Széchenyi István Egyetem
Műszaki Tudományi Kar
Mechatronika és Gépszerkezettan Tanszék

Áramló ideális kontinuumok (példatár)

Áramló ideális kontinuumok (példatár)

javított és bővített változat, 2010.

Összeállította: ***Író Béla***
A javításban és a bővítésben közreműködött***: Baracskai Melinda***

☺ Példatár ☺

Ha külön nincs jelezve, akkor a feladatok megoldásánál a gravitációs gyorsulást minden esetben 10 *m/s²* értékűnek lehet venni!

IK/1. feladat

Határozza meg a konvektív gyorsulás értékét egy 800 mm hosszúságú, csonka kúp alakú, 100/200 mm átmérőjű keresztmetszet-átmenet tengelyében középütt. A 100 mm átmérőjű keresztmetszeten át belépő folyadék ($\rho = 1000 \ \frac{kg}{m^3}$) sebessége 20 m/s és időben állandó.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/2. feladat

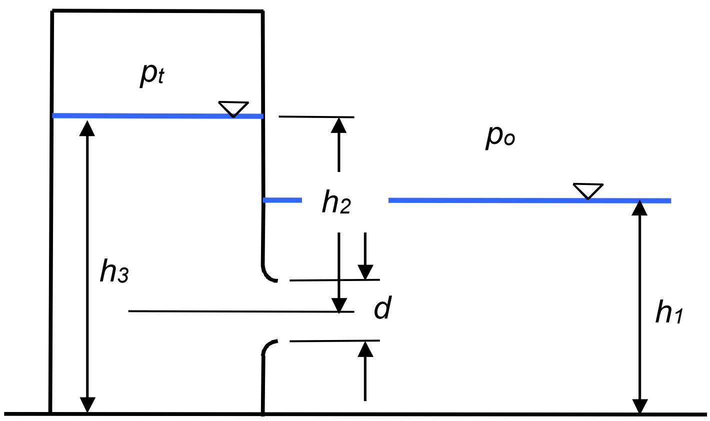
Egy konfúzorban a sebesség változását a $c=2+x^2$ függvény írja le. Itt 'x' a konfúzor tengelyével párhuzamosan értendő.
Határozza meg a lokális és a konvektív gyorsulás nagyságát a konfúzor középvonalában, a belépéstől 1 *m*-re!

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/3. feladat

Az ábrán látható tartályban gyakorlatilag állandó a vízszint magassága. A tartályból egy olyan csatornába ömlik ki a víz, ahol szintén állandó a vízszint, de alacsonyabb a tartályban lévőnél. A tartályban a vízszint felett 0,7 *bar* túlnyomás, a csatornában lévő víz felett pedig a légköri nyomás uralkodik, melynek névleges értéke p_o=1 *bar*.



h_1=1,1 m, h_2=1,3, h_3=1,9 m, d=50 mm

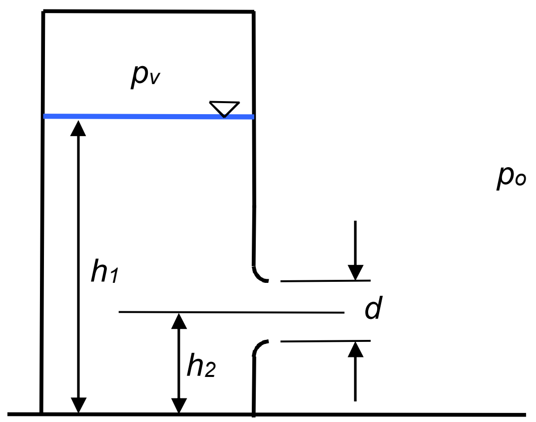
Ideális körülményeket feltételezve, határozzuk meg a tartályból a csatornába átfolyó víz térfogatáramát *liter/perc* mértékegységben!
(A víz sűrűsége 1 *kg/dm*^{3})

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/4. feladat

Az ábrán látható tartályban gyakorlatilag állandó a vízszint magassága. A tartályból a szabadba ömlik ki a víz.
A tartályban a vízszint felett 530 *Pa* vákuum uralkodik. A légköri nyomás névleges értéke p_o=1 *bar*.
Ideális körülményeket feltételezve, határozzuk meg a tartályból kifolyó víz térfogatáramát *liter/perc* mértékegységben!
(A víz sűrűsége 1 *kg/dm*^{3})



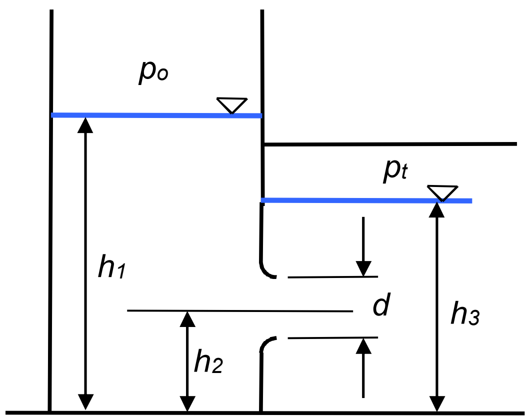
h_1=1,8 m, h_2=0,7, d=75 mm

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/5. feladat

Az ábrán látható nyitott tartályban gyakorlatilag állandó a vízszint magassága. A tartályból a víz egy olyan másik tartályba ömlik át, ahol a víz felett 900 *Pa* túlnyomás van.
A légköri nyomás névleges értéke p_o=1 *bar*.
Ideális körülményeket feltételezve, határozzuk meg a tartályból kifolyó víz térfogatáramát *m*^{3}*/perc* mértékegységben!
(A víz sűrűsége 1 *kg/dm*^{3})



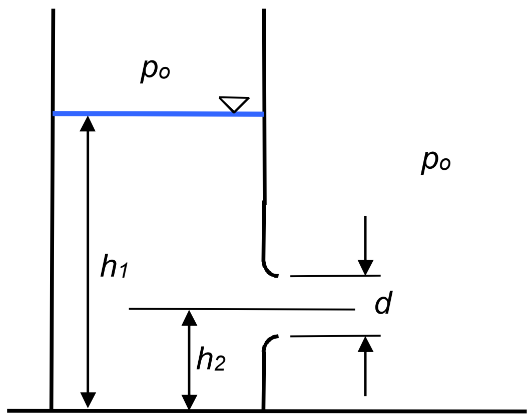
h_1=1,6 m, h_2=0,5 m, d=8 cm h_3=1,51 m

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/6. feladat

Az ábrán látható nyitott tartályban gyakorlatilag állandó a vízszint magassága. A tartályból a víz a szabadba ömlik ki. A légköri nyomás névleges értéke p_o=1 *bar*.
Ideális körülményeket feltételezve, határozzuk meg a tartályból kifolyó víz térfogatáramát *liter/s* mértékegységben!
(A víz sűrűsége 1 *kg/dm*^{3})



h_1=1,6 m, h_2=0,5 m, d=100 mm

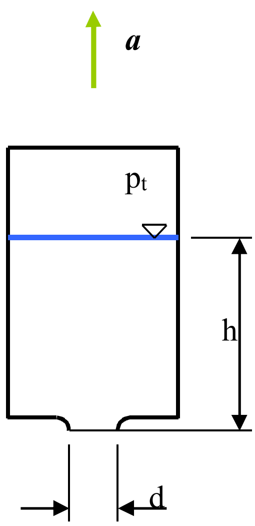
A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/7. feladat

Az ábrán látható tartály a kiömlő nyílás szintjétől számított h=1,5 *m* magasságig vízzel van megtöltve és a víztükör felett 0,5 *bar* túlnyomás uralkodik.

Hány liter víz áramlik ki percenként a tartály alján lévő d=50 *mm* átmérőjű nyíláson át, ha a tartály a=12 *m/sec*^{2} gyorsulással a jelölt irányba megindul? A tartályban a vízszint-magasságot vegye állandónak! (ρ=1000 *kg/m*^{3}, g=10 *m/sec*^{2})

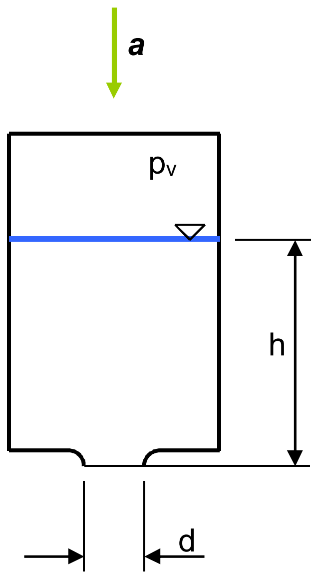


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/8. feladat

Az ábrán látható tartály a kiömlő nyílás szintjétől számított h=0,9 *m* magasságig vízzel van megtöltve és a víztükör felett 3700 *Pa* vákuum uralkodik.
Hány liter víz áramlik ki percenként a tartály alján lévő d=35 *mm* átmérőjű nyíláson át a szabadba, ha a tartály a=1,8 *m/sec*^{2} gyorsulással a jelölt irányba megindul? A tartályban a vízszint-magasságot vegye állandónak! (ρ=1000 *kg/m*^{3}, g=10 *m/sec*^{2})



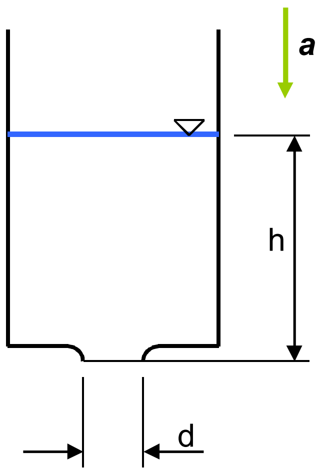
A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/9. feladat

Az ábrán látható nyitott tartály a kiömlő nyílás szintjétől számított h=1,2 *m* magasságig vízzel van megtöltve.

Hány liter víz áramlik ki másodpercenként a tartály alján lévő d=63 *mm* átmérőjű nyíláson át a szabadba, ha a tartály a=2 *m/sec*^{2} gyorsulással a jelölt irányba megindul? A tartályban a vízszint-magasságot vegye állandónak! (ρ=1000 *kg/m*^{3}, g=10 *m/sec*^{2})



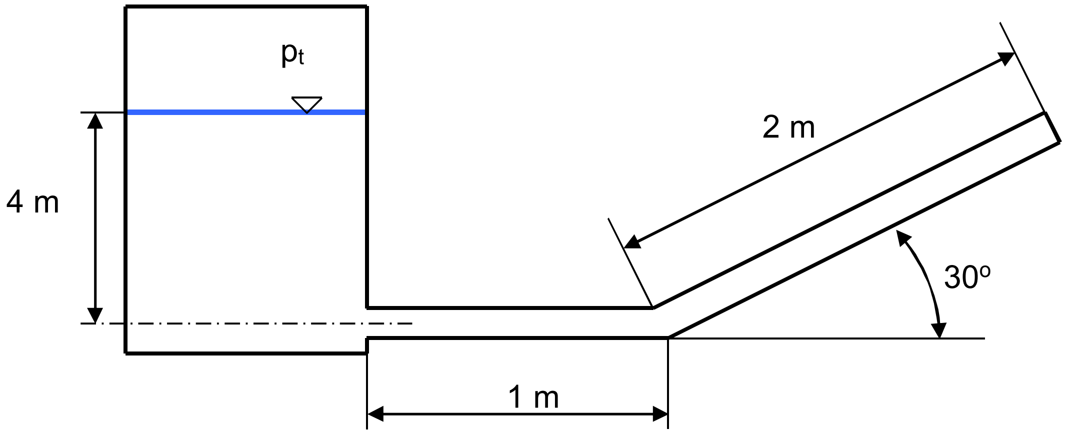
A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/10. feladat

Az alábbi ábrán látható nagy méretű tartály és a csatlakozó ferde cső fel van töltve vízzel. A ferde cső végén megnyitva az elzáró szerelvényt megindul a víz kiáramlása. Határozzuk meg a tartályból kiáramló víz kezdeti gyorsulását és azt, hogy stacionárius állapotban a

kiáramló vízsugár a tartály kiömlőnyílásának szintjétől számítva milyen legnagyobb magasságig emelkedik! A tartályban 0,9 *bar* túlnyomás van.
(ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/sec^2)

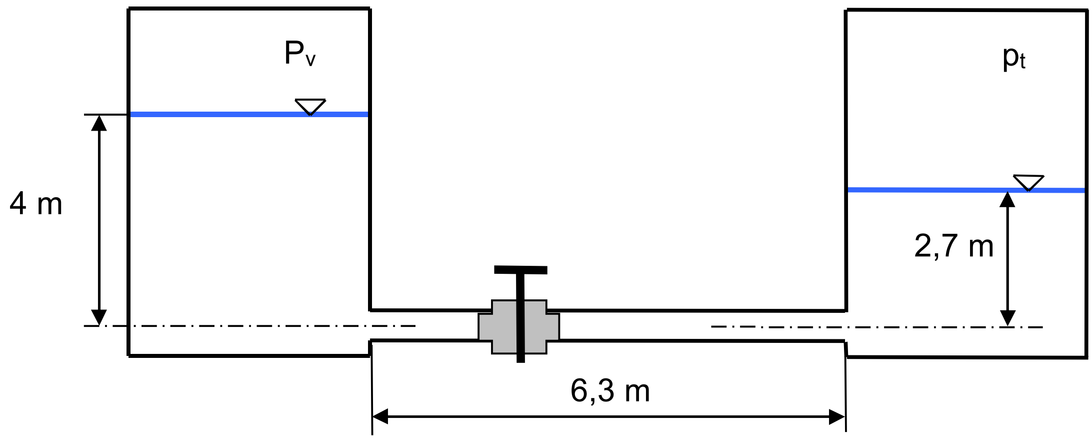


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/11. feladat

Az alábbi ábrán látható két nagy méretű tartály a rajzon mutatott mértékig fel van töltve vízzel és egy 6,3 m hosszú csővel van összekötve. Határozzuk meg, hogy mekkora lesz a kezdeti gyorsulás az összekötő csőbe beépített elzárószerelvény kinyitásának pillanatában. A baloldali tartályban a folyadék felszíne felett vákuum van, értéke 48900 Pa. A jobboldali tartályban 0,023 bar túlnyomás van.
(ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/sec^2)

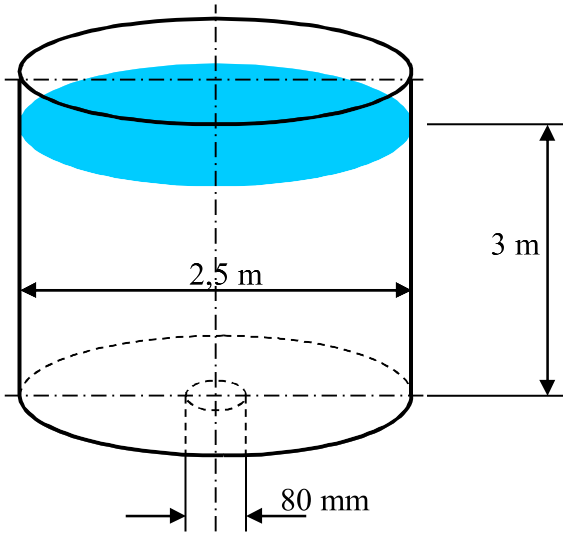


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/12. feladat

Mennyi idő alatt ürül ki szabad kifolyással az ábrán látható nyitott, álló hengeres 2,5 *m* belső átmérőjű víztartály, mely 3 *m* magasságig van megtöltve. A kiömlőnyílás átmérője 80 *mm*.
(g=10 m/sec^2)



A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/13. feladat

Hány perc alatt ürül ki az a csonka kúp alakú tartály, melyben 4 *m* magasságig van víz. A tartály alján az átmérő 2,1 *m*, a 4 *m* magasságban lévő szinten pedig 3,6 m. A kiömlőnyílás átmérője 60 *mm*. (g=10 *m/sec*^{2})

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/14. feladat

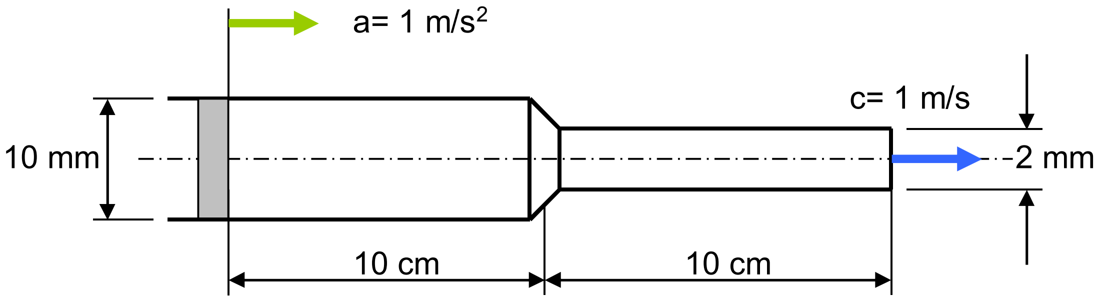
Mennyi idő alatt ürül ki az a 16 *m* hosszú, 5,1 *m* átmérőjű, fekvő henger alakú tartálykocsi, melyben 4,21 *m* magasságig van víz. A kifolyónyílás 80 *mm* átmérőjű. (g=10 *m/sec*^{2})

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/15. feladat

Mekkora erővel kell nyomni az ábrán látható fecskendő dugattyúját abban a pillanatban, amikor a dugattyú éppen a megjelölt gyorsulással mozog és a folyadék éppen megadott sebességgel áramlik ki a fecskendő végén a szabadba.
(ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/sec^2)

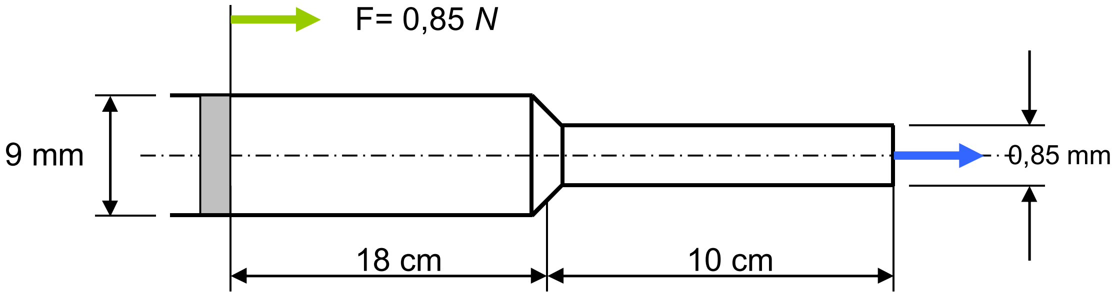


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/16. feladat

Mekkora gyorsulással indul meg a folyadék az ábrán látható fecskendőből abban a pillanatban, amikor a dugattyút az adott erővel megindítjuk. (g=10 *m/sec*^{2})

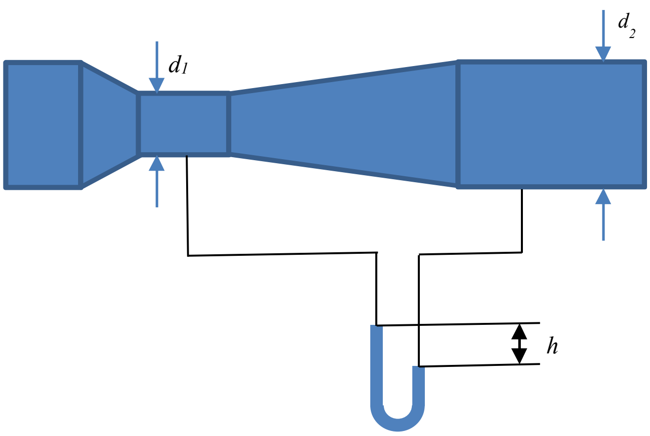


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/17. feladat

A csővezeték térfogatáramának mérésére az ábrán látható szűkülő majd bővülő csőtoldatot az ún. Venturi csövet is lehet használni.

