérsékletváltozás párhuzamos egyenáramlásnál .....	195
<b>59. ábra</b>	Párhuzamos ellenáramlású hőcsere .....	196
<b>60. ábra</b>	Hőmérsékletváltozás párhuzamos ellenáramlásnál .....	196
<b>61. ábra</b>	Hőmérsékletváltozás halmazállapot-változásos hőcserénél ..	198
<b>62. ábra</b>	A Bošnjaković diagramok felépítése.....	201
<b>63. ábra</b>	Hőmérsékletváltozás regeneratív hőcsere során .....	206

## Táblázatok jegyzéke

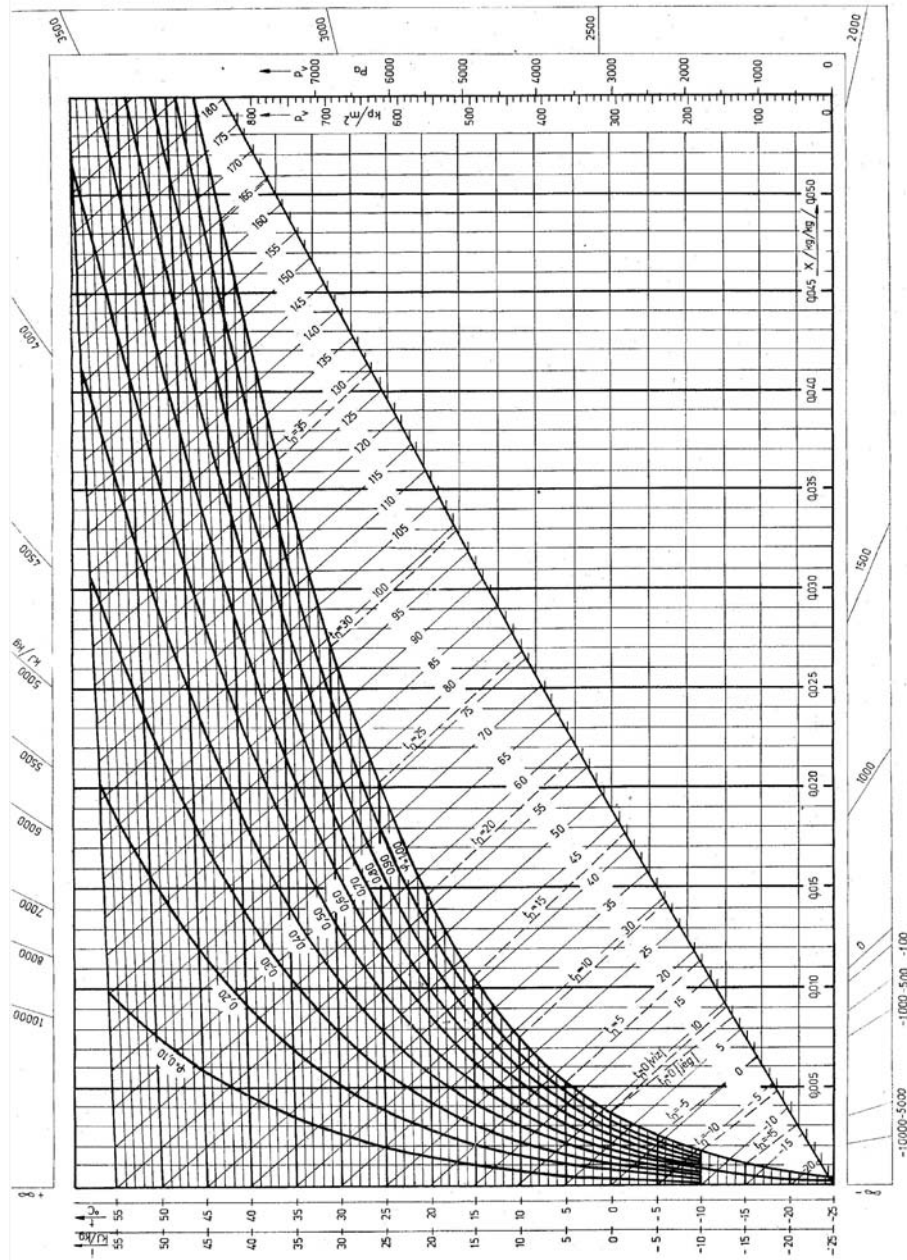
<b>1. táblázat</b>	Néhány anyag kritikus állapotjelzői .....	13
<b>2. táblázat</b>	Néhány folyadék felületi feszültsége levegőre .....	36
<b>3. táblázat</b>	Néhány test alakí ellenállás tényezője .....	109
<b>4. táblázat</b>	Tájékoztató hőátadási tényezők.....	181
<b>5. táblázat</b>	Néhány anyag feketeségi foka .....	184