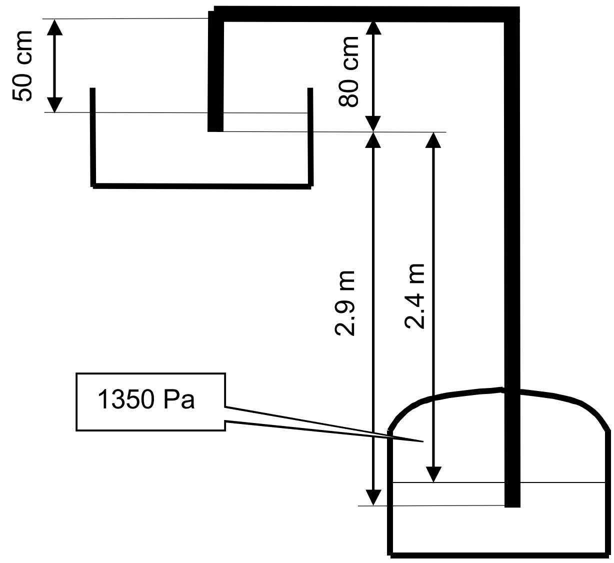


A legszűkebb keresztmetszet legyen 62 mm a csővezeték átmérője, melybe beépítették, legyen 150 mm. Tételezzük fel, hogy a legszűkebb keresztmetszet és a csővezeték valamely, áramlás irányába eső távolabbi pontja közé beiktatott higany töltésű U-csöves manométer 47,6 mm szintkülönbséget mutat.
Határozzuk meg a csővezetékben áramló víz térfogatáramát! A veszteségeket elhanyagolhatjuk és az áramlás legyen stacionárius.

A megoldás ….

IK/18. feladat

Határozza meg, hogy a felső nyitott tartályból percenként hány liter víz folyik át az alsóba a 25 *mm* átmérőjű csövön.
A jelenséget stacionáriusnak tételezheti fel és a súrlódás hatását figyelmen kívül hagyhatja.
Az alsó tartályban a víz felszíne felett a jelzett túlnyomás uralkodik.
(ρ=1000 *kg/m*^{3}, g=10 *m/s*^{2} , p_o=1 *bar*)

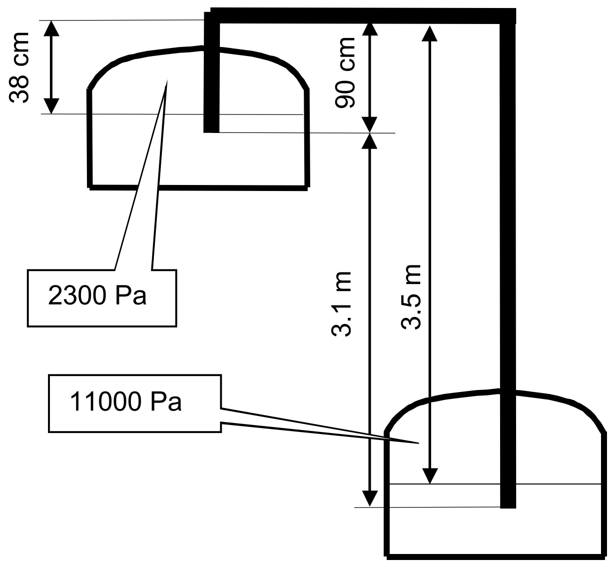


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/19. feladat

Határozza meg, hogy a felső tartályból percenként hány liter víz folyik át az alsóba a 32 *mm* átmérőjű csövön.
A jelenséget stacionáriusnak tételezheti fel és a súrlódás hatását figyelmen kívül hagyhatja.
Az alsó tartályban és a felsőben a víz felszíne felett a jelzett túlnyomás uralkodik.
(ρ=1000 *kg/m*^{3}, g=10 *m/s*^{2} , p_o=1 *bar*)

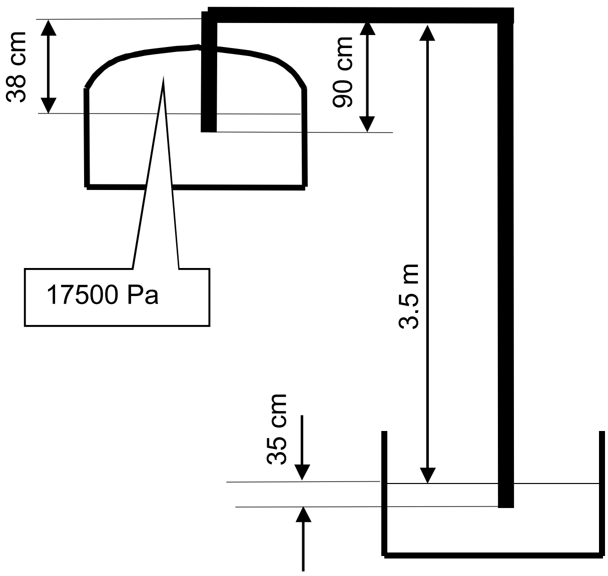


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/20. feladat

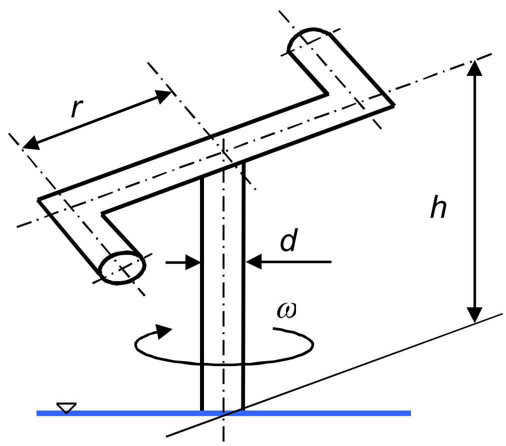
Határozza meg, hogy a felső tartályból percenként hány liter víz folyik át az alsóba a 32 *mm* átmérőjű csövön.
A jelenséget stacionáriusnak tételezheti fel és a súrlódás hatását figyelmen kívül hagyhatja.
A felső tartályban a víz felszíne felett a jelzett vákuum uralkodik.
(ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/s^2 , p_o=1 *bar*)



A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/21. feladat

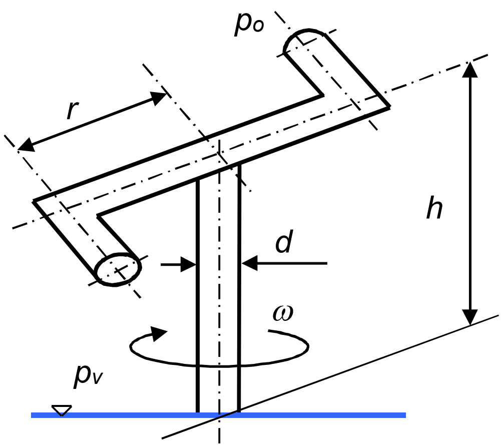
Határozzuk meg az ábrán látható egyszerű szivattyúval (Segner-kerék) szállítható vízmennyiséget! Az áramlást stacionáriusnak tételezheti fel. Az ábrán megjelölt és a további szükséges adatok: r=350 *mm*; h=0,5 *m*; ω=10 *rad/s*; d=20 *mm*; ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/sec^2	

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/22. feladat

Határozzuk meg, hogy az alsó, vákuum alatt lévő tartályból percenként mennyi víz szivattyúzható ki a szabadba az ábrán látható egyszerű szivattyúval (Segner-kerék)!
Az áramlást stacionáriusnak tételezheti fel.
Az ábrán megjelölt és a további szükséges adatok: p_v=6500 *Pa*; *r*=400 *mm*; *h*=1 *m*; *ω*=32 *rad/s*; *d*=30 *mm*; ρ=1000 *kg/m*^{3}, *g*=10 *m/sec*^{2}

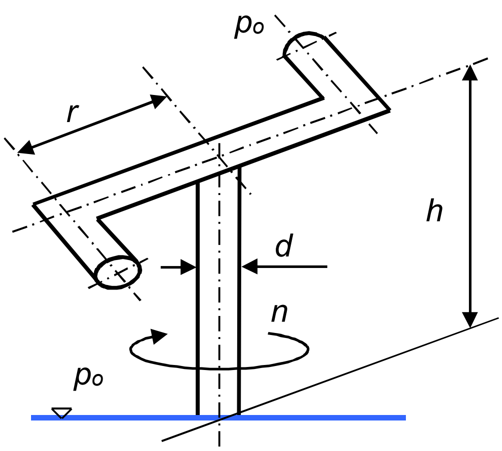


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/23. feladat

Mekkora percenkénti fordulat-számmal kell forgatni az ábrán látható egyszerű szivattyút, hogy a szállított víz térfogat-árama 132 liter/perc legyen?
Az áramlást stacionáriusnak tételezheti fel.
Az ábrán megjelölt és a további szükséges adatok: *r*=280 *mm*; *h*=1,2 *m*; *d*=30 *mm*; ρ=1000 *kg/m*^{3}, *g*=10 *m/sec*^{2}

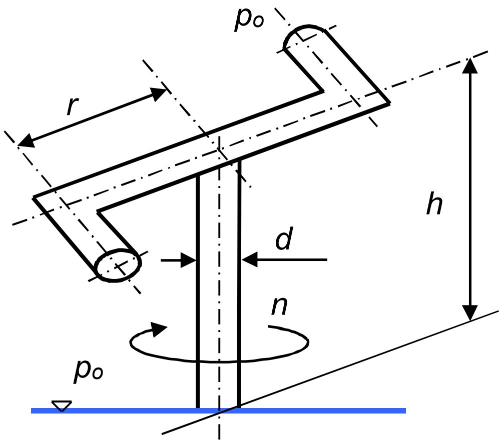


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/24. feladat

Mekkora legnagyobb magasságra képes vizet szállítani az ábrán látható egyszerű szivattyút, ha a percenkénti fordulatszáma 250?
Az áramlást stacionáriusnak tételezheti fel.
Az ábrán megjelölt és a további szükséges adatok: r=30 cm; d=30 mm; ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/sec^2

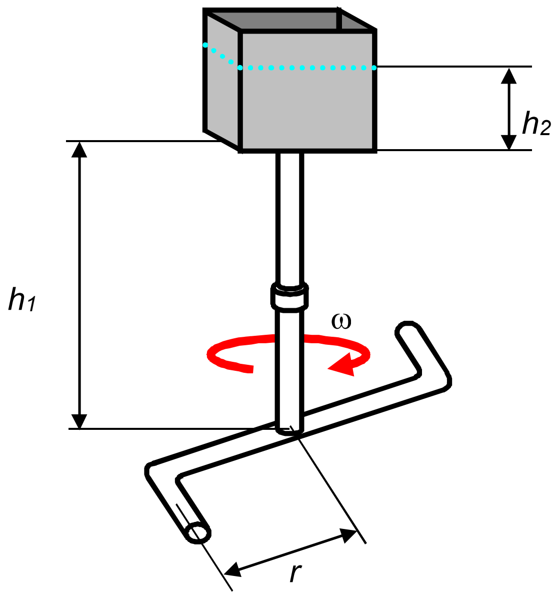


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/25. feladat

Határozzuk meg az ábrán vázolt Segner-kerekes egyszerű vízturbina fordulatszámát! Tételezzük fel, hogy a Segner-kerék hajlított végei a forgási körpálya érintőjével 15 fokos szöget zárnak be. Mennyi folyadék folyik le másodpercenként a tartályból a 35 cm átmérőjű ejtőcsövön át, veszteségmentes esetben?
Az áramlást stacionáriusnak tételezheti fel.
Az ábrán megjelölt és a további szükséges adatok: h_1=2 m; h_2=1 m; r=45 cm; ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/sec^2



A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/26. feladat

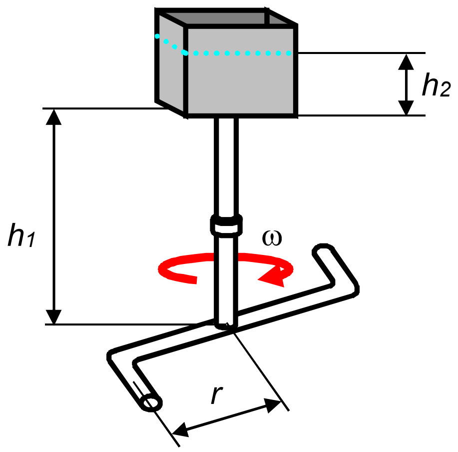
Határozzuk meg a Segner-kerekes kerti locsoló maximális percenkénti fordulatszámát ideális körülmények között, ha tudjuk, hogy a hálózati víznyomás 2,6 *bar* túlnyomás, a locsoló átmérője 75 *cm* és a kilépő csőszáj a kerületi érintővel nagyjából 35^{o}-os szöget zár be! Az áramlást stacionáriusnak tételezheti fel.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/27. feladat

Mekkora legyen az 1 méteres átmérőjű Segner-kerekes egyszerű vízturbinát tápláló víz esése, ha a fordulatszámot a percenkénti 1000 értékén akarjuk tartani. Tételezzük fel, hogy a Segner-kerék hajlított végei a forgási körpálya érintőjével 20 fokos szöget zárnak be.
Az áramlást stacionáriusnak tételezheti fel.
A további szükséges adatok: ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/sec^2

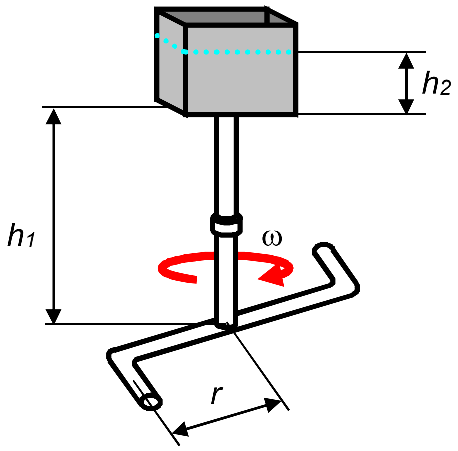


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/28. feladat

Egy 25 méteres esésű Segner-kerekes egyszerű vízturbina fordulatszámát a hajlított cső kialakításával akarjuk maximálni. Milyen szöget zárjon be a hajlított cső a kerületi érintővel, ha a fordulatszám maximuma ideális körülmények között sem lehet nagyobb mint a percenkénti 250.
Az áramlást stacionáriusnak tételezheti fel.
A további szükséges adatok: : r=60 cm; ρ=1000 kg/m^3, g=10 m/sec^2



A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/29. feladat

Határozzuk meg a 30 *bar* túlnyomás alatt álló tartályból a szabadba kiáramló, ideális gáznak tekinthető CO_2 gáz sebességét!
A gáz hőmérséklete a tartályban 15 *°C*.
A jelenséget stacionáriusnak tételezze fel.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/30. feladat

Mekkora átmérőjű legyen a kiömlőnyílás azon a 75 *bar* túlnyomású rakétahajtóművön, melyen át másodpercenként 25 *kg* oxigéngázt akarunk kiáramoltatni?
Az oxigén hőmérséklete a tartályban 20 *°C*.
A jelenséget stacionáriusnak tételezze fel.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/31. feladat

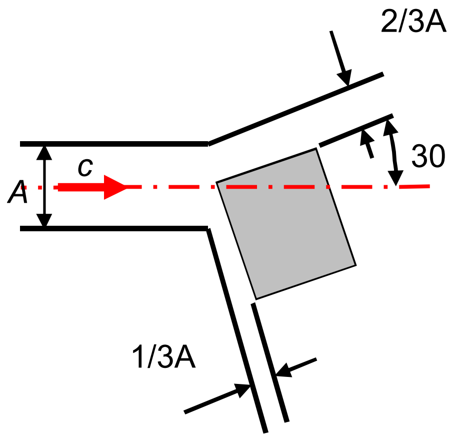
Határozzuk meg a hang terjedési sebességét 30 *°C* hőmérsékletű levegőben. A levegő gázállandója 287 (*J/kg.K*), adiabatikus állandója 1,4.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/32. feladat

Határozza meg az ábra szerinti 49,3 *N* súlyú (*négyzet keresztmetszetű*) testre a stacionáriusan áramló folyadék által kifejtett erő nagyságát és irányát!
A folyadéksugár *c*=10 *m/s* sebességű, keresztmetszete A= 10 cm^2.
A súrlódást és a folyadék súlyát hanyagolja el!
A számítások során tételezze fel hogy az áramlás kétdimenziós és súrlódásmentes.
A folyadék víz, melynek sűrűsége 1000 kg/m^3

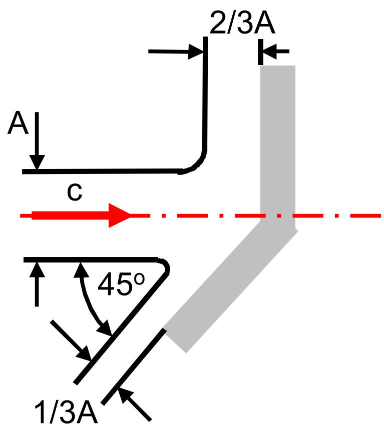


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/33. feladat

Az ábrán látható kialakítású, gyakorlatilag súlytalannak tekinthető lapátot 5 *m/s* sebességgel érkező A= 150 cm^2 keresztmetszetű vízsugár támad meg.
Határozza meg a folyadék által a lapátra kifejtett erő vízszintes és függőleges komponensének nagyságát.
A számítások során tételezze fel hogy az áramlás kétdimenziós, súrlódásmentes és egy függőleges síkban zajlik le.
A víz sűrűségét 1 kg/dm^3 értékkel vegye figyelembe.

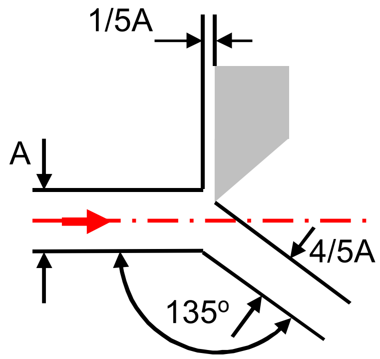


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/34. feladat

Határozza meg az ábra szerinti test súlyát, ha tudja, hogy az a stacionáriusan áramló folyadéksugár ellenében egy vízszintes erővel tartható egyensúlyban. Mekkora ez az erő?
A folyadéksugár c=10 *m/s* sebességű, keresztmetszete A= 10 cm^2.
A súrlódást és a folyadék súlyát hanyagolja el!
A számítások során tételezze fel hogy az áramlás kétdimenziós, súrlódásmentes és egy függőleges síkban zajlik le.
A folyadék víz, melynek sűrűsége 1000 kg/m^3.

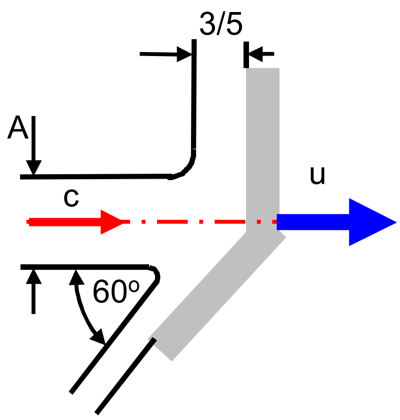


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/35. feladat

Az ábrán látható kialakítású, 4,6 kg tömegű lapátot 3,8 *m/s* sebességgel érkező A=78 cm^2 keresztmetszetű vízsugár támad meg.
Határozza meg az u=1,2 *m/s* sebességgel jobbra haladó lapáton ébredő reakcióerő vízszintes és függőleges komponensének nagyságát.
A számítások során tételezze fel hogy az áramlás kétdimenziós, súrlódásmentes és egy függőleges síkban zajlik le.
A víz sűrűségét 1 kg/dm^3 értékkel vegye figyelembe.

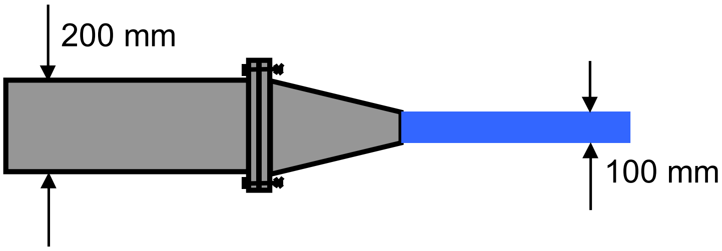


A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/36. feladat

Határozza meg a tömlővégre erősített fecskendőre ható erő nagyságát! A fecskendőből másodpercenként 50 *liter* víz távozik.
(p_o=1 *bar*, ρ=1000 kg/m^3)
A súrlódást, a folyadék és a fecskendő súlyát hanyagolja el!



A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/37. feladat

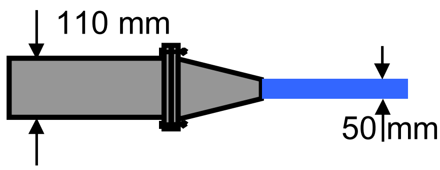
Egy tűzoltófecskendőn maximálisan 2000 liter vizet bocsátanak át percenként.
Mekkora legyen a 100 *mm* átmérőjű tömlő végére csatlakoztatott fecskendő kilépő átmérője, ha a fecskendő tartásához szükséges erő nem lehet nagyobb 1 k*N*-nál.
A súrlódást, a folyadék és a fecskendő súlyát hanyagolja el!
A víz sűrűségét 1 kg/dm^3 értékkel vegye figyelembe.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/38. feladat

Az ábra szerinti fecskendő végére csavarokkal van rögzítve a szűkítő elem.
Elegendő-e a szokásos négy csavar alkalmazása a rögzítéshez, ha a fecskendőn átbocsátott vízmennyiség percenként 2500 *liter* és egy csavar terhelhetősége max. 360 *N*.
A súrlódást, a folyadék és a fecskendő súlyát hanyagolja el!
A folyadék víz, melynek sűrűsége 1000 kg/m^3.



A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/39. feladat

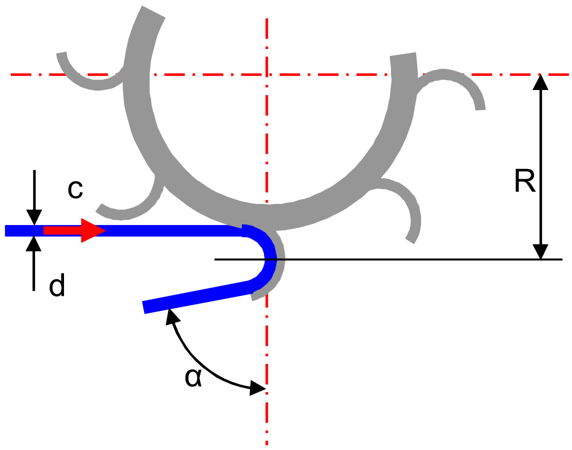
Mekkora tolóerő érhető el azzal gázsugárral hajtott rakétával, melynek 500 mm kilépő átmérőjű Laval-fúvókával ellátott hajtóművén át az üzemanyagtérben lévő 20ºC hőmérsékletű, 60 bar nyomású nitrogén gáz expandál atmoszférikus nyomásra. A Laval-fúvóka legszűkebb keresztmetszete 150 mm.
A súrlódást, a folyadék és a fecskendő súlyát hanyagolja el!

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/40. feladat

Az ábrán látható Pelton-turbina járókerekére érkező vízsugár sebessége 16 *m/s*, átmérője 80 *mm*. Határozzuk meg a turbina tengelyén jelentkező nyomatékot 3 *m/sec* kerületi sebesség feltételezésével és a turbina maximális teljesítményét!
A lapátozás középátmérőjéhez tartozó sugár 2 *m*, a lapátokra érkező folyadéksugár irányelterelésére jellemző szög 150º, azaz α =(150-90)=60º.



A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/41. feladat

Egy 3,4 *m* átmérőjű egyszerű vízikerék kerületén 60 *cm* széles és 40 *cm* magas sík lapok találhatók. A vízikerék egy 2,3 *m/s* sebességű folyóba merül.
Mekkora a vízikerék teljesítménye percenkénti 10-es fordulatszám mellett?
A víz sűrűségét 1 kg/dm^3 értékkel vegye figyelembe.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/42. feladat

Egy Pelton-turbina járókerekének jellemzői a következők: átmérője 80 *cm*, az irányelterelési szög 135^o.
A turbinát a sugárcső középvonala felett 80 *m* állandó vízszintmagasságot biztosító tározómedencéből táplálják egy 60 *mm* átmérőjű fúvókában végződő csövön át.
Mekkora a turbina táplálásához óránként szükséges vízmennyiség, és a turbina teljesítménye, ha a fordulatszáma kereken 500 fordulat percenként.
A víz sűrűségét 1 *kg/dm*^{3} értékkel vegye figyelembe.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/43. feladat

Egy Pelton-turbina járókerekének jellemzői a következők: átmérője 100 *cm*, az irányelterelési szög 120^o.
A turbinát egy 50 *mm* átmérőjű fúvókában végződő csövön át táplálják.
A turbina teljesítménye percenként 500-as fordulatszám mellett 20 *kW*.
Mekkora a turbina táplálásához óránként szükséges vízmennyiség, és milyen magas vízszintet kell tartani a turbinát tápláló tározómedencében a fúvóka síkja felett.
A víz sűrűségét 1 *kg/dm*^{3} értékkel vegye figyelembe.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/44. feladat

Egy 150 *mm* átmérőjű csővezeték hirtelen 200 *mm*-re bővül. Az érkező folyadék sebessége 4,3 *m/s*, nyomása 3,4 *bar* túlnyomás.
Határozza meg, hogy a hirtelen keresztmetszet-bővítésen történő áthaladás után mekkora lesz a folyadék sebessége és nyomása!
Tételezze fel, hogy ideális folyadék stacionárius áramlásáról van szó!
($\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $g = 10 \frac{m}{\sec^2}$)

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/45. feladat

Méréssel megállapítottuk, hogy egy hirtelen keresztmetszet-bővülés során a nyomás 8900 *Pa*-al nő.
Határozzuk meg, hogy másodpercenként hány liter víz folyik át, ha tudjuk, hogy a hirtelen keresztmetszet-bővülésnél a két átmérő 60 *mm* és 140 *mm*.
A víz sűrűségét 1 *kg/dm*^{3} értékkel vegye figyelembe.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/46. feladat

Mekkora az elméleti teljesítménye annak a szélkeréknek, melynek rotor átmérője 6,5 *m*, hatásfoka pedig 72%? A számításoknál a szél sebességét 80 *km/h*-nak a levegő sűrűségét pedig 1,22 kg/m^3-nek vegye.
Határozza meg annak az erőnek a nagyságát, mely a szélkerék síkjában jelentkezik!

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/47. feladat

Egy tengerjáró hajót két darab, egyenként 3 *m* átmérőjű, 65%-os propeller hatásfokú hajócsavar hajt.
Határozzuk meg a hajótestre ható közegellenállás eredő nagyságát a maximális sebességgel történő egyenletes sebességű haladáskor, ha tudjuk, hogy a hajócsavarnál a víz áramlási sebessége ekkor kb. 20 m/sec és a hajtási rendszer mechanikai hatásfoka közelítőleg 74%!
A víz sűrűsége 1 kg/dm^3.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/48. feladat

Adott egy szélkerék, mely 8,5 *kW* hasznos teljesítményt szolgáltat. A szélkerék átmérője 4,5 *m*. Határozzuk meg a szélkerékre ható erőt, ha a szélkerék hatásfokát 60 %-osnak lehet feltételezni.
A levegő sűrűségét vegye 1,1 kg/m^3 értéknek!

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/49. feladat

Egy rögzített helyzetben lévő hajócsavar esetében méréssel meghatározták, hogy a hajócsavar síkjában ébredő erő 1,5 *kN*, amikor a hajócsavarnál mért teljesítmény 12 *kW*. Határozzuk meg a hajócsavarra a propellerhatásfokot, ha tudjuk, hogy a hajócsavart egy olyan áramlásba merítették, melynek sebessége a hajócsavar előtt nagy távolságban 2,5 m/s.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/50. feladat

Mekkora teljesítményt szolgáltat 75 *km/h* szélsebesség mellett az a 3,4 *m* átmérőjű szélkerék, melynek hatásfoka 65 %. A levegő sűrűsége közelítőleg 1,15 kg/m^3. Mekkora erő hat a szélkerékre.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/51. feladat

Adott egy 23 *m* hosszú 60 *mm* belső átmérőjű acél cső. A csővezetékben víz áramlik, melynek térfogatárama 160 *liter/perc*.
Jelent-e kockázatot a pillanatszerű elzárás, ha a csővezeték legfeljebb 10 *bar* nyomást képes elviselni?
Legalább mekkora legyen az elzárás ideje, hogy a fent kiszámított nyomáslökés elkerülhető legyen?
A víz rugalmassági modulusa 2100 *N/mm*^{2}, az acélé pedig 200 *kN/mm*^{2}. A csővezeték falvastagsága 2 *mm*.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/52. feladat

Egy 1000 *mm* belső átmérőjű és 4,8 *mm* falvastagságú, 5 *km* hosszú távvezetéken óránként 6600 *tonna* kőolajat szállítanak.
Mekkora nyomáslökés jön létre a hirtelen záráskor és mennyi lehet az a minimális idő, amennyi alatt a csővezetéket le lehet zárni, úgy hogy ne jöjjön létre káros nyomáslökés.
Az olaj sűrűsége 0,91 *kg/dm*^{3}, rugalmassági modulusa 1900 *N/mm*^{2}, az acélé pedig 200 *kN/mm*^{2}.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/53. feladat

Mekkora nyomáslökéssel kell számolni a 19 *m* hosszú 32 *mm* belső átmérőjű és 1,6 *mm* falvastagságú csőben lezajló 3,1 *m/s* sebességű áramlás hirtelen leállításakor.
Mennyi lehet az a minimális idő, amennyi alatt a csővezetéket le lehet zárni, úgy hogy ne jöjjön létre káros nyomáslökés.
A víz sűrűsége 1 *kg/dm*^{3}, rugalmassági modulusa 2100 *N/mm*^{2}, az acélé pedig 200 *kN/mm*^{2}.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/54. feladat

Határozzuk meg a hang terjedési sebességét vízben!
A víz sűrűsége 1 kg/dm^3, rugalmassági modulusa 2100 N/mm^2.

A megoldás ….

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

☺ Példatár vége ☺

☺ Megoldások ☺

IK/1. feladat megoldása

A gyorsulás összefüggése: $\frac{Dc_x}{dt} = \frac{\partial c_x}{\partial t} + \frac{\partial c_x}{\partial x} c_x + \frac{\partial c_x}{\partial y} c_y + \frac{\partial c_x}{\partial z} c_z = \frac{\partial c_x}{\partial x} c_x$. Mivel c_y és c_z egyaránt nulla a keresztmetszet-átmenet tengelyében. Ebből a lokális gyorsulás természetesen zérus, hiszen a jelenség stacionáriusként volt megadva. A konvektív gyorsulás három tagja közül az első kivételével mindegyik zérus, hiszen csak a keresztmetszet-átmenet tengelyével párhuzamosan felvett ’x’ irányban van áramlás.

Fel kell írnunk, hogyan változik a sebesség a keresztmetszet-átmenet mentén!

A kontinuitás törvényéből adódóan bármely keresztmetszetben a sebesség $c_x = c_1 \frac{d_1^2}{d^2}$, ahol a d ismeretlen változása a következő módon írható fel, ha figyelembe vesszük, hogy csonka kúp alakú a keresztmetszet-átmenet: $(d - d_1) = k(x - x_1)$.
Természetesen d_1=0,1 *m*, d_2=0,2 *m*, x_1=0 és x_2=0,8 *m* így a behelyettesítés után k=0,125, azaz $d = 0{,}1 + 0{,}125 \cdot x$.

Ezt behelyettesítve a sebesség függvényébe $c_x = c_1 \cdot \frac{d_1^2}{(0{,}1 + 0{,}125x)^2}$

A parciális deriválás eredménye $\frac{\partial c_x}{\partial x} = -c_1 \cdot d_1^2 \cdot (0{,}1 + 0{,}125 \cdot x)^{-1} \cdot 0{,}125$.
Elvégezve a sebességfüggvény és a parciális derivált szorzását

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} \cdot c_x = -c_1^2 \cdot d_1^4 \cdot \frac{0{,}125}{(0{,}1 + 0{,}125 \cdot x)^3}$$

majd a behelyettesítést (x=0,4 *m*), a konvektív gyorsulás értéke:

$$\boxed{a_{konv} \approx -1{,}48 \frac{m}{\sec^2}}$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/2. feladat megoldása

A lokális gyorsulás természetesen nulla, mivel a sebesség nem függvénye az időnek.
A konvektív gyorsulás: $\frac{\partial c_x}{\partial x} \cdot c_x + \frac{\partial c_x}{\partial y} c_y + \frac{\partial c_x}{\partial z} c_z$. A sebességfüggvényt megvizsgálva egyértelmű, hogy csak az első tag különbözik nullától.

A parciális deriválás és a szorzás után $\frac{\partial c_x}{\partial x} \cdot c_x = 4x + 2x^3$. Behelyettesítve a megadott pont koordinátáit, (1;0), a konvektív gyorsulás 6 *m/s*^{2}.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/3. feladat megoldása

Az átfolyó víz térfogatáramának meghatározásához szükségünk van az átfolyási keresztmetszetre és a kifolyó víz sebességére, mivel

$$\dot{V} = c \cdot A \quad \left(\frac{m^3}{s}\right)$$

Az átfolyási keresztmetszet nagysága:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0{,}05^2 \cdot \pi}{4} = 0{,}00196 \left(m^2\right)$$

Az átfolyási sebesség meghatározásához a Bernoulli-egyenletet kell alkalmaznunk. Figyelembe véve, hogy

- a probléma stacionárius,
- a kontínuum (víz) összenyomhatatlan,
- az egyetlen ható erőtér a gravitációs erőtér

és elfogadva, hogy a Bernoulli-egyenletet egy áramvonalra írjuk fel, a következő alakú egyenletet kell alkalmaznunk:

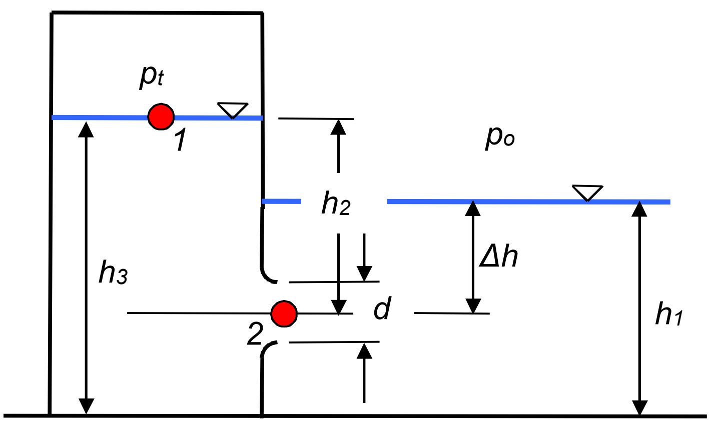
$$\left.\frac{c^2}{2}\right|_1^2 + g \cdot z\Big|_1^2 + \left.\frac{p}{\rho}\right|_1^2 = 0$$

vagy másként írva

$$\frac{c_1^2}{2} + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

A tetszőlegesen elképzelt áramvonal kezdő és végpontjában ismernünk kell tehát a sebességet, a nyomást és egy választott alapszint feletti helyzetet megmutató magasságot.

Az áramvonalat tetszőlegesen képzelhetjük. Kézenfekvőnek látszik az áramvonal kezdőpontját a tartályban lévő víz felszínére helyeznünk a végpontját pedig az átfolyási nyílás kilépő keresztmetszetébe, hiszen az itt érvényes sebességet akarjuk megkapni.



Megjegyzés: a Bernoulli-egyenlet alkalmazásakor minden esetben célszerű olyan helyen felvenni az áramvonal kezdő és végpontját, ahol a lehető legtöbb információval rendelkezünk a sebességről, nyomásról és a fontos szerepet játszó szintkülönbségről.

A következő táblázatban foglaljuk össze, hogy az imént már kétszer említett 3-3 paraméter közül melyik milyen értékkel veendő figyelembe az adott áramvonalra vonatkozóan.

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c (ismeretlen)
szintmagasság	h_3	h_1-h_2
nyomás	p_t+p_o	$p_o+\Delta h\cdot\rho\cdot g = p_o+(h_2-(h_3-h_1)\cdot\rho\cdot g$

Mint látható a kétszer három paraméter közül csak egy ismeretlen van. Behelyettesíthetünk a Bernoulli-egyenletbe

$$g\cdot h_3+\frac{p_o+p_t}{\rho}=\frac{c^2}{2}+g\cdot(h_3-h_2)+\frac{p_o+\Delta h\cdot\rho\cdot g}{\rho}$$

$$g\cdot 1{,}9+\frac{10^5+0{,}7\cdot 10^5}{1000}=\frac{c^2}{2}+g\cdot(1{,}9-1{,}3)+\frac{10^5+0{,}5\cdot 1000\cdot g}{1000}$$

$$g\cdot 1{,}9+170=\frac{c^2}{2}+g\cdot 0{,}6+105$$

$$189=\frac{c^2}{2}+111$$

$$c=\sqrt{2\cdot(189-111)}=12{,}49\ \left(\frac{m}{s}\right)!$$

A keresett térfogatáram:

$$\dot{V}=c\cdot A=12{,}49\cdot 0{,}00196\approx 0{,}0244\ \left(\frac{m^3}{s}\right)=24{,}4\ \left(\frac{liter}{s}\right)=1464\ \left(\frac{liter}{perc}\right)$$

Megjegyzések:

- Valóságos körülmények között a kiömlési sebesség és a kiömlő víz térfogatáram kisebb a kiszámítottnál. Ennek két oka van.
- A fellépő súrlódási veszteségek miatt a kiömlési sebesség kisebb. Ezt egy sebességtényezővel veszik figyelembe, mely kísérleti úton határozható meg és értéke 1-nél kisebb.
- A kifolyónyílás kialakításától függően a kilépő folyadéksugár keresztmetszete kisebb lehet annak tényleges geometriai méreténél. Ezt a jelenséget egy szűkítési tényezővel veszik figyelembe, mely szintén kisebb 1-nél. Egyszerűen fúrt lyuk esetében a szűkítési tényező megközelítheti a 0,5-et, ún. jól legömbölyített kifolyónyílásnál (lásd a feladatnál bemutatott ábrát) a szűkítési tényező jól megközelíti az ideális 1 értéket.
- Némely esetben a két említett tényező szorzataként kapható ún. kiömlési számot adják meg.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/4. feladat megoldása

Az IK/3 feladat megoldásánál alkalmazott módszert követve a Bernoulli-egyenlet felírásához az áramvonal egyik pontját a tartályban, az állandó magasságban lévő folyadékfelszínen, a másikat az átömlő nyílás után helyezzük el képzeletben. Ezekre vonatkozóan:

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	h_1	h_2
nyomás	10^5-530	10^5

A Bernoulli egyenletbe helyettesítve

$$g \cdot h_1 + \frac{p_0 - p_v}{\rho} = \frac{c^2}{2} + g \cdot h_2 + \frac{p_0}{\rho} \qquad 10 \cdot 1{,}8 + \frac{10^5 - 530}{1000} = \frac{c^2}{2} + 10 \cdot 0{,}7 + \frac{10^5}{1000}$$

Rendezés után az átömlési sebesség 4,57 m/s.