# Mellékletek

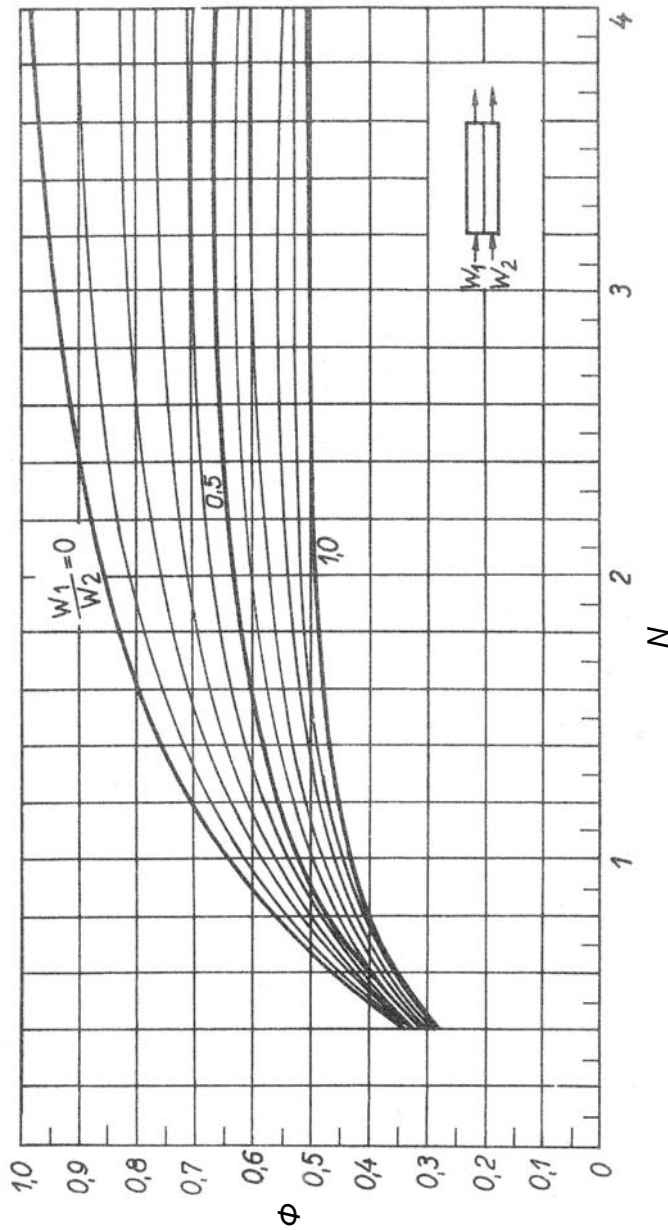


A vízgőz 'i-s' diagramja

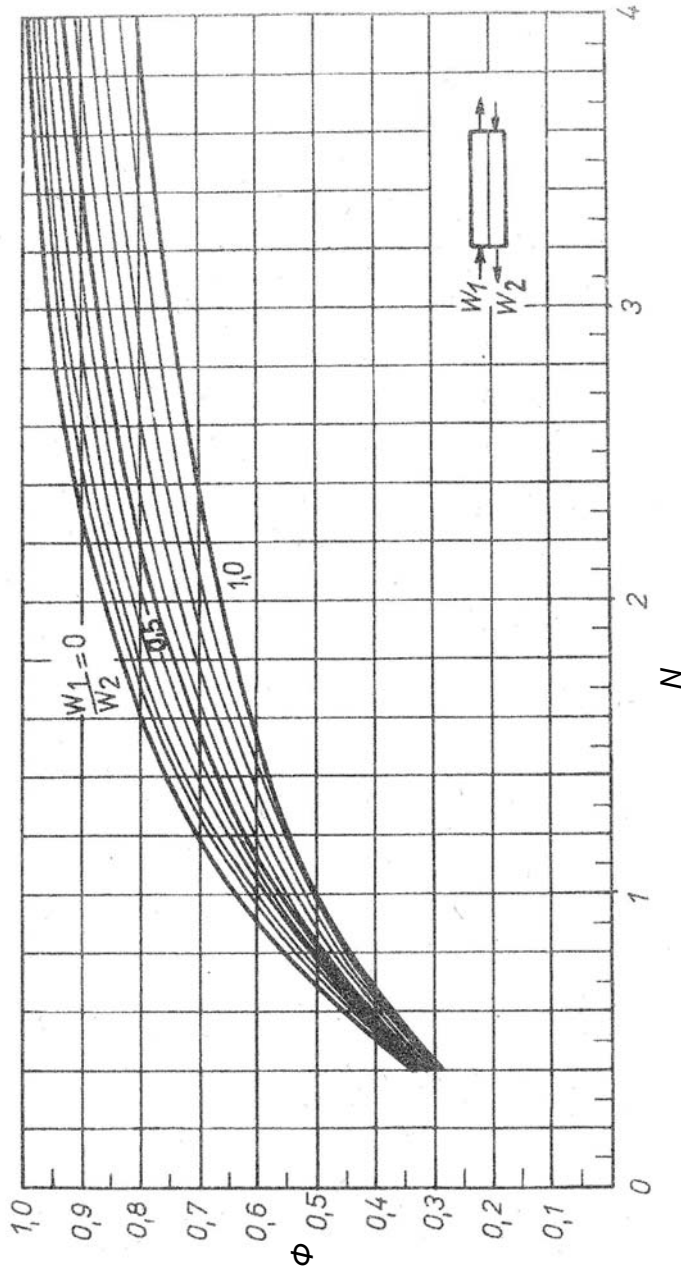