Az átömlési keresztmetszet $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0{,}075^2 \cdot \pi}{4} = 0{,}00442 \ \left(m^2\right)$

Az időegység alatt átömlő mennyiség, azaz a térfogatáram:

$$\dot{V} = A \cdot c = 0{,}00442 \cdot 4{,}57 = 0{,}0202 \left(\frac{m^3}{s}\right) = 20{,}2 \left(\frac{l}{s}\right) = 1212 \left(\frac{l}{perc}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/5. feladat megoldása

Az IK/3 és IK/4 feladatok megoldásánál elmondottakat követve felvéve az áramvonal két pontját:

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	h_1	h_2
nyomás	P_0	$P_0+900+\rho \cdot g \cdot \Delta h$

Az ábra alapján $\Delta h = h_3 - h_2 = 1{,}01$ *(m)*

A Bernoulli-egyenletbe történő behelyettesítés

$$g \cdot h_1 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{c^2}{2} + g \cdot h_2 + \frac{p_0 + 900 + \rho \cdot g \cdot \Delta h}{\rho} \qquad 10 \cdot 1{,}6 + 10^2 = \frac{c^2}{2} + 10 \cdot 0{,}5 + 100{,}9 + 10{,}1$$

Innen az átömlési sebesség éppen zérus és természetesen az időegység alatt átömlő mennyiség is zérus.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/6. feladat megoldása

Az IK/3, az IK/4 és az IK/5 feladatok megoldásához hasonlóan

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	h_1	h_2
nyomás	P_0	P_0

$$g \cdot h_1 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{c^2}{2} + g \cdot h_2 + \frac{p_0}{\rho} \qquad c = 4{,}694 \left(\frac{m}{s}\right) \qquad A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

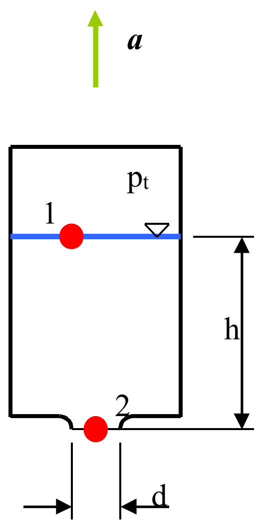
$$\dot{V} = A \cdot c = 0{,}0368 \left(\frac{m^3}{s}\right) = 36{,}8 \left(\frac{l}{s}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/7. feladat megoldása

A Bernoulli-egyenletet a tartályhoz kötött és vele együtt mozgó koordinátarendszerben kell felírni az 1-es és a 2-es pontok között. Így az instacionárius tag is kiejthető.
A helyzeti energia zérus szintjét célszerű a 2-es ponthoz tenni.
Az 1-es pontban a nyomás *0,5+p₀*, a 2-es pontban pedig p_0.
A potenciálnál figyelembe kell venni, hogy a koordinátarendszer gyorsulva mozog így benne a szokásos gravitációs gyorsulásnál nagyobb térerősség (*12 m/sec²*), mely hozzáadódik a gravitációs erőtér térerősségéhez.



Így a két pontban a folyadék energiatartalmát jellemző alapmennyiségek

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	h	0
nyomás	P_0+P_t	P_0

Ügyelve arra, hogy ezúttal a gravitációs erőtér mellett a gyorsulásból adódóan egy lineáris tehetetlenségi erőtér is hat, mégpedig a gravitációs erőtérrel megegyező irányban, a Bernoulli-egyenlet a következő

$$(g+a) \cdot h + \frac{p_0 + P_t}{\rho} = \frac{c^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} \qquad (10+12) \cdot 1{,}5 + \frac{10^5 + 0{,}5 \cdot 10^5}{1000} = \frac{c^2}{2} + \frac{10^5}{1000}$$

A kiömlési sebesség: $c = 12{,}8 \left(\frac{m}{s}\right) \qquad A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 1{,}963 \cdot 10^{-3} \quad (m^2)$

Az időegység alatt kiömlő mennyiség: $\dot{V} = A \cdot c = 0{,}0253 \left(\frac{m^3}{s}\right) = 25 \left(\frac{l}{s}\right) = 1500 \left(\frac{l}{perc}\right)$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/8. feladat megoldása

Az IK/7 feladathoz képest annyi a lényegi eltérés, hogy a gyorsulás keltette lineáris tehetetlenségi erőtér ezúttal a gravitációs erőtérrel ellentétes hatású, mivel a tartály lefelé gyorsul.

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	h	0
nyomás	P_0-P_v	P_0

$$g \cdot h - a \cdot h + \frac{p_0 - P_v}{\rho} = \frac{c^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} \qquad 10 \cdot 0{,}9 + 1{,}8 \cdot 0{,}9 + \frac{10^5 - 3700}{1000} = \frac{c^2}{2} + \frac{10^5}{1000}$$

$$c = 2{,}71 \left(\frac{m}{s}\right) \qquad A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 9{,}62 \cdot 10^{-4} \left(m^2\right)$$

$$\dot{V} = A \cdot c = 2{,}61 \cdot 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s}\right) = 2{,}61 \left(\frac{l}{s}\right) = 156{,}6 \left(\frac{l}{perc}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/9. feladat megoldása

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	h	0
nyomás	P_0	P_0

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 3{,}12 \cdot 10^{-3} m^2 \qquad g \cdot h - a \cdot h + \frac{p_0}{\rho} = \frac{c^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$

$$c = 4{,}38 \left(\frac{m}{s}\right) \qquad \dot{V} = A \cdot c = 0{,}01365 \left(\frac{m^3}{s}\right) = 13{,}65 \left(\frac{l}{s}\right)$$

A kiömlési sebesség 4,38 *m/s*, a kiömlő mennyiség 13,65 *liter/sec*.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/10. feladat megoldása
A felvetett probléma minden koordinátarendszerben instacionárius!

Az áramvonal kezdőpontját a tartályban lévő folyadék felszínén célszerű felvenni. Az áramvonal végpontja természetesen a ferde cső kilépő keresztmetszetébe helyezendő.

Ezekkel a feltételezésekkel az áramlás megindulásának pillanatára

	1. pont	2. pont
sebesség	0	0 (a megindulás pillanatában még éppen zérus!)
szintmagasság	4 *m*	$2\cdot \sin 30^o$=1 *m*
nyomás	p_t+p_o	p_o (a folyadék a légköri nyomású levegőbe lép ki)
gyorsulás	0	a (a keresett gyorsulás)

Megjegyzés: a tartály nagy méretei miatt az áramvonal kezdőpontjában a kezdeti állapotban a gyorsulás biztosan zérus. A későbbiekben pedig a vízszint állandósága miatt lehet joggal zérusnak tekinteni a gyorsulást az áramvonal elején. A stacionárius állapot kialakulása után sem az elképzelt áramvonal kezdetén sem a végén nincs gyorsulás.

A Bernoulli-egyenlet alkalmazandó formája:

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} d\vec{s} + \left(\frac{c^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + g\cdot z\Big|_1^2 + \frac{p}{\rho}\Bigg|_1^2 = 0$$

Behelyettesítéskor ügyelve arra, hogy a csatlakozó csőben végig ugyanaz a gyorsulás uralkodik, ami a cső végén

$$a\cdot(1+2)+g\cdot(1-4)+\frac{10^5-\left(10^5+0,9\cdot 10^5\right)}{1000}=0$$

$$3\cdot a-30-90=0$$

$$a=40\ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

A kezdeti gyorsulás tehát 40 m/s^2

A feladat második részének megoldásához először ki kell számítani a stacionárius állapotban kialakuló kiáramlási sebességet. Változatlan áramvonalat feltételezve:

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	4 *m*	$2\cdot \sin 30^o$=1 *m*
nyomás	p_t+p_o	p_o (a folyadék a légköri nyomású levegőbe lép ki)

$$\frac{c_1^2}{2}+g\cdot z_1+\frac{p_1}{\rho}=\frac{c_2^2}{2}+g\cdot z_2+\frac{p_2}{\rho}$$

$$g\cdot 4+\frac{10^5+0,9\cdot 10^5}{1000}=\frac{c^2}{2}+g\cdot 1+\frac{10^5}{1000}$$

$$g\cdot 4+\frac{10^5+0,9\cdot 10^5}{1000}=\frac{c^2}{2}+g\cdot 1+\frac{10^5}{1000}$$

$$c=\sqrt{2\cdot(30+90)}=15,5\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

A ferde csövet elhagyó folyadék egy ferde hajítást szenved el. A ferde hajításra vonatkozó szabályok szerint a kiszámított stacionárius sebességnek van egy vízszintes komponense és egy függőleges komponense. Ez utóbbira van szükségünk a legnagyobb magasság kiszámításához. A ferde cső 30°-os szöge miatt ez a függőleges komponens

$$c_z = 15{,}5 \cdot \sin 30^o = 7{,}75 \left(\frac{m}{s}\right)$$

Ez a függőleges komponens a gravitációs erőtérben annak térerőssége miatt állandó lassuláson megy át egészen addig, amíg zérus nem lesz. Abban a pillanatban lesz a legmagasabb ponton. Ez

$$t = \frac{c_z}{g} = \frac{7{,}75}{10} = 0{,}775 \ (s)$$

után következik be. Ez alatt a folyadék

$$\Delta z = \frac{g}{2} \cdot t^2 = 5 \cdot 0{,}775^2 = 3 \ (m)$$

magasságra emelkedik a ferde cső végétől számítva. Tehát a tartály kiömlőnyílása felett a legnagyobb magasság kb. 4 *m*.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/11. feladat megoldása

Az elzárószerelvény kinyitásakor a jobboldali tartályból indul meg az átáramlás, hiszen az elzárószerelvényél, a zárt szerelvény jobboldalán a nyomás 38200 *Pa*-al nagyobb, mint a baloldalán. A jobboldali tartályban lévő folyadék felszíne és az átáramlási keresztmetszet között felírva a Bernoulli-egyenletet a kezdeti pillanatra:

	1. pont	2. pont
sebesség	0	0 (a megindulás pillanatában még éppen zérus!)
szintmagasság	2,7 m	0 m
nyomás	p_T+p_o	$p_o-p_V+4\ 10^4$
gyorsulás	0	*a* (a keresett gyorsulás)

$$6{,}3 \cdot a + \frac{p_0 - p_V + 4 \cdot 10^4 - p_0 - p_T}{10^3} - 2{,}7 \cdot 10 = 0$$

$$6{,}3 \cdot a + \frac{-48900 + 4 \cdot 10^4 - 2300}{10^3} - 2{,}7 \cdot 10 = 0$$

$$a = 6{,}06 \ \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/12. feladat megoldása

A felvetett probléma instacionárius. A kiáramlási sebesség az első pillanatot követően gyakorlatilag azonnal beáll a 3 m-es magasságnak megfelelő stacionárius értékre majd a folyadékszint csökkenésével lassan csökken zérusig. Mivel aligha fogadható el, hogy a csökkenés lineáris, sokkal inkább aszimptotikusan csökken a sebesség a zérushoz, egy differenciálegyenletet kell felírnunk.

Bármely közbenső állapotban a kifolyási sebesség $c=\sqrt{2\cdot g\cdot z}$, hiszen a probléma megfogalmazása szerint a tartály nyitott és a szabadba történik a kifolyás. (lásd a 3.3.1 lecke 3. sz. önellenőrző feladatát).

Ezzel a '*dt*' idő alatt kifolyó mennyiség: $dV=c\cdot A_o\cdot dt=\sqrt{2\cdot g\cdot z}\cdot\frac{d^2\cdot\pi}{4}\cdot dt$

Ugyanez a mennyiség felírható abból a megfontolásból is, hogy ennyivel csökken a tartályban lévő folyadék szintje és persze a mennyiség: $dV=A\cdot dz$

A két mennyiség egymással egyenlő kell legyen, hozzátéve, hogy az egyik pozitív a másik negatívként értelmezendő, hiszen a szintmagasság csökkenése az idő növekedésével történik!

$$\sqrt{2\cdot g\cdot z}\cdot A_o\cdot dt=-A\cdot dz$$

A kapott differenciálegyenlet szétválasztható típusú, ugyanis a változók ('*t*' és '*z*') az egyenlet két oldalra rendezhetők. Elvégezve a rendezést és kijelölve az integrálást az integrálási határokkal

$$\int_{t=0}^{t=T}dt=-\frac{A}{A_o\cdot\sqrt{2\cdot g}}\cdot\int_{z=H}^{z=0}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Az integrálás és a gyöktelenítés után

$$T=\frac{A\cdot 2\cdot\sqrt{H}}{A_o\cdot\sqrt{2\cdot g}}=\frac{A\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot H}}{A_o\cdot g}$$

Számítsuk ki a tartály keresztmetszetét: $A=\frac{D^2\cdot\pi}{4}=\frac{2{,}5^2\cdot\pi}{4}=4{,}91\ \left(m^2\right)$ és a kiömlési keresztmetszetet: $A_o=\frac{d^2\cdot\pi}{4}=\frac{0{,}08^2\cdot\pi}{4}=5{,}027\cdot 10^{-3}\ \left(m^2\right)$, nincs akadálya a kiürülési idő kiszámításának:

$$T=\frac{A\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot H}}{A_o\cdot g}=\frac{4{,}91\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot 3}}{5{,}027\cdot 10^{-3}\cdot g}\approx 757\ (s)$$

ami kb. 12,6 percnek felel meg.

<u>Megjegyzések</u>

- A valóságban a kiürülés lényegesen hosszabb ideig tart és erősen függ a kiömlési számon kívül (lásd 3.3.1 lecke) a valóságos folyadék súrlódási tulajdonságaitól is. Minél kevésbé „folyós” az adott folyadék, annál lassúbb a folyamat. Az igen nehezen folyó, nagy viszkozitású anyagok (pl. egyes olajok) esetébe melegítéssel csökkentik a viszkozitást és ezzel növelik a folyékonyságot és gyorsítják a kifolyást.
- Figyeljük meg, hogy a kapott összefüggés csakis olyan esetre igaz, ahol a kérdéses tartály keresztmetszete a magasság csökkenésével változatlan. Amennyiben a keresztmetszet változik (például az igen gyakori fekvő hengeres tartály is ilyen), akkor jóval bonyolultabb az összefüggés és függ a tartály alakjától. Éppen ezért ilyen esetben célszerűbb közelítő eljárást alkalmazni. E módszer lényeg az, hogy a változó kersztmetszetű tartályt több részre bontják és az egyes részeket hengeres darabokkal helyettesítik. Az adott darabban lévő folyadékmennyiség kifolyásához szükséges időt a darab közepéhez tartozó magassággal meghatározott sebességgel, mint állandó értékkel számítják ki. A végén a kapott időket összeadják. A módszer valójában a korábban felírt differenciálegyenlet numerikus integrálását jelenti és pontossága attól függ, hogy hány darabra bontjuk a változó kersztmetszetű tartályt.

- A valóságban a tartályok kiürítésekor fontos gondolni arra, hogy a távozó folyadék helyére levegő juthasson. Ennek elmulasztása lehetetlenné teszi a tartály teljes kiürítését és könnyen a tartály összeroppanásához vezethet, ami a belsejében kialakuló vákuum következtében történhet meg.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/13. feladat megoldása

A csonka kúp alakú tartály helyettesíthető egy álló hengeres tartállyal, melynek állandó átmérője a két szélső érték átlaga.

$$c = \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \qquad \dot{V} = A_0 \cdot c \qquad dV = c \cdot A_o \cdot dt = \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot dt$$

$$dV = A \cdot dz$$

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot z} \cdot A_o \cdot dt = -A \cdot dz$$

$$\int_{t=0}^{t=T} dt = -\frac{A}{A_o \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_{z=H}^{z=0} \frac{dz}{\sqrt{z}} \qquad T = \frac{-A}{A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(-\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$d_k = \frac{D+d}{2} = \frac{3{,}6 + 2{,}1}{2} = 2{,}85 \quad (m)$$

$$A = \frac{d_k^2 \cdot \pi}{4} = 6{,}379 \quad (m^2)$$

$$A_o = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0{,}06^2 \cdot \pi}{4} = 2{,}8274 \cdot 10^{-3} \quad (m^2)$$

$$T = \frac{A \cdot 2 \cdot \sqrt{z}}{A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} = \frac{A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z}}{A_0 \cdot g} = \frac{6{,}379 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 4}}{2{,}8274 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 2017{,}95 \quad (s) = 33{,}6 \quad (perc)$$

A kiürülési idő tehát kb. 34 *perc*.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/14. feladat megoldása

Méretarányos vázlatot készítve, és a 4,21 *m* magasságot, pl. négy egyenlő magasságú részre osztva az egyes darabok magassága 1,05 m. Az egyes darabok középvonalában a szélességet le lehet olvasni a vázlatból. Ilyen módon az egyes darabok kiürülési ideje már számítható. Az ezekkel számolt idők összegeként kb. 7 *óra* adódik ki.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/15. feladat megoldása

Bár a probléma dugattyúval együttmozgó koordinátarendszerben stacionárius, ezúttal azonban mégis célszerűbb az instacionárius Bernoulli-egyenletet alkalmazni.

Az áramvonal kezdőpontját helyezzük a dugattyú alá a folyadékba, a végét pedig a fecskendő kilépő keresztmetszetébe.

	1. pont	2. pont
sebesség	c_1	1 *m/s*
szintmagasság	0 *m* (vízszintes!)	
nyomás	p_1 (a keresett érték)	p_o (a folyadék a légköri nyomású levegőbe lép ki)
gyorsulás	1 *m/s²*	a_2

Csak látszólag van három ismeretlenünk. Ha ugyanis meggondoljuk hogy a folytonosság törvénye mit mond, akkor $c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2$ és nyilván $a_1 \cdot A_1 = a_2 \cdot A_2$ is igaz kell legyen.

Ezekkel a táblázat kiegészíthető és már csak egy ismeretlen marad.

	1. pont	2. pont
sebesség	$1\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2$	1 *m/s*
szintmagasság	0 *m* (vízszintes!)	
nyomás	p_1 (a keresett érték)	p_o (a folyadék a légköri nyomású levegőbe lép ki)
gyorsulás	1 *m/s²*	$1\cdot\left(\frac{10}{2}\right)^2$

A behelyettesítéskor ügyelni kell arra, hogy a gyorsulás két különböző értéke 10 - 10 cm hosszúságú szakaszon állandó

$$1\cdot 0{,}1 + 1\cdot\left(\frac{10}{2}\right)^2\cdot 0{,}1 + \frac{1^2-\left(1\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2\right)^2}{2} + \frac{10^5-p_1}{1000} = 0$$

$$3{,}0992 + \frac{10^5-p_1}{1000} = 0$$

$$p_1 = 103099{,}2 \;\; (Pa)$$

A keresett erő kiszámításhoz azonban csak a túlnyomás értékét szabad figyelembe venni, mivel a dugattyú másik oldalán a légköri nyomás jelen van, tehát csak a „többlethez” kell az '*F*' erő.

$$F = (p_1 - p_o)\cdot A = 3099{,}2\cdot\frac{0{,}01^2\cdot\pi}{4} \approx 0{,}2434 \;\; (N)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/16. feladat megoldása

	1. pont	2. pont
sebesség	0	0
szintmagasság	0	0
nyomás	p_1	p_0
gyorsulás	a_1	a_2

$$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = 6{,}36 \cdot 10^{-5} \quad \left(m^2\right) \qquad A_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = 5{,}674 \cdot 10^{-7} \quad \left(m^2\right)$$

$$a_1 \cdot A_1 = a_2 \cdot A_2 \qquad a_1 = a_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} = a_2 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = a_2 \cdot 8{,}921 \cdot 10^{-3} \quad \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$F = \Delta p \cdot A_1$$

$$p_t = \frac{F}{A_1} = \frac{0{,}85}{6{,}36 \cdot 10^{-5}} = 13364{,}779 \quad (Pa)$$

$$p_1 = p_t + p_0 = 13364{,}779 + 100000 = 113364{,}779 \quad (Pa)$$

$$\left(8{,}921 \cdot a_2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}18 + a_2 \cdot 0{,}1\right) + \frac{p_0 - p_1}{\rho} = 0$$

$$\left(0{,}0016 \cdot a_2 + a_2 \cdot 0{,}1\right) + \frac{p_0 - p_1}{\rho} = 0$$

$$a_2 = 131{,}54 \quad \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/17. feladat megoldása

A nyomásmérő a két bekötési pont közötti nyomáskülönbséget jelzi, mely

$$p_2 - p_1 = \Delta h \cdot g \cdot \left(\rho_{Hg} - \rho_{víz}\right) = 47{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot (13{,}6 - 1) \cdot 10^3 = 5997{,}6 \ Pa$$

A nyomásmérő két kivezetése között a csővezetékben felírhatjuk a Bernoulli egyenletet, mely tartalmazza ugyanezt a nyomáskülönbséget.

$$p_2 - p_1 = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \cdot \rho_{víz}$$

Mivel mindkét sebesség ismeretlen, szükségünk van a kontinuitási törvényre, melynek segítségével például

$$c_2 = c_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

Ezt behelyettesítve a Bernoulli egyenletbe

$$p_2 - p_1 = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \cdot \rho_{víz} = c_1^2 \frac{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4}{2} \cdot \rho_{víz}$$

Innen pedig a legszűkebb keresztmetszetben a sebesség kiszámítható, aminek értéke 2,48 m/s
Ezzel pedig a térfogatáram

$$\dot{V} = c_1 \cdot \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = 2{,}48 \cdot \frac{0{,}062^2 \cdot \pi}{4} = 7{,}483 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^3}{s} = 7{,}483\ \frac{l}{s}$$

Vissza a feladathoz …

IK/18. feladat megoldása

A szivornyaműködés lényege az, hogy a felső tartályban lévő folyadék helyzeti energiája nagyobb, mint az alsóében lévőé. Ha létrehozzuk a folyadékáramlást külső energia-befektetéssel (megszívás) a folyadékáramlás már folyamatossá válik.

Az áramvonal kezdőpontját a felső tartályban lévő folyadék felszínén célszerű elhelyezni. Az áramvonal végpontja természetesen az átfolyócső végénél a kilépő keresztmetszetben kell legyen, hiszen az itteni sebességre van szükségünk a térfogatáram meghatározásához.

Így

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c (a keresett érték)
szintmagasság	2,9+0,8-0,5=3,2 *m*	*0 m*
nyomás	p_o	p_o+1350+(2,9-2,4)·ρ·g (a folyadék hidrosztatikai nyomásáról nem szabad elfeledkezni!)

$$\frac{c_1^2}{2} + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

$$g \cdot 3{,}2 + \frac{10^5}{10^3} = \frac{c^2}{2} + \frac{10^5 + 1350 + 0{,}5 \cdot 10^3 \cdot g}{10^3}$$

$$c = \sqrt{2 \cdot (132 - 106{,}35)} = 7{,}16\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

A térfogatáram pedig

$$\dot{V} = c \cdot A = 7{,}16 \cdot \frac{0{,}025^2 \cdot \pi}{4} = 3{,}514 \cdot 10^{-3}\ \left(\frac{m^3}{s}\right)$$

Tehát percenként kb. 210 *liter* folyik át.

Figyeljük meg, hogy a sebesség kiszámítására szolgáló összefüggés ismét erősen emlékeztet az adott magasságból, ebben az esetben a felső tartály folyadékszintjéről az alsó tartály folyadékszintjére történő szabadesés végsebességének képletére. Az eltérés annyi, hogy a két tartályban lévő vákuum vagy túlnyomás a ezt a szintkülönbséget növelheti vagy csökkentheti.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/19. feladat megoldása

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	Δh_3 = 3,1 m	0 m

nyomás	p_1	p_0

$$\frac{p_0 + p_{t1} + \rho \cdot g \cdot \Delta h_1}{\rho} + g \cdot \Delta h_3 = \frac{c^2}{2} + \frac{p_0 + p_{t2} + \rho \cdot g \cdot \Delta h_2}{\rho}$$

Δh_1=90-38=52 (*cm*)= 0,52 (*m*)
Δh_2=3,1+0,9-3,5=0,5 (*m*)
Δh_3=3,1

c^2=45 $\quad c = 6{,}7 \left(\frac{m}{s}\right)$

$$A = \frac{0{,}032^2 \cdot \pi}{4} = 8{,}04 \cdot 10^{-4} (m^2)$$

$$\dot{V} = A \cdot c = 8{,}04 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}71 = 5{,}395 \cdot 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s}\right) = 5{,}395 \left(\frac{l}{s}\right) = 323{,}7 \left(\frac{l}{perc}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/20. feladat megoldása

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	Δh3=3,5-0,9+Δh_2	0 m
nyomás	$p_0 - p_V + \rho g \Delta h_1$	$p_0 + \rho g \Delta h_2$
gyorsulás	1	25

$$\frac{p_0 - p_V + \rho \cdot g \cdot \Delta h_1}{\rho} + g \cdot \Delta h_3 = \frac{c^2}{2} + \frac{P_0 + \rho \cdot g \cdot \Delta h_2}{\rho}$$

Δh_1=0,90-0,38=0,52 (*m*)
Δh_2=0,35 (*m*)
Δh_3=3,5-0,9+Δh_2

$$c = 5{,}23 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\dot{V} = A \cdot c = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot c = 8{,}042 \cdot 10^{-4} \cdot 5{,}23 = 0{,}00421 \left(\frac{m^3}{s}\right) = 252{,}4 \left(\frac{l}{perc}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/21. feladat megoldása

Az ábrán felvázolt függőleges elhelyezkedésű csövön vízszintes síkban elhelyezett, két végén ellentétes irányban kb. az érintő irányába hajlított forgó cső a legegyszerűbb szivattyúként funkcionál. A szerkezetet vízzel feltöltve és megforgatva a forgó csőben lévő folyadékra ható centrifugális erőtérnek köszönhetően folyamatos áramlást hoz létre, vizet szivattyúz fel az alsó vízszintről a forgó csövön keresztül.

Energetikai szempontból tekintve a forgatáshoz felhasznált munka fedezi a folyadék felfelé irányuló áramlása során növekvő munkavégző-képességét, azaz a szerkezet segítségével a mechanikai energiát a folyadéknak tudjuk átadni.

Az ismertetett működési elv az örvényszivattyúk (centrifugál szivattyúk) esetében azonos, de ott egy, a hajlított lapátokkal ellátott, zárt térben forgatott járókerék hozza létre a centrifugális erőteret, mely a forgó kerék közepétől kifelé irányuló folyadékáramlást eredményez.

A probléma a földhöz kötött koordinátarendszerben instacionárius. A forgó csőhöz kötött koordinátarendszerben azonban jó közelítéssel stacionáriusnak tekinthető.

Az áramvonal kezdőpontját az alsó folyadékfelszínre tegyük, mégpedig a lehető legközelebb a függőleges csőhöz. Erre azért van szükség, mert a forgó rendszerből nézve ez a pont nem lesz nyugalomban és minél távolabb van a forgástengeytől annál kevésbé lehet az innen indított áramvonalat stacionáriusnak tekinteni. Ha azonban az áramvonal kezdőpontja a lehető legközelebb helyezkedik el a forgástengelyhez, akkor a minimális eltérést el lehet hanyagolni a sebességet itt majd zérusnak lehet tekinteni.

Az áramvonal végpontja természetesen a forgó cső végén található kilépő-keresztmetszetben helyezkedjen el.

Így

	1. pont	2. pont
sebesség	≈ 0	c (a keresett érték)
szintmagasság	0	*h*
nyomás	p_o	p_o
centrifugális erőtér potenciálja (lásd a 3.3.1. leckét)	$-\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} = 0$	$-\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2}$

Mivel a nyomás a választott áramvonal elején és végén azonos így a nyomás kiesik a behelyettesítés után és a Bernoulli-egyenlet baloldalán zérus fog állni

$$0 = \frac{c^2}{2} + g \cdot h - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2}$$

Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a centrifugális erőtér alatt a tömegegységen végzett munka egyenlő a mozgási és a helyzeti energia tömegegységre eső megváltozásának összegével. A szállított folyadék mennyisége tehát, adott geometriai mértek esetén csak a forgási szögsebességtől függ.

$$c = \sqrt{r^2 \cdot \omega^2 - 2 \cdot g \cdot h}$$

$$c = \sqrt{0{,}35^2 \cdot 10^2 - 2 \cdot g \cdot 0{,}5} = 1{,}5 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Nem elfeledkezve arról, hogy a forgó csőnek két vége van a térfogatáram pedig

$$\dot{V} = c \cdot A = 1{,}5 \cdot \frac{0{,}02^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 = 9{,}814 \cdot 10^{-4} \ \left(\frac{m^3}{s}\right)$$

Tehát percenként kb. 57 *liter* vizet lehet felszivattyúzni.

Figyeljük meg, hogy az egyszerű szivattyú működésének elvi korlátai vannak, ami matematikailag abban nyilvánul meg, hogy a sebesség kiszámítására szolgáló összefüggésben a négyzetgyökjel alatt nem lehet negatív szám. Tehát adott szintkülönbség esetén a forgási szögsebességnek van egy alsó korlátja ill. adott forgási szögsebesség esetén a szintkülönbség nem léphet át egy maximális értéket.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/22. feladat megoldása

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
centrifugális erőtér potenciálja	0	$-\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} + g \cdot h$
nyomás	p_0-p_V	p_0

$$\frac{c^2}{2} - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} + g \cdot h + \frac{p_0 - (p_0 - p_V)}{\rho} = 0$$

$$c = 11{,}43 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\dot{V} = A \cdot c \cdot 2 = \frac{0{,}03^2 \cdot \pi}{4} \cdot 11{,}43 \cdot 2 = 0{,}0162 \ \left(\frac{m^3}{s}\right) = 16{,}2 \ \left(\frac{l}{s}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/23. feladat megoldása

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
centrifugális erőtér potenciálja	0	$-\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} + g \cdot h$
nyomás	p_0	p_0

$$\frac{c^2}{2} - \frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} + g \cdot h + \frac{p_0 - p_0}{\rho} = 0 \qquad \frac{1{,}55^2}{2} - \frac{-0{,}28^2 \cdot \omega^2}{2} + 10 \cdot 1{,}2 = 0$$

ω=18,3512 *rad/sec*

$$n = \frac{60 \cdot \omega}{2 \cdot \pi} = \frac{60 \cdot 18{,}4}{2 \cdot \pi} = 175{,}4 \ \left(\frac{ford}{perc}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/24. feladat megoldása

	1. pont	2. pont
sebesség	0	c
szintmagasság	*0*	h
nyomás	p_o	p_o
centrifugális erőtér potenciálja	$-\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} = 0$	$-\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} + g \cdot h$

$n = \frac{60 \cdot \omega}{2 \cdot \pi} = 250 \left(\frac{ford}{perc}\right)$ ω=26,18 *rad/s*

$-\frac{r^2 \cdot \omega^2}{2} + g \cdot h + \frac{p_0 - P_0}{\rho} = 0$ $h = \frac{0{,}3^2 \cdot 26{,}18^2}{20} = 3{,}08 \quad (m)$

$c = 0 \quad \left(\frac{m}{s}\right)$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/25. feladat megoldása

Az első pillantásra a probléma az egyszerű szivattyúnál (***ÁK/20 feladat***) tárgyalttal megegyezik. Valójában annak megfordítottjáról van szó. A szerkezeten átfolyó víz ezúttal megforgatja a Segner-kereket és ilyen módon a folyadék energiájának hasznosítása történik. Ezért nevezik a szerkezetet egyszerű turbinának, hidromotornak. A forgó kerti locsoló is az áramló folyadék energiájának köszönhetően forog tengelye körül.

Energetikai szempontból tekintve a folyadék helyzeti energiája adja a fedezetét a mozgási energiának és a centrifugális erő által végzett munkának. Ebben az esetben a szerkezet segítségével a mechanikai energiát nyerhetünk az áramló folyadék energiájából.

Az ismertetett működési elv a zárt házú, ún. túlnyomásos vízturbinák esetében azonos, de ott egy, hajlított lapátokkal ellátott, zárt térben forgó járókerék tengelyén jelenik meg a hasznosítható mechanikai energia.

A probléma a földhöz kötött koordinátarendszerben instacionárius. A forgó csőhöz kötött koordinátarendszerben azonban jó közelítéssel stacionáriusnak tekinthető.

Ezúttal nem okoz gondot az áramvonal kezdőpontjának a felső tartályban lévő folyadék felszínén, a forgástengelyben történő elhelyezése.
Az áramvonal végpontja természetesen a forgó cső végén található kilépő-keresztmetszetben helyezkedjen el.

Így

	1. pont	2. pont

sebesség	0	c
szintmagasság	h_1+h_2	0
nyomás	p_o	p_o
centrifugális erőtér potenciálja (lásd a 3.3.1. leckét)	$-\frac{r^2\cdot\omega^2}{2}=0$	$-\frac{r^2\cdot\omega^2}{2}$ (ω a keresett szögsebesség)

Mivel a nyomás a választott áramvonal elején és végén azonos így a nyomás kiesik a behelyettesítés során és a Bernoulli-egyenlet ezúttal

$$g\cdot\left(h_1+h_2\right)=\frac{c^2}{2}-\frac{r^2\cdot\omega^2}{2}$$

Az egyenlet ugyan hasonlít az egyszerű szivattyúnál kapottal, de attól mégis különbözik. Két ismeretlen van benne: az egyik a forgási szögsebesség, a másik a hajlított csőből kiáramló folyadék sebessége.

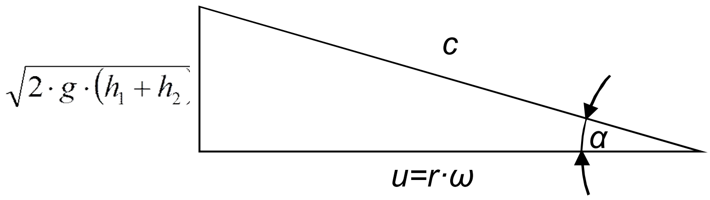
Alakítsuk át az egyenletet a következő formára

$$2\cdot g\cdot\left(h_1+h_2\right)+r^2\cdot\omega^2=c^2$$

Az egyenletben három sebesség négyzete szerepel:

- a baloldali első tag egy virtuális sebesség, mely a h_1+h_2 magasságból történő szabadesés végsebességének négyzete,
- a baloldal második tagja a kerületi sebesség négyzete,
- a jobboldalon pedig a csőszájból kilépő sebesség négyzete szerepel.

Vegyük észre, hogy az egyenlet az előbb felsorolt három sebességre nézve egy Pitagorasz-tétel, azaz mivel a kerületi sebesség érintő irányú a csőszájból kilépő sebesség pedig a hajlított cső irányába mutat a harmadik (virtuális) sebesség irányát tekintve éppen olyan kell legyen, hogy a másik kettővel egy olyan derékszögű háromszöget alkosson, melynek a csőszájból kilépő sebesség az áfogója, tehát



Az ábrán megjelölt ’α’ szög az a 15o, mely a kilépőcsőszáj és a kerületi érintő között van. Az ábra alapján

$$r\cdot\omega=\frac{\sqrt{2\cdot g\cdot\left(h_1+h_2\right)}}{tg\alpha}$$

ahonnan

$$\omega=\frac{\sqrt{2\cdot g\cdot\left(h_1+h_2\right)}}{r\cdot tg\alpha}=\frac{\sqrt{2\cdot g\cdot\left(2+1\right)}}{0{,}45\cdot tg15^o}=64{,}2\ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

Tehát a fordulatszám kb. percenként 613 lesz.
A kifolyó víz sebessége több módon is kiszámítható

$$c=\frac{\sqrt{2\cdot g\cdot\left(h_1+h_2\right)}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2\cdot g\cdot\left(2+1\right)}}{\sin 15^o}=29{,}9\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Ezzel a lefolyó víz térfogatárama

$$\dot{V} = c \cdot A \cdot 2 = 29{,}9 \cdot \frac{0{,}35^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 = 5{,}75 \left(\frac{m^3}{s} \right)$$

Érdekes megvizsgálni azt az esetet amikor a hajlított cső szája éppen az érintő irányába mutat. Ilyenkor a derékszögű háromszög nem tud létrejönni, mivel a csőszájon kilépő sebesség az érintő közötti szög zérus. Ez azt fogja eredményezni, hogy ideális folyadék és súrlódásmentes szerkezet esetén a forgó kerék folyamatos gyorsulásban lesz egészen a végtelenségig. A valóságos körülmények között súrlódás és más ellenállások egy bizonyos maximális értéknél stabilizálják a forgási szögsebességet.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

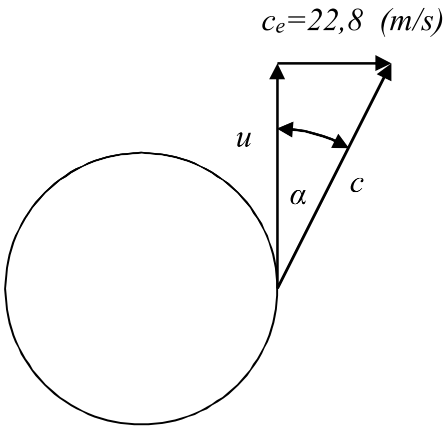
IK/26. feladat megoldása

$$p_T = \rho \cdot g \cdot h$$

$$2{,}6 \cdot 10^5 = 10^3 \cdot 10 \cdot h$$

$h=26 \ m$

$$c_e = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 22{,}80 \frac{m}{s}$$



$$tg\alpha = \frac{c_e}{u} = \frac{22{,}80}{r \cdot \omega}$$

$$\omega = 86{,}85 \frac{rad}{\sec}$$

$$n = \frac{60 \cdot \omega}{2 \cdot \pi} = 829{,}356 \left(\frac{ford}{perc} \right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/27. feladat megoldása

Az előző feladat megoldása alapján

$$c_e = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$u = r \cdot \omega = 104{,}719 \cdot 0{,}5 = 52{,}359 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$tg\alpha = \frac{c_e}{u} \qquad c_e = u \cdot tg\alpha = 52{,}359 \cdot tg 20^o = 19{,}06 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$h = \frac{c_e^2}{2 \cdot g} = \frac{19{,}06^2}{2 \cdot 10} = 18{,}2 \ (m)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/28. feladat megoldása

$$n = \frac{60 \cdot \omega}{2 \cdot \pi} = 250 \left(\frac{ford}{perc}\right) \qquad \omega = 26{,}1799 \frac{rad}{\sec}$$

$$u = r \cdot \omega = 15{,}7079 \qquad c_e = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 22{,}36 \frac{m}{s}$$

$$tg\alpha = \frac{c_e}{u} = \frac{22{,}36}{15{,}7079} = 1{,}423$$

$$\alpha = 54{,}91^o$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/29. feladat megoldása

Mivel a összenyomható gázról van szó, a Bernoulli-egyenlet a következő alakú

$$\left.\frac{c^2}{2}\right|_1^2 + \left.U\right|_1^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0$$

Az összenyomható közeg alacsony sűrűsége miatt a potenciálos erőterek által az áramló kontínuum tömegegységén végzett munka (*U*) jó közelítéssel elhanyagolható a másik két tag mellett, azaz

$$\left.\frac{c^2}{2}\right|_1^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \approx 0$$

Ezek után az áramvonal kezdő pontját a nyomás alatti tartály belsejében bárhol elhelyezhetjük (kivéve a kiömlőnyílás közvetlen környezetét!), ott a sebesség zérus lesz, azaz

$$\frac{c^2}{2} \approx -\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$$

Az egyenlet csak akkor oldható meg, ha a sűrűség helyébe azt a függvényt helyettesítjük be, mely annak a nyomástól való függését fejezi ki. Figyelemmel arra, hogy a kiáramlás közben a kontínuum nyomása csökken és természetesen kiterjeszkedik (fajtérfogata nő és sűrűsége csökken), azaz expandál, ez a folyamat elvileg vagy izotermikus vagy adiabatikus lehet. Mivel a tapasztalatok azt mutatják, hogy ilyenkor bizonyos lehűlés történik, ezért csak az adiabatikus expanziót tételezhetjük fel joggal. Ilyen adiabatikus expanzió közben

$$\frac{p_1}{\rho_1^\kappa}=\frac{p}{\rho^\kappa}.$$

Ebből az egyenletből a sűrűség és a nyomás összefüggése

$$\rho=\rho_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Ezt behelyettesítve a Bernoulli-egyenletbe és azt rendezve

$$\frac{c^2}{2}\approx-\frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1}\int_1^2\frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}}$$

Az egyenlet integrálása után

$$\frac{c^2}{2}\approx-\frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1}\frac{\kappa}{\kappa-1}\left(p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)$$

majd a zárójelben lévő kifejezésből kiemelve a tartályban uralkodó nyomás (p_1) kifejezését, a p_2/p_1 hányadost nyomásviszonynak elnevezve és helyére az '*x*' tényezőt bevezetve

$$\frac{c^2}{2}\approx-\frac{p_1}{\rho_1}\frac{\kappa}{\kappa-1}\left(x^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-1\right)$$

ahonnan végül az átrendezés és az ideális gázokra érvényes általános gáztörvény bevezetésével

$$c\approx\sqrt{2RT_1\frac{\kappa}{\kappa-1}\left(1-x^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$

<u>Megjegyzés</u>: a zárójelben a két tagot felcserélve eltüntethető a negatív előjel!