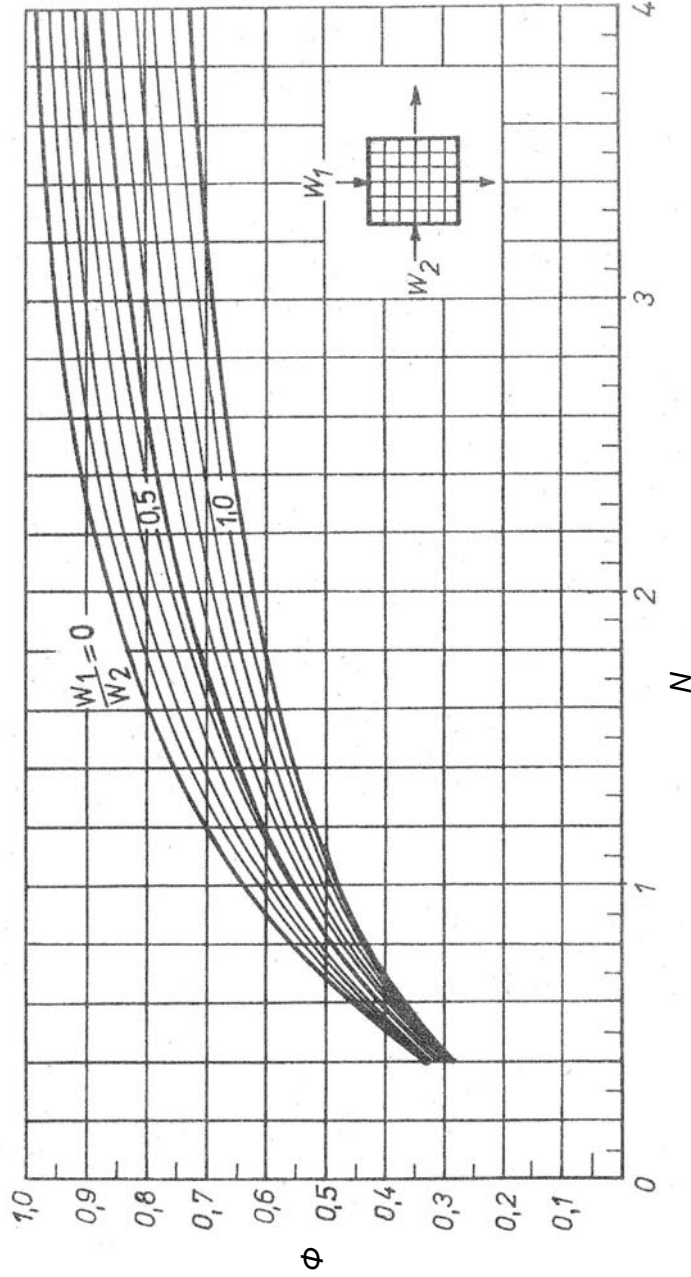
A nedves levegő 'i-x' diagramja  
 Kuzman Raznjević: Hőtechnikai táblázatok, 1964. Műszaki Könyvkiadó, nyomán, oktatási célra