Visszatérve a feladat adataihoz, a nyomásviszony *x=1/31=0,0323*. Tekintettel arra, hogy a CO_2 gáz specifikus gázállandója $R_{CO_2}=\frac{R_{univ}}{M_{CO_2}}=\frac{8314}{44}\approx189\left(\frac{J}{kg\cdot K}\right)$ és a háromatomos gázok esetében az ún. adiabatikus kitevő 1,3, a kiáramlási sebesség

$$c\approx\sqrt{2\cdot189\cdot(15+273)\frac{1{,}3}{1{,}3-1}\left(1-0{,}0323^{\frac{1{,}3-1}{1{,}3}}\right)}\approx508\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/30. feladat megoldása

Esetünkben a nyomásviszony *x=1/76=0,0132*, az oxigén specifikus gázállandója kb. 260 *J/kg.K* és így a kiáramlási sebesség

$$c\approx\sqrt{2\cdot260\cdot(20+273)\frac{1{,}4}{1{,}4-1}\left(1-0{,}0132^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right)}\approx615\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Megjegyzés: a kétatomos gázok (és a levegő) adiabatikus kitevője 1,4

A szükséges keresztmetszet nyilván a következő összefüggésből kapható meg:

$$A = \frac{\dot{m}}{c \cdot \rho}$$

Vegyük azonban észre, hogy az összefüggés nevezőjében a sebesség és a sűrűség is a nyomásviszony függvénye, mely a kiáramlás során, az áramvonal mentén egyre változik, a kezdeti 1 értékről végül egészen a fent kiszámított *0,0132* értékre csökken. Ez arra figyelmeztet bennünket, hogy az áramvonal mentén a keresztmetszetnek valamilyen módon változnia kell. Erre a kérdésre a sebesség és a sűrűség nyomásviszonytól való függését kifejező egyenlet vizsgálata ad választ:

$$A = \frac{\dot{m}}{\sqrt{2RT_1 \frac{\kappa}{\kappa - 1}\left(1 - x^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \cdot \rho_1 \cdot (x)^{\frac{1}{\kappa}}}$$

Ezt a függvényt a nyomásviszony (*x*) szerint deriválva kiderül, hogy annak szélső értéke, mégpedig minimuma van, ami $x_{kr} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$ értéknél van. Ez számunkra azt jelenti, hogy az áramvonal mentén a keresztmetszetnek fokozatosan csökkeni kell egészen addig, amíg a nyomásviszony az itt említett kritikus értéket el nem éri és utána ismét nőnie kell egészen a végső nyomásviszonyhoz tartozó maximális sebességgel kiszámított értékig.
A feladat adataival a kritikus nyomásviszony (ez csakis a kiáramló gáz anyagi jellemzőitől függ!):

$$x_{kr} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} = 0{,}528$$

Ekkor a kontinuum sebessége még csak

$$c_{kr} \approx \sqrt{2 \cdot 260 \cdot (20+273) \frac{1{,}4}{1{,}4-1}\left(1 - 0{,}528^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right)} \approx 298 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Szükségünk van a kritikus nyomásviszonyhoz tartozó sűrűségre is

$$\rho_{kr} = \rho_1 \cdot (x)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_1}{RT_1} \cdot (x)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{76 \cdot 10^5}{260 \cdot (20+273)} \cdot 0{,}528^{\frac{1}{1{,}4}} \approx 157 \ \left(\frac{kg}{m^3}\right)$$

Ezzel a szükséges keresztmetszet

$A_{kr} = \frac{\dot{m}}{c_{kr} \cdot \rho_{kr}} = \frac{25}{298 \cdot 157} = 5{,}34 \cdot 10^{-4} \ \left(m^2\right)$, azaz az átmérő ebben a legszűkebb keresztmetszetben kb. 26 *mm* kell legyen
A további növekedés érdekében egy bővülő toldat szükséges, mely fokozatosan bővül és a kilépésnél, ahol a gáz sűrűsége

$\rho_v = \rho_1 \cdot (x)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_1}{RT_1} \cdot (x)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{76 \cdot 10^5}{260 \cdot (20+273)} \cdot 0{,}0132^{\frac{1}{1{,}4}} \approx 4{,}53 \ \left(\frac{kg}{m^3}\right)$ a keresztmetszet

$A_v = \frac{\dot{m}}{c_v \cdot \rho_v} = \frac{25}{615 \cdot 4{,}53} = 8{,}97 \cdot 10^{-3} \ \left(m^2\right)$, azaz a kilépő keresztmetszet szükséges átmérője kb. 106,9 *mm*.

Megjegyzések:

- A legszűkebb keresztmetszetben a sebesség éppen a hangsebességgel egyezik meg.
- A szűkülő majd bővülő kiömlőnyílás a probléma első leírójáról az ún. Laval-fúvóka nevet kapta.

- A szűkülő rész viszonylag rövid, a bővülő toldat azonban jóval hosszabb. Hosszát azzal a tapasztalati szabállyal lehet kiszámítani, hogy a veszteségek minimális szinten tartásához a kúpszög ne legyen nagyobb 12°-nál. Esetünkben ez kb. 385 *mm*-t tesz ki. Mivel sok esetben nagyon hosszú bővülő toldat lenne szükséges ezért ezt a szabályt nem mindig lehet betartani. Különösen igaz ez légüres térbe történő kiáramlásra, amikor elvileg végtelenül hosszú bővülő toldat lenne szükséges.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/31. feladat megoldása

A hangsebesség a nyomás alatti tartályból éppen a kritikus nyomásviszony mellett történő kiáramlás során valósul meg. A kritikus nyomásviszony ezúttal is 0,528, hiszen ez csak az adiabatikus kitevő értékétől függ, ami a levegőre is és az oxigénre is 1,4.
A hangsebesség pedig a nyomás alatti tartályból történő kiáramlás sebességére vonatkozó összefüggésből számítható ki:

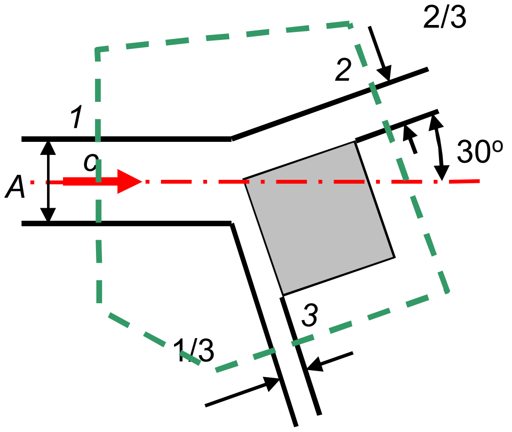
$$c_{kr} \approx \sqrt{2 \cdot 287 \cdot (30+273) \frac{1,4}{1,4-1}\left(1-0,528^{\frac{1,4-1}{1,4}}\right)} \approx 318,6 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/32. feladat megoldása

Olyan ellenőrző felületet kell felvenni, mely magába foglalja a szilárd testet és az egyes folyadéksugarakat merőlegesen metszi át. Ilyen felvétel esetén biztosítható, hogy az ellenőrzőfelület mentén mindenütt azonos a nyomás, tehát a nyomásból származó erők eredője zérus.



Az alkalmazandó impulzus-tétel

$$\int_{(A)} \bar{c} \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot d\bar{A} = \int_{(V)} \rho \cdot \bar{g} \cdot dV + \bar{R}$$

Mivel a nyomásból származó erők eredője zérus és a súrlódástól el lehet tekinteni.

Három impulzus erő határozható meg, azokon a felületeken, ahol a folyadék áthalad az ellenőrzőfelületen. Az impulzuserők mindegyike kifelé mutat az ellenőrző felületből. Az impulzuserők a következő összefüggés szerint számítható ki

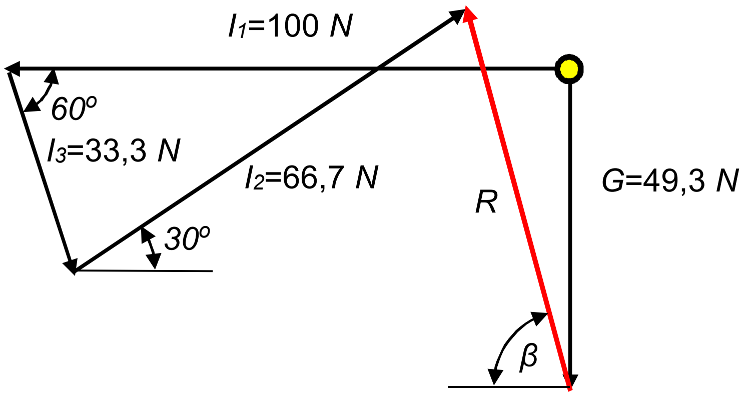
$\bar{I} = \bar{c} \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot \bar{A}$

$I_1 = c \cdot \rho \cdot c \cdot A = 10 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 100\ (N)$ (*a belépő folyadéksugárra vonatkozóan, annak sebességével ellentétesen*),

$I_2 = c \cdot \rho \cdot c \cdot A_2 = 10 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 66{,}7\ (N)$ (a vízszinteshez képest 30° alatt kilépő folyadéksugárra vonatkozóan, azzal azonos irányba mutatóan),

$I_3 = c \cdot \rho \cdot c \cdot A_3 = 10 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 33{,}3\ (N)$ (a vízszinteshez képest 60° alatt kilépő folyadéksugárra vonatkozóan, azzal azonos irányba mutatóan).

Mivel az impulzus-tételben vektormennyiségek szerepelnek, annak megoldása vektoriális módszerrel történhet.
Először az impulzus-tétel bal oldalán található erőket kell felmérni egy folytonos nyílfolyamot képezve egy tetszőlegesen felvett kezdőponttól elindulva. Ezt követően ugyanazon kezdőpontból, egy folyamatos nyílfolyamot alkotva fel kell mérni előbb a súlyerőt majd a keresett erőt úgy, hogy ugyanabba a pontba érkezzünk, ahová az impulzuserők nyílfolyama.



Az itt látható közelítőleg méretarányos ábra a feladatra vonatkozó vektorokat mutatja.

A vektorábra alapján már könnyen kikövetkeztethető, hogy a keresett 'R' erő vízszintes és függőleges komponense hogyan számítható ki.

$$R_x = I_1 - I_3 \cdot \cos 60^o - I_2 \cdot \cos 30^o = 100 - 33{,}3 \cdot \frac{1}{2} - 66{,}7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25{,}6(N)$$

$$R_y = G + I_2 \cdot \sin 30^o - I_3 \cdot \sin 60^o = 49{,}3 + 66{,}7 \cdot \frac{1}{2} - 33{,}3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 53{,}8(N)$$

A két komponensből a keresett erő

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{25{,}6^2 + 53{,}8^2} = 59{,}5\ (N)$$

Az 'R' erő a vízszintessel $\beta = arctg\frac{R_y}{R_x} = arctg\frac{53{,}8}{25{,}6} = 64{,}5^o$ szöget zár be.

Megjegyzés: bár kevésbé szemléletes, de a keresett erőkomponenseket a szilárd testek mechanikájában megszokott módon vetületi egyenletek segítségével határozzuk meg. Ilyenkor az impulzus-tétel zérusra redukált formáját kell használnunk

$$0 = -\int_{(A)} \overline{c} \cdot \rho \cdot \overline{c} \cdot d\overline{A} + \int_{(V)} \rho \cdot \overline{g} \cdot dV + \overline{R}$$

A jobbra és a felfelé mutató irányt pozitívnak tekintve a vízszintes irányú vetületi egyenlet

$$I_1 - I_2 \cdot \cos 30^o - I_3 \cdot \cos 60^o + R_x = 0$$

Ügyelni kell arra, hogy a nullára redukált alak szerint az impulzuserő -1-szeresét kell szerepeltetni a vetületi egyenletben, ahol ezúttal feltételeztük, hogy az ismeretlen 'R' erő vízszintes komponense jobbra mutat. Az egyenletbe történő behelyettesítés után a vízszintes komponens negatívnak adódik, tehát helyesen a feltételezett iránnyal szemben, azaz balra mutat. A függőleges komponens meghatározásához a vetületi egyenletet hasonló módon lehet felírni.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

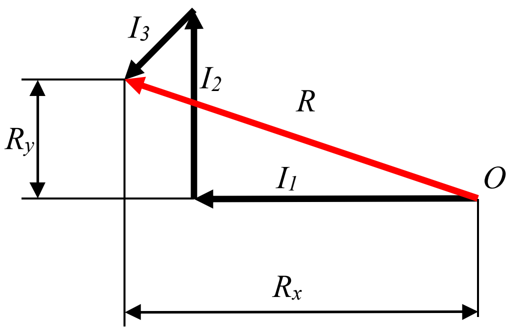
IK/33. feladat megoldása

$$\int_{(A)} \overline{c} \cdot \rho \cdot \overline{c} \cdot d\overline{A} = \overline{G} - \overline{P} + \overline{S} + \overline{R}$$

$$I_1 = c \cdot \rho \cdot c \cdot A = 25 \cdot 1000 \cdot 150 \cdot 10^{-4} = 375 \ (N)$$

$$I_2 = \frac{2}{3} I_1 = 250 \ (N)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} I_1 = 125 \ (N)$$



$$R_x = I_1 + I_3 \cdot \cos 45^o = 375 + 250 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 463{,}4 \ (N)$$

$$R_y = I_2 - I_3 \cdot \sin 45^o = 250 - 125 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 161{,}6 \ (N)$$

A vektorábrából az ellenőrző felületre ható erő vízszintes komponens 463,4 *N* és balra mutat, a függőleges komponense pedig 161,6 *N* és felfelé mutat. A keresett, a folyadék által a lapátra kifejtett erő két komponense éppen ellentétes irányú, tehát jobbra és lefelé mutat!

Vissza a feladathoz …

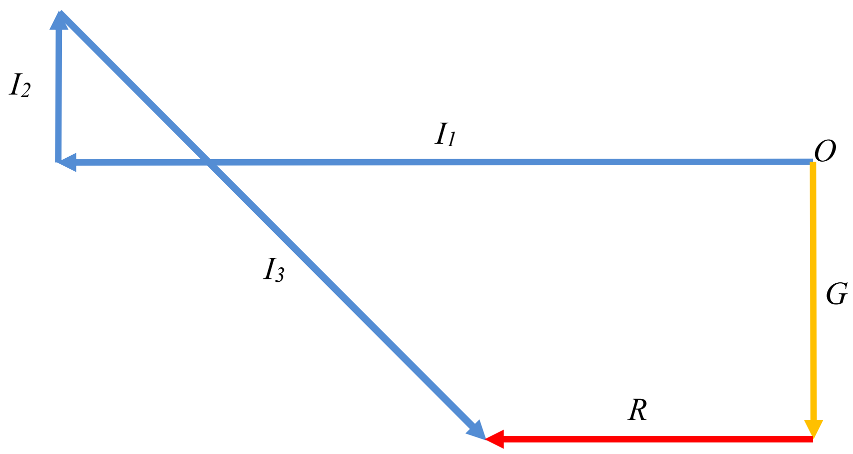
☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/34. feladat megoldása

$$\int_{(A)} \bar{c} \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot d\bar{A} = \bar{G} - \bar{P} + \bar{S} + \bar{R}$$

$I_1 = c \cdot \rho \cdot c \cdot A = 10 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-4} = 100 \quad (N)$
$I_2 = 20 \quad (N)$
$I_3 = 80 \quad (N)$

Az impulzus-tétel jobb oldalán a megadott vízszintes irányú erő mellett csak a súlyerő található, melynek az iránya szintén ismert, függőlegesen lefelé mutat.



.

$$G = I_3 \cdot \sin 45^o - I_2 = 80 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 20 = 36{,}56 \quad (N)$$

$$R = I_1 - I_3 \cdot \cos 45^o = 100 - 80 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 43{,}43 \quad (N)$$

Így a vektorábra alapján a test súlya kb. 36,6 *N*, a vízszintes erő pedig 43,4 *N*.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

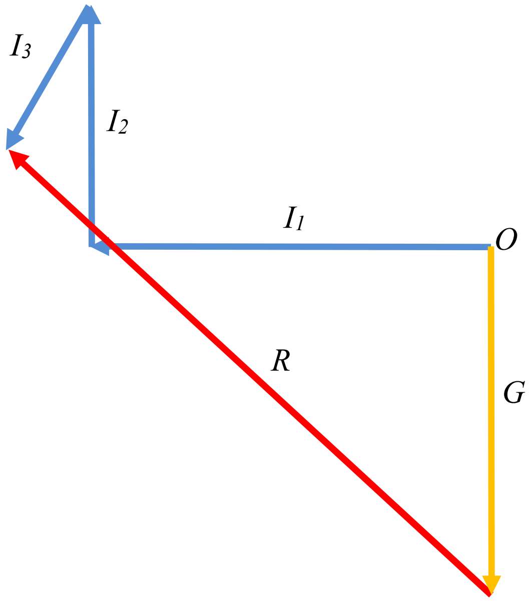
IK/35. feladat megoldása

A jelenség a lapáttal együttmozgó koordinátarendszerből lesz stacionárius. Ebben a koordinátarendszerben az érkező és a távozó folyadék sebessége c'=(c-u)=2,6 *m/s* lesz.

$I_1 = c' \cdot \rho \cdot c' \cdot A = 2{,}6^2 \cdot 1000 \cdot 78 \cdot 10^{-4} = 52{,}7 \quad (N)$

$$I_2 = \frac{3}{5} \cdot I_1 = 31{,}6 \quad (N)$$

$$I_3 = \frac{2}{5} \cdot I_1 = 21{,}1 \quad (N)$$



$$R_x = I_1 + I_3 \cdot \cos 60^o = 52{,}7 + 21{,}1 \cdot \frac{1}{2} = 63{,}3 \ (N)$$

$$R_y = I_2 - I_3 \cdot \sin 60^o + G = 52{,}7 - 21{,}1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 46 = 80{,}4 \ (N)$$

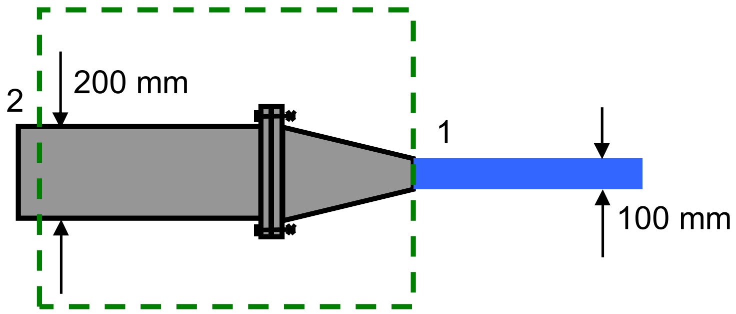
A vektorábra alapján a vízszintes komponens 63,25 *N* és balra mutat, a függőleges komponens pedig 80,4 *N* és felfelé mutat.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/36. feladat megoldása

Az ellenőrző felületet pl. az alábbi ábra szerint célszerű felvenni:



Az adott problémához a következő formájú impulzus-tételt kell alkalmaznunk

$$\int_{(A)} \bar{c} \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot d\bar{A} = -\int_{(A)} p \cdot d\bar{A} + \bar{R}$$

Két impulzuserővel kell számolnunk és ezúttal nem igaz, hogy az ellenőrző felület mentén azonos a nyomás. A tömlőben a nyomás nyilván számottevően nagyobb, mint a környezeti nyomás.

Először határozzuk meg, hogy mekkora az áramlási sebesség a fecskendőből kilépő folyadéksugárban és a tömlőben.

$$c_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{\frac{0{,}1^2 \cdot \pi}{4}} = 6{,}37 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$c_2 = c_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 6{,}37 \cdot \left(\frac{100}{200}\right)^2 = 1{,}59 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

Az impulzuserők:

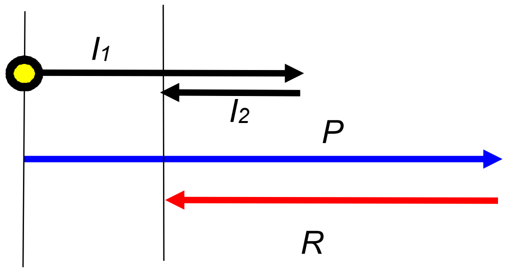
$$I_1 = c_1^2 \cdot \rho \cdot A_1 = 6{,}37^2 \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}1^2 \cdot \pi}{4} = 318{,}7 \ (N)$$

$$I_2 = c_2^2 \cdot \rho \cdot A_2 = 1{,}59^2 \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}2^2 \cdot \pi}{4} = 79{,}4 \ (N)$$

A nyomásból származó erőkkel kapcsolatban fontoljuk meg, hogy a felvett ellenőrző felület mentén a nyomás mindenütt a légköri nyomással egyenlő, kivéve azt a részt, mely a tömlő belsejébe esik. A nyomásból származó erők eredője tehát arányos azzal a túlnyomással, mely a tömlőben uralkodik.

$$P = (p_2 - p_o) \cdot A_2 = (1{,}2 - 1) \cdot 10^5 \cdot \frac{0{,}2^2 \cdot \pi}{4} = 628 \ (N) \ ;$$

Tekintettel arra, hogy ezúttal minden erő egy egyenesbe esik, csak az irányukra kell ügyelni.



Az ábra alapján a keresett erő

$$R = P - (I_1 - I_2) = 628 - (318{,}7 - 79{,}4) \approx 388{,}7 \ (N)$$

A tömlővéget ezzel az erővel megegyező nagyságú, de éppen ellentétes erő igyekszik leválasztani a tömlőről!

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/37. feladat megoldása

Ebben az esetben egy olyan ellenőrző felületet kell felvennünk, melynek egyetlen keresztmetszetén lép át folyadék és ez a fecskendő vége. Ez az ellenőrző felület magában foglalja a teljes csővezetéket. Ilyen felvétel esetén az ellenőrző felület mentén mindenütt azonos a nyomás. A súlyerők és a súrlódás elhanyagolásával a keresett erő nem más, mint a folyadéksugár impulzuserejével ellent tartó erő

$$I = c^2 \cdot \rho \cdot A = c \cdot \rho \cdot \dot{V} = R$$

A térfogatáram ismeretében a kiáramlási sebesség

$$c = \frac{R}{\dot{V} \cdot \rho} = \frac{1000}{\frac{2000}{60 \cdot 1000} \cdot 1000} = 30 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$

A keresztmetszet

$$A = \frac{\dot{V}}{c} = \frac{\frac{2000}{60 \cdot 1000}}{30} = 1{,}089 \cdot 10^{-3} \quad \left(m^2\right)$$

Az ehhez tartozó átmérő pedig 37,2 *mm*.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/38. feladat megoldása

Az ellenőrző felület a csőtoldatot rögzítő csavaroknál metssze át a tömlőt! Követve az IK/35 feladat megoldási menetét:

$$\dot{V} = 2500\left(\frac{l}{perc}\right) = 41\left(\frac{l}{s}\right) = 41{,}666 \cdot 10^{-3}\left(\frac{m^3}{s}\right)$$

$$\dot{V} = A_1 \cdot c_1 \quad , \quad c_1 = 21{,}22 \left(\frac{m}{s}\right) \quad , \quad c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2 \quad , \quad c_2 = 4{,}38 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$I_1 = c \cdot \rho \cdot c \cdot A = 21{,}22^2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}9635 \cdot 10^{-3} = 884{,}1 \ (N)$$

$$I_2 = c \cdot \rho \cdot c \cdot A = 4{,}3837^2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}5034 \cdot 10^{-3} = 182{,}6 \ (N)$$

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$p_2 - p_o = \left(\frac{c_1^2}{2} + \frac{c_2^2}{2}\right) \cdot \rho = \frac{21{,}22^2 - 4{,}38^2}{2} \cdot 10^3 = 215{,}6 \,\mathrm{kPa}$$

$$P = \left(p_2 - p_o\right) \cdot A_2 = 215{,}6 \cdot 10^3 \cdot \frac{0{,}11^2 \cdot \pi}{4} = 2047{,}9 \quad (N)$$

$$R = P - \left(I_1 - I_2\right) = 2047{,}9 - \left(884{,}1 - 182{,}6\right) \approx 1346{,}4 \quad (N)$$

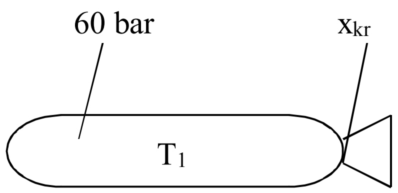
A keletkező reakcióerő 1346,4 *N*. Ezt az erőt a négy csavar fel tudja venni, tehát a négy csavar alkalmazása elegendő.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/39. feladat megoldása

Az ellenőrzőfelület ölelje körül az egész tartályt, Ebben az esetben a tolóerő éppen a kilépő keresztmetszetben keletkező sebességgel számítható impulzuserővel lesz egyenlő.



$$R = \frac{8314}{28} = 297 \left(\frac{J}{kg \cdot K}\right)$$

$$x_{kr}=\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}=\left(\frac{2}{2{,}4}\right)^{3{,}5}=0{,}528\approx 0{,}53$$

$$x=\frac{p_o}{p_1}=\frac{1}{60}=0{,}0167$$

Az expanzió kritikuson túli! A kritikus sebesség, mely a Laval fúvóka legszűkebb keresztmetszetében alakul ki, azaz a hangsebesség

$$c_{kr}=\sqrt{2\cdot 297\cdot 293\cdot\frac{1{,}4}{1{,}4-1}\cdot\left(1-0{,}53^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right)}=318{,}5\quad\left(\frac{m}{s}\right)$$

A Laval fúvóka kilépő keresztmetszetében kialakuló sebesség

$$c_{ki}=\sqrt{2\cdot 297\cdot 293\cdot\frac{1{,}4}{1{,}4-1}\cdot\left(1-0{,}0167^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right)}=648\quad\left(\frac{m}{s}\right)$$

A kilépő keresztmetszetben a gázsugár hőmérséklete

$$T=T_1\cdot\left(\frac{1}{60}\right)=293\cdot 0{,}31=91\quad(K)$$

Az általános gáztörvény segítségével ugyanitt a sűrűség

$$\rho=\frac{P_0}{R\cdot T}=\frac{10^5}{297\cdot 91}=3{,}7\quad\left(\frac{kg}{m^3}\right)$$

Az impulzus erő, mely a tolóerővel egyezik meg

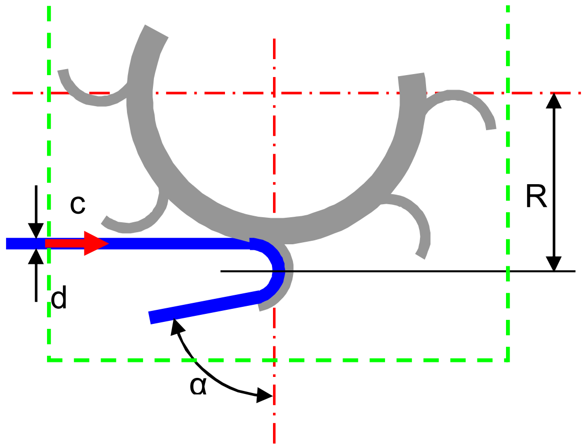
$$I_2=648^2\cdot 3{,}7\cdot\frac{0{,}5^2\cdot\pi}{4}=305\quad(kN)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/40. feladat megoldása

A Pelton-turbina az ún. szabadsugár-turbinák közé tartozik. Az elnevezés arra utal, hogy a turbinakerék körül nincs túlnyomás sehol. Ilyen szabadsugár-turbina az egyik legrégebbi gép, a kerületén egyszerű sík lapokkal felszerelt az egyszerű vízikerék is.
Az ilyen szabadsugár-turbinák esetében az ellenőrző felületet úgy kell felvenni, hogy az ölelje körül az egész turbinakereket. Csak ebben az esetben lesz a jelenség legalábbis kvázi-stacionárius, tehát így nyílik lehetőség az impulzus-tétel alkalmazására, előbb a kerületi erő, majd a teljesítmény kiszámítására.



Az említett ellenőrző felület mentén a nyomás mindenütt atmoszférikus, tehát a nyomásból származó erők eredője zérus. A súrlódást tekintsük elhanyagolhatónak! A súlyerő a kerékre ható nyomaték szempontjából figyelmen kívül hagyható, hiszen átmegy a forgástengelyen.
Így az impulzus-tétel

$$\int_{(A)} \bar{c} \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot d\bar{A} = \bar{K}$$

Tekintettel arra, hogy az ellenőrző felületből a folyadék kilépésének helye nem határozható meg, ezért az egyenlet baloldalának integrálja a következő megfontolás alapján határozható meg.

A $\bar{c} \cdot \rho \cdot \bar{A}$ szorzat nem más, mint az időegység alatt érkező folyadék tömege, azaz a tömegáram, amit ismerünk. Ezt a tömegáramot kell megszorozni az ellenőrzőfelületen áthaladó folyadéksugár sebességváltozásával (*irány és nagyság megváltozását egyaránt figyelembe véve*), pontosabban a kerék érintőjének egyenesébe eső komponensek különbségével.

Esetünkben az érkező folyadéksugár sebessége *c* és ez egyúttal a kerék érintőjébe esik.
A lapátról távozó folyadéksugár sebessége az *u* kerületi sebességgel haladó lapáthoz kötött koordinátarendszerben nyilván *c-u*, aminek a kerék érintőjének irányába eső komponense $-(c-u)\cdot \sin\alpha$ (*a negatív előjel mutatja, hogy a belépő sebesség irányával ellentétes*).
Ugyanezen sebesség(*komponens*) a földhöz kötött koordinátarendszerben $-(c-u)\cdot \sin\alpha + u$.
Mindezek alapján a kerületi erő, mely nem más mint az impulzuserő
$K = c \cdot \rho \cdot A \cdot [c - (-(c-u)\cdot \sin\alpha + u)]$, ami a zárójelek felbontása és a célszerű kiemelés után a következő végösszefüggést adja:
$K = c \cdot \rho \cdot A \cdot (c-u)\cdot(1+\sin\alpha)$

<u>Megjegyzés</u>: itt az α szög nem a teljes irányelterelés, hanem a "függőlegestől számított" elterelés. Ha a tényleges irányelterelést akarjuk használni, akkor a fenti összefüggés a $K = c \cdot \rho \cdot A \cdot (c-u)\cdot(1-\cos\beta)$ alakot ölti.
Az első esetben az α szög –90° és +90° között, a második esetben pedig a β szög 0° és 180° között változik.

Látható, hogy a kerületi erő adott kerületi sebesség esetén zérus és az "alapérték" kétszerese között változik az irányelterelés függvényében.

A feladat adataival a kerületi erő

$$K = 16 \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}08^2 \cdot \pi}{4} \cdot (16-3)\cdot(1+\sin 60^o) \approx 1951 \ (N).$$

A keresett nyomaték pedig

$M = K \cdot R = 1951 \cdot 2 = 3902 \ \ (mN)$

A turbina teljesítménye vagy a nyomaték és a szögsebesség, vagy a kerületi erő és a kerületi sebesség szorzataként kapható meg. Mindkét esetben jól látszik, hogy a turbina teljesítménye a kerületi sebesség ill. a szögsebesség (*fordulatszám*) függvényében változik

$P = K \cdot u = c \cdot \rho \cdot A \cdot (c-u) \cdot (1+\sin\alpha) \cdot u = c \cdot \rho \cdot A \cdot (1+\sin\alpha) \cdot (c \cdot u - u^2)$

Ennek a függvénynek kell a szélsőértékét keresni.

$\frac{dP}{du} = c \cdot \rho \cdot A \cdot (1+\sin\alpha) \cdot (c-2u)$

Egyenlővé téve zérussal azt kapjuk, hogy a szélsőérték $u = \frac{c}{2}$-nél van tehát akkor, ha a kerületi sebesség éppen fele akkora, mint az érkező folyadéksugár sebessége.

Rövid gondolkodás után rájöhetünk arra, hogy ez a szélsőérték maximum, hiszen a teljesítmény mind *u=0* -nál mind pedig *u=c* -nél éppen zérus.

Esetünkben tehát a teljesítmény maximális lesz akkor, ha *u* =8 m/sec. Ekkor a kerék szögsebessége

$\omega = \frac{u}{R} = \frac{8}{2} = 4 \ \left(\frac{rad}{s}\right)$

ahonnan a fordulatszám $n = \frac{60 \cdot \omega}{2 \cdot \pi} = \frac{60 \cdot 4}{2 \cdot \pi} = 38{,}2 \ \left(\frac{ford}{\min}\right)$

A maximális teljesítmény pedig

$P_{\max} = K \cdot u = M \cdot \omega = 1951 \cdot 8 = 3902 \cdot 4 = 15608\,(\mathrm{W}) \approx 15{,}6\,(\mathrm{kW})$.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/41. feladat megoldása

A kerületi sebesség *u=ω·R=1,04·2,1=2,184 (m/s)*. Ezzel és az egyéb megadott értékekkel, figyelemmel arra, hogy ezúttal 180°-os az elterelés

$K = c \cdot \rho \cdot A \cdot (c-u) \cdot (1+\sin\alpha) = 2{,}3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot (2{,}3 - 2{,}184) \cdot (1+1) \approx 128 \ \ (N)$

A teljesítmény pedig $P = K \cdot u = 128 \cdot 2{,}184 \approx 279{,}5 \ \ (W)$.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/42. feladat megoldása

A megadott magasság alapján a tápláló folyadéksugár sebessége

$c = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 40 \ \left(\frac{m}{s}\right)$

$n = \frac{60 \cdot \omega}{2 \cdot \pi} = 500 \ \left(\frac{ford}{perc}\right)$

$\omega = 52{,}36 \ \left(\frac{rad}{sec}\right)$

$u = r \cdot \omega = 52{,}36 \cdot 0{,}4 = 21 \ \left(\frac{m}{s}\right)$

A kerületi erő

$K = \rho \cdot c \cdot A \cdot (c - u) \cdot (1 + \sin 45^0)$

$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 2{,}8 \cdot 10^{-3} (m^2)$

A szükséges vízmennyiség percenként

$\dot{V} = A \cdot c = 0{,}113 \ \left(\frac{m^3}{s}\right) = 6{,}78 \ \left(\frac{m^3}{perc}\right)$

$K = 112 \cdot 19{,}056 \cdot 1{,}707 = 3643 \ (N)$

A teljesítmény pedig

$P = K \cdot u = 3643 \cdot 21 = 76303 \ (W)$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/43. feladat megoldása

Az IK/41 feladat megoldását követve a turbinát tápláló fúvókából kilépő sebességre nézve másodfokú egyenlet adódik, melynek két gyöke közül csak az egyik pozitív.

$n = \frac{60 \cdot \omega}{2 \cdot \pi} = 500 \ \left(\frac{ford}{perc}\right)$

$\omega = 52{,}36 \ \left(\frac{rad}{\sec}\right)$

$u = r \cdot \omega = 26{,}2 \ \left(\frac{m}{s}\right)$

$K = \frac{P}{u} = \frac{20000}{26{,}2} \approx 764 \ (N)$

A turbinát tápláló fúvókából kilépő vízsugár sebességére nézve másodfokú egyenlet adódik.

$K = \rho \cdot c \cdot A \cdot (c - u) \cdot (1 + \sin 45^0)$

$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 1{,}96 \cdot 10^{-3} \ (m^2)$

$764 = c \cdot 1{,}96 \cdot (c - 26{,}2) \cdot 1{,}5$

$259 = c^2 - 26{,}2c$

A két gyök közül csak az egyik pozitív.

$c_{1,2} = \frac{26{,}2 \pm 37{,}83}{2} \rightarrow 33{,}8 \ \left(\frac{m}{s}\right)$

A szükséges vízmennyiség:

$\dot{V} = A \cdot c = 1{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot 33{,}8 = 66{,}3 \cdot 10^{-3} \ \left(\frac{m^3}{s}\right) = 238{,}8 \ \left(\frac{m^3}{h}\right)$

A keresett magasság a $c = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ összefüggésből 57,3 (m)

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/44. feladat megoldása

A hirtelen keresztmetszet-bővülés utáni áramlási sebességet könnyen meghatározhatjuk, mert a folytonosság törvénynek teljesülnie kell, tehát

$$c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2$$

ahonnan

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = 4{,}3 \cdot \left(\frac{150}{200}\right)^2 = 2{,}42 \left(\frac{m}{s}\right)$$

A nyomás meghatározására két lehetőségünk van: vagy a Bernoulli-egyenletet vagy az impulzus-tételt alkalmazhatjuk.

A szűk torkolatból kilépő folyadék nem képes egyenletes áramlással azonnal kitölteni a hirtelen kibővült keresztmetszetet. Az egyenletesen áramló folyadékot örvénylő mozgást végző folyadékrészek veszik körül. Ezek az örvények az egyenletesen áramló folyadéktól vonnak el energiát így csökkentve a folyadék összes energiatartalmát.