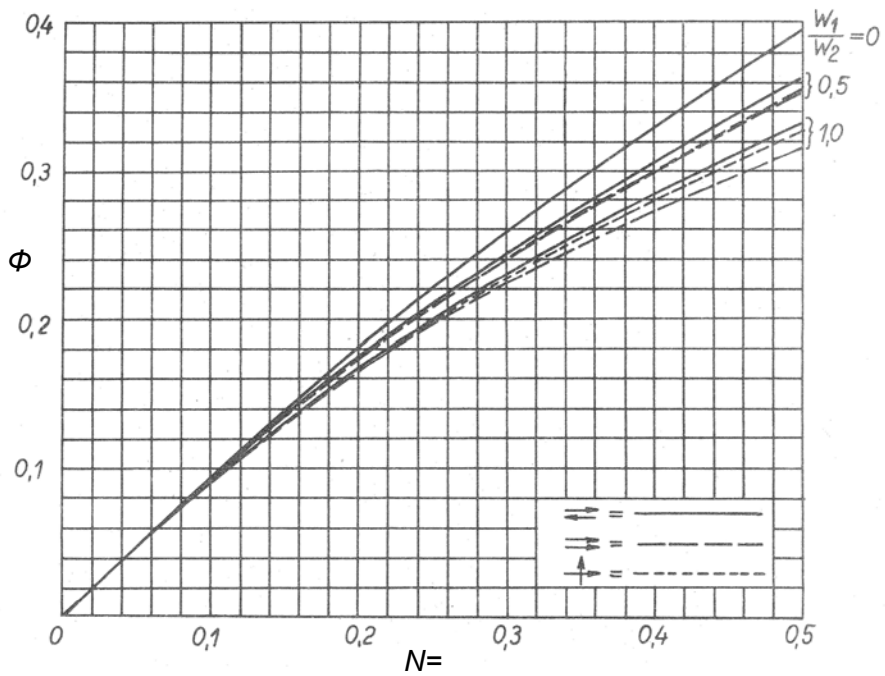
Párhuzamos egyenáramlású hőcserélők Bosnjakovič féle hatásosság diagramja  
 Palkovics Szilárd: Munkalapok hőcserélő berendezések hőtechnikai méretezéséhez, 1997. Műegyetemi Kiadó, nyomán, oktatási célra



Párhuzamos ellenáramlású hőcserélők Bosnjakovič féle hatásosság diagramja  
 Palkovics Szilárd: Munkalapok hőcserélő berendezések hőtechnikai méretezéséhez, 1997. Műegyetemi Kiadó, nyomán, oktatási célra



Párhuzamos keresztáramlású hőcserélők Bosnjaković féle hatásosság diagramja  
 Palkovics Szilárd: Munkalapok hőcserélő berendezések hőtechnikai méretezéséhez, 1997. Műegyetemi Kiadó, nyomán, oktatási célra



Felületi hőcserélők Bosnjakovič féle hatásosság diagramja kis hőátviteli számokra  
 Palkovics Szilárd: Munkalapok hőcserélő berendezések hőtechnikai méretezéséhez, 1997. Műegyetemi Kiadó, nyomán,  
 oktatási célra