A keresett nyomás tehát helyesen az impulzus-tétel segítségével számítható ki. Másik lehetőség a veszteségmentes esetre a Bernoulli-egyenlettel kiszámított nyomásból levonjuk a Borda-Carnot veszteséget.

$$\Delta p_{impulzus\text{-}tétel} = \left(c_1 \cdot c_2 - c_2^2\right) \cdot \rho = \left(4{,}3 \cdot 2{,}42 - 2{,}42^2\right) \cdot 1000 = 4549{,}6\,(Pa)$$

A keresett nyomás a hirtelen keresztmetszet-bővülés után

$$p_2 = p_1 + \Delta p_{impulzus\text{-}tétel} = 3{,}4 \cdot 10^5 + 4549{,}6 \approx 344{,}5\ (kPa)$$

Ellenőrzésként a másik módszer szerint

$$\Delta p_{Bernoulli} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \cdot \rho = \frac{4{,}3^2 - 2{,}42^2}{2} \cdot 1000 = 6316{,}8\ (Pa)$$

A Borda-Carnot veszteség

$$\Delta p_{B-C} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \rho = \frac{(4{,}3 - 2{,}42)^2}{2} \cdot 1000 = 1767{,}2\ (Pa)$$

Azaz a nyomás nem 6316,8 (Pa) értékkel fog nőni, hanem a Borda-Carnot veszteség értékével csökkentett érték szerint

$$p_2 = p_1 + \left(\Delta p_{Bernoulli} - \Delta p_{B-C}\right) = 3{,}4 \cdot 10^5 + (6316{,}8 - 1767{,}2) = 344{,}5\ (kPa)$$

A két érték természetesen megegyezik egymással.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/45. feladat megoldása

A keresztmetszetek:

$$A_1 = \frac{0{,}06^2 \cdot \pi}{4} = 2{,}827 \cdot 10^{-3}\ \left(m^2\right)$$

$$A_2 = \frac{0{,}14^2 \cdot \pi}{4} = 0{,}015\ \left(m^2\right)$$

A Bernoulli-egyenlet:

$$c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2$$
$$c_1 \cdot 2{,}827 \cdot 10^{-3} = c_2 \cdot 0{,}0154$$
$$c_1 = \frac{c_2 \cdot 0{,}0154}{2{,}827 \cdot 10^{-3}} = 5{,}447 \cdot c_2$$

A mért nyomásemelkedés a Bernoulli egyenletből számított elméleti nyomásemelkedés és a Borda-Carnot veszteség különbsége:

$$8900 = \frac{(5{,}447 \cdot c_2)^2 - c_2^{\,2}}{2} \cdot 1000 - \frac{(5{,}447 \cdot c_2 - c_2)^2}{2} \cdot 1000$$

Vagy másként az impulzus tételből számítható nyomáskülönbség:

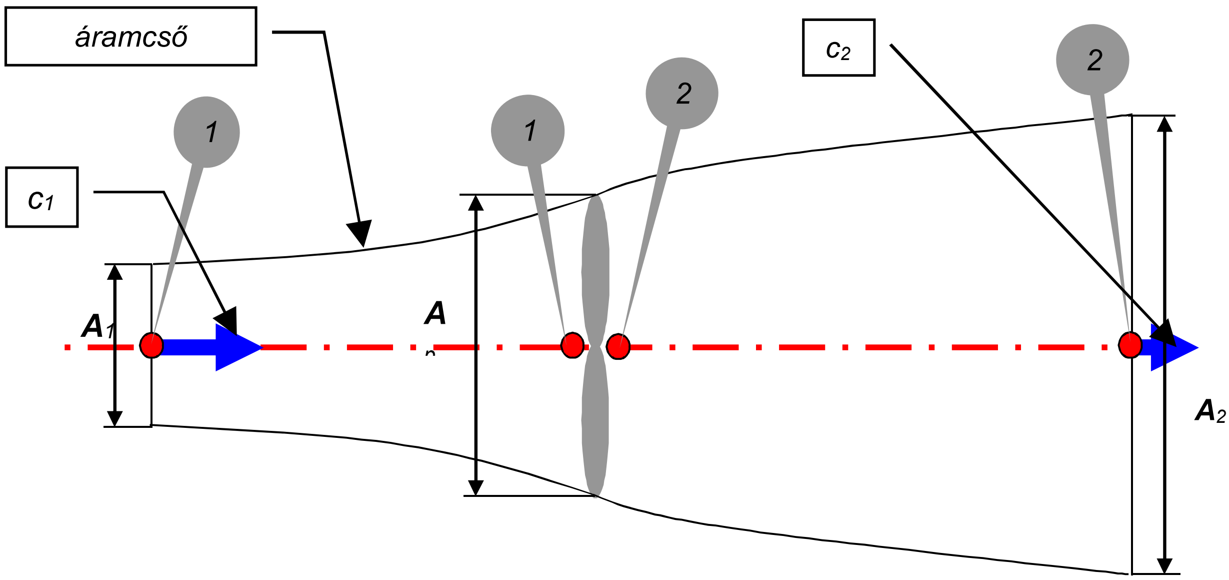
$$8900 = \left(c_1 \cdot c_2 - c_2^2\right) \cdot 1000 = \left(5{,}447 \cdot c_2^2 - c_2^2\right) \cdot 1000$$
$$17{,}8 = 29{,}67 \cdot c_2^2 - c_2^2 - 19{,}775 \cdot c_2^2$$
$$c_2 = \sqrt{\frac{17{,}8}{8{,}895}} = 1{,}415 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$
$$c_1 = 5{,}447 \cdot c_2 = 7{,}71 \ \left(\frac{m}{s}\right)$$
$$\dot{V} = A \cdot c = 7{,}71 \cdot 2{,}827 \cdot 10^{-3} = 0{,}0218 \ \left(\frac{m^3}{s}\right) = 21{,}8 \ \left(\frac{liter}{s}\right)$$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/46. feladat megoldása

A forgó szélkerékre illeszkedő, áramcsőként elképzelt ellenőrző felületre felírható egyfelől az impulzus tétel, másfelől – két részletben – a Bernoulli-egyenlet.



Az impulzus-tételből

$$F = c_p \cdot A_p \cdot \rho \cdot (c_1 - c_2)$$

A Bernoulli-egyenletből

$$\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

A két egyenlet összevetéséből a szélkerék síkjában az elméleti sebesség

$$c_p = \frac{c_1 + c_2}{2}$$

A szélkerék hatásfoka a szélkerék által időegység alatt hasznosított mozgási energia és az időegység alatt összesen rendelkezésre álló mozgási energia hányadosa, azaz

$$\eta_{szk} = \frac{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \cdot \rho \cdot c_p \cdot A_p}{\frac{c_1^2}{2} \cdot \rho \cdot c_p \cdot A_p} = 1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{c_2}{c_{szél}}\right)^2.$$

A megadott hatásfok ismeretében kiszámítható a szélkerék mögött, attól nagy távolságban érvényes sebesség, ami

$$c_2 = \sqrt{1 - \eta_p} \cdot c_{szél} = 0{,}53 \cdot 22{,}2 \approx 11{,}7\,\frac{m}{s}$$

A szélkerék síkjánál a levegő áramlási sebességének elméleti értéke:

$$c_p = \frac{c_2 + c_{szél}}{2} = \frac{11{,}7 + 22{,}2}{2} \approx 17\,\frac{m}{s}$$

A szélkerék síkjában ható erő a legegyszerűbben a szélkereket is magába foglaló ellenőrző felületre felírt impulzus tételből határozható meg:

$$F = c_p \cdot A_p \cdot \rho \cdot (c_1 - c_2) = 17 \cdot \frac{6{,}5^2 \cdot \pi}{4} \cdot 1{,}22 \cdot (22{,}2 - 11{,}7) = 7226\,N$$

Ezzel pedig a szélkerék teljesítménye:

$$P_h = P_{szk} = F \cdot c_p \approx 122{,}8\,kW$$

Megjegyzés.
A hasznos teljesítmény összefüggését megvizsgálva

$$P_h = F \cdot c_p = c_p \cdot A_p \cdot \rho \cdot (c_1 - c_2) \cdot c_p = \frac{c_1 + c_2}{2} \cdot A_p \cdot \rho \cdot (c_1 - c_2) \cdot \frac{c_1 + c_2}{2}$$

azt tapasztalhatjuk, hogy az mind c_1-re mind c_2-re harmadfokú függvény. Ha megkeressük ennek a függvénynek a szélsőértékét, akkor megkapjuk a választ arra a kérdésre, hogy milyen mértékben kell lelassítania a szélkeréknek a szél sebességét, ahhoz, hogy a lehető legnagyobb teljesítményt tudjuk hasznosítani.

A szélsőérték-keresés végeztével azt találhatjuk, hogy a hasznos teljesítmény akkor maximális, ha $c_2 = c_1/3$, azaz a maximális hasznos teljesítmény a szélsebességgel és a szélkerék keresztmetszeti területével kifejezve

$$P_{h\max} = \frac{16}{27} \cdot \frac{c_1^3}{2} \cdot \rho \cdot A_p \quad (W)$$

Szavakban kifejezve: a légcsavarkörnek megfelelő területen időegység alatt átáramló levegő összes energiájának legfeljebb 16/27-ed része, azaz 59,3%-a hasznosítható. Ez a szakirodalomban a Betz-limit néven említik.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/47. feladat megoldása

A közegellenállási erő nyilván éppen egyenlő a hajócsavarok tolóerejével.
A hajócsavarra ill. légcsavarra az *IK/45* feladat megoldásánál elmondottak érvényesek, de a következő eltérésekkel (azonos jelöléseket használva):

- az áramlási irány megfordul, hiszen a hajócsavar hozza létre azt,
- hasznos teljesítmény a hajócsavarnál jelentkező erő és a c_2 sebesség (ez a hajtott jármű sebessége) szorzata,
- összes teljesítmény a létrehozott mozgási energiaváltozás az időegységre vetítve.

Így a propeller vagy propulziós hatásfok

$$\eta_p = \frac{P_h}{P_ö} = \frac{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \cdot \rho \cdot A_p \cdot c_2}{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \cdot \rho \cdot A_p \cdot c_p} = \frac{c_2}{\frac{c_1 + c_2}{2}} = \frac{2}{1 + \frac{c_1}{c_2}}$$

Ne feledjük, hogy c_2 a légcsavarral/hajócsavarral hajtott jármű sebessége!

A maximális haladási sebesség: 46,8 *km/h*, Egy hajócsavar tolóereje: 1979 *kN*, a közegellenállási erő pedig ennek éppen kétszerese: kb. 3958 *kN*.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/48. feladat megoldása

A hasznos teljesítmény összefüggésében valamennyi sebességet a szélsebesség függvényeként kell kifejezni:

$$P_h = (c_1 - c_2) \cdot c_p \cdot \rho \cdot A_p \cdot c_p$$

$$c_2 = \sqrt{(1 - \eta_{sz})} \cdot c_1 = \sqrt{(1 - 0{,}6)} \cdot c_1 = 0{,}632 \cdot c_1$$

$$c_p = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{c_1 + 0{,}632 \cdot c_1}{2} = 0{,}816 \cdot c_1$$

$$A_p = \frac{4{,}5^2 \cdot \pi}{4} = 15{,}9 \quad \left(m^2\right)$$

Ezeket behelyettesítve $8500 = (c_1 - 0{,}632 \cdot c_1) \cdot (0{,}816 \cdot c_1)^2 \cdot \rho \cdot 15{,}9 = 1{,}1 \cdot 15{,}9 \cdot 0{,}245 \cdot c_1^3$
ahonnan a szélsebesség c_1=12,56 *m/s*-ra adódik, c_2=7,94 *m/s* és c_p=10,25 *m/s*.
Végül a szélkerék síkjában ható erő kb. 828 *N*.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/49. feladat megoldása

A mért teljesítményből és az erőből:

$$c_p = \frac{P_ö}{F} = \frac{12000}{1500} = 8 \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

Mivel ez a sebesség a számtani közepe a hajócsavar előtt és mögött nagy távolságban érvényes elméleti sebességeknek, a hajócsavar mögött nagy távolságban a sebesség

$$c_2 = 2 \cdot c_p - c_1 = 2 \cdot 8 - 2{,}5 = 13{,}5 \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

A hajócsavar propellerhatásfoka

$$\eta_p = \frac{F \cdot c_1}{F \cdot c_p} = \frac{c_1}{\frac{c_1 + c_2}{2}} = \frac{2}{1 + \frac{c_2}{c_1}} = \frac{2}{1 + \frac{13{,}5}{2{,}5}} = 0{,}3125$$

azaz kb. 31,2%.

Megjegyzés.
Itt az eddigiektől eltérően a hajócsavar előtti sebességet jelöltük c_1-el!

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/50. feladat megoldása

A szélkerék hatásfokából

$$\eta_p = 0{,}65 = 1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{c_2}{20{,}8}\right)^2$$

A szélkerék mögött nagy távolságban a sebesség elméleti értéke 12,3 *m/s*.

A szélkerék síkjában a sebesség $c_p = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{20{,}8 + 12{,}3}{2} = 16{,}55 \left(\frac{m}{s}\right)$

A szélkerék által szolgáltatott teljesítmény

$$P_h = (c_1 - c_2) \cdot c_p \cdot \rho \cdot A_p \cdot c_p = (20{,}8 - 12{,}3) \cdot 16{,}55 \cdot 1{,}15 \cdot 9{,}08 \cdot 16{,}55 = 24311 \ (W)$$

azaz kb. 24,3 *kW*.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/51. feladat megoldása

A keletkező nyomáslökés nagyságának kiszámítására két lehetőség kínálkozik: vagy az impulzus-tételt alkalmazzuk vagy a folyadék és a csőfal rugalmasságára vonatkozó szilárdságtani összefüggésekből indulunk ki.

Amennyiben az impulzus-tétel alkalmazzuk egy '*l*' hosszúságú folyadékoszlopot körülfogó, az eredeti '*v*' sebességgel áramló folyadékkal szemben a nyomáslökés '*c*' terjedési sebességével (a hang terjedési sebessége) mozgó ellenőrző felületre, akkor a keletkező nyomáslökést eredményező erőkülönbség

$$-A \cdot \rho \cdot v \cdot [((c + v) - c) + c] = -\Delta p \cdot A \, .$$

Az egyszerűsítések után, figyelembe véve, hogy a szokásos áramlási sebességek (v) a csővezetékekben általában két-három nagyságrenddel kisebbek, mint a nyomáslökés terjedési sebessége (c)

$$\Delta p \approx \rho \cdot v \cdot c$$

Ennek az összefüggésnek az alkalmazásához ismernünk kell a nyomáslökés terjedési sebességét (c), ami a hang terjedési sebessége a folyadékban és itt most nem ismert.

Ha a folyadék és a csőfal rugalmasságából indulunk ki, akkor a következő gondolatmenet szerint járhatunk el.
Ha figyelmen kívül hagynánk a folyadék és a cső rugalmasságát, akkor a végtelen rövid idő alatt történő elzárás végtelen nagy nyomásemelkedést eredményezne, ahhoz hasonlóan, ahogy az

állandó sebességgel haladó szilárd test végtelen rövid idő alatt történő megállításához végtelen nagy erő lenne szükséges.

A folyadék rugalmassága következtében egy '*l*' hosszúságú folyadékoszlop $\Delta l_1 = \frac{\Delta p}{E_{H_2O}} \cdot l$ rövidülést szenved el a rugalmasságra vonatkozó Hook-törvény szerint. Ezen közben a csőfal rugalmassága miatt annak eredeti '*d*' átmérője a keletkező nyomásemelkedés hatására némileg megnő, $\frac{\Delta d_b}{d_b} = \frac{\Delta\sigma}{E_{ac}}$. Felhasználva, hogy a csövekre vonatkozó szilárdságtani összefüggések szerint $\Delta\sigma = \frac{\Delta p \cdot d_b}{2 \cdot s}$, továbbá feltételezve, hogy a csőfal rugalmassága miatt történő átmérőváltozás és az ennek következtében előálló rövidülés relatív értéke azonos, azaz $\frac{\Delta l_2}{l} = \frac{2 \cdot \Delta d_b}{d_b}$, a három összefüggésből $\Delta l_2 = \frac{\Delta p}{E_{ac}} \cdot \frac{d_b}{s} \cdot l$.

Végezetül a folyadékoszlop relatív rövidülése és a keletkező nyomásemelkedés között az alábbi összefüggéshez juthatunk.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{l} = \Delta p \cdot \left(\frac{1}{E_{H_2O}} + \frac{1}{E_{ac}} \cdot \frac{d_b}{s} \right)$$

Most tételezzük fel, hogy az eredeti '*v*' sebességgel haladó folyadék az '*l*' hosszúságú utat körülbelül ugyanannyi idő alatt teszi meg, mint a vele szemben '*c*' sebességgel, rá vonatkoztatva tehát '*c+v*' sebességgel haladó nyomáslökés a '*Δl*' hosszúságú utat, tehát: $\frac{v}{v+c} \approx \frac{\Delta l}{l}$

A szokásos áramlási sebességek a csővezetékekben általában két-három nagyságrenddel kisebbek, mint a nyomáslökés terjedési sebessége, ezért $\frac{v}{c} \approx \frac{\Delta l}{l}$.

A keletkező nyomáslökés nagysága tehát

$$\Delta p = \frac{1}{\left(\frac{1}{E_{H_2O}} + \frac{1}{E_{ac}} \cdot \frac{d_b}{s} \right)} \cdot \frac{v}{c}$$

Igaz, hogy ebben az összefüggésben is szerepel a nyomáslökés terjedési sebessége, de a korábban az impulzus-tételből kapott összefüggéssel egybe vetve lehetőség van ennek a sebességnek a kiküszöbölésére: $\Delta p = \frac{1}{\left(\frac{1}{E_{H_2O}} + \frac{1}{E_{ac}} \cdot \frac{d_b}{s} \right)} \cdot \frac{v}{\left(\frac{\Delta p}{\rho \cdot v} \right)}$, tehát

$$\Delta p = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{E_{H_2O}} + \frac{1}{E_{ac}} \cdot \frac{d_b}{s} \right)} \cdot \rho \cdot v}$$

A zárójelben, a négyzetgyök alatt szereplő törtet a szakirodalomban redukált rugalmassági modulus néven is szokták emlegetni. Mivel a víz és az acél rugalmassági modulusa között két nagyságrend különbség van az acél javára (az acél kevésbé rugalmas, mint a víz!), közelítő számításoknál az acél rugalmasságát sokszor el is hanyagolják.

A behelyettesítés előtt ki kell számítanunk, hogy mekkora az áramlás sebessége:

$$v=\frac{\dot{V}}{\frac{d_b^2\cdot\pi}{4}}=\frac{160\cdot10^{-3}\cdot4}{60\cdot0{,}06^2\pi}=0{,}943\left(\frac{m}{s}\right)$$

Ide behelyettesítve a keresett nyomáslökés nagysága

$$\Delta p=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{E_{H_2O}}+\frac{1}{E_{ac}}\cdot\frac{d_b}{s}\right)}\cdot\rho\cdot v}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{2100\cdot10^6}+\frac{1}{2\cdot10^5\cdot10^6}\cdot\frac{60}{2}\right)}\cdot10^3\cdot0{,}94}=11{,}9\cdot10^5\,(Pa)$$

Ez a nyomás nagyobb a megadott határértéknél, tehát bekövetkezhet a törés, ha zárás ideje túl rövid.
A nyomáslökés teljes nagyságának kialakulása akkor kerülhető el, ha a zárás ideje nagyobb, mint amennyi idő alatt a csővezeték megadott hosszán a nyomáslökés végigfut, majd a végpontról visszaverődve megérkezik a zárás helyéhez. Kiszámítva a nyomáslökés terjedési sebességét

$$c\approx\frac{\Delta p}{\rho\cdot v}=\frac{11{,}9\cdot10^5}{1000\cdot0{,}943}\approx1262\left(\frac{m}{s}\right)$$

tehát a zárási idő legyen nagyobb, mint $\tau=\frac{2\cdot l}{c}=\frac{2\cdot23}{1262}\approx0{,}036\ \text{sec}$

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/52. feladat megoldása

$$A_b=\frac{1^2\cdot\pi}{4}=0{,}7854\left(m^2\right)$$

$$c_1=\frac{\dot{m}}{A\cdot\rho}=\frac{6{,}6\cdot10^6}{0{,}7854\cdot3600\cdot910}=2{,}565\left(\frac{m}{s}\right)$$

A hirtelen záráskor keletkező nyomáslökés

$$\Delta p=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{E_{H_2O}}+\frac{1}{E_{ac}}\cdot\frac{d_b}{s}\right)}\cdot\rho\cdot v}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{1900\cdot10^6}+\frac{1}{2\cdot10^5\cdot10^6}\cdot\frac{1}{4{,}8\cdot10^{-3}}\right)}\cdot910\cdot2{,}565}=19{,}59\cdot10^5\quad(Pa)$$

$$c\approx\frac{\Delta p}{\rho\cdot v}=\frac{19{,}5\cdot10^5}{910\cdot2{,}565}\approx839{,}299\left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\tau=\frac{2\cdot l}{c}=\frac{2\cdot5\cdot10^3}{839{,}299}\approx11{,}9\ \text{sec}$$

Ha a zárás időtartama hosszabb 11,9 másodpercnél, a kiszámítottnál csak kisebb nyomáslökés alakul ki.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/53. feladat megoldása

A hirtelen záráskor keletkező nyomáslökés

$$\Delta p = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{E_{H_2O}} + \frac{1}{E_{ac}} \cdot \frac{d_b}{s}\right)} \cdot \rho} \cdot v = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{2100 \cdot 10^6} + \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} \cdot \frac{3{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-3}}\right)} \cdot 1000} \cdot 3{,}1 = 40{,}83 \cdot 10^5 \ (Pa)$$

$$c \approx \frac{\Delta p}{\rho \cdot v} = \frac{40{,}83 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 3{,}1} \approx 1317{,}38 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\tau = \frac{2 \cdot l}{c} = \frac{38}{1317} \approx 0{,}288 \sec$$

Ha zárás időtartama hosszabb 3 századmásodpercnél, a kiszámítottnál csak kisebb nyomáslökés alakul ki.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

IK/54. feladat megoldása

Ebben az esetben a redukált rugalmassági modulus egyenlő a víz rugalmassági modulusával.

$$\Delta p = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{E_{H_2O}}} \cdot \rho} \cdot = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{2100 \cdot 10^6}\right)} \cdot 1000} = 14{,}49 \cdot 10^5 \ (Pa)$$

$$c \approx \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{14{,}49 \cdot 10^5}{10^3} \approx 1449 \left(\frac{m}{s}\right)$$

Így a nyomáslökés, azaz a hang terjedési sebessége vízben 1449 m/s.

Vissza a feladathoz …

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